dP_I 方程的准定常解

V.E.Adler*，B.I. Suleimanov†

2026年11月20日

arXiv:2611.27906v1 [nlin.SI] 20 Nov 2026

摘要

我们研究离散 Painlev´e-I 方程（dP_I）的实准定常解，该方程定义了 Volterra 格的一个约化以及 Painlev´e-IV 方程（P_{IV}）的 B¨acklund 变换。研究表明，对于大 $|n|$，准定常渐近行为在解随参数 t 演化时保持不变，该演化由 P_{IV} 控制；反过来，对于大 $|t|$，准定常渐近行为在解随 n 演化时保持不变，该演化由 dP_I控制。因此，可以将这些方程的解视为具有共同的准定常曲面；若渐近行为一致，则可视为具有共同的准定常解。文中给出了精确解和数值解的示例，展示了在（n，t）平面的不同区域中的准定常行为和极点行为。数值结果表明，全局准稳态解存在。本文还构造了一个在准定常曲线各分支之间的过渡区内一致有效的自相似渐近行为，该渐近行为与 Painlev´e-II 方程（P_{II}）的 Hastings–McLeod 型解有关。

关键词：Painlev´e 方程、B¨acklund 变换、Volterra 格、准平稳性、自相似性、渐近行为、内展开。

1 引言

离散 Painlev´e-I 方程（dP_I）

$$u_n(u_{n-1}+u_n+u_{n+1})=2tu_n+\beta_n,\qquad \beta_n=n-b-(-1)^n c \tag{1.1}$$

出现在关于权函数 $|x|^{-2b}e^{-x^4+2tx^2}$ 在实数轴上正交的多项式 $P_n(x)$、 $n\geq 0$ 的研究中。该方程首次出现在 Shohat (1939)[1], 于 $b=c=t=0$ 的论文中。对 $\beta_n=n-(1-(-1)^n)b$ 的推广由 Freud (1976) [2], 引入，参数 t由 Bonan 与 Nevai (1984) [3]引入。在此背景下，该方程仅对 $n\geqslant 0$ 加以考虑（当然，允许对编号作平移），变量u_n 在三项递推关系 $P_{n+1}=xP_n-\frac{1}{2}u_nP_{n-1}$ 中充当系数，并且必须对 $n>0$ 和 $u_0=0$满足条件 $u_n>-0$，由此可得 $c=-b$。结果表明，具有这些性质的 dP_I 恰好存在一个解。对于 $t=0$，这一点由 Lew 与 Quarles (1983) [4] 证明（甚至对更一般的 β_n亦然）；对于 $b=0$，其证明见 [3]；而对于任意的 $b<1/2$ 和 t，其证明见 [5, 6]。具有更一般二次项的方程

*L.D. Landau理论物理研究所，切尔诺戈洛夫卡，俄罗斯联邦。
†数学研究所，乌法联邦研究中心，俄罗斯科学院，车尔尼雪夫斯基街112号，乌法450008，俄罗斯联邦。

在 [7]中进行了研究。20 世纪 90 年代初，$\mathrm{dP_I}$ 在可积方程理论与矩阵模型的框架下被重新发现 [8, 9, 10, 11], 另见论文 [12], ，该文讨论了与正交多项式理论的联系，包括具有更一般权函数的情形，并提供了关于该主题的详尽参考文献。在这些论文中，还建立了与 Painlev´e-IV 方程（$\mathrm{P_{IV}}$）以及等单值形变方法的联系。在此背景下，$\mathrm{dP_I}$ 方程可对所有 n加以考虑，从而取消了限制条件 $c=-b$ 以及对 u_n 的正性条件。正交多项式的三项递推关系被解释为辅助线性问题之一，其中 x 起着谱参数的作用。

这里列出所引文献中的关键公式，供下文使用。所有变量和参数均假定为实数。方程（1.1）定义了一个与 Volterra 格相容的约束

$$u_n' = u_n(u_{n+1} - u_{n-1}), \tag{1.2}$$

其中撇号表示对参数 t 求微分。直接计算即可验证这一点：令 $A_n = u_n(u_{n-1} + u_n + u_{n+1}) - 2tu_n - \beta_n$，则根据（1.2）进行微分可得 $A_n' = u_n(A_{n+1} - A_{n-1})$，由此可知，若所有 $A_n = 0$，则 $A_n' = 0$ 也成立，这意味着该约束得以保持。

注 1. 这些导数

$$\partial_{t_2}(u_n) = u_n(u_{n+1}(u_{n+2} + u_{n+1} + u_n) - u_{n-1}(u_n + u_{n-1} + u_{n-2})),$$
$$\partial_\tau(u_n) = tu_n(u_{n+1} - u_{n-1}) + u_n$$

与（1.2）可交换：$[\partial_t, \partial_{t_2}] = [\partial_t, \partial_\tau] = 0$，也就是说，它们定义了该格的对称性——一个高阶对称性，以及一个对应于尺度变换的经典对称性。任一对称性的驻定方程都是一个不变流形，而方程（1.1）正是由方程 $\partial_{t_2}(u_n) - 2\partial_\tau(u_n) = 0$ 以这种方式得到的（这是所谓离散弦方程的最简单例子）。参数 b和 c 是将该方程除以 u_n后降阶所得的积分常数；它们不依赖于 t 这一点可直接验证。在这一构造中，以高阶对称性（即涉及更多变量$u_{n\pm k}$）替换 ∂_{t_2}，便可得到 $\mathrm{dP_I}$ 方程的无穷层级高阶类似方程，参见例如 [13]。

根据方程（1.1）和（1.2），对于任意 n，这对$(u_n,\ u_{n+1})$ 满足常微分方程组

$$\begin{cases} u_n' = u_n(2u_{n+1} + u_n) - 2tu_n - \beta_n, \\ u_{n+1}' = -u_{n+1}(u_{n+1} + 2u_n) + 2tu_{n+1} + \beta_{n+1}. \end{cases} \tag{1.3}$$

证明（1.1）和（1.2）相容性的另一种方法，是检验该方程组的形式在映射 $(u_{n-1},\ u_n) \leftrightarrow (u_n,\ u_{n+1})$ 下保持不变，这些映射由分别对 u_{n-1} 或 u_{n+1}求解（1.1）得到。消去变量 u_n 或 u_{n+1}，即可将（1.3）化为关于另一变量的 $\mathrm{P_{IV}}$方程（注意，$\mathrm{P_{IV}}$ 的标准形式在 t 的符号以及系数的记法上有所不同）：

$$u'' = \frac{(u')^2}{2u} + \frac{3}{2}u^3 - 4tu^2 + (2t^2 + \alpha)u - \frac{\beta^2}{2u} \tag{1.4}$$

方程中的参数值由 u_n 给出

$$\beta_n = n - b - (-1)^n c, \qquad \alpha_n = 2\beta_{n+1} - \beta_n - 2 = n - b + 3(-1)^n c. \tag{1.5}$$

方程组（1.3）等价于彼此互逆的B¨acklund 变换 B，以及 B^{-1} 作用于 P 的解和参数$_{\rm IV}$，其公式为

$$B^{\pm1}:\ \alpha_{n\pm1}=\frac{3\beta_n-\alpha_n}{2}\pm1,\quad \beta_{n\pm1}=\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}\pm1,\quad u_{n\pm1}=\frac{\pm u_n'-u_n^2+2tu_n+\beta_n}{2u_n}. \tag{1.6}$$

因此，dP$_{\rm I}$ 的解关于参数 t 的演化由P$_{\rm IV}$方程描述；反之，dP$_{\rm I}$ 定义了作用于P$_{\rm IV}$的解上的一个变换序列。

注记 2. B¨acklund变换对于P$_{\rm IV}$ 由Lukashevich（1967年）发现 [14], ，另见著作 [15], ，其中包含详细的参考文献。我们将只使用变换（1.6），但值得指出，B¨acklund变换的完整群对于P$_{\rm IV}$ 方程更大。这与如下事实有关：参数 β 在（1.4）中仅确定到相差一个符号。作为该群的生成元，可以取变换

$$R:(\alpha,\beta,u)\mapsto(\alpha,-\beta,u),\qquad S:(\alpha,\beta,u)\mapsto\left(\frac{3\beta-\alpha}{2}+1,-\frac{\alpha+\beta}{2}-1,\frac{u'-u^2+2tu+\beta}{2u}\right),$$

满足如下恒等式

$$R^2=S^3=(SRSRS)^3=\mathrm{id},$$

并且对于P$_{\rm IV}$ 的一般解，不存在其他独立的恒等式。由变换 S 生成的解满足三周期 dressing 链 [16, 17]。尽管变换R 本身是平凡的，但借助它可以生成P$_{\rm IV}$ 解的二维格子（更确切地说，是笼目格子，参见例如 [18]），而变换 $B=RS$ 和 $B^{-1}=S^2R$仅生成一维的解序列。

如前所述，从正交多项式理论的角度来看，我们感兴趣的并非 dP$_{\rm I}$的所有解，而仅是满足终止条件 $u_0=0$的那些解；该条件将方程组（1.3）化为关于 u_1 的 Riccati 方程，并在线性化后化为 Hermite 方程。B¨acklund 变换生成了 P$_{\rm IV}$的一系列特殊解，这些解已在许多论文中得到详细研究；这里仅提及 [19, 20, 21, 18]。因此，dP$_{\rm I}$ 和 P$_{\rm IV}$ 相应的公共解可用参数 t的经典特殊函数表示，这最终使我们能够通过推导出变量 u_1的精确公式，有效地筛选出满足正性条件的唯一解。该解还由其渐近行为 $u_n\sim\sqrt{n/3}$ （当 $n\to\infty$时）刻画，这一点早在 [4], 中便已证明；另请参见论文 [22], ，该文研究了正交多项式本身的渐近行为；以及 [23, 24], ，该文在黎曼–希尔伯特方法的框架下研究了解的渐近行为。

本文研究通过去掉零终止条件而得到的这一特殊 dP$_{\rm I}$–P$_{\rm IV}$ 解的推广。我们的方法以当 $n\to\pm\infty$时的平方根渐近为出发点。我们展示了数值实验的结果，这些结果表明，至少对于 $t>0$ 以及较小的 c值，这类解是存在的。此外，正性性质以如下形式成立：当 $n>0$ 时，解为正；当 $n\leqslant0$ 时，解的符号交替（从方程（1.1）本身很容易看出，当 $n\to-\infty$时，解不可能恒为同一符号）。由于这类解具有超越性，要严格证明它们的存在，可能比零终止的情形更困难；这仍是一个未解决问题。除数值计算外，我们还对 n 和 t中的形式渐近展开进行了相当详细的研究，并检验了它们的一致性。

下面简要介绍本文的内容。在第2节中，dP$_{\rm I}$ 和 P$_{\rm IV}$ 方程的准定常曲线被定义为相应的

冻结自变量下的自治方程（n 或 t）的平衡点轨迹。类似的思想曾在[25]中得到考虑。准定常解被定义为与这些曲线渐近接近的解，由此得到前述的平方根渐近。一个重要事实是，$\mathrm{dP_I}$ 和 $\mathrm{P_{IV}}$ 方程具有相容性，因此还可以定义它们的公共准定常曲面。一个颇具吸引力的设想是，由其中一个方程支配的演化应当保持另一个方程解的准平稳性。我们在形式渐近的层面验证了这一性质。在第 3节中，我们分析了 $\mathrm{P_{IV}}$ 的准定常解的渐近展开，并表明由于 dP n 的平移，其结构得以保持；反之，在第 8 节中，我们表明 $\mathrm{dP_I}$ 的渐近展开在由于 $\mathrm{P}t$ 产生的演化下得以保持$_{\mathrm{IV}}$。因此，这些章节的结果支持了 $\mathrm{dP_I}$ 和 $\mathrm{P_{IV}}$存在公共准定常解的可能性。第 4 节介绍了用于构造准定常解的边值问题和差分格式。

准定常性也可以从更广泛的意义上理解，即在某个有限区间上接近准定常曲线。当然，存在大量这样的解；一些简单例子在第5节中给出。第6 节专门讨论零终止情形；我们给出关于 $n > 0$ 的已知结果，以及可能关于 $n < 0$的新结果。在第7节中，我们回到主要目标：构造全局正则解。其存在的必要条件是通过对第3节中的渐近级数进行分析而得出的；此外，我们给出数值实验结果，以支持这些条件也是充分的这一猜想。

第9节包含另一类渐近级数，它考虑了解的自相似结构，适用于取值 $c < 1/2$；这使得研究准平稳曲线各分支之间过渡区域中的行为成为可能。此类自相似渐近行为的首项由 Painlev´e-II 方程（$\mathrm{P_{II}}$）的特殊 Hastings–McLeod 型解描述。这在一定程度上推广了 Bleher 和 Its（2003）的结果[24]。

2 准平稳曲线与曲面

2.1 基本定义

考虑一个系数缓慢变化的非自治常微分方程。其准定常曲线定义为冻结自变量时自治方程的平衡点轨迹。例如，对于 $\mathrm{P_I}$ 方程

$$y'' = 6y^2 + x \tag{2.1}$$

需要转化为自治方程 $d^2y/d\xi^2 = 6y^2+x$，该方程以 x 为参数；该方程的平衡点构成抛物线 $6y^2 + x = 0$，它充当准定常曲线。一般解（见图1上图）与这条抛物线相距甚远。对于 $x > 0$，准定常曲线未定义，在此区域内所有解都会产生极点。对于 $x < 0$，抛物线的下分支 $y = -\sqrt{-x}/6$是稳定的，因为沿此分支，线性化方程 $Y'' = 12yY$具有纯虚特征值。因此，对于一定范围的初始数据，解会在这一背景上表现出振荡行为。上支不稳定，解趋向于离开上支，进入极点区制，或转入沿下分支振荡的区制。同时，还存在图1下图所示的特殊解。无振荡地趋近抛物线下分支的解是

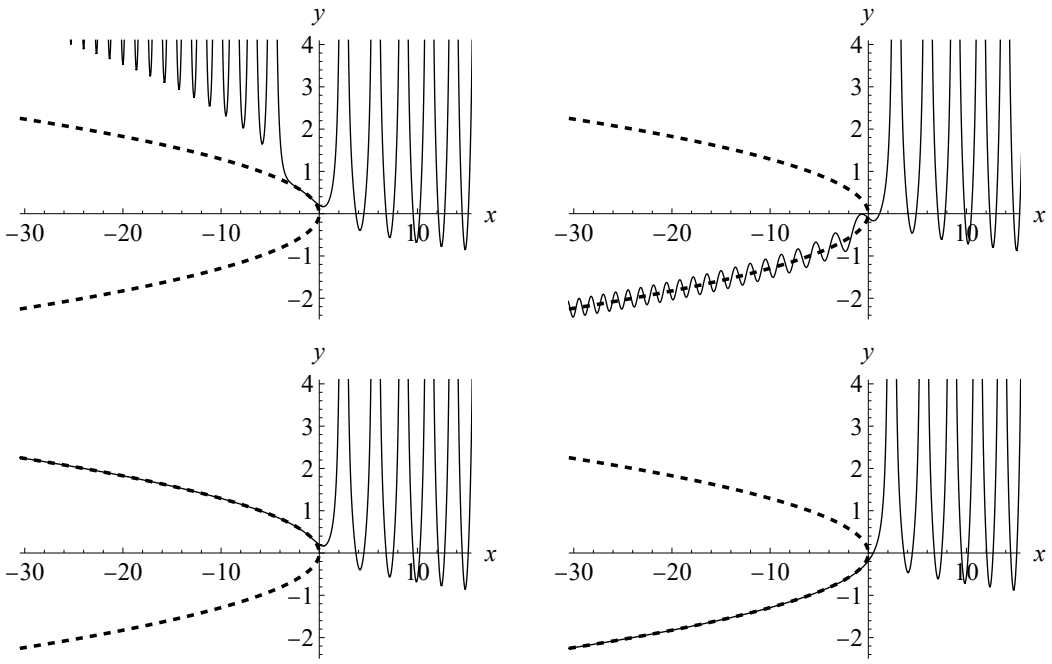

图 1。 P_I的解。

著名的 tritronquée 解，且该解唯一。趋近上支的解构成一个不稳定的单参数族。一般而言，渐近趋近准定常曲线某一分支的解称为准稳态解。另一个例子是，在第9 节中，我们将考察 Hastings–McLeod 型 P_{II} 方程的解；对于这类解，准定常曲线决定了自变量趋于无穷大时渐近展开的首项。

德　　义与此类似。考虑如下形式的方程

$$P_n(u_{n-1}, u_n, u_{n+1}) = 0,$$

其中左端显式依赖于 n （例如以多项式形式）。假设这种依赖在某种意义下可以视为缓慢变化的，我们将此方程替换为自治方程，同时保留对 n 的依赖，并将其作为参数:

$$P_n(u_{k-1}, u_k, u_{k+1}) = 0.$$

在此背景下，变量 n 可以视为任意实数，而非整数。相应映射（或可能的多值对应）的不动点

$$T_n : (u_{k-1}, u_k) \mapsto (u_k, u_{k+1})$$

定义为方程 $\Phi_n(u) = P_n(u, u, u) = 0$ 的解，该方程定义了准定常曲线。与连续情形的一个重要区别在于，对于差分方程，除了映射 T_n 本身的幂 T_n^m 的不动点，也就是 T_n 的 m 周期轨道之外，自然还要考虑这些不动点。如果 d是 m 的因子，那么可以舍弃 d 周期轨道。由此定义了更高次数的准定常曲线。这些渐近接近这些曲线某些分支的解称为准稳态解。

2.2 $\mathrm{dP_I}$ 方程

由于振荡项$_{\mathrm{I}}$ (1.1) 的存在，该定义并不直接适用于 dP 的一般形式$(-1)^n c$，因为该项不能视为缓慢变化。为简单起见，我们先考虑满足 $c = 0$ 的方程：

$$u_n(u_{n-1} + u_n + u_{n+1}) - 2tu_n - \nu = 0, \qquad \nu := n - b. \tag{2.2}$$

对该方程，一次准定常曲线是抛物线

$$C_1 : \quad 3u^2 - 2tu - \nu = 0 \tag{2.3}$$

（这让人想起 $\mathrm{P_I}$ 的例子；不过应当马上指出，与 $\mathrm{P_I}$ 方程的相似之处相当有限）。准定常解必须在 $n \to +\infty$ 的意义下接近这条抛物线的上支或下支：不难验证，不存在交替趋近这两条分支的解。因此，这里可能有两类准定常解˜；但是，由于 $\mathrm{dP_I}$ 在变换 $\tilde{u}_n = -u_n$, $t = -t$ 下保持不变，以下不失一般性地只考虑趋近上支的解。

为求映射 T_n^2 的不动点，写出两个相邻点处的自治方程，并令 $u_{k+2} = u_k = u$ 和 $u_{k-1} = u_{k+1} = v$:

$$u(2v + u) - 2tu - \nu = 0, \qquad v(2u + v) - 2tv - \nu = 0.$$

消去 v 后得到方程

$$(3u^2 - 2tu - \nu)(u^2 - 2tu + \nu) = 0. \tag{2.4}$$

第一个因子对应于映射 T_n 本身的不动点，这些点我们已经求出。令第二个因子等于零，得到抛物线

$$C_2 : \quad u^2 - 2tu + \nu = 0, \tag{2.5}$$

它对应于周期为2的点。容易验证，与抛物线C_1不同，若解接近 C_2，当 $n \to -\infty$时，其序列各项必定交替趋于上、下分支。因此，此时也可能出现两种类型的准定常解，具体取决于偶数项对应的变量趋向哪个分支。图2.3和2.5中的两条曲线见图2。注意，它们交于 $\nu = 0$、 $u = 0$ 和 $\nu = t^2$、 $u = t$这两点；后者与抛物线 C_2的顶点重合。

二次准定常曲线的推导很容易推广到参数 c取任意值时的方程情形。为此，需要考虑在偶数点和奇数点处分别由不同公式定义的自治映射：

$$\begin{aligned} T_n^+ &: \quad u_k(u_{k-1} + u_k + u_{k+1}) - 2tu_k - \nu + c = 0, \quad \text{if } k \text{ is even}, \\ T_n^- &: \quad u_k(u_{k-1} + u_k + u_{k+1}) - 2tu_k - \nu - c = 0, \quad \text{if } k \text{ is odd}. \end{aligned}$$

求复合映射 $T_n^+ T_n^-$ 的不动点，归结为求解方程组

$$u(2v + u) - 2tu - \nu + c = 0, \qquad v(2u + v) - 2tv - \nu - c = 0,$$

其中， u 和 v 分别对应于 k的偶数值和奇数值。消去其中一个变量，可得到关于另一个变量的代数方程。因此，我们得到两条曲线的方程，它们仅在 c的符号上有所不同：

$$C_2^{\pm} : \quad 3u^4 - 8tu^3 + 2(2t^2 + \nu \pm 3c)u^2 - (\nu \mp c)^2 = 0, \tag{2.6}$$

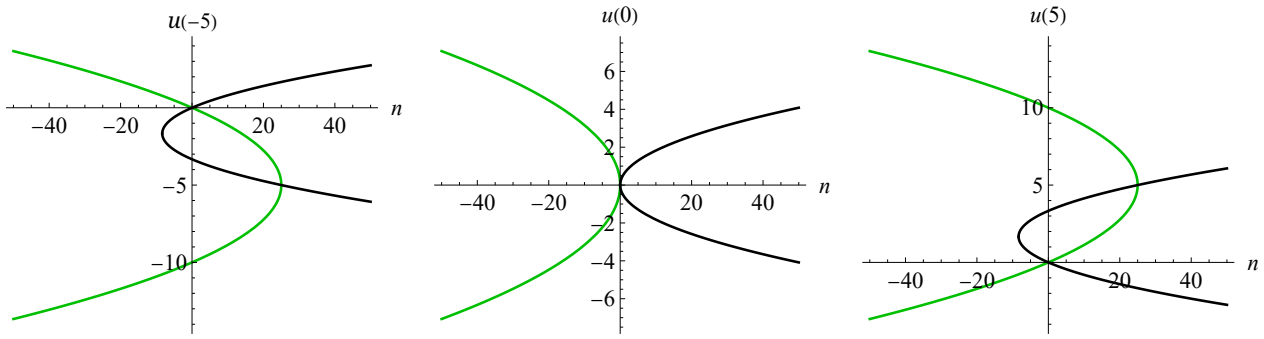

图2. $\mathrm{dP_I}$ 在 $b=c=0$处、 t取不同值时的准平稳曲线（黑线： C_1，绿线： C_2）。

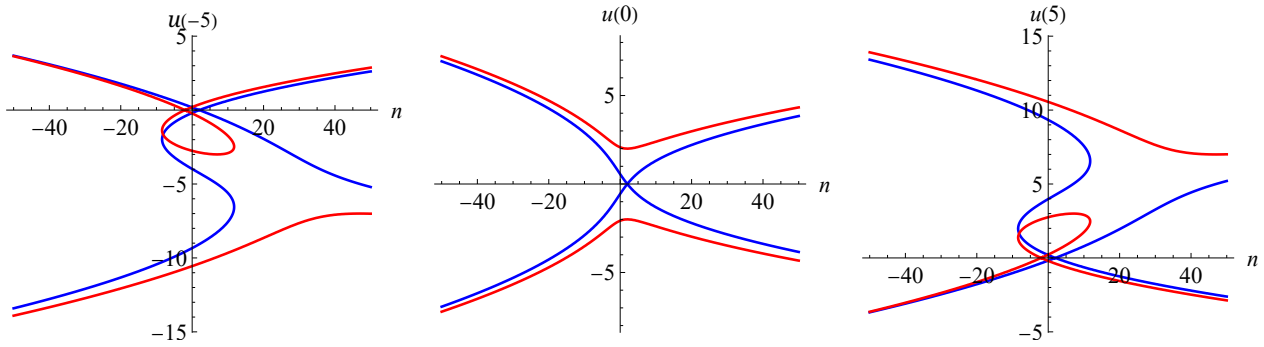

图3. $\mathrm{dP_I}$ 在 $b=0$ 和 $c=1$处、 t取不同值时的准平稳曲线（蓝线： C_2^+，红线： C_2^-）。

其中，C_2^+ 对应于 n 的偶数值，而 C_2^- 对应于奇数值。当 $c=0$这些曲线合并时，(2.6) 的左端因式分解，我们便回到方程 (2.4)。因此，引入参数 c 使抛物线 C_1 和 C_2 的并分裂为另外两条曲线。图 3 显示，这两条曲线在原点附近呈现出更为复杂的变化，但当 n 较大时，它们渐近于同一组抛物线。

$\mathrm{dP_I}$不存在更高次数的准平稳曲线。我们仅考虑映射 T_n^3和 $(T_n^+T_n^-)^2$,的不动点，但可以证明，接下来的幂也不会带来任何新内容。在 $c=0$处， T_n 的周期3轨道由以下方程组描述

$$u_1(u_3+u_1+u_2) = 2tu_1+\nu, \quad u_2(u_1+u_2+u_3) = 2tu_2+\nu, \quad u_3(u_2+u_3+u_1) = 2tu_3+\nu,$$

由此可得 $u_1=u_2=u_3=\nu/(u_1+u_2+u_3-2t)$。由于三个变量都相等，该解仅由 T_n 本身的不动点构成，而我们已经考虑过这些不动点；因此舍弃此解。相反，4周期轨道过多，无法为其指定一条确定的曲线。在这种情况下，我们有如下方程组（ c 任意）

$$\begin{aligned} u_1(u_4+u_1+u_2) &= 2tu_1+\nu+c, \qquad u_2(u_1+u_2+u_3) = 2tu_2+\nu-c, \\ u_3(u_2+u_3+u_4) &= 2tu_3+\nu+c, \qquad u_4(u_3+u_4+u_1) = 2tu_4+\nu-c. \end{aligned}$$

将第一个方程从第三个方程中减去，再将第二个方程从第四个方程中减去，我们得到

$$(u_1-u_3)(u_1+u_2+u_3+u_4-2t) = 0, \qquad (u_2-u_4)(u_1+u_2+u_3+u_4-2t) = 0.$$

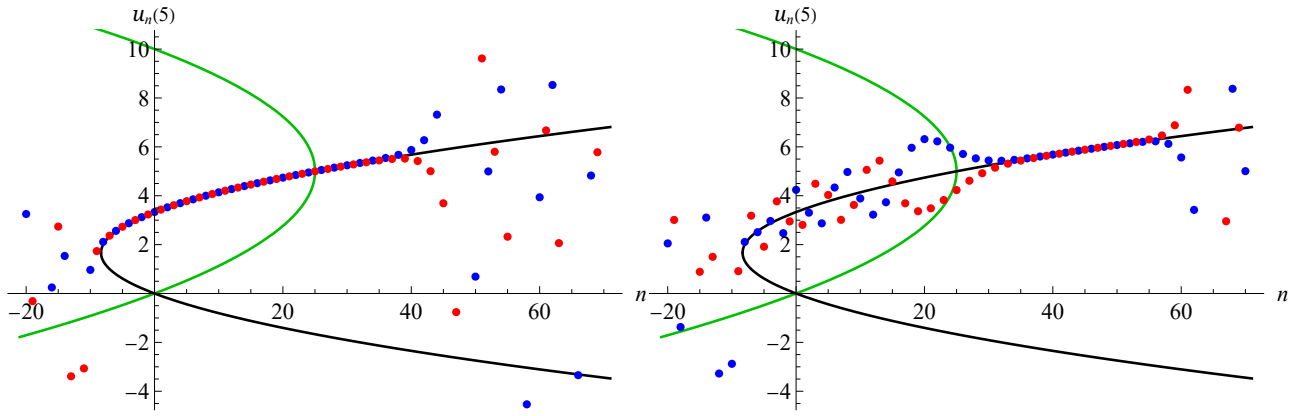

图4。 dP$_{\mathrm{I}}$($b=c=0,\ t=5$)在曲线 C_1 at $n_0=20$ （左）和$n_0=45$ （右）上的初始数据所对应的解。

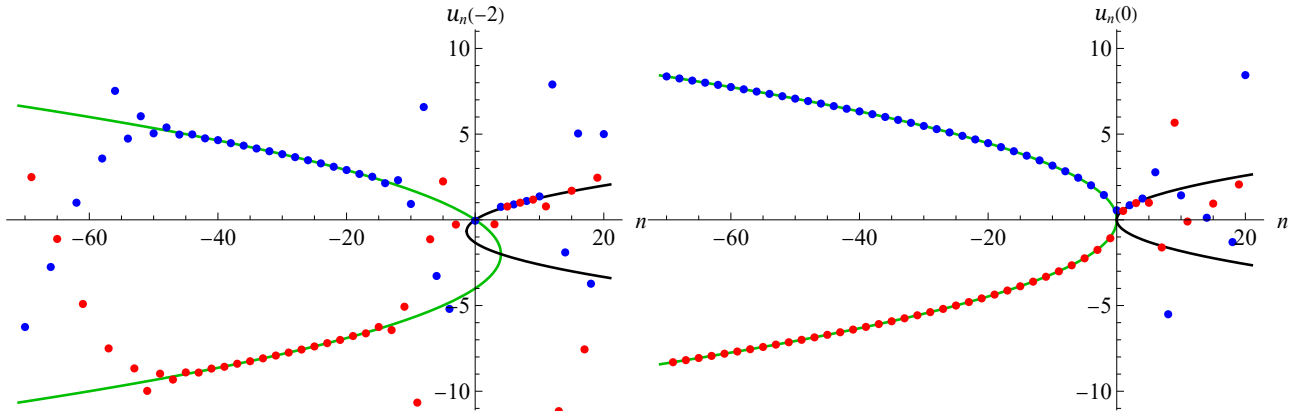

图5。 dP$_{\mathrm{I}}$($b=c=0$)在曲线 C_2 at $n_0=-30$上的初始数据所对应的解， $t=-2$ （左）和 $t=0$ （右）。

若 $u_1+u_2+u_3+u_4\neq 2t$，则有 $u_1=u_3, u_2=u_4$，由此得到已考虑在内的二周期解。否则，得到欠定方程组

$$u_1u_3+\nu+c=0,\qquad u_2u_4+\nu-c=0,\qquad u_1+u_2+u_3+u_4=2t.$$

这与数值实验一致，数值实验表明，在一般解中，变量u_n 在编号取模4后位于各自独立的曲线上，这些曲线形成特征准周期结构。然而，与曲线 C_1、 C_2 和 $C_2^{\pm}$不同，这些曲线的形状和位置不仅取决于参数 b,c,t，还取决于初始数据。

因此，我们将 dP 的准稳态解$_{\mathrm{I}}$ 定义为：当 n较大时渐近接近曲线（2.6）的解。尽管这类解较为特殊，隐匿于一般解之中，却相当“友好”：只需在 n_0， n_0+1取恰好位于这条曲线上的初始数据，并求解柯西问题，就能轻松得到在一个小区间内接近准定常曲线的解。为清晰起见，我们暂且只考虑 $c=0$的情形。当初始数据取在抛物线 C_1的上支上时，对于 $t<0$，准定常行为的区间仅包含约 10 个点；但随着 $t>0$ 增大且 n_0不过大，该区间会变长，见图4 （在这些图及后续图中，偶数编号和奇数编号的点分别用蓝色和红色表示）

。从定性上说，这可以通过考察线性化方程（1.1）来解释。

$$U_{n-1} + q_n U_n + U_{n+1} = 0, \qquad q_n := 1 + \nu/u_n^2.$$

对于 $q_n^2 < 4$，它是稳定的；这对于 $\nu > 0$ 等价于不等式 $\nu < u_n^2$。设 u_n 的取值对应于 C_1 的上支；那么，对于 $t < 0$，该条件始终不成立，而对于 $t > 0$，它选出位于抛物线 C_1 与 C_2 的交点左侧的部分 $\nu < t^2$ 。在该交点右侧，解逐渐失去稳定性，这与我们在所给图中观察到的情况完全一致。尽管如此，通过更谨慎地选择初始数据，或改为求解边值问题而非柯西问题，可以使准稳态区间无限延长。

初始数据取在抛物线 C_2 上的例子见图 5。在这种情况下，我们观察到更长的准稳态区间。当 $t = 0$时，解沿着 C_2 一直延伸到无穷远处。此外可以注意到，当解延拓到正的n时，抛物线 C_1 上会出乎意料地出现一个较短的准稳态区间，尽管这只发生在参数 b 取整数值时（稍后将解释，只有当某个参数 β_n 为零时，渐近行为类型之间才可能发生切换；当 $c = 0$时，这恰好意味着 b 为整数）。由此可以猜想，可能存在在整个实轴 n上均呈准稳态的解，也就是说，它们渐近地接近两条抛物线，并在原点附近存在某个过渡区。

2.3 拟定常曲面

准定常解对参数 t 的依赖关系，可以通过研究 $\mathrm{dP_I}$ 与 $\mathrm{P_{IV}}$ 方程（1.4）的相容性来方便地考察，该方程定义了关于 t的微分。去掉其中含有导数的项后，得到方程

$$3u^4 - 8tu^3 + 2(2t^2 + \alpha)u^2 - \beta^2 = 0, \tag{2.7}$$

它恰好与曲线（2.6）的方程一致；考虑到参数的公式（1.5），即 $\alpha = \nu + 3c$， $\beta = \nu - c$当 n 为偶数时（曲线 C_2^+），而 $\alpha = \nu - 3c$，$\beta = \nu + c$当 n 为奇数时（曲线C_2^-）。这意味着，$\mathrm{P_{IV}}$ 的准定常曲线由与 $\mathrm{dP_I}$相同的方程给出，但现在我们用这些方程来定义在固定的 t 下对n的依赖关系。特殊情况下 $c = 0$ （即 $\alpha = \beta = \nu$时），$\mathrm{P_{IV}}$ 方程具有如下形式

$$2uu'' - (u')^2 = (3u^2 - 2tu - \nu)(u^2 - 2tu + \nu), \tag{2.8}$$

由此得到方程（2.3）、（2.5），现在将它们解释为双曲线方程，而非抛物线方程。图中展示了 $c = 0$ 和 $c \neq 0$ 对应的曲线，分别见图 6 和图 7。两种情况下使用的颜色均与图 2和3中的相同。

因此，方程（2.4）或（2.6）可以解释为准定常曲面 $u = u(n, t)$ 的方程，而不是曲线的方程；该曲面是 $\mathrm{dP_I}$ 和 $\mathrm{P_{IV}}$ 所共有的，见图 8 和图 9。在固定 t 下的截面构成 $\mathrm{dP_I}$ 的准平稳曲线，而在固定 n 下的截面构成 $\mathrm{P_{IV}}$ 的准平稳曲线。自然会产生这样一个问题：是否存在 $\mathrm{dP_I}$ 和 $\mathrm{P_{IV}}$ 的公共准定常解，即同时满足这两个方程的函数 $u_n(t)$，并分别为它们定义准定常解。其必要条件是，在 t 的演化下保持 n 中的准定常渐近行为，反之亦然。我们将在第 3 节和第 8 节中验证这一性质。

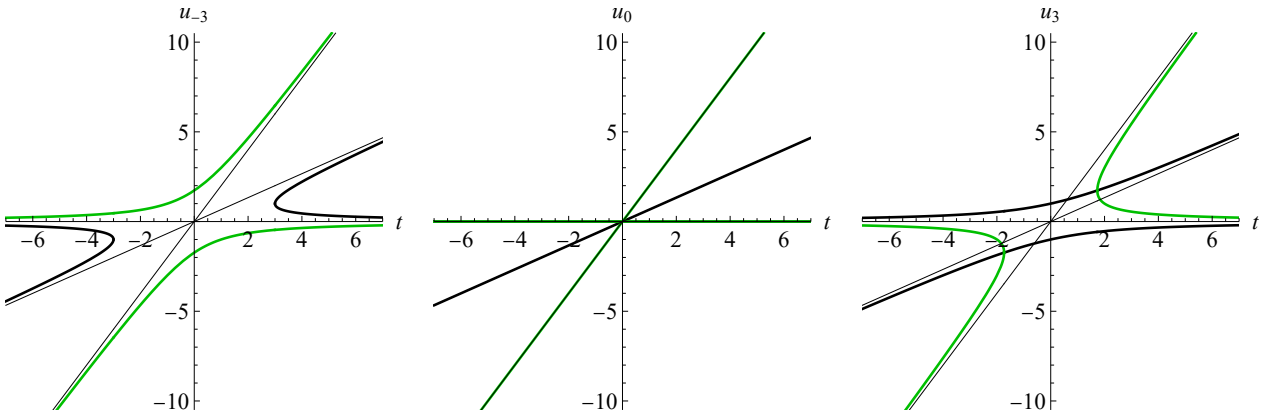

图6. P_{IV} 在 $c = 0$处的准平稳曲线，对应不同的 $\nu = n - b$取值（黑线： C_1，绿线： C_2）。

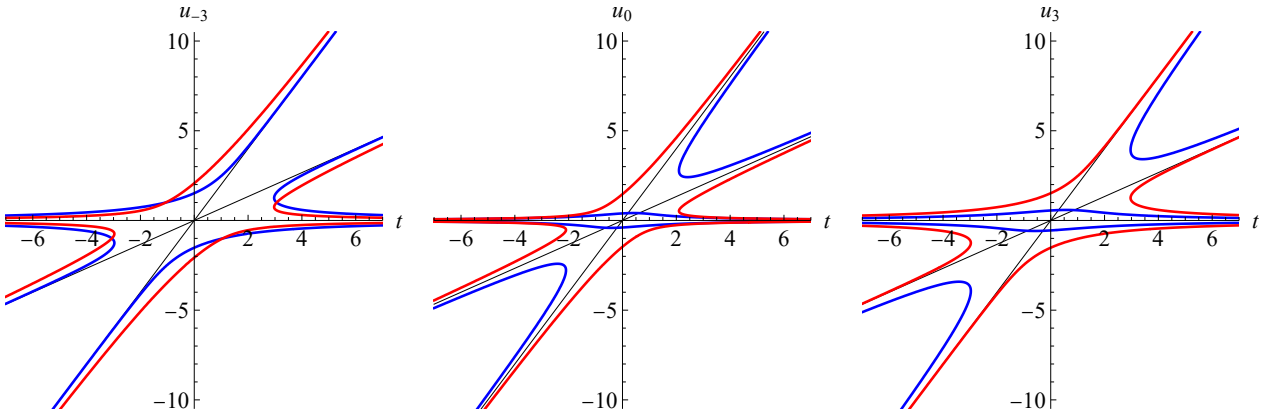

图7. P_{IV} 在 $c = 1$处的准平稳曲线，对应不同的 $\nu = n - b$取值（蓝线： C_2^+，红线： C_2^-）。

注 3： 变换 $u = U + 2t/3$ 将（2.7）化为燕尾型标准突变方程

$$U^4 + X_1U^2 + X_2U + X_3 = 0$$

具有三个控制参数

$$X_1 = \frac{2\alpha - 4t^2}{3}, \quad X_2 = \frac{8(3\alpha - 2t^2)t}{27}, \quad X_3 = \frac{8\alpha t^2 - 9\beta^2}{27}.$$

注4。在所研究的问题中，坐标 n是离散的，而 t 是连续的。这是二阶标准 Painlev´e 方程的典型特征，其参数对附加变量的依赖关系由离散的 B¨acklund 变换描述（除平凡的缩放外）。然而，对于高阶 Painlev´e 方程，两个坐标均为连续变量的情形完全可能。例如，文献 [26] 研究了 P_I 方程的一个四阶类比，它依赖于参数 t，且关于该参数的微分由 KdV 方程控制。许多已知的四阶 Painlev´e 型方程中都存在类似的参数，它们允许连续而非离散的变形，例如文献 [27]中的方程。两个坐标均为离散变量的情形也有可能。

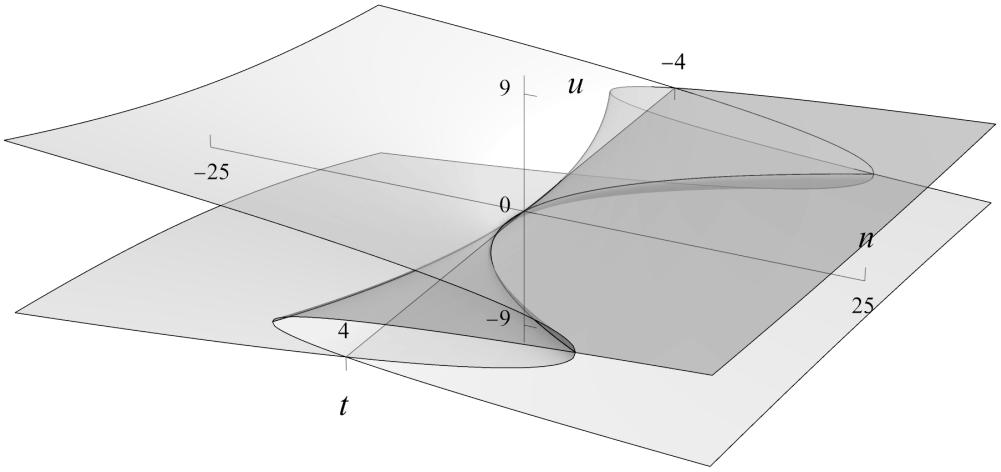

图 8。 $\mathrm{dP_I}$ 和 $\mathrm{P_{IV}}$ 在 $c = 0$ 情况下的共同准定常曲面。

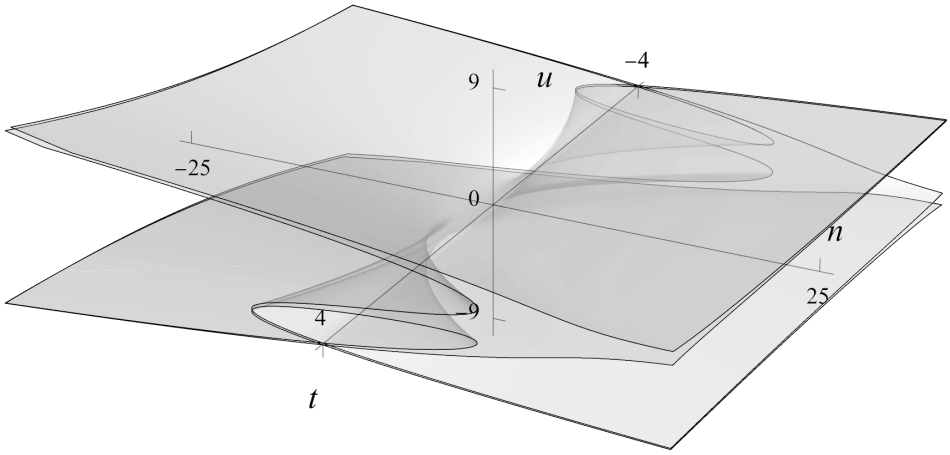

图 9。 $\mathrm{dP_I}$ 和 $\mathrm{P_{IV}}$ 在 $c = 1/2$ 处的共同准定常曲面。

注5。在 $c = 0$，图2 和6 中的准稳态曲线对于任意 $t \neq 0$ 或 $\nu \neq 0$，在适当缩放后形状相同。事实上，转化为自相似变量

$$u_n = tu(x), \qquad x = \nu/t^2 \tag{2.9}$$

将曲线（2.4）化为固定的无参数形式：

$$(3u^2 - 2u - x)(u^2 - 2u + x) = 0. \tag{2.10}$$

对于 $c \neq 0$，缩放曲线（2.6）渐近地趋于（2.10），当 t 较大时。在第 9 节中，我们采用接近（2.9）的变量变换来描述抛物线之间过渡区域中准定常解的渐近行为，从而推广了 [24] 与 [28] 中的一些结果。

3 固定 t 时关于 n的渐近行为

设 $u_n(t)$ 为 $\mathrm{dP_I}$ 与 $\mathrm{P_{IV}}$ 的公共解。若在 n 固定时，当 $t \to +\infty$ 或 $t \to -\infty$，它趋于准定常曲线的某一支，则它必然具有幂型渐近展开

$$u \sim t(p_0 + p_1/t + p_2/t^2 + \dots) \tag{3.1}$$

系数为常数（一般解并非如此，因为系数可能是振荡函数，或者解可能有无限多个极点）。$t \to +\infty$和 $t \to -\infty$ 的级数通常可能不同，但目前我们不指定考虑的是哪个极限。形式解3.1所示的形式可以相当直接地构造出来。将其代入 $\mathrm{P_{IV}}$ 方程1.4，并令 t^4 的系数为零，我们得到

$$p_0^2(p_0 - 2)(3p_0 - 2) = 0,$$

这给出了 p_0的三个可能取值。对于这三种情况，在 t 的接下来两阶中，我们得到等式 $p_1 = 0$ 以及 p_2的表达式；此外，对于 $p_0 = 0$ ， $p_2 = \pm\beta/2$ 有两个可能值。考虑到在$p_0 = \beta = 0$的情况下，整个级数等于 0（这一点通过追踪其代入方程后的首项即可轻松证明），所有后续系数都唯一确定。因此，我们得到级数

$$A(\alpha,\beta;t) = 2t - \frac{\alpha}{2t} - \frac{3\alpha^2 - \beta^2 + 4}{16t^3} - \frac{\alpha(9\alpha^2 - 5\beta^2 + 44)}{64t^5} + \dots, \tag{3.2}$$

$$B(\alpha,\beta;t) = \frac{2}{3}t + \frac{\alpha}{2t} + \frac{3\alpha^2 - 9\beta^2 + 4}{16t^3} + \frac{3\alpha(3\alpha^2 + 9\beta^2 - 28)}{64t^5} + \dots, \tag{3.3}$$

$$C(\alpha,\beta;t) = \frac{\beta}{2t} - \frac{\beta(\alpha - 2\beta)}{8t^3} + \frac{\beta(3\alpha^2 - 16\alpha\beta + 17\beta^2 + 12)}{64t^5} + \dots, \tag{3.4}$$

$$D(\alpha,\beta;t) = -\frac{\beta}{2t} + \frac{\beta(\alpha + 2\beta)}{8t^3} - \frac{\beta(3\alpha^2 + 16\alpha\beta + 17\beta^2 + 12)}{64t^5} + \dots. \tag{3.5}$$

注意到，除对应于 $\mathrm{P_{IV}}$ 的有理解的情形外，这些级数都发散；这类有理解仅对参数 α， β 的一个离散集存在。事实上，如果某个级数收敛到关于 t 的某个函数，那么 $t = \infty$ 是一个极点或正则点，而所有其他奇点都位于复平面的某个有界区域内。然而，已知 $\mathrm{P_{IV}}$ 的一般解是亚纯的，因此这类奇点的数量只能是有限的，由此可知该函数是有理函数。尽管存在发散现象，所构造的形式级数仍然作为我们所关注的那类解的渐近展开而具有重要意义。我们注意到这些级数具有以下性质。

命题 1。 所有找到的级数都满足恒等式

$$P(\alpha,\beta;-t) = -P(\alpha,\beta;t), \qquad P(-\alpha,-\beta;t) = -iP(\alpha,\beta;it)$$

（其中第一个恒等式意味着这些级数只包含 t 的奇幂）。级数A 和 B 的系数只包含 β的偶幂，而级数 C 和 D 仅因 β 的符号改变而不同，并且在 $\beta = 0$ 时恒等于零。

证明。 方程（1.4）在变换 $u\,(t) \to -u\,(-t)$ 以及 $u\,(t) \to -iu\,(it)$，$\alpha \to -\alpha$，$\beta \to -\beta$下保持不变。将这些变换应用于级数（3.2）–（3.5）中的任意一个，得到同类型的级数，它们是（1.4）的解，且初始系数不变。由于后续系数被唯一确定，变换后的级数与原级数重合。第二个断言由该方程在变换 $\beta \to -\beta$下的不变性得出。 □

命题 2. 设 A_n, B_n, C_n 以及 D_n 为级数（3.2）–（3.5），其参数由公式（1.5）给出： $\alpha_n = n - b + 3(-1)^n c$, $\beta_n = n - b - (-1)^n c$。则在 B¨acklund 变换（1.6）下，它们按如下方式变换：

$$\begin{aligned} &\text{if } u_n \sim A_n, && \text{then } u_{n\pm1} \sim C_{n\pm1};\\ &\text{if } u_n \sim C_n \text{ and } \beta_n \neq 0, && \text{then } u_{n\pm1} \sim A_{n\pm1};\\ &\text{if } u_n \sim B_n, && \text{then } u_{n\pm1} \sim B_{n\pm1};\\ &\text{if } u_n \sim D_n \text{ and } \beta_n \neq 0, && \text{then } u_{n\pm1} \sim D_{n\pm1}. \end{aligned}$$

证明。 关于 u_n 的原始级数是 $\mathrm{P_{IV}}$ 的形式解，其参数为 α_n 和 β_n；此处，在级数 C_n 的情形下，条件 $\beta_n \neq 0$ 和 D_n 表示它们不为零。因此，与 $u_{n\pm1}$ 对应的变换后级数也满足 $\mathrm{P_{IV}}$，其参数为 $\alpha_{n\pm1}$ 和$\beta_{n\pm1}$。 由于 B¨acklund 变换由有理公式给出，该级数保持一般结构（3.1），因此必属于四种类型之一。要确定对应关系，只需追踪该级数的首项。

□

特殊情形 $\beta_n = 0$ 需要单独考虑，因为此时 $C_n = D_n = 0$，前一个命题不适用。如果相应的解 $u_n(t)$确实恒等于零，那么 B¨acklund 变换序列就此终止。然而，该解也可能非零，只是比 $1/t$衰减得更快，因此无法用形如（3.1）的级数描述。在这种情况下，B¨acklund 变换仍然适用，可以追踪相邻解 u_{n-1} 和 u_{n+1} 的渐近行为之间的关系。

命题 3. 设 $\beta_n = 0$ 和解 u_n（不恒为零）具有渐近行为$o(t^{-1})$。此外，如果解 u_{n-1} 或 u_{n+1} 之一具有 A类型的渐近行为，那么另一个解就具有 D类型的渐近行为，反之亦然：

$$\text{if } u_{n-\sigma} \sim A_{n-\sigma}, \text{ then } u_{n+\sigma} \sim D_{n+\sigma}; \qquad \text{if } u_{n-\sigma} \sim D_{n-\sigma}, \text{ then } u_{n+\sigma} \sim A_{n+\sigma},$$

其中 $\sigma = 1$ 或 -1。

证明。 解 u_{n-1}, u_n, u_{n+1} 由参数为 $\beta_n = 0$的 $\mathrm{dP_I}$ 方程联系起来，并且根据假设， $u_n \neq 0$。约去后，我们得到关系式

$$u_{n-1} + u_n + u_{n+1} = 2t, \tag{3.6}$$

接下来需要转化为级数并令首项相等，同时考虑到 u_n 的级数等于零。首先注意，由于 $\beta_n = n - b - (-1)^n c = 0$，我们有

$$\begin{aligned} \alpha_{n\pm1} &= n \pm 1 - b - 3(-1)^n c = \pm1 - 2(-1)^n c,\\ \beta_{n\pm1} &= n \pm 1 - b + (-1)^n c = \pm1 + 2(-1)^n c, \end{aligned}$$

由此得到格点 $n \pm 1$处参数之间的简单关系：

$$\alpha_{n\pm1} = -\beta_{n\mp1}.$$

若 $u_{n-1} \sim A_{n-1} = 2t - \alpha_{n-1}/(2t) + \ldots$，则由 (3.6) 可得 $u_{n+1} \sim \alpha_{n-1}/(2t) = -\beta_{n+1}/(2t)$。由于级数由其首项系数唯一确定，因此我们得出 $u_{n+1} \sim D_{n+1}$。其余情形完全类似。

□

设一个解 u 在 $t\to-\infty$ 时具有 X 型渐近行为，在 $t\to+\infty$ 时具有 Y 型渐近行为，其中 X 和 Y 分别是 $\beta\neq 0$ 时的类型 $\{A,B,C,D\}$ 之一，或 $\beta=0$ 时的类型 $\{A,B,0\}$ 之一。那么我们称 u 具有 (X,Y) 型渐近行为，并将其记作 $u\sim(X,Y)$。

渐近行为 (3.2)–(3.5) 可以任意组合，因此会产生多种特殊解，参见论文中的分类 [29], ，其中也研究了在给定渐近行为下，全局正则解存在所需满足的参数条件。然而，若我们希望 $\mathrm{dP_I}$ 与 $\mathrm{P_{IV}}$ 的共同解对所有 n都正则，就会受到更严格的限制。事实上，这意味着所有 u_n 都不能有极点，也不能有零点（除非 $u_n=0$ 恒等成立），否则 $u_{n\pm1}$ 就会有极点。由此立即可知，当 $t\to-\infty$ 和当 $t\to+\infty$ 时的渐近行为必须属于不同类型，否则解会在实轴上变号，而这只有在存在零点或极点时才可能发生。例如，这也排除了类型 A 与 B的组合。我们将在第6节和第7节继续分析这些限制条件。

4 边值问题

4.1 $\mathrm{dP_I}$ 方程

构造 $\mathrm{dP_I}$ 准定常解的数值方法，是在一个足够大的区间 $n_1\le n\le n_2$ 上求解边值问题，并令端点处的值取自准定常曲线。对于正解（当 $b+|c|\le n_1$ 时），可以采用显式迭代格式：若 u_n 是近似解，则通过求解二次方程得到下一个近似值 $\tilde u_n$：

$$\tilde u_n(u_{n-1}+\tilde u_n+u_{n+1})-2t\tilde u_n-\beta_n=0.$$

这将得到映射

$$\tilde u_n=t-\frac{u_{n-1}+u_{n+1}}{2}+\sqrt{\Big(t-\frac{u_{n-1}+u_{n+1}}{2}\Big)^2+\beta_n},\qquad n_1<n<n_2,\tag{4.1}$$

其中 $\tilde u_{n_1}=u_{n_1}$，$\tilde u_{n_2}=u_{n_2}$ 并取方程的正根。其收敛性已在 [4] 中得到证明（当 $t=0$ 时；但实验表明，对于任意 t，该方法都成立）。形式上适用于构造取值异号的解的映射（在考虑 $n<0$ 的解时，这是不可避免的）可通过如下方式得到：不精确求解二次方程，而是应用一步牛顿法。这样，原来的 (4.1) 就变为有理映射

$$\tilde u_n=\frac{u_n^2+\beta_n}{u_{n-1}+2u_n+u_{n+1}-2t}.\tag{4.2}$$

然而，只有当初始近似非常接近精确解时，它才会收敛。若将方程写成 $E_n=0$，则可以得到更稳健的隐式格式，其中

$$E_n=u_{n-1}+f_n(u_n)+u_{n+1},\tag{4.3}$$

并通过相对于线性近似最小化 $E[u+\delta]$ 来确定 $\tilde u_n=u_n+\delta_n$。这会得到关于 δ 的线性方程组，其系数矩阵为三对角矩阵：

$$\delta_{n-1}+f_n'(u_n)\delta_n+\delta_{n+1}=-E_n,\qquad \delta_{n_1}=\delta_{n_2}=0.\tag{4.4}$$

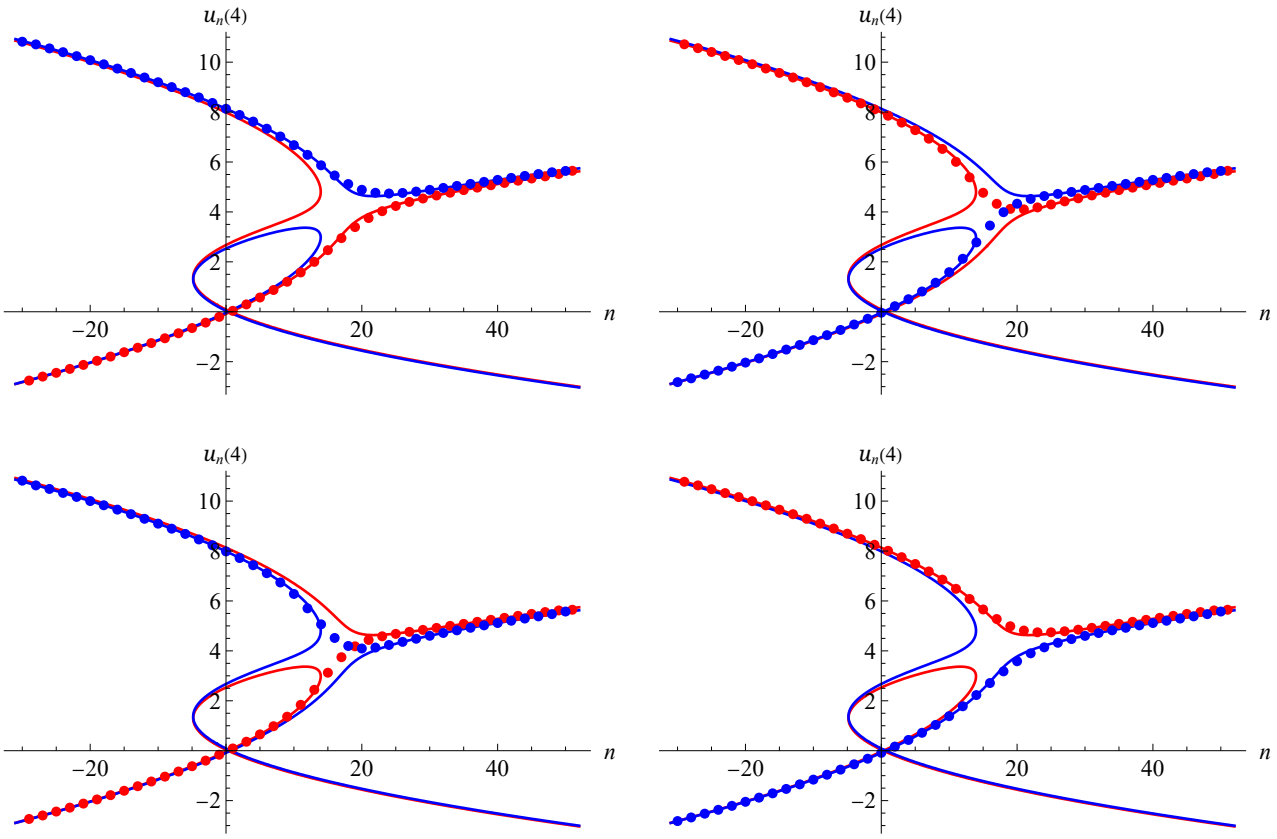

图 10. $b = 1/2$、 $c = -1/5$ 处的解（上）， $b = 1/2$、 $c = 1/5$ 处的解（下）。

重复映射 $u \to u + \delta$ 的迭代，直到在给定精度 ε下满足条件 $\sum E_n^2 < \varepsilon$。对于 $\mathrm{dP_I}$，方程的形式为

$$\begin{aligned} E_n &= u_{n-1} + u_n + u_{n+1} - 2t - \frac{\beta_n}{u_n}, \qquad \tilde{u}_n = u_n + \delta_n, \\ \delta_{n-1} &+ \left(1 + \frac{\beta_n}{u_n^2}\right)\delta_n + \delta_{n+1} = -E_n, \qquad \delta_{n_1} = \delta_{n_2} = 0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

可以将以下序列用作初始近似

$$u_n = \begin{cases} t + \sigma(-1)^n\sqrt{t^2 - n + b} & \text{for } n < b + t^2, \\ \dfrac{1}{3}(t + \sqrt{t^2 + 3n - 3b}) & \text{for } n \geq b + t^2, \end{cases}$$

其中 $\sigma = \pm 1$，这对应于抛物线上的点（2.3）和（2.5 ）.

对于 $t \geq 0$ 以及较小的参数 c，该方案表现出优异的收敛性。关于 c 的确切限制条件尚不清楚；例如，对于 $b = 0.5$，通过经验发现，区间 $-0.246 < c < 0.5$ 内的值是合适的。对于 $t < 0$，该方法会失去收敛性（映射（4.2）也会失去收敛性），这是由客观原因造成的，因为解通常会变为极点型。

在图 10中，展示了通过方案（4.5）构造的数值解曲线。顶部和底部的图中 c符号不同，由此导致准静态曲线 C_2^+ 和 C_2^-发生置换。由于每条曲线由两个分支组成，因此还有

另外两个变体，它们取决于点的奇偶性，在 $n \to -\infty$ 时具有不同的渐近行为。选择哪一个变体由初始近似中 σ 的符号决定。在左侧图中，偶数位于 C_2^+ 的上分支，奇数位于 C_2^- 的下分支；在右侧图中，偶数位于 C_2^+ 的下分支，奇数位于 C_2^- 的上分支。至于 $n \to +\infty$，偶数点和奇数点都位于相应曲线的上分支上。

注6. 方程 $E_n = 0$ 定义了泛函的驻点

$$\sum_n \Big(\frac{1}{2} u_n^2 + u_{n-1} u_n - 2t u_n - \beta_n \log |u_n| \Big), \tag{4.6}$$

且 δ_n 对应的线性方程组的矩阵与其海森矩阵重合。在对 $n > 0$ 求和，并满足条件 $u_n > 0$ 和 $t \le 0$时，先验估计 $u_n^2 < \beta_n$ 成立，由此可以证明该泛函有界且为凸泛函（海森矩阵正定）。这就证明了文献 [4, 3]中正解的存在唯一性。然而，对于 $t > 0$以及整个 n轴上的解，这种证明方法并不适用。

4.2 $\mathrm{P_{IV}}$ 方程

为构造 $\mathrm{P_{IV}}$的解，我们首先作变换 $u = \sigma v^2$，得到方程

$$v'' = \frac{3}{4} v^5 - 2\sigma t v^3 + \Big(t^2 + \frac{\alpha}{2} \Big) v - \frac{\beta^2}{4v^3}, \tag{4.7}$$

其中，符号 $\sigma = \pm 1$ 的选取取决于我们考虑的是正解还是负解u。在均匀网格上应用差分近似

$$v_k \sim v(t_k), \qquad t_k = t_0 + kh, \qquad k = 0, \dots, K, \qquad h = (t_K - t_0)/K,$$

我们得到方程 $E_k = 0$，其中 $k = 1$，……，$K - 1$ 且

$$E_k = v_{k-1} - 2v_k + v_{k+1} + h^2 \left(-\frac{3}{4} v_k^5 + 2\sigma t_k v_k^3 - \Big(t_k^2 + \frac{\alpha}{2} \Big) v_k + \frac{\beta^2}{4 v_k^3} \right). \tag{4.8}$$

该问题的解按一般格式（4.3）、（4.4）并根据公式构造

$$\tilde{v}_k = v_k + \delta_k, \tag{4.9}$$

$$\delta_{k-1} - \left(2 + h^2 \left(\frac{15}{4} v_k^4 - 6\sigma t_k v_k^2 + t_k^2 + \frac{\alpha}{2} + \frac{3\beta^2}{4 v_k^4} \right) \right) \delta_k + \delta_{k+1} = -E_k, \qquad \delta_0 = \delta_K = 0, \tag{4.10}$$

以及值 v_0、v_K 在区间端点处以及初始近似均根据准定常曲线所需的分支确定（2.7）。

所述差分格式对于渐近行为为 $u \sim 2t$ 和$u \sim 0$（类型 A、C、D）的解效果良好，但不适用于渐近行为为 $u \sim 2t/3$（类型 B）的解，也就是说，不适用于趋近准定常曲线中间分支的解：对于这类解，迭代可能根据初始近似的选择而收敛到振荡解，也可能完全不收敛。然而，对于图 10所示的解，无需考虑这种渐近行为，因为对于固定的 n，它是中间态。

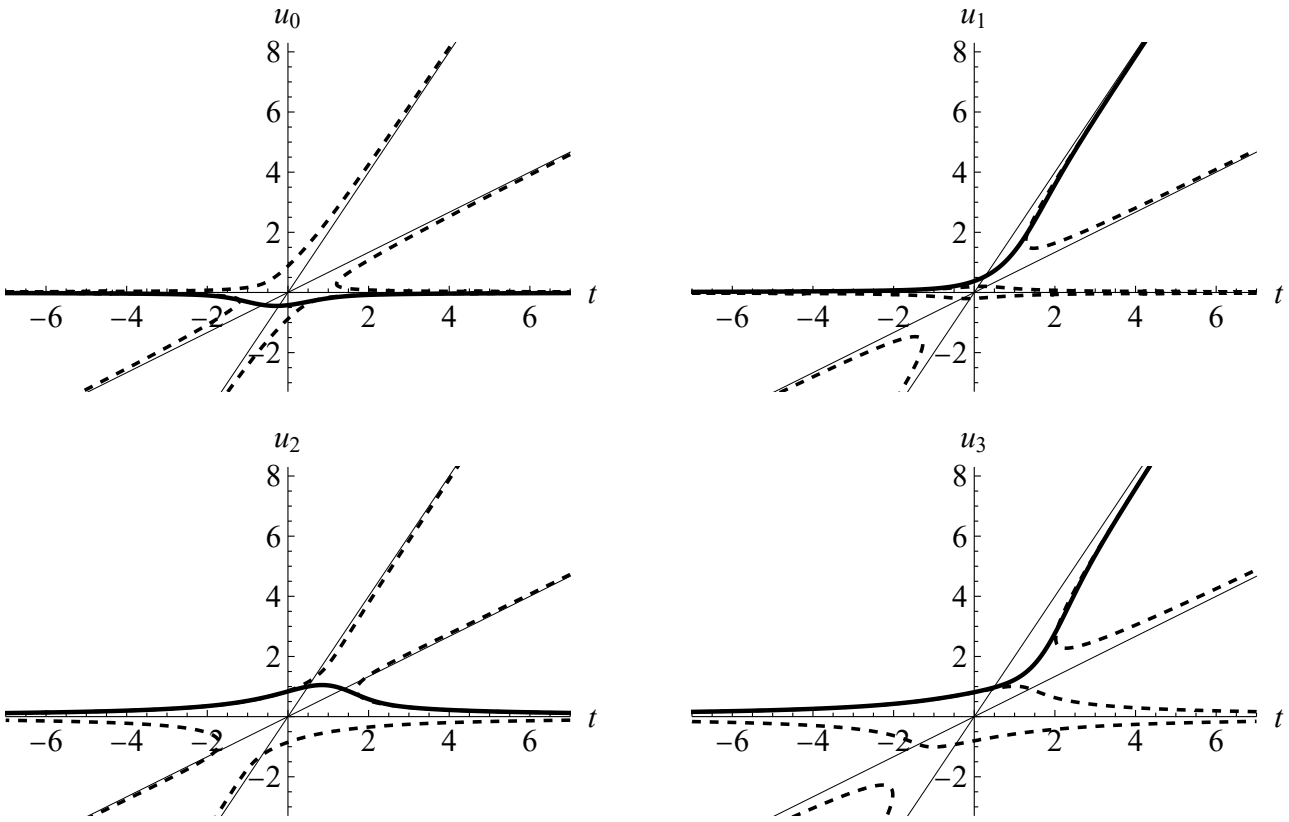

图 11。 一列准定常解 $\mathrm{P_{IV}}$ 通过 B¨acklund 变换相互关联。虚线表示相应取值下的曲线（2.7）。 α 和 β。

下面通过一个例子说明如何由 $\mathrm{P_{IV}}$的解构造准定常曲面。选取一些参数值，例如 $b = 0.5$ 和 $c = -0.2$，对应于图 10 中的上方曲线图。于是，根据公式（ 1.5 ），$\mathrm{P_{IV}}$ 方程中的参数序列为

$$\ldots\ \alpha_0 = -1.1,\ \beta_0 = -0.3,\quad \alpha_1 = 1.1,\ \beta_1 = 0.3,\quad \alpha_2 = 0.9,\ \beta_2 = 1.7,\quad \alpha_3 = 3.1,\ \beta_3 = 2.3\ \ldots .$$

假设 u_1 当 $t \to +\infty$趋于 C_2^-曲线的上支时，这对应于图 10右上方的图。则该函数具有 A 型渐近行为（当 $t \to +\infty$时），并且由于对于所有 t 和 $\beta_1 > 0$，它都必须为正，因此当 $t \to -\infty$ 时，可容许渐近式只能是 D型。我们将其记为 $u_1 \sim$ （D， A）。然后，根据命题 2，所有 u_n 的渐近行为类型由序列

$$\ldots\quad u_0 \sim (D, C),\quad u_1 \sim (D, A),\quad u_2 \sim (D, C),\quad u_3 \sim (D, A)\quad \ldots ,$$

这为差分格式提供了所需的边界条件。应用该格式，我们得到图 11中的曲线。注意，在本例中，函数 u_{-1} 必须有一个零点，因为它具有 (D, A) 型渐近行为，且参数为 $\beta_{-1} = -1.7 < 0$，由此可知 u_{-1}在实轴上变号。在这种情况下，变换 $u = \sigma v^2$ 不适用，所述差分格式也因此不再适用。下一个函数 u_{-2} 会出现一个极点。尽管如此，仍可利用 dP 的柯西问题，将解延拓至 $n < 0$ 这些值，其中使用计算得到的 u_0 和 u_1。

5 最简单的精确解

需要强调的是，渐近行为在 n 演化过程中保持为（3.2）–（3.5）的形式，并不能保证解作为 n 的函数，在其整个长度上都确实接近准定常曲线。问题在于，解在 t 趋近渐近行为时，对 n而言并非一致：某些 n 可能较早发生这种情况，另一些则较晚。因此，在给定的 t值下，解可能只在某个区间内接近准定常曲线，而在该区间之外，解的表现可能与具有极点的一般解相同。本节讨论两个与有理函数和厄米函数有关的简单例子。通过应用完整的 B¨acklund 变换群（见注 2），还可以得到更多这类解。从结合极点区制与准稳态区制的各种情景这一角度研究这些解颇有意义，尽管文献中已经非常详细地描述了 $\mathrm{P_{IV}}$ 的所有特殊解族（特别参见论文 [20, 21, 18]）。

例 1. 函数 $u_0 = u_1 = 2t/3$ 满足方程组 (1.3)，参数为 $b = 1/2$和 $c = 1/6$。将它们作为 $\mathrm{dP_I}$的初始数据，我们得到序列

$$\ldots,\ u_{-3} = \frac{2t(8t^6 - 60t^4 + 90t^2 - 135)}{3(2t^2 - 3)(4t^4 - 12t^2 - 9)},\quad u_{-2} = \frac{4t^4 - 12t^2 - 9}{3t(2t^2 - 3)},\quad u_{-1} = \frac{2t^2 - 3}{3t},\quad u_0 = \frac{2t}{3},$$
$$u_1 = \frac{2t}{3},\quad u_2 = \frac{2t^2 + 3}{3t},\quad u_3 = \frac{4t^4 + 12t^2 - 9}{3t(2t^2 + 3)},\quad u_4 = \frac{2t(8t^6 + 60t^4 + 90t^2 + 135)}{3(2t^2 + 3)(4t^4 + 12t^2 - 9)},\ \ldots$$

其中，根据公式 (1.5)，u_n 满足 $\mathrm{P_{IV}}$，参数为 $\alpha_n = n + (-1)^n - 1)/2$和 $\beta_n = n - 1/2 - (-1)^n/6$。

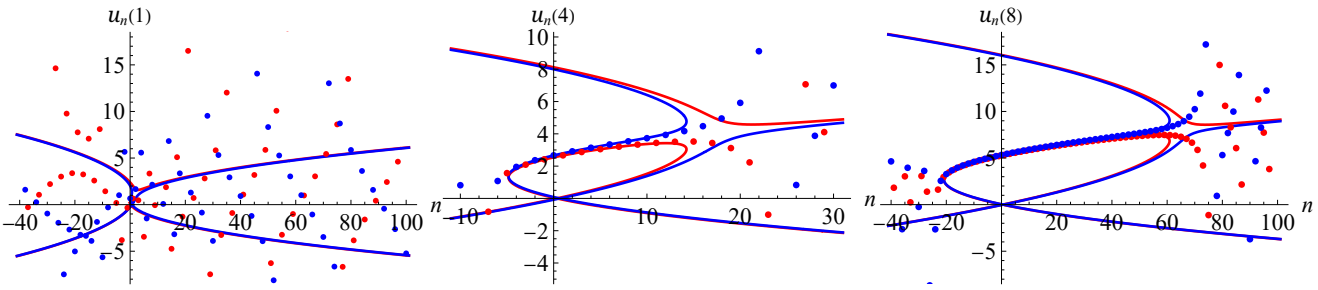

图 12. 不同 t 值下，$\mathrm{dP_I}$ at $b = 1/2$, $c = 1/6$, $u_0 = u_1 = 2t/3$ 的解。

该序列在若干固定的 t 值下的图像如图 12 所示。在第一幅图中，当 $t = 1$ 时，该解看起来像典型的一般解。每个函数 $u_n(t)$（u_0 和 u_1 除外）在 t 中都有实极点，但极点数量有限，不过会随 n 增大。对于固定的 n，这些极点的位置被限制在 t 中一个足够大的区间内；在此区间之外，解趋近于渐近行为 $2t/3$，这与种子函数 u_0 和 u_1 的渐近行为相同。因此，如接下来的两幅图所示，点 u_n 落在准定常曲线的一段区间上，而该区间随 t 增大；在此区间之外，解仍保持其类似极点的特征。因此，所考察的解在某种意义上也是准稳态的，但并非如我们所希望的那样在 $n \to \pm\infty$，而是在中间区域。函数 $u_n(t)$ 关于两个变量的图像如图 13 所示。对于此函数，(n, t) 平面被划分为两个无限大的区域：在其中一个区域内，函数接近准定常曲面；而在另一个区域内，它形成一个晶格

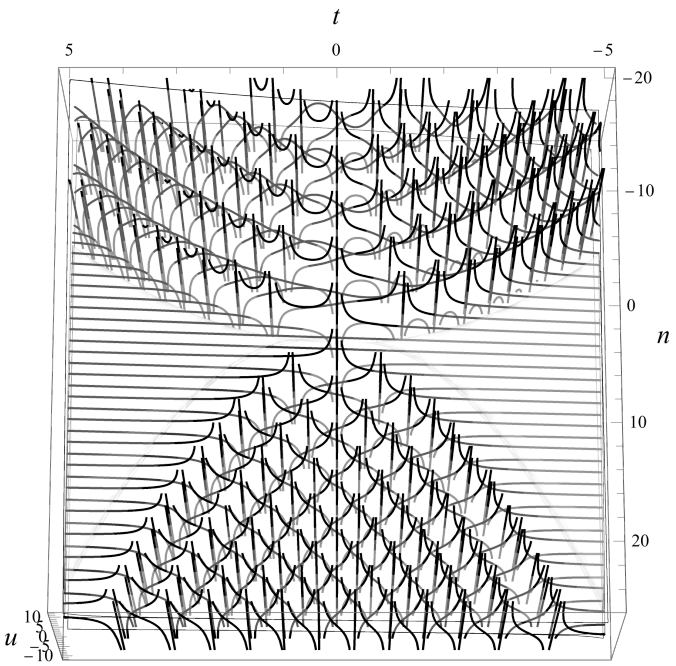

图 13. 同一解关于 n和 t的函数图像。

极点。对这些区域的常规定义边界，是准定常曲面折叠部分在 $(n,\ t)$ 平面上的投影（见图 9）；这些投影接近抛物线 $3\nu + t^2 = 0$ 和 $\nu - t^2 = 0$。

下面的例子以及下一节给出的解都与 Hermite 方程有关

$$y''_\kappa - 2ty'_\kappa + 2\kappa y_\kappa = 0. \tag{5.1}$$

回顾一下，它的解满足以下递推关系

$$y'_\kappa = 2\kappa y_{\kappa-1}, \qquad y'_{\kappa-1} = 2ty_{\kappa-1} - y_\kappa, \qquad y_{\kappa+1} - 2ty_\kappa + 2\kappa y_{\kappa-1} = 0, \tag{5.2}$$

它们可视为 B¨acklund 变换和离散 Painlev´e 方程的线性原型。方程（5.1）的一个解是埃尔米特函数，其定义域为$\mathrm{Re}\,\kappa < 0$，其公式为

$$H_\kappa(t) = \frac{1}{\Gamma(-\kappa)} \int_0^\infty e^{-x^2-2tx} x^{-\kappa-1}\, dx.$$

它还满足递推关系 (5.2)，并借助这些关系延拓到 $\mathrm{Re}\,\kappa \geq 0$ 的取值范围。若 $\kappa \neq 0$、1、2、.....，则函数 $H_\kappa(t)$ 和 $H_\kappa(-t)$ 构成方程 (5.1) 的一组解基。对于 $\kappa = 0$、1、2、.....，可得到埃尔米特多项式，此时 $H_\kappa(t) = (-1)^\kappa H_\kappa(-t)$。特别地，$H_0(t) = 1$，而当 $\kappa = 0$ 时，第二个线性无关解由虚误差函数 $\mathrm{erfi}(t) = -i\,\mathrm{erf}(it)$ 给出。对于 $\kappa = -1$，有

$$H_{-1}(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{t^2} (1 - \mathrm{erf}(t)).$$

还要注意它与抛物柱函数的联系（抛物柱函数在参考文献中更为常见）

$$H_\kappa(t) = 2^{\kappa/2} e^{t^2/2} D_\kappa(\sqrt{2}t). \tag{5.3}$$

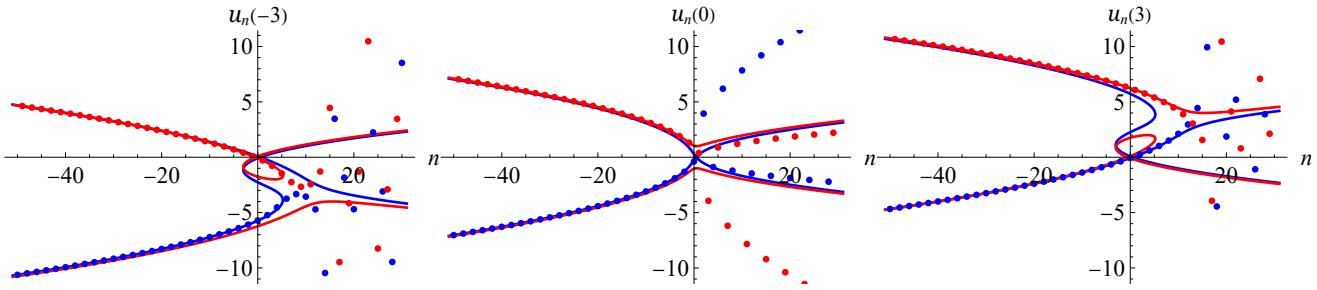

图 14. 解（5.5）在 $\mu = 1/4$（对应于 $b = 0$），以及 $y_\kappa(t) = H_\kappa(t)$.

示例 2。 在 $c = 1/2$，$\mathrm{dP_I}$ 方程可化简为

$$u_{2k-1}u_{2k} = 2k - 2\mu, \qquad u_{2k} + u_{2k+1} = 2t, \tag{5.4}$$

这里引入了记号 $b + 1/2 = 2\mu$ 。这可以视为一个离散 Riccati 方程，因为映射 $u_{2k-1} \mapsto u_{2k+1}$ 和 $u_{2k} \mapsto u_{2k+2}$ 是分式线性的。直接验证可知，约化（5.4）也与 Volterra 格相容，由此得到定义 $\mathrm{P_{IV}}$的连续 Riccati 方程:

$$u'_{2k} = -u_{2k}^2 + 2tu_{2k} - 2k + 2\mu, \qquad u'_{2k+1} = u_{2k+1}^2 - 2tu_{2k+1} + 2k + 2 - 2\mu.$$

应用线性化代换后，我们得到解

$$u_{2k} = \frac{y'_{k-\mu}}{y_{k-\mu}} = \frac{2(k-\mu)y_{k-1-\mu}}{y_{k-\mu}}, \qquad u_{2k+1} = 2t - \frac{y'_{k-\mu}}{y_{k-\mu}} = \frac{y_{k+1-\mu}}{y_{k-\mu}}, \tag{5.5}$$

其中 y_κ 满足 Hermite 方程 (5.1) 和递推关系 (5.2)。(5.1) 方程的任意实解在 $\kappa > 0$ 处都有零点（其数量随 κ线性增长），因此函数 (5.5) 必然在 $k > \mu$处有极点。然而，对于 $\kappa \le 0$，函数 H_κ 为正（这可由积分表示推出），且一般解 y_κ 至多有一个零点；此外，所有 y_κ 的零点都位于 t 中的有界区间内（具体取决于解的选择）。由此可知，当 $k < \mu$ 且 $|t| >$ 为常数时，解 (5.5) 是正则的，并趋向准定常曲线，如图 14 所示。与前一个例子不同，准稳态区间位于曲线的其他分支上，对应于渐近行为 $u \sim 2t$ 和 $u \sim 0$，而不是 $u \sim 2t/3$。

在解 (5.5) 中，应单独考虑整数 μ 的情形；它会导致终止 $u_{2\mu} = 0$。对编号作平移后，可以假设 $\mu = 0, b = -1/2$。然后，限制在负数范围内，可得 $y_k = \gamma_1 H_k(t) + \gamma_2(-1)^k H_k(-t)$,

$$u_0 = 0, \qquad u_{-1} = \frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}(\gamma - \operatorname{erf}(t))}, \qquad \gamma = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}.$$

若 $\gamma_1\gamma_2 \neq 0$，则某些 y_k 有零点，相应的 u_n 有极点。对于 $\gamma_2 = 0$，我们得到解

$$u_{2k} = 2k\frac{H_{k-1}(t)}{H_k(t)}, \qquad u_{2k-1} = 2t - \frac{H'_{k-1}(t)}{H_{k-1}(t)} = \frac{H_k(t)}{H_{k-1}(t)}, \qquad k = 0, -1, -2, \ldots \tag{5.6}$$

(选择 $\gamma_1 = 0$ 经过变换 $\tilde{u}_n(t) = -u_n(-t)$后得到相同结果)。由于$H_k$ 具有负指标时的正性，函数 u_n 对所有 $t \in \mathbb{R}$ 和 $n < 0$均为正则函数，其中 $u_{2k} < 0$ 且$u_{2k-1} > 0$。命题 5给出了此解的推广。

6 零终止

考虑满足 $u_0(t) = 0$ 的解，当 $c = -b$ 时这是可能的。在这种情况下，$\mathrm{dP_I}$ 方程和 Volterra 格分解为正、负 n对应的独立子方程组。变量 $u_{\pm1}$ 对应的 $\mathrm{P_{IV}}$方程可化为 Riccati 方程

$$u_1' = -u_1^2 + 2tu_1 - 2b + 1, \qquad u_{-1}' = u_{-1}^2 - 2tu_{-1} + 2b + 1, \tag{6.1}$$

由方程组（1.3）在 $n = 0$ 和 $n = -1$处很容易得到。这与示例 2中的方程相同，但现在它们仅对 $u_{\pm1}$ 成立，而非对所有 u_n 都成立。它们的一般解形式为

$$u_1 = Y'/Y, \qquad u_{-1} = 2t - Z'/Z, \tag{6.2}$$

其中 Y和 Z 是 Hermite 方程（5.1）在参数 $\kappa = b-1/2$下的任意解：

$$y'' - 2ty' + (2b - 1)y = 0. \tag{6.3}$$

其余函数 u_n 通过 Hankel 行列式用 Y 或 Z 表示，其阶数随 $|n|/2$增大。也就是说，在这种情况下，与解 (5.5) 相比，答案要复杂得多。不过，我们不会用到这些公式。根据已知的厄米函数渐近行为，或直接由 Riccati 方程 (6.1) 可知，函数 $u_{\pm1}$ 在 $t \to \pm\infty$ 时趋于 0 或 $2t$ （取决于解的选择），并具有第 3 节中 A、C 或 D 类型的渐近行为。于是，根据命题 2，由它们通过 $\mathrm{dP_I}$ 方程构造出的函数 u_n 也具有类似的渐近行为。因此，当 t 较大时，将解视为 n 的函数，它会聚集到准定常曲线上，但通常不会关于 n一致收敛。尽管公式较为复杂，这类解的行为与例 2 中的解完全相同，唯一的区别是现在它们仅定义在一条半直线上。 $n > 0$ 的一个典型例子见图 15。一个更有意思的问题是，如何从所考虑的这族解中挑选出在 t上正则的解。下面我们分别讨论正n 和负n 的情形。

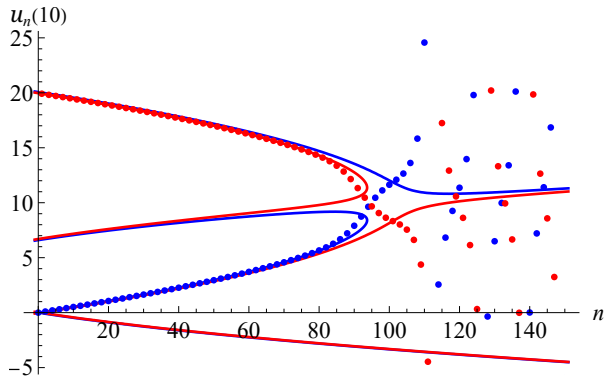

图 15. 具有零终止的 $\mathrm{dP_I}$ 解。参数值：$b = -c = 1/3$、$t = 10$，初值 $u_1 = Y'/Y$，其中 $Y = 2H_{b-1/2}(t) + H_{b-1/2}(-t)$。

n > 0 时的解

下述命题已在论文中证明 [4, 3] 对于 $t \le 0$ 以及 [5, 6] 对于所有 t （请注意，这些论文使用的是抛物柱函数，而非厄米函数；二者通过公式 (5.3) 相关联。）

命题 4. 对于 $c = -b$、 $u_0 = 0$ 和任意的 $t \in \mathbb{R}$，dP_I 的解对所有 $n > 0$ 均为正，当且仅当 $b < 1/2$。该解唯一，并对应于初始条件

$$u_1(t) = -\frac{H'_{b-\frac{1}{2}}(-t)}{H_{b-\frac{1}{2}}(-t)} = (1-2b)\frac{H_{b-\frac{3}{2}}(-t)}{H_{b-\frac{1}{2}}(-t)}. \tag{6.4}$$

特别地，当 $t = 0$

$$u_1(0) = 2\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{b}{2}\right)}. \tag{6.5}$$

请注意，该命题的表述并未预先假定 $\mathrm{dP_I}$ 的正解与 $\mathrm{P_{IV}}$ 相容，也未假定 u_1 必须满足 Riccati 方程（6.1）；相反，证明表明这些性质会自动成立。对于 $t \le 0$，可利用能量型泛函（4.6）的有界性和凸性证明解的存在唯一性。对于 $t > 0$，文献 [5, 6] 采用了更专门的方法，其依据是 Favard 定理所揭示的正交多项式权函数与三项递推关系系数之间的联系。由此可以证明，受 Volterra 格支配的 $\mathrm{dP_I}$ 正解的演化是良定义的，并且保持正性，从而将唯一性问题归结为 $t = 0$ 的情形。关于这一结果的一些推广，以及该主题的详细文献综述，见 [7, 30]。特别是，文献 [30] 给出了一个公式，用以定义所谓的替代 $\mathrm{dP_I}$ 方程的唯一正解（该方程也具有零终止条件）。该公式类似于公式（6.4），其中用 Airy 函数替代埃尔米特函数；后者定义的是 $\mathrm{P_{II}}$ 方程而非 $\mathrm{P_{IV}}$ 方程的特殊解。关于与 $\mathrm{P_V}$ 相关的另一种 $\mathrm{dP_I}$ 版本，也有类似结果，见 [31], ，另见 [32]。

正解在 $t = 0$ 处的准平稳性可由论文 [4], 的结果推出；该文证明了当 $n \to \infty$ 时，$u_n \sim \sqrt{n/3}$ ，并推导出了关于 $\sqrt{n}$ 的负幂渐近级数的若干项。在第 8 节中，我们为任意 t 构造了类似的展开，其渐近行为的首项为 $\frac{1}{3}\sqrt{3n - 3b + t^2}$，并证明该展开在 Volterra 格所支配的动力学作用下保持其形式。因此，当 $n \to \infty$ 时，解在 t 的任意取值下均具有准平稳性。同时，对于每个固定的 n， $u_n(t)$ 的行为由当 $t \to +\infty$ 时的 (3.2) 型级数 A 或 (3.4) 型级数 C ，或者当 $t \to -\infty$ 时的 (3.5) 型级数 D 决定；这对应于解转移到准定常曲线的某个分支。

若干 t和 b取值下的解的剖面如图16所示。中间一行对应 $b = -c = 0$的取值，此时准稳态曲线是两条抛物线的并集。当 b 经过 0 时，曲线 C_2^+（蓝线）和 C_2^-（红线）互换位置。由于 u_n 偶数编号的变量趋于 C_2^+，而奇数编号的变量趋于 C_2^-，因此对于 $0 < b < 1/2$，最后一幅图中会形成扭转。

注 7。 通过求解柯西问题来构造准定常解，需要以极高精度指定初始数据。舍入误差导致我们得到的不是准定常解，而是极点型解（当 n足够大时）。对于

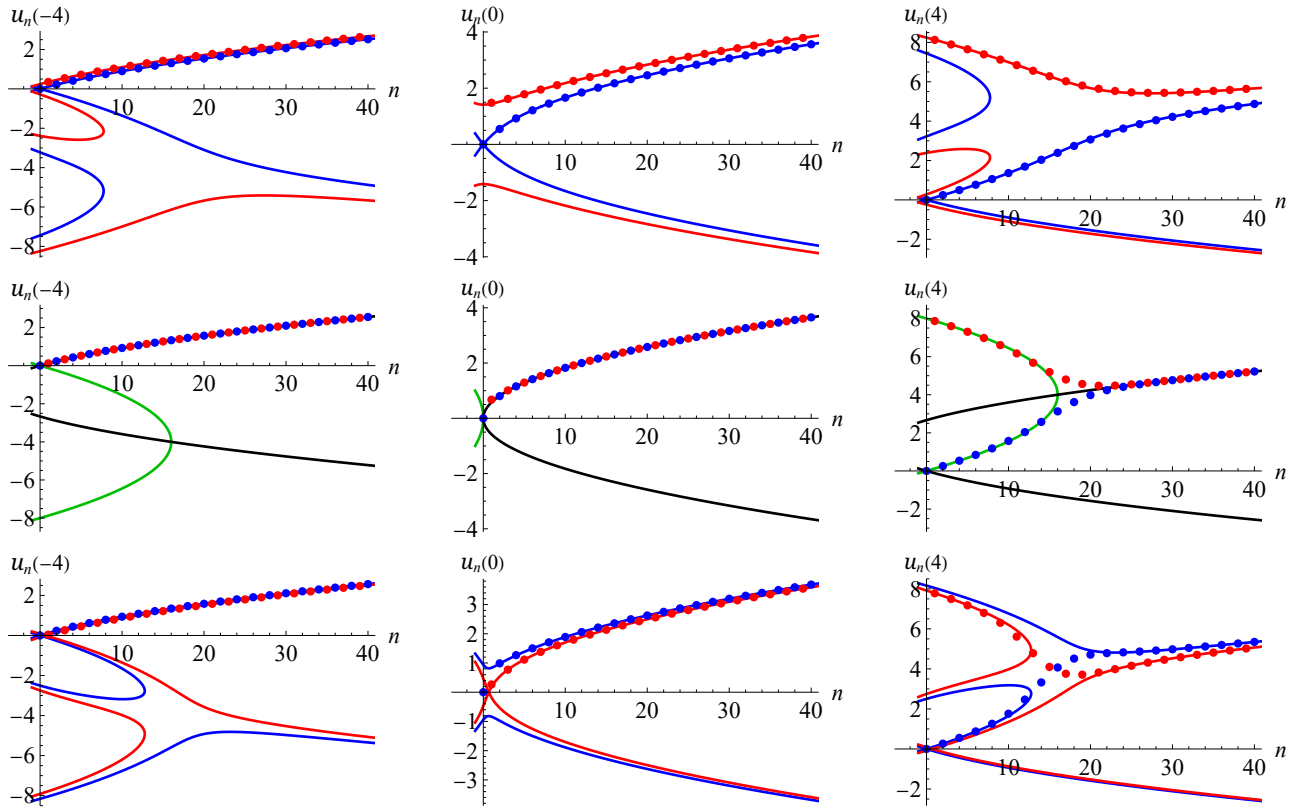

图16. dP 的解$_{\mathrm{I}}$，具有零终止，初始数据为 $u_1(t)$ 由公式 (6.4) 给出。顶行：$b=-1$，中行：$b=0$，底行：$b=1/3$。

例如，为了构造该方程的著名解（$b=t=0$（原始的 Shohat情形 [1]），直到点 $n=40$，如图 16的中央图所示，必须取该数不少于 25 个十进制位数

$$u_1(0)=\frac{H_{-\frac{3}{2}}(0)}{H_{-\frac{1}{2}}(0)}=2\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\approx 0.675978240067284728995447684670805748287283454915 41\ldots$$

这里写出了 50 位数字，这足以将解近似延续至 $n=80$，依此类推，所需位数按相同比例增长，即 $n=800$需要 500 位数字。一般公式 (6.4) 也需要大致相同的精度。事实上，这对现代符号计算系统来说并非难事，因为其中既实现了特殊函数值的计算算法，也实现了任意精度算术算法（我们使用了 *Mathematica* [33]）。当然，从理论上讲，这并不十分令人满意。正如文章 [30] 的作者正确指出的那样：“从初始值出发计算这个正解并不明智”。因此，不应求解柯西问题，而应求解边值问题，例如采用迭代格式 (4.1)。另一方面，柯西问题是一种更灵活的工具，还可以用来研究图12和15所示的极点型解；边值问题并不适用于这类解。

6.2 $n<0$ 的解

对于 $n<0$，不应考虑解的正性，而应考虑符号交替，但这一性质不再起决定作用。例如，在 $b=c=t=0$ and

$u_0 = 0$，任意dP 的解$_{\mathrm{I}}$ 对于 $n < 0$ 都是符号交替解，而对于 $n > 0$ 正解是唯一的。要找出任意参数下的符号交替解，是一个非常困难的问题。我们将通过额外要求由 P 控制的演化在 t 中$_{\mathrm{IV}}$ 对 $u_n(t)$ 的符号保持不变 t，对所有 t都成立，来大幅简化这一问题；这等价于解对所有 t都具有正则性。这一设定比命题4更严格；该命题证明了正解与 $\mathrm{P_{IV}}$ 的相容性。以下命题描述了所有正则解。这一族解对应于一个离散的参数集，并且在 $m = 0$处与解（5.6）重合。

命题 5。 对于 $c = -b$ 和 $u_0 = 0$，当对所有 $n < 0$满足 $t \in \mathbb{R}$ 时，dP_I 和 P_{IV}的公共解仅在 b为负半整数时存在：

$$b = m - 1/2, \qquad m = 0, -1, -2, \dots . \tag{6.6}$$

除作变换 $\tilde{u}_n\ (t)\ = -u_n\ (-t)$ 外，该解是唯一的，并由初值确定

$$u_{-1}(t) = \frac{H_m(t)}{H_{m-1}(t)} \tag{6.7}$$

并满足不等式 $u_{2k} < 0$ 和 $u_{2k+1} > 0$。

证明。 对于 $c = -b$，参数 β_n 具有如下形式

$$\beta_{2k+1} = 2k + 1 - 2b, \qquad \beta_{2k} = 2k.$$

如果条件（6.6）不成立，那么 $\beta_n \neq 0$ 对所有 $n < 0$均成立。我们证明在这种情况下正则解是不可能的。

$\mathrm{dP_I}$ 和 $\mathrm{P_{IV}}$ 的公共解由满足方程（6.1）中第二个方程的函数 u_{-1} 构造而成。其渐近行为可以具有形式 $u_{-1} \sim 2t$ （类型 A （3.2）），或者$u_{-1} \sim\ (1 + 2b)\ /\ (2t)\ = -\beta_{-1}/\ (2t)$（类型 D （3.5））。如果在 $t \to -\infty$ 处和在 $t \to +\infty$处的渐近行为属于同一类型，那么 u_{-1} 会在实轴上变号。这意味着或者 u_{-1} 在某个 t处为零，此时 u_{-2} 在该点有极点，或者 u_{-1} 自身有极点。因此，为保证解的正则性，渐近行为必须不同。考虑到变换$\tilde{u}_n\ (t)\ = -u_n\ (-t)$，只需考察类型组合 D 在 $t \to -\infty$处以及 A 在$t \to +\infty$处的情形。于是，根据命题 2，在条件 $\beta_n \neq 0$下，所有函数 u_n 的渐近行为具有如下形式：

$$\begin{aligned} &(D, A): \quad u_{2k+1} \sim -\frac{\beta_{2k+1}}{2t} \ \text{ as } \ t \to -\infty, \qquad u_{2k+1} \sim 2t \ \text{ as } \ t \to +\infty, \\ &(D, C): \quad u_{2k} \sim -\frac{\beta_{2k}}{2t} \ \text{ as } \ t \to -\infty, \qquad u_{2k} \sim \frac{\beta_{2k}}{2t} \ \text{ as } \ t \to +\infty, \end{aligned} \tag{6.8}$$

其中 $k = -1,\ -2,$ .....。但是，对于 $k \ll 0$，系数 $\beta_{2k+1} = 2k + 1 - 2b$ 为负，因此 u_{2k+1} 会变号，这意味着该函数本身或 u_{2k} 中会出现极点。

在下文中，我们假设 (6.6) 成立；于是 $\beta_{2m-1} = 0$。下面考察这种情况下 u_n 的渐近行为。对于 $n > 2m - 1$，它仍由公式 (6.8) 决定。函数 u_{2m-1} 具有 $(0, A)$ 型渐近行为，因此当 $t \to +\infty$ 时它为正，且不恒等于零。于是，根据命题 3，经过这个数时，$t \to -\infty$ 的渐近行为从 D 型切换为 A 型。因此，对于 $n < 2m-1$，如果 n 为偶数，函数 u_n 具有 (A, C) 型渐近行为；如果 n 为奇数，则具有 (C, A) 型渐近行为。由此可知，u_n 符号相同

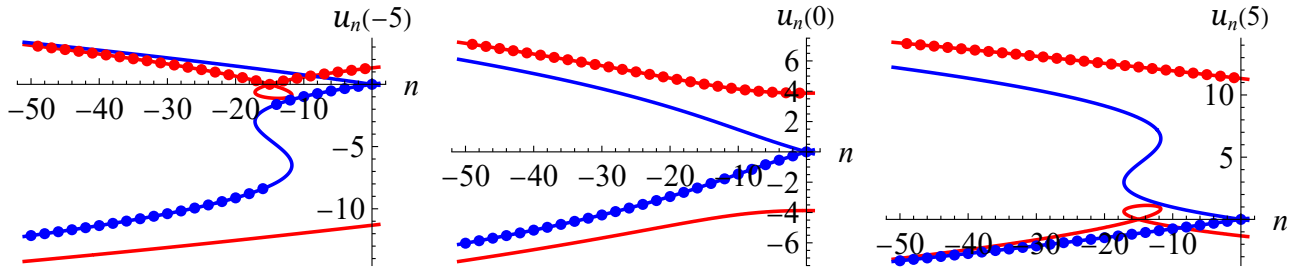

图17. dP_I 的解，其中 $n<0$，初始数据为 $u_0=0, u_{-1}=H_{-7}(t)/H_{-8}(t)$。

对于任意 $n<0$，$t\to\pm\infty$ 都成立，但可能 $n=2m-1$ 除外；因此，先前排除正则解的论证不再适用。

当 u_{-1} 时，Riccati 方程的通解形式为

$$u_{-1}=\frac{\gamma_1 H_m(t)-\gamma_2 H_m(-t)}{\gamma_1 H_{m-1}(t)+\gamma_2 H_{m-1}(-t)}.$$

函数 $H_\kappa(t)$在 $\kappa<0$ 时为正，随 $t\to-\infty$ 增长，并在 $t\to+\infty$时趋于 0。由此可知，若常数 γ_1 与 γ_2 异号，则分式的分母为零，且 u_{-1} 有一个极点。若 γ_1 与 γ_2 同号且 $m\neq 0$，则分子为零；此时u_{-2} 有一个极点。情形 $m=0$ 已在例 2中讨论。因此，为了保证解的正则性，必须有一个常数为零，这将得到函数（6.7），相差所示的变换。

由于函数（6.7）具有(D,A)型渐近行为，由上述分析可知，$u_{2k}<0$ 当 $t\to\pm\infty$ 时，以及 $u_{2k+1}>0$ 当 $t\to\pm\infty$时，除了函数 u_{2m-1}之外，关于它目前只知道它在 $t\to+\infty$时为正。为了完成证明，还需证明所有 u_n 都是正则的且没有零点。对于 u_{-1}，这一点成立。假设对某个 u_{n+1}（其中 $n<-1$）这一点成立，并证明该结论对 u_n也成立。为此，我们使用方程组（1.3）：

$$u_n'=u_n(2u_{n+1}+u_n)-2tu_n-\beta_n,\qquad u_{n+1}'=-u_{n+1}(u_{n+1}+2u_n)+2tu_{n+1}+\beta_{n+1}.$$

由第二个方程可通过除法将函数 u_n 表示为 u_{n+1}；由于 u_{n+1} 没有零点，u_n 是正则的。由第一个方程可知，在 u_n的零点处，其导数等于 $-\beta_n$。若 $\beta_n\neq 0$，则可知 u_n 至多有一个单零点；但是，正如我们所见，u_n 与 $t\to\pm\infty$同号，这意味着它没有零点。若 $\beta_n=0$（当 $n=2m-1$ 时）且 u_n 有一个零点，则 $u_n=0$ 恒等于零，这与其在 $t\to+\infty$时的正渐近行为矛盾。因此，这种情况下也没有零点。根据归纳法，我们得出所有 u_n 都是正则的且没有零点。

□

初始数据为（6.7）形式时，解的一个例子如图 $m=-7$ 所示17。当 $t<0$ 穿过点 D 时，渐近行为由类型 A 转变为类型 C 的交替，这一点清晰可见 $n=2m-1$。

如上面的证明所示，限制条件 (6.6) 与以下事实有关：若 b 不是半整数，则解中会出现极点。不过，事实证明，这些极点都位于半直线 $t<0$上；也就是说，具有初值

$$u_{-1}(t)=\frac{H_{b+1/2}(t)}{H_{b-1/2}(t)},\tag{6.9}$$

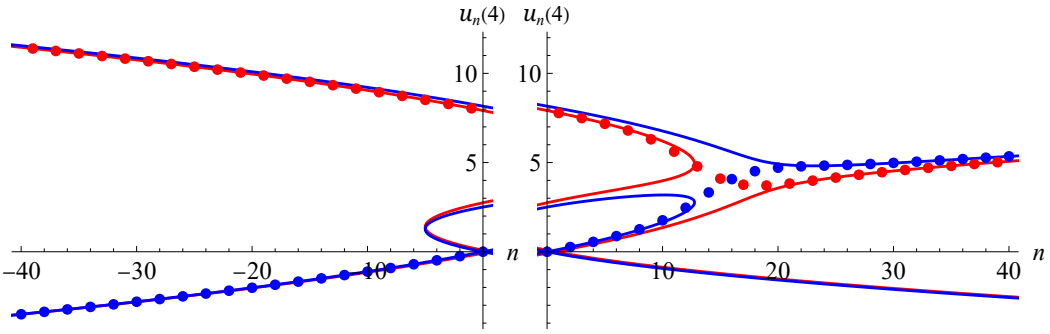

图18. 初始数据为（6.4）和（6.9）时，解的图像见 $b = 1/3$。

对于任意值 $b < 1/2$，至少在 $t \geq 0$范围内保持正则性。证明这一事实相当复杂，超出了本文的讨论范围。利用正交多项式理论可以得到这一结论，其核心是证明在 $t = 0$处，不等式$u_{2k}(0) < 0$ 和 $u_{2k+1}(0) > 0$ 成立；由此，按照与命题 5的证明类似的论证，可以推出这些函数在 $t > 0$ 时也保持同号。

初始数据为（6.4）和（6.9）时，解彼此互补；也就是说，对于 $t > 0$，正数点和负数点位于准定常曲线上同一分支的延续部分上，见图 18。特别地，注意到公式（6.9）可改写为等价形式:

$$u_{-1}(t) = 2t + (1 - 2b)\frac{H_{b-3/2}(t)}{H_{b-1/2}(t)},$$

并且与（6.5）比较可知，$u_{-1}(0) = u_1(0) = 2\Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{b}{2}\right)/\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{b}{2}\right)$。

7 全局正则解

考虑 dP 的公共准定常解问题$_{\mathrm{I}}$–P_{IV}，在 t 对所有 n都正则，并假设函数 u_n 均不恒等于零。在这样的解中，所有 u_n 都必须既无零点也无极点。我们将此类解称为整体正则解。将命题5证明中的论证加以推广，可得以下必要条件。

命题6。 只有在某个数 $n = k$ 满足以下条件时，才可能存在无零终止的整体正则准定常解：$\beta_{k-1} < 0$, $\beta_k = 0$ 以及 $\beta_{k+2m+1} \neq 0$对所有 m都成立。将编号平移，使 k 变为 *0* 后，这等价于 $-c = b > -1/2$ 和 b 都不是半整数。

证明。 假设所有 $\beta_n \neq 0$。每个函数 u_n 具有类型（3.2）–（3.5）之一的渐近行为，这决定了其符号为 $t \to -\infty$ 和 $t \to +\infty$。符号保持条件仅允许以下渐近行为类型对（在置换意义下；由于变换 $\tilde{u}_n(t) = -u_n(-t)$，该置换无关紧要）：

$$\begin{array}{llll} (D,A), & (D,B), & (D,C) & \text{for } \beta_n > 0, \\ (C,A), & (C,B), & (D,C) & \text{for } \beta_n < 0. \end{array}$$

命题 2 使得追踪到相邻函数 $u_{n\pm1}$ 的过渡成为可能。对 (C,B) 变为禁止对 (A,B)，因此也应将其舍弃。对 (D,B) 变为对 (D,B)。于是所有 u_n 必须具有同一类型的渐近行为，但由于对 $n\ll 0$ 有 $\beta_n<0$，对此类 n，对 (D,B) 成为禁止对。对 (D,A) 变为 (D,C)，(D,C) 变为 (D,A)，而 (C,A) 变为 (A,C)。因此，在这些对的序列中，总存在对 (D,A) 或 (C,A) 的子序列。前者在 $n\ll 0$ 时成为禁止对，后者在 $n\gg 0$ 时成为禁止对。因此，从任意一对渐近行为出发，当负的或正的 n 充分大时，我们都会到达一个违反符号保持的对。

因此，必须有 $\beta_k=0$，其中 k。由于假设 $u_k\neq 0$，此时 $\mathbf{dP_I}$ 方程可解为

$$u_{k-1}+u_k+u_{k+1}=2t.$$

我们来考察此处涉及的函数的渐近行为。经过变换 $\tilde{u}_n(t)=-u_n(-t)$，可以假设 u_k 具有如下零渐近：$t\to-\infty$；那么，当 $t\to+\infty$时，其渐近行为可能属于以下类型：A 或 B。根据命题 2 和3，可能出现以下情形：

u_{k-1}	u_k	u_{k+1}
$(A,\ C)$	$(0,\ A)$	$(D,\ C)$
(D,C)	$(0,A)$	$(A,\ C)$
$(A,\ B)$	$(0,B)$	(D,B)
(D,B)	$(0,B)$	$(A,\ B)$

最后两种情况被排除，因为它们涉及禁止对 $(A,\ B)$。因此，全局正则解中完全不会出现类型为 B 的渐近行为。

在第二种情况下，若 $\beta_{k-1}=0$，则 $u_{k-1}\sim(0,\ 0)$，这意味着 $u_{k-1}=0$ 恒成立，与假设矛盾。若 $\beta_{k-1}\neq 0$，则将解延拓至 u_{k-2} 可得$u_{k-2}\sim(D,\ A)$，这是禁止的，因为 $\beta_{k-2}=-2<0$。

只剩下第一种情况。考虑将解延拓到数列 $n<k$。若还有 $\beta_{k-1}=0$，则 $\beta_{k-2}=\beta_{k-3}=-2$，并且

$$u_{k-3}\sim(A,D),\quad u_{k-2}\sim(C,D),\quad u_{k-1}\sim(A,0),\quad u_k\sim(0,A),$$

满足禁止对 $(A,\ D)$。若 $\beta_{k-1}\neq 0$，则 $u_{k-1}\sim(A,\ C)$，由此得到限制条件$\beta_{k-1}<0$。设其成立；于是对所有 $n<k$，都有 $\beta_n<0$，并且序列由此产生

$$\ldots\ u_{k-4}\sim(C,A),\quad u_{k-3}\sim(A,C),\quad u_{k-2}\sim(C,A),\quad u_{k-1}\sim(A,C),$$

其中所有数对均为允许对。将解延拓到数列 $n>k$，在所有 $\beta_n\neq 0$ 的情况下，得到序列

$$u_{k+1}\sim(D,C),\quad u_{k+2}\sim(D,A),\quad u_{k+3}\sim(D,C),\quad u_{k+4}\sim(D,A),\quad\ldots,$$

其中所有数对均为允许对，因为 $\beta_{k+2m}=2m>0$。然而，如果某个参数 β_{k+2m+1}为零，则相应函数 u_{k+2m+1} 具有 $(0,\ 0)$ 型渐近行为，并恒等于零，这对应于具有零终止的序列，与假设矛盾。不难看出，这恰好与命题 5中讨论的情况相同，只需将编号平移，使零终止从点 $n=k+2m+1$ 移至点 $n=0$。

编号的平移使得可以不失一般性地令 $k=0$；于是限制条件变为 $\beta_{-1}=-1-b+c<0$、$\beta_0=-b-c=0$，从而得到所示不等式。

□

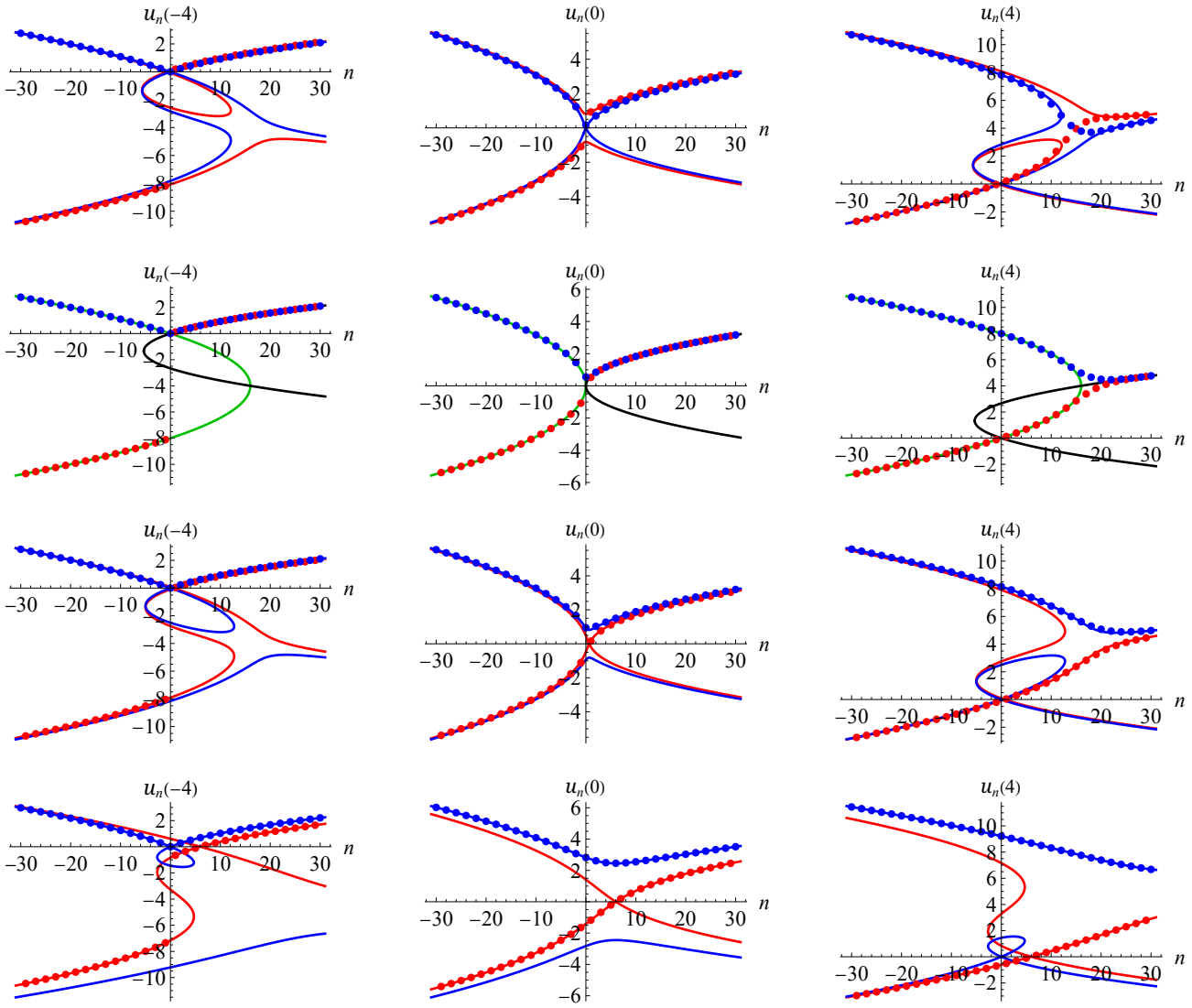

图 19. dP_I–P_{IV} 在参数值$-c = b = -1/3$、0、 $1/3$、3（自上而下）处的全局正则解。

数值实验表明，所指出的条件显然也是充分的。图 19 和 20 展示了对应于参数$b = -c$的若干可容许取值的正则解。正如我们所看到的，它们的一般行为与上一节所述的零终止情形相差不大；但与此同时，这些解更为复杂，是无法用特殊函数表示的超越解。

在本节的结论中应当指出，对所有 t 都要求正则性过于严格。上述解并未穷尽dP_I在固定 t 处的全部准定常解。例如，图10 所示的解是准稳态的，尽管其参数 β_n 无一为零。这是因为这些解在 t 中的演化会导致极点，而这些极点全都位于 $t < 0$。具有零终止和初始条件（6.9）的解族具有同样的性质。

图 21 展示了解的另一个示例，其参数为 $b = c = 0$。其中，函数具有以下类型的渐近行为： $u_n \sim (D, B)$ 当 $n > 0$, $u_0 \sim (0, B)$ 时；而当 $n < 0$ 时，类型为 (A, B) 和 (C, B) 的渐近行为交替出现。正如我们所见，出现类型 B

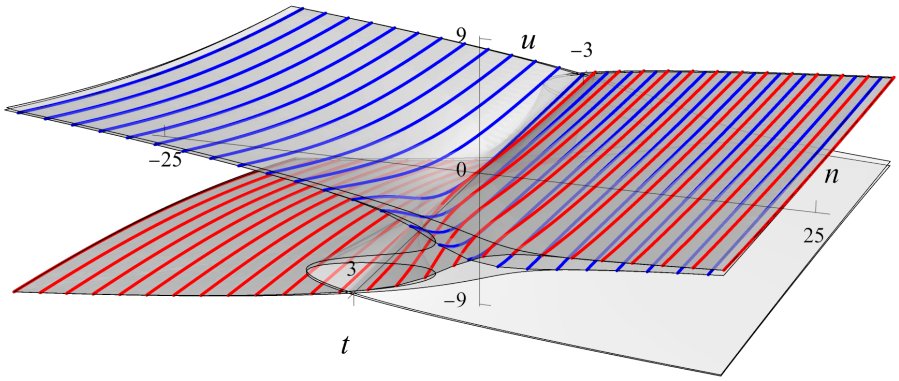

图20. 在 $-c=b=-1/3$ 处，关于 n 和 t 的 $\mathrm{dP_I}$–$\mathrm{P_{IV}}$ 全局正则解。

渐近行为必然导致极点的出现，但结果表明，这些极点全都位于半直线 $t>0$上。因此，当 $t>0$ 离开抛物线 C_1的上支时，会观察到准平稳性的急剧丧失。Aptekarev 和 Novokshenov [32]的论文研究了这一情形。然而，当 $t<0$ 时，不存在极点，解会以准稳态方式从抛物线 C_1 演变至抛物线 C_2。

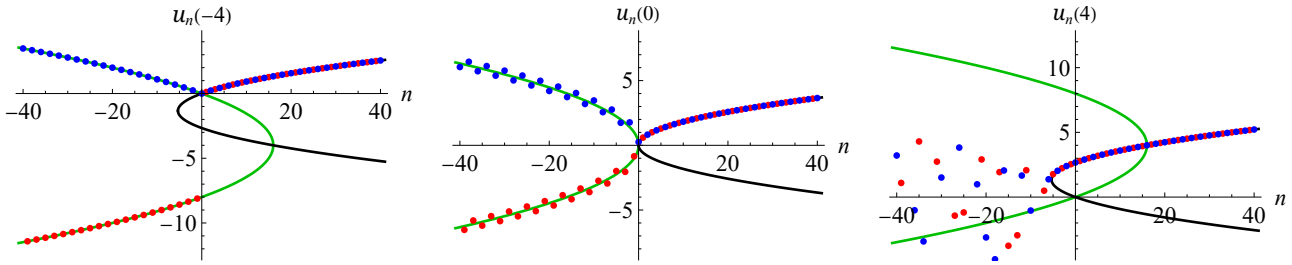

图21. 具有 B 型渐近行为的解，当 $t\to+\infty$ 时。

8 固定 t 时 n 的渐近行为

在本节中，我们构造一类级数，从某种意义上说，它们与第 3 节的级数互为对偶：现在 t 起固定参数的作用，我们考虑变量 $\nu=n-b$ 的展开式。原则上，可以按 $\sqrt{\pm\nu}$ 的负幂来构造这些展开式（如论文 [4] 中所述），但事实证明，采用求解定义准定常抛物线 C_1 或 C_2 的二次方程（2.3）、（2.5 时出现的根更为实用。这样做不仅对 $c=0$ 有依据，在一般情形下也同样如此，因为当 n 较大时，一般的准定常曲线（2.6）渐近地与这些抛物线重合。

8.1 $n\to+\infty$ 的级数

设 $\nu=n-b$ 为一个很大的正数。引入变量

$$z=\sqrt{3\nu+t^2}$$

并将$\mathrm{dP_I}$ 的解构造为形式级数的交错序列

$$\begin{aligned} u_n = F &= \frac{1}{3}z(1 + f_1/z + f_2/z^2 + \dots) \quad \text{at even } n, \\ u_n = G &= \frac{1}{3}z(1 + g_1/z + g_2/z^2 + \dots) \quad \text{at odd } n, \end{aligned} \tag{8.1}$$

其系数是 c 和 t 的函数（参数 b 仅在 z中出现）。为了考虑由项 $(-1)^n c$引起的公式差异，必须采用交替形式。 z 的正值对应于准稳态曲线 C_2^{+}上分支的解，负值对应于下分支。在邻近 n 的点处，变量 z 被替换为

$$z_{\pm 1} = \sqrt{3(\nu \pm 1) + t^2} = z\sqrt{1 \pm 3/z^2} = z\left(1 \pm \frac{3}{2z^2} - \frac{9}{8z^4} \pm \frac{27}{16z^6} - \cdots\right), \tag{8.2}$$

代入 $\mathrm{dP_I}$ 后得到函数方程

$$\begin{aligned} &3F(z)(G(z_{-1}) + F(z) + G(z_1) - 2t) + t^2 - z^2 + 3c = 0, \\ &3G(z)(F(z_{-1}) + G(z) + F(z_1) - 2t) + t^2 - z^2 - 3c = 0. \end{aligned} \tag{8.3}$$

为了构造解，必须将级数（8.2）代入级数（8.1）：

$$F\left(z_{\pm 1}\right) = \frac{1}{3}z_{\pm 1}(1 + f_1/z_{\pm 1} + f_2/z_{\pm 1}^2 + \dots)$$

对于 G，同样如此。由于级数 $z_{\pm 1}^{-k}$ 以 z^{-k}开头，幂 z^{-k} 只会出现在有限项中；因此，代入运算是有定义的，并且会得到与（8.1）同类型的级数。此外， z^{1-k} 的系数是原级数中下标不超过 k 的系数的线性组合，例如

$$F(z_{-1}) = \frac{1}{3}z\left(1 + \frac{f_1}{z} + \frac{2f_2 - 3}{2z^2} + \frac{f_3}{z^3} + \frac{8f_4 + 12f_2 - 9}{8z^4} + \dots\right).$$

因此，将所有级数代入 (8.3) 并合并 z的同次幂后，会得到如下形式的递推关系序列

$$f_k + 2g_k = \Phi(f_1, g_1, \dots, f_{k-1}, g_{k-1}), \qquad 2f_k + g_k = \Psi(f_1, g_1, \dots, f_{k-1}, g_{k-1}),$$

其中右端是二次多项式。因此，所有 f_k 和 g_k 都可以唯一确定为 t和 c的多项式。级数 F 的前几项为

$$F = \frac{z}{3}\left(1 + \frac{t}{z} - \frac{9c}{2z^2} - \frac{9ct}{z^3} + \frac{3(1 + 9c^2 - 48ct^2)}{8z^4} + \frac{3t(1 + 36c^2 - 96ct^2)}{8z^5} + \cdots\right)$$

（用计算机计算 100 项并不困难，甚至可以计算更多项）。下面列出所构造级数的一些性质。

命题7. *1)* 级数 F 与 G 在 c的符号上不同：

$$G(c, t, z) = F(-c, t, z). \tag{8.4}$$

2) 级数 F 满足恒等式

$$F(-c,it,iz)=iF(c,t,z),\qquad F(c,-t,-z)=-F(c,t,z). \tag{8.5}$$

3) 级数 *(8.1)* 满足 *Volterra* 格 $u_n'=u_n(u_{n+1}-u_{n-1})$，考虑到公式 *(8.4)* 和关系 $\partial z/\partial t=t/z$，这等价于恒等式

$$\frac{\partial F}{\partial t}(c,t,z)+\frac{t}{z}\frac{\partial F}{\partial z}(c,t,z)=F(c,t,z)(F(-c,t,z_1)-F(-c,t,z_{-1})), \tag{8.6}$$

其中 $z_{\pm1}=z\sqrt{1\pm3/z^2}$。

证明。1) 方程组 (8.3) 在置换 F 和 G 并同时~改变 c的符号后保持不变，即在变换 $F(c,t,z)=G(-c,t,z)$，$G(c,t,z)=F(-c,t,z)$下保持不变。此变换使级数 (8.1) 的首项系数保持不变，而由于后续~系数由唯一确定，这意味着 $F(c,t,z)=F(c,t,z)$，正如所需。

2) 证明类似：方程组 (8.3) 在变换~对 G作相同变换，并考虑到前述性质~）。这里，级数 F 的首项系数不变，而且由于后续系数都唯一确定，因此 $F(c,t,z)=F(c,t,z)$，这正是所需的结论。第二个恒等式显然是第一个恒等式的推论。

3) 设 $u_n(t)$是 $\mathrm{dP_I}$ 方程的任意一个解

$$u_n(u_{n-1}+u_n+u_{n+1})=2tu_n+\nu-(-1)^nc.$$

考虑将其代入 Volterra 格时的残差，即定义下列量

$$r_n=u_n'-u_n(u_{n+1}-u_{n-1}). \tag{8.7}$$

对 $\mathrm{dP_I}$ 关于 t求导，利用此等式，并借助点 $n\pm1$处的 $\mathrm{dP_I}$ 方程消去由此产生的变量 $u_{n\pm2}$。不难验证，这将得到关于残差的下列方程：

$$(u_{n-1}+u_n+u_{n+1})r_n+u_n(r_{n-1}+r_n+r_{n+1})=2tr_n.$$

现在令变量 u_n 由级数（8.1）给出。不难看出，此时量（8.7）也是关于 z的负幂级数，从某个幂次开始，我们将其记为 k:

$$r_n=\frac{a_k(t)}{z^k}+\frac{a_{k+1}(t)}{z^{k+1}}+\dots.$$

考虑到 $z_{\pm1}=z+O(z^{-1})$，u_{n-1}、u_n、u_{n+1}的展开式首项相同，且等于 $z/3$。同理，r_{n-1}、r_n、r_{n+1} 的展开式首项相同，且等于 a_k/z^k。但是，由上面写出的方程可知，首项给出 $a_k=0$，这意味着整个级数等于零。

□

利用性质1）和2）有助于更高效地计算级数的系数。特别地，在 $c=t=0$处，我们有 $F(0,0,iz)=iF(0,0,z)$，这意味着在这种情况下，展开实际上按 $z^{-4}\propto\nu^{-2}$ 的幂展开（不计公因子 z），且非零系数只有 f_{4k}。

性质 3) 意味着，t 中的演化由 Volterra 格或等价地由 $\mathrm{P_{IV}}$ 方程支配，会保留级数（8.1）给出的渐近行为，也就是说，不会破坏准定常性。需要注意的是，这一性质并非显而易见，因为在构造该级数时，我们只使用了 $\mathrm{dP_I}$ 方程本身，并未使用 $\mathrm{P_{IV}}$ 方程或格（1.2）。

8.2 当 $n \to -\infty$ 时的级数

现在设 $\nu = n - b$ 为一个绝对值很大的负数。我们沿用上一小节中的记号 z、F、G，但以不同的方式定义它们；这不应造成误解。由于方程（2.5）的解具有 $u = t \pm \sqrt{t^2 - \nu}$ 的形式，令

$$z = \sqrt{t^2 - \nu},$$

并将 $\mathrm{dP_I}$ 的解构造为以下级数形式

$$\begin{aligned} u_n &= t + F = t + z(1 + f_1/z + f_2/z^2 + \dots) \quad \text{at even } n, \\ u_n &= t - G = t - z(1 + g_1/z + g_2/z^2 + \dots) \quad \text{at odd } n. \end{aligned} \tag{8.8}$$

与公式 (8.1不同的是，这里我们不将项 t 纳入系数 f_1，g_1，并且改变级数 G前的符号，因为各点交替趋近曲线 $C_2^{\pm}$ 的上支和下分支（更准确地说，若 $z > 0$，则偶数 n 对应于 C_2^{+}的上支，奇数项对应于 C_2^{-}的下分支；若 $z < 0$，则偶数项n 对应于 C_2^{+}的下分支，奇数项对应于 C_2^{-}的上支）。将 n平移 ± 1时，变量 z 被替换为

$$z_{\pm 1} = \sqrt{t^2 - \nu \mp 1} = z\sqrt{1 \mp 1/z^2} = z\left(1 \mp \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{8z^4} \mp \frac{1}{16z^6} - \cdots\right),$$

代入 $\mathrm{dP_I}$ 后得到函数方程组

$$\begin{aligned} &(t + F(z))(t - G(z_{-1}) + F(z) - G(z_1)) + z^2 - t^2 + c = 0, \\ &(t - G(z))(t + F(z_{-1}) - G(z) + F(z_1)) + z^2 - t^2 - c = 0. \end{aligned} \tag{8.9}$$

与前面一样，将这里的 $z_{\pm 1}$ 级数代入并合并 z的同次幂，我们得到系数的递推方程序列，它甚至比方程组 (8.3) 的递推方程更简单，因为可以直接对 f_k，g_k 求解：

$$f_k = \Phi(f_1, g_1, \dots, f_{k-1}, g_{k-1}), \qquad g_k = \Psi(f_1, g_1, \dots, f_{k-1}, g_{k-1}),$$

其中，右端是二次多项式。因此，所有 f_k 和 g_k 都可唯一地表示为关于 t 和 c的多项式。级数 F 的前几项形式如下

$$\begin{aligned} F = z\Bigg(1 - \frac{c}{2z^2} - \frac{ct}{z^3} + \frac{1+3c^2}{8z^4} - \frac{(1+4c^2)t}{8z^5} + \frac{5c+3c^3-4(1+6c^2)t^2}{16z^6} + \frac{c(13+12c^2)t}{8z^7} \\ - \frac{24+138c^2+45c^4+160(c+c^3)t^2}{128z^8} + \frac{(77+488c^2+144c^4)t - 32c(11+16c^2)t^3}{128z^9} + \cdots\Bigg). \end{aligned}$$

构造出的级数的性质列于以下命题中。其证明与命题 7 的证明十分相似，可以省略。

命题 8. *1)* 级数 F 和 G 之间满足关系

$$G(c, t, z) = -F(-c, t, -z). \tag{8.10}$$

2) 级数 F 满足恒等式

$$F(-c, it, iz) = iF(c, t, z), \qquad F(c, -t, -z) = -F(c, t, z). \tag{8.11}$$

3) 级数 *(8.8)* 满足 *Volterra* 格 $u_n' = u_n(u_{n+1} - u_{n-1})$，这等价于恒等式

$$1 + \frac{\partial F}{\partial t}(c,t,z) + \frac{t}{z}\frac{\partial F}{\partial z}(c,t,z) = (t + F(c,t,z))(F(-c,t,-z_1) - F(-c,t,-z_{-1})), \tag{8.12}$$

其中 $z_{\pm 1} = z\sqrt{1 \mp 1/z^2}$。

除了对准定常解渐近行为进行论证所具有的理论价值外，级数（8.1）和（8.8）在数值计算中也很有用。与第3节的级数一样，它们虽然发散，但当 n 较大时，若取到绝对值最小项为止的部分和，便能很好地逼近解。这使我们能够在 n较大时，为柯西问题非常精确地选取初始数据。现在回到第2.2节末所述的实验：通过直接在抛物线 C_1 上选取初始数据，构造了在一个小区间内接近该抛物线的解（见图4）。现在我们用级数（8.1）来选取初始数据，重复同样的实验。结果表明，即使只计入最初几项修正，也能显著延长准稳态区间；如果初始数据的计算精度达到约一百个十进制位数，就可以重现图21所示的解。同样，利用级数（8.8）可以得到图19所示的全局正则解。实际上，这种方法甚至比求解 $\mathrm{P_{IV}}$的边值问题更有效。

9 过渡区域中的级数 $\nu \sim t^2$

考察象限 $\nu > 0$, $t > 0$中的解，可以发现，在缩放 $(\nu, t, u) \mapsto (\alpha^2\nu, \alpha t, \alpha u)$ 下，解的轮廓几乎不变，其中 $\alpha > 0$ 是任意数，见图 22（作为一个具体示例，图中展示了在 $b = 1/3$处零终止的解，也就是说，这与图 16 底部所示的解相同，只是 t的取值不同。不过，接下来的讨论同样适用于没有零终止的解）。当t较大时，经过变量变换 (2.9) 后，解的轮廓趋于抛物线 (2.10)，这意味着可以将其视为渐近自相似。这里，两条抛物线之间过渡区的相对宽度（即 $\nu = t^2$附近的宽度）趋于 0，但其在原变量 n 中的绝对宽度却不断增大。关于这一范围的黎曼–希尔伯特方法研究见论文 [

24], 对于情形 $c = 0$。我们将使用

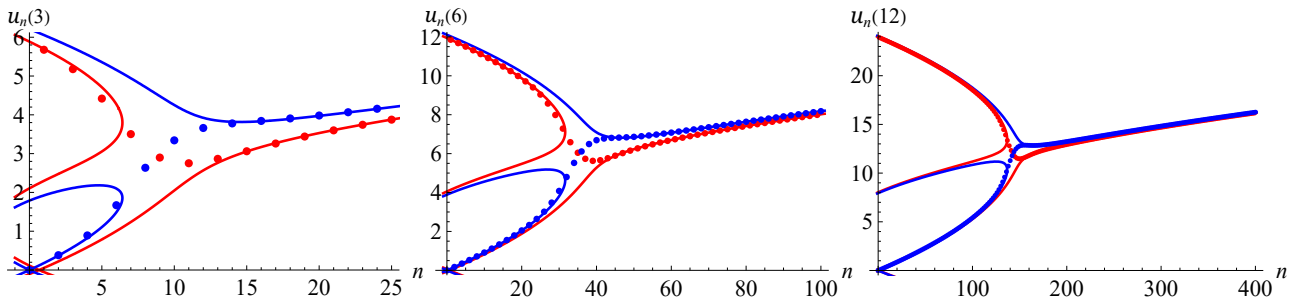

图 22. $\mathrm{dP_I}$ 解的自相似性。

匹配法 [34]。为了描述过渡区，我们引入伸展变量

$$x = t^{4/3}(\nu/t^2 - 1), \tag{9.1}$$

并以级数的形式构造解

$$\begin{aligned} u_n = P &= t(1 + t^{-2/3}p_1(x) + t^{-4/3}p_2(x) + \dots) \quad \text{at even } n, \\ u_n = Q &= t(1 + t^{-2/3}q_1(x) + t^{-4/3}q_2(x) + \dots) \quad \text{at odd } n. \end{aligned} \tag{9.2}$$

下面说明如何得到变换（9.1），以及由此对系数 p_1 和 q_1产生了哪些条件。经过该变换后

$$z = t\sqrt{1-\rho}, \qquad \nu = t^2\rho, \tag{9.3}$$

偶数 8.8）级数（ n 可改写为关于 t负幂的以下级数形式

$$u_n = t(1 + \sqrt{1-\rho}) + \frac{P_1(\sqrt{1-\rho})}{(1-\rho)t} + \frac{P_2(\sqrt{1-\rho})}{(\sqrt{1-\rho})^5 t^3} + \frac{P_3(\sqrt{1-\rho})}{(1-\rho)^4 t^5} + \cdots, \tag{9.4}$$

其中

$$P_1 = -c\left(1 + \frac{\sqrt{1-\rho}}{2}\right), \quad P_2 = -\frac{1+6c^2}{4} - \frac{(1+4c^2)\sqrt{1-\rho}}{8} + \frac{(1+3c^2)(1-\rho)}{8},$$
$$P_3 = -\frac{c(11+16c^2)}{4} - \frac{5c(1+c^2)\sqrt{1-\rho}}{4} + \frac{c(13+12c^2)(1-\rho)}{8} + \frac{c(5+3c^2)(\sqrt{1-\rho})^3}{16}, \dots.$$

在点 $\rho = 1$ 处，该级数的系数具有越来越强的奇点。因此，根据匹配法 [34], ，在该点附近必须从变量 ρ 转换为伸展变量

$$x = (\rho - 1)t^{\kappa},$$

要求经过这种伸缩后，级数（9.4）中的各项在 t 的主项中具有相同的阶（第一项 t除外）。由此得到条件 $t^{3\kappa/2-2} = 1$，据此可知应取 $\kappa = 4/3$；这恰好得到公式（9.1）。经过这种伸缩，级数（9.4）变为级数（9.2）中的第一个级数。类似地，对级数（8.8）中的第二个级数作相同变换，可得到（9.2）中的第二个级数。在这里，两个变换后级数的系数本身又是关于 $\sqrt{-x}$负幂的形式级数。特别地，系数 $p_1(x)$ 和 $q_1(x)$ 具有如下形式

$$p_1(x) = \sqrt{-x} + \frac{c}{x} - \frac{1+6c^2}{4(\sqrt{-x})^5} + \sum_{j>2} \frac{p_{j,1}(c)}{(\sqrt{-x})^{3j-1}}, \tag{9.5}$$

$$q_1(x) = -\sqrt{-x} - \frac{c}{x} + \frac{1+6c^2}{4(\sqrt{-x})^5} + \sum_{j>2} \frac{q_{j,1}(c)}{(\sqrt{-x})^{3j-1}}, \tag{9.6}$$

其中，p_j,1(c) 和q_j,1(c) 是由参数 c唯一确定的多项式。根据匹配法，解 u_n 在点 $\rho = 1$ 邻域内的渐近行为应构造为级数 (9.2) 的形式，其中系数 p_j(x) 和 q_j(x) 对所有 x 都是光滑的；此外， p_1(x) 和 q_1(x) 在 $x \to -\infty$ 时的完整渐近展开必须由公式 (9.5)、(9.6) 确定。这些公式中的平方根 $\sqrt{-x}$ 的符号

取决于偶数下标变量在 $t \to +\infty$时趋近准定常曲线的哪一支： C_2^+的上支对应正号，而下分支（如图 22所示）对应负号。为明确起见，以下我们考虑平方根的正值。

级数（9.2）的若干系数由以下命题给出。我们只考虑前三个系数，因为后续系数的表达式相当繁复。

命题 9. 当且仅当系数 $_I$ 为常微分方程 $p_1 = p$ 的任意解时，*dP*的方程与 *Volterra* 格存在形如（*9.2*）的形式级数形式的公共解。

$$p'' = \frac{1}{2}p^3 + \frac{x}{2}p + c. \tag{9.7}$$

所有其他系数都能唯一表示为 p、 p' 和 x的多项式；特别地，

$$q_1 = -p, \qquad q_2 = p_2 = \frac{1}{4}(p^2 + x),$$
$$q_3 = -p_3 = \frac{3}{20}(p')^3 - \frac{9p^4 + 18xp^2 + 72cp - 23x^2}{240}p' + \frac{3p^3 - 13xp + 18c}{240}.$$

证明。 在这种情况下，系数的递推方案比第 8 节中的级数更为复杂。回顾一下，在那里只需使用 $\mathrm{dP_I}$ 方程计算系数，而结果自动满足 Volterra 格。现在必须同时使用两个方程，但更方便的做法不是将级数代入这两个方程，而是代入 $\mathrm{P_{IV}}$ 方程（1.4）以及定义 B¨acklund 变换的关系式（1.6）。这是等价的，因为 $\mathrm{dP_I}$ 和 Volterra 格均由这组方程导出，反之亦然。代入时，根据公式（9.1），应注意

$$\nu = t^2(xt^{-4/3} + 1), \quad dx/dt = -2x/(3t) - 2t^{1/3}, \quad x_{\pm 1} = t^{4/3}((\nu \pm 1)/t^2 - 1) = x \pm t^{-2/3}.$$

代入$_{\mathrm{IV}}$ 级数 P，对于偶数 n，并收集 t各幂的系数，我们在主导阶得到关于9.7的方程（ p_1），而后续各阶给出一系列如下形式的关系

$$4p_j'' - 2(3p_1^2 + x)p_j = \text{ a differential polynomial in } p_{j-1}, \dots, p_1, x. \tag{9.8}$$

接下来，将关系式（1.6）改写为如下形式

$$u_n = \frac{u_{n-1}' - u_{n-1}^2 + 2tu_{n-1} + \beta_{n-1}}{2u_{n-1}}, \qquad u_n = \frac{-u_{n+1}' - u_{n+1}^2 + 2tu_{n+1} + \beta_{n+1}}{2u_{n+1}}.$$

取 n 奇数，将第一个方程中的 u_n 替换为级数 $Q(t,\ x)$，并将 u_{n-1} 替换为 $P(t,\ x - t^{-2/3})$。将右侧按 $t^{-2/3}$ 展开成级数后，便可得到 q_j关于 p_{j-1}、.....、 p_1、 x的微分多项式形式的显式表达式。然而，若考虑这两个方程之差，则再次只会得到关于 p_j 的关系；追踪最高阶导数后，我们发现它们具有如下形式

$$4p_j''' - 2(3p_1^2 + x)p_j' - 2(6p_1p_1' - 2j + 3)p_j = \text{ a differential polynomial in } p_{j-1}, \dots, p_1, x.$$

从中减去求导后的关系式（9.8），即可得到 p_j的显式表达式。因此，所有系数 p_j、 q_j都可通过 p、 p'以多项式形式表示，正如所声称的那样。将求得的 p_j 代入（9.8），根据（9.7）可得一个恒等式，且不会产生关于 p 的其他关系。 □

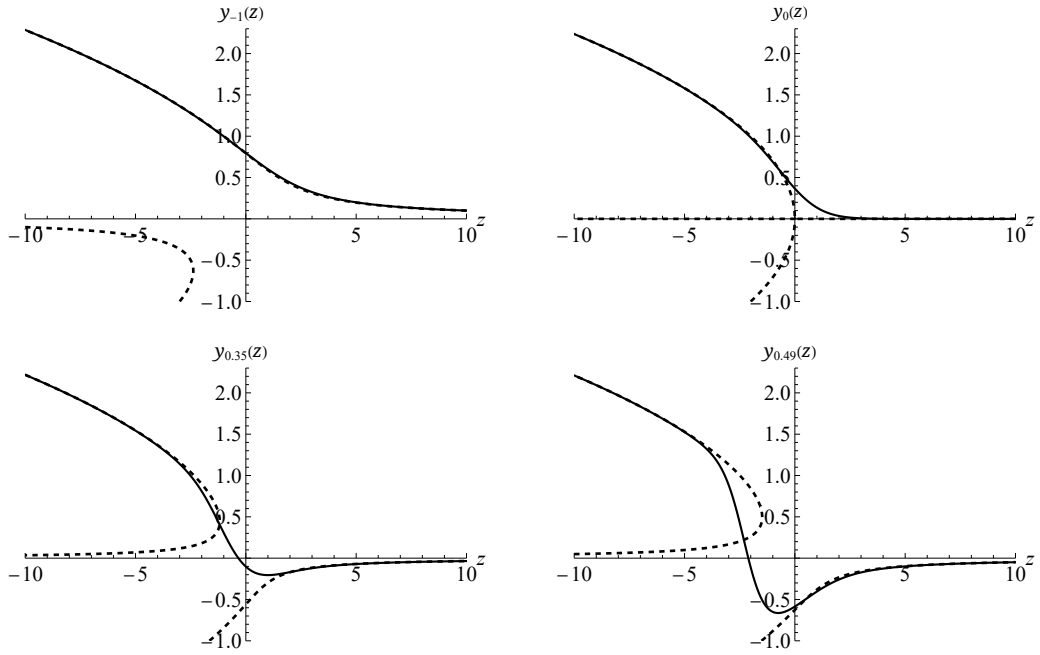

图23. P_{II} 方程（9.9），对应参数值$c=-1$，$c=0$（Hastings–McLeod解本身），$c=0.35$ 和 $c=0.49$。虚线对应准定常曲线 $2y^3+zy+c=0$。

变换 $p(x)=2^{2/3}y(z)$，$z=2^{-1/3}x$ 将（9.7）化为 P_{II} 方程

$$y''=2y^3+zy+c. \tag{9.9}$$

我们所需的方程（9.7的解必须具有渐近行为（9.5），当$x\to-\infty$ 时，这一要求得出如下结论：只要解 $p_1(x)$ 在整个实轴上光滑x，那么当 $c<1/2$时，它就与已知特殊 Hastings–McLeod 解的一种推广相重合[35]。这项推广在论文的定理1.1中予以描述 [36]。不同参数值下解的曲线见图23。当 $c\leqslant 0$ 时，此解为正且单调 [37]。

注8. 更确切地说，[36] 的定理1.1指出，对于任意实数 $c<1/2$，该方程存在唯一解，它在所有实数 x上均光滑，并具有如下渐近行为：$p_1\sim\sqrt{-x}$，当$x\to-\infty$时，且 $\lim_{x\to+\infty}xp_1(x)=-2c$。根据论文 [38] 中的引理1.1和一般的Kuznetsov定理 [39], [40]（有关该解在 $x\to-\infty$ 时、对于 $c=0$的渐近行为，详见论文 [28]中的注4），可知当 $x\to-\infty$时，该解实际上具有完整渐近展开（9.5）。类似地，利用 [38] 中的引理1.1和一般的Kuznetsov定理，可以证明当 $x\to\infty$时，方程（9.7）的Hastings–McLeod解的这一推广在$c\neq 0$、$c<1/2$的情况下，其完整渐近展开具有如下形式

$$p_1=-\frac{2c}{x}+\sum_{j=2}^{\infty}\frac{a_j}{x^j}. \tag{9.10}$$

对于 $c=0$，Hastings–McLeod解在 $x\to\infty$ 时指数地趋于零。

此外，下述命题成立。

命题 10. 方程 $y(z)$ 的任意解(9.9)，若对所有 z均正则，且具有正平方根渐近 $y \sim \sqrt{-z/2}$ 当 $z \to -\infty$时，则必然具有如下渐近行为

$$y(z) \sim -\frac{c}{z} \quad (c \neq 0), \qquad y(z) = o(z^{-1}) \quad (c = 0), \qquad z \to +\infty.$$

证明。设方程（9.9）的一个实解在所有充分大的正 z上均正则。我们证明，当 $z \to +\infty$时，它是有界的。这里 c 可以是任意实数。

选取 $M > 1$，使不等式 $M^3 > |c|$ 成立。对于 $z \geq 0$ 和 $y \geq M$，我们有

$$y'' = 2y^3 + zy + c \geq y^3. \tag{9.11}$$

如果在某一点 z_0 同时满足 $y(z_0) \geqslant M$ 和 $y'(z_0) \geqslant 0$，那么在继续延拓时，解 y会增大，并始终不小于 M。事实上，只要 $y \geqslant M$，我们就有

$$y'(z) \geqslant y'(z_0) + M^3(z - z_0) > 0 \qquad (z > z_0)$$

再积分一次后，

$$y(z) \geqslant y(z_0) + y'(z_0)(z - z_0) + \frac{M^3}{2}(z - z_0)^2 > M.$$

还需证明条件 $y \geqslant M$ 不会被破坏。它在 z_0的某个右邻域内成立。若 $y(z_0) > M$，这显然成立；若 $y(z_0) = M$，则由 $y'(z_0) > 0$可得；若 $y'(z_0) = 0$，则由 $y''(z_0) > 0$可得。

现在假设该解随后降至 M 以下。那么存在首次返回点$z_1 > z_0$，回到水平 M，且当 $z_0 < z < z_1$时， $y(z) > M$。但是，将上述估计应用于 $[z_0, z_1]$，可得

$$y(z_1) \geqslant M + \frac{M^3}{2}(z_1 - z_0)^2 > M,$$

这与 $y(z_1) = M$ 矛盾。

进一步将（9.11）乘以 $y' \geqslant 0$ 并进行积分，得到

$$y'(z)^2 \geqslant \frac{1}{2}y(z)^4 - C.$$

在整个右半轴上具有正则性的假设下，不等式 $y'' \geqslant M^3$ 首先保证 y 无界增长，随后最后一个估计给出：当 y 充分大时， $y' \geq y^2/2$ 。记 $Y = y(z_1)$ 为这样的固定正水平，使得当 $z \geqslant z_1$ 时，估计 $y' \geqslant y^2/2$ 成立。积分得

$$\frac{1}{Y} - \frac{1}{y(z)} = \int_{z_1}^{z} \frac{y'(t)}{y(t)^2}\, dt \geqslant \frac{z - z_1}{2}.$$

因此，

$$0 < \frac{1}{y(z)} \leqslant \frac{1}{Y} - \frac{z - z_1}{2}.$$

在 $z = z_1 + 2/Y$ 处，右端等于零，由此得到矛盾。因此，在无限右区间上，不存在满足估计 $y' \geqslant y^2/2$ 的正解。

因此，在点 $z = z_0$ 处出现这样的数值集合 y， y' ，与整个右半轴上的正则性不相容。因此，在任何满足 $y > M$ 的区间上，必然有 $y' < 0$。但是

不可能无限久地停留在这个区域内：不等式 $y'' \geq M^3$ 会迫使导数变为正。因此，解会离开该区域，并且此后不可能再向上穿过水平线 M。

将相同的论证应用于 $-y$，可得

$$|y(z)| \leqslant M$$

对于所有充分大的 z。因此，对于所有 z，方程 (9.9) 的任意全局光滑解都必然满足有界性，且当 $z \to +\infty$时有界。由此有界性即可推出精确的首项渐近行为

$$\lim_{z\to+\infty} zy(z) = -c.$$

事实上，固定任意一个 $\varepsilon > 0$，并引入障碍函数

$$U(z) = \frac{-c+\varepsilon}{z}, \qquad L(z) = \frac{-c-\varepsilon}{z}.$$

对于上障碍函数

$$2U^3 + zU + c - U'' = \varepsilon + O(z^{-3}) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

当 z充分大时。设 $w = y - U$。那么

$$w'' = \big(z + 2(y^2 + yU + U^2)\big)w + \big(2U^3 + zU + c - U''\big).$$

由于

$$y^2 + yU + U^2 \geq 0,$$

在 $w > 0$ 成立的每个区域中

$$w'' \geqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

有界函数 w 在这样的不等式下不能一直保持为正直至 $+\infty$ （将其积分两次，我们得到

$$w'(z) \geqslant w'(a) + \frac{\varepsilon}{2}(z-a), \qquad w(z) \geqslant w(a) + w'(a)(z-a) + \frac{\varepsilon}{4}(z-a)^2;$$

第二个不等式的右端趋于 $+\infty$，即使 $w'(a) < 0$也是如此，这与 w的有界性相矛盾）。它也不能具有两个有限零端点的正分量：这将与凸性相矛盾。因此，对于充分大的 z

$$y(z) \leqslant U(z).$$

类似地，考虑 $L - y$，我们得到

$$L(z) \leqslant y(z).$$

因此，

$$-c - \varepsilon \leq zy(z) \leqslant -c + \varepsilon,$$

这就证明了所需的极限。特别是，

$$y(z) \sim -\frac{c}{z} \quad (\text{for } \ c \neq 0), \qquad y(z) = o(z^{-1}) \quad (\text{for } \ c = 0). \qquad \square$$

对于 c的其余取值，结果表明，当 $z \to -\infty$ 时具有正平方根渐近的解 $y(z)$不可能在整个轴 z上正则。

命题11。 对于 $c \geqslant 1/2$，常微分方程的所有解 (9.9) 若具有渐近行为 $y \sim \sqrt{-z/2}$当 $z \to -\infty$ 时，必然存在极点。

证明。 我们从阈值情形 $c = 1/2$ 开始。令

$$v(z) = y'(z) - y(z)^2 - \frac{z}{2}.$$

利用方程 (9.9) 直接求微分可得

$$v' = y'' - 2yy' - \frac{1}{2} = -2yv.$$

因此，对于原正则区间中的固定点 z_0

$$v(z) = v(z_0) \exp\left(-2 \int_{z_0}^{z} y(s)\, ds\right). \tag{9.12}$$

渐近展开 (9.5) 的有效性意味着

$$-2 \int_{z_0}^{z} y(s)\, ds = \frac{2\sqrt{2}}{3}(-z)^{3/2}(1 + o(1)), \qquad z \to -\infty.$$

因此，若 $v(z_0) \neq 0$，则 $|v(z)|$ 的增长速度快于 $|z|$的任意次幂。我们证明这是不可能的。由渐近行为 (9.5) 和方程 (9.9) 可得，当 $z \to -\infty$时，估计式

$$y(z) = O((-z)^{1/2}), \qquad y''(z) = O((-z)^{3/2})$$

保持。对于足够大的负值 z，整个区间 $[z, z+1]$ 都属于原正则区间。精确的泰勒公式

$$y(z+1) - y(z) = y'(z) + \int_0^1 (1-s) y''(z+s)\, ds$$

给出 $y'(z) = O((-z)^{3/2})$。因此， $v(z) = O((-z)^{3/2})$ 当 $z \to -\infty$ 时，这与 9.12 式在 $v(z_0) \neq 0$下成立相矛盾。因此， $v \equiv 0$ 且 $y(z)$ 是 Riccati 方程的一个解

$$y' = y(z)^2 + z/2,$$

通过代入 $y = -u'/u$，它可化为线性方程

$$u'' + \frac{z}{2} u = 0. \tag{9.13}$$

其一般实解可用经典艾里函数表示

$$u(z) = \gamma_1 \operatorname{Ai}(-az) + \gamma_2 \operatorname{Bi}(-az), \qquad a = 2^{-1/3},$$

其中 $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ 以及 $(\gamma_1, \gamma_2) \neq (0, 0)$。

当 $x \to +\infty$ 时，渐近行为

$$\frac{\mathrm{Ai}'(x)}{\mathrm{Ai}(x)} \sim -\sqrt{x}, \qquad \frac{\mathrm{Bi}'(x)}{\mathrm{Bi}(x)} \sim \sqrt{x}, \qquad \frac{\mathrm{Ai}(x)}{\mathrm{Bi}(x)} \to 0, \qquad \frac{\mathrm{Ai}'(x)}{\mathrm{Bi}'(x)} \to 0$$

成立。因此 $\gamma_2 \neq 0$。（然后，当 $z \to -\infty$

$$y(z) = -\frac{u'(z)}{u(z)} \sim a\sqrt{-az} = \sqrt{-z/2},$$

而对于 $\gamma_2 = 0$，该渐近行为的首项符号将相反。）线性方程（9.13）的任意非零实解在 $z \to +\infty$时都有无穷多个零点：例如，这可由该方程与 $w'' + w = 0$ 在 $z \geq 2$时的斯图姆比较定理推出。

u 的所有零点都是单零点，因为若同时满足等式 $u(z_*) = u'(z_*) = 0$，则会推出$u \equiv 0$。因此，每个零点都对应着 $y(z)$ 的一个真正的一阶极点。

现在考虑不等式 $c > 1/2$ 的情形。令

$$F(z) = y'(z) - y(z)^2 - \frac{z}{2}.$$

Painlev方程（9.9）意味着以下精确等式

$$F' + 2yF = c - \frac{1}{2}.$$

将给定的渐近行为细化为 $z \to -\infty$，并计入导数，可得

$$y(z) = \sqrt{-z/2} + \frac{c}{2z} + O(|z|^{-5/2}), \qquad F(z) = \frac{c - \frac{1}{2}}{\sqrt{-2z}} + O(|z|^{-2}).$$

因此，对于 r $c > 1/2$ 且充分大的负 z，我们有不等式 $F(z) > 0$.

只要解保持正则，这个不等式在向右运动的过程中就会保持成立：在任何满足 $F = 0$ 的点，不等式

$$F' = c - \frac{1}{2} > 0,$$

都成立，因此不可能从正值变为负值。于是，

$$y' > y^2 + \frac{z}{2}.$$

现在假设该解在整个实轴上都是正则的。对于 $z \geq 0$

$$y'(z) > \frac{z}{2}, \qquad y(z) > y(0) + \frac{z^2}{4}.$$

因此，存在 $z_1 > 0$ 使得 $y(z_1) > 0$。此外， $y' > y^2$，由此

$$\left(\frac{1}{y}\right)' < -1, \qquad \frac{1}{y(z)} < \frac{1}{y(z_1)} - (z - z_1).$$

最后一个不等式的右端在有限时间内变为零，这与正 y的整体正则性相矛盾。

□

现在我们证明，对于 $c<1/2$，在 Painlev´e II 层中对 $\mathrm{dP_I}$ 的解进行重排之后， u_n 偶数下标的变量进入一种渐近状态，其主导阶由准定常曲线 C_2^+描述，而解 $u_n(t)$ 的奇数下标则进入一种渐近状态，其主导阶由曲线 C_2^-给出。为此，我们证明，对于9.10中的渐近行为（其主导项 $-2c/x$ 由第二 Painlev´e 方程（9.7）的准稳态部分$(p^3+xp)/2+c=0$ 而言，

$$\gamma_1 t^{-4/3+\delta}<\rho-1<\gamma_2 t^{-4/3+\delta} \tag{9.14}$$

(其中 γ_1、 γ_2 为正实常数，而 δ 是区间$(0,1/3)$中的任意实常数）与准定常曲线 $t\to\infty$在 C_2^+ 趋于 (2.6) 所定义的相应方程的行为一致。

事实上，作变换 $u=tU$ 并作第二个变换（9.3）后，式（2.6）的这种情形可化为如下方程

$$\begin{aligned}P(U-1;t,\rho-1)=3(U-1)^4+4(U-1)^3+2(\rho-1)(2(U-1)+(U-1)^2)-(\rho-1)^2+\\ \frac{c}{t^2}\big(8+12(U-1)+2(\rho-1)+6(U-1)^2\big)-\frac{c^2}{t^4}=0.\end{aligned} \tag{9.15}$$

当 $U=1/2$ 和 $\rho-1>\gamma_0 t^{-4/3+\delta}$ 取值为 $0<\gamma_0<\gamma_1$时，对于充分大的 t 值，该方程的左端为一个必定为负的量

$$P(-1/2;t,\rho-1)=-\frac{5}{16}-\frac{3}{2}(\rho-1)-(\rho-1)^2+\frac{c}{2t^2}(7+4(\rho-1))-\frac{c^2}{t^4}<0.$$

与此同时，对于 $U\geqslant 1/2$的取值，该多项式关于 U的导数

$$P_U(U-1,t,\rho-1)=4U\left(3(U-1)^2+\rho-1+\frac{3c}{t^2}\right),$$

满足不等式

$$P_U(U-1,t,\rho-1)\geqslant(\rho-1)>0 \tag{9.16}$$

（因为根据不等式 $\rho-1>\gamma_0(t^{-4/3+\delta})$，量 $t^{-2}(\rho-1)^{-1}$ 一致趋于零，并且

$$\rho-1+\frac{3c}{t^2}\geqslant\frac{\rho-1}{2}$$

当 t 足够大时。因此，由于当 $U\to\infty$ 时，多项式$P(U-1,t,\rho-1)$ 的值在主导阶由项 $3U^4$ 决定，可知在射线$U\in(1/2,\infty)$上，方程（9.15）存在唯一解 $U(t,\rho-1)$。当 T 足够大时，在 $t\geqslant T$ 和 $\rho-1>\gamma_0 t^{-4/3+\delta}$ 处，它显然是其自变量的光滑函数。

Set

$$U_0=1-\frac{2c}{t^2(\rho-1)}.$$

直接代入可得，在区间（9.14）上，

$$\begin{aligned}P(U_0-1;t,\rho-1)=-(\rho-1)^2-\frac{32c^3}{t^6(\rho-1)^3}+\frac{24c^3}{t^6(\rho-1)^2}+\\ (\rho-1)^2(2ch-16c^2B-c^2h^2+48c^4B^2),\end{aligned}$$

其中，如 $t \to \infty$,

$$h = \frac{1}{t^2(\rho-1)} = O(t^{-2/3-\delta}), \qquad B = \frac{1}{t^4(\rho-1)^3} = O(t^{-3\delta}).$$

因此

$$P(U_0 - 1; t, \rho - 1) = O\left((\rho-1)^2 + \frac{1}{t^6(\rho-1)^3}\right) = O\left(t^{-2}(t^{-3\delta} + t^{-2/3+2\delta})\right).$$

然后，根据拉格朗日中值定理以及不等式（9.16）左侧可得

$$|U - U_0| \leqslant \frac{|P(U_0 - 1, t, \rho - 1)|}{\rho - 1} = O\left(\frac{t^{-3\delta} + t^{-2/3+2\delta}}{t^2(\rho-1)}\right).$$

因此，在带状区域（9.14）中，方程（2.6）在 C_2^+ 情形下的唯一解确实具有如下渐近行为

$$u = t - \frac{2c}{t(\rho-1)} + O\left(\frac{t^{-3\delta} + t^{-2/3+2\delta}}{t(\rho-1)}\right) = \left(t - \frac{2ct^{1/3}}{x}\right)\left(1 + O(t^{-3\delta} + t^{-2/3+2\delta})\right),$$

在该带状区域内一致成立。在此带状区域内，我们有

$$\gamma_1 t^\delta < x < \gamma_2 t^\delta,$$

因此，当 $t \to \infty$ 且 $x \to \infty$时， p_1（9.10）的渐近行为对 p_1（x）成立，也意味着同样成立

$$t + t^{1/3} p_1(x) = \left(t - \frac{2ct^{1/3}}{x}\right)\left(1 + O(t^{-\delta})\right).$$

因此，在带状区域（9.14）中，总和 $t+t^{1/3}p_1$（x）与准定常曲线 C_2^+恰好匹配。类似地，可以证明总和 $t + t^{1/3}q_1$（x）在此带状区域内与准定常曲线 C_2^-匹配。

10 结论

我们研究了寻找具有特定准稳态渐近行为的 $\mathrm{dP_I}$ 和 $\mathrm{P_{IV}}$ 方程解的问题。对于零终止这一特殊情形，这个问题源远流长，与正交多项式理论密切相关，并已取得许多优美的结果。放宽终止条件并将解扩展到 n的负值，使问题复杂得多。我们构造了这些准稳态解关于 t 和 n 的形式渐近展开，并验证了其一致性。基于对这些展开的分析，我们推导出了全局拟稳态解存在的必要条件；数值实验表明，这类解确实存在。对此事实给出严格证明仍是一个未解决问题。借助渐近展开匹配方法，我们得到了不同准稳态区制之间过渡区的统一自相似渐近式；结果以 $\mathrm{P_{II}}$ 方程的特殊 Hastings–McLeod 型解表示。我们还考察了若干类兼具准稳态行为和极点行为的精确解。对此类解进行详细研究和分类同样是一个未解决问题。总的来说，必须承认，目前未解决的问题多于已有答案，我们并不声称研究结果已经穷尽所有可能。尽管如此，我们认为，我们的方法所依据的两类 Painlev´e 型方程的拟稳态动力学具有一致性，这一观察在概念上十分重要，也可能有助于研究其他众多模型。

致谢

V.E. Adler 的工作是在俄罗斯科学院朗道理论物理研究所的国家任务 FFWR-2024-0012 框架内完成的。B.I. Suleimanov 的工作是在俄罗斯科学院乌法联邦研究中心数学与计算中心研究所的国家任务 FMRS-2025-0012 框架内完成的。

参考文献

[1] J. Shohat. 正交多项式的一个微分方程。《杜克数学杂志》5(2), 401–417 (1939).[2] G. Freud. 关于正交多项式递推公式中的系数。《爱尔兰皇家科学院院刊A辑》76, 1–6 (1976).[3] S. Bonan, P. Nevai. 正交多项式及其导数，I.《逼近理论杂志》40(2), 134–147 (1984).[4] J.S. Lew, D.A. Quarles, Jr. 非线性递推关系的非负解。《逼近理论杂志》38(4), 357–379 (1983).[5] P.A. Clarkson, K. Jordaan, A. Kelil. 一种广义Freud权函数。《应用数学研究》136, 288–320 (2016).[6] P.A. Clarkson, K. Jordaan. 广义Freud多项式的性质。《逼近理论杂志》225, 148–175 (2018).[7] S.M. Alsulami, P. Nevai, J. Szabados, W. Van Assche. 一族非线性差分方程：正解的存在性、唯一性和渐近行为。《逼近理论杂志》193, 39–55 (2015).[8] E. Brezin, V. Kazakov. 闭弦的精确可解场论。《物理快报B辑》236(2), 144–150 (1990).[9]A.R. Its, A.V. Kitaev, A.S. Fokas. 二维量子引力理论中的等单值变形方法。《俄罗斯数学评论》45(6), 155–157 (1990).[10] A.S. Fokas, A.R. Its, A.V. Kitaev. 离散Painlev´e方程及其在量子引力中的出现。《数学物理通讯》142, 313–344 (1991).[11] A.S. Fokas, A.R. Its, A.V. Kitaev. 二维量子引力矩阵模型的等单值变形方法。《数学物理通讯》147, 395–430 (1992).[12]A.P. Magnus. 半经典正交多项式递推系数的Painlev´e型微分方程。《计算与应用数学杂志》57(1–2), 215–237 (1995).[13] C. Cresswell, N. Joshi. 离散第一、第二和第三十四Painlev´e层级。《物理学杂志A辑：数学与一般》32(4), 655–669 (1999).

[14] N.A. Lukashevich. 第四Painlev´e方程理论。《微分方程》3(5), 771–780 (1967年)（俄文）。[15] V.I. Gromak, I. Laine, S. Shimomura. 复平面中的Painlev´e微分方程。柏林：Walter de Gruyter，2002年。[16] A.P. Veselov, A.B. Shabat. Dressing 链与薛定谔算子的谱理论。《函数分析及其应用》27(2), 81–96 (1993).¨V.E. Adler. 非线性链与Painlev[17] e方程。《物理学D辑》73(4), 335–351 (1994).´A.P. Bassom, P.A. Clarkson, A.C. Hicks. 第四Painlev[18] e方程的B¨acklund变换与解层级。《应用数学研究》95, 1–71 (1995).´V.I. Gromak. Painlev[19] e方程解的单参数族。《微分方程》14(12), 2131–2135 (1978)（俄文）。´A.P. Bassom, P.A. Clarkson, A.C. Hicks, J.B. McLeod. 第四Painlev[20] e方程的积分方程与精确解。《伦敦皇家学会学报A辑》437(1899), 1–24 (1992).´A.P. Bassom, P.A. Clarkson, A.C. Hicks. 第四Painlev[21] e方程的数值研究。《IMA应用数学杂志》50(2), 167–193 (1993).´P. Nevai. 与exp([22])相关的正交多项式的渐近行为。《SIAM数学分析杂志》15(6), 1177–1187 (1984).$-x^4$P. Bleher, A. Its. 正交多项式的半经典渐近行为、黎曼–希尔伯特问题及矩阵模型中的普适性。《数学年刊》150(1), 185–266 (1999).[23] P.M. Bleher, A.R. Its. 随机矩阵模型中的双重标度极限：黎曼–希尔伯特方法。《纯粹与应用数学通讯》56(4), 433–516 (2003).[24] N. Ercolani, J. Lega, B. Tippings. 离散Painlev[25] e I方程非极解的动力学。《SIAM应用动力系统杂志》21(2), 1322–1351 (2022).´B.I. Suleimanov. 无耗散激波的出现与引力的“非微扰”量子理论。《实验与理论物理杂志》78(5), 583–587 (1994).[26] C.M. Cosgrove. 多项式类中的高阶Painlev[27] e方程 I. Bureau符号´。《应用数学研究》104(1), 1–65 (2000). $P2$V.E. Adler, B.I. Suleimanov. 零边界条件下Volterra格衰减问题的自相似渐近行为。arXiv:2606.13137 (2026).[28] J. Schiff, M. Twiton. 第四Painlev[29] e方程实解的分类。《数学》12, 463 (2024).´P.A. Clarkson, A.F. Loureiro, W. van Assche. 一种替代离散Painlev[30] e I方程的唯一正解。《微分方程及其应用》22(5), 656–675 (2016).´P.A. Clarkson, A.V. Dzhamay, A.N.W. Hone, B. Mitchell. 量子极小曲面离散Painlev[31] e方程的特殊解。《理论与数学物理》224(2), 1359–1397 (2025).

[32] A.I. Aptekarev, V.Yu. Novokshenov. 离散 Painlev´e I 方程解的渐近行为。《数学札记》116(6), 1170–1182 (2024).[33] Wolfram Research, Inc. Mathematica，版本 13.0。伊利诺伊州尚佩恩（2021）。[34] A.M. Il'in. 边值问题解的渐近展开匹配。Nauka，莫斯科，1989；美国数学会，罗德岛州，普罗维登斯，1992。[35] S.P. Hastings, J.B. McLeod. 与第二 Painlev´e 超越函数和 Korteweg–de Vries 方程相关的边值问题。《纯粹与应用数学文献》73(1), 31–51 (1980).[36] T. Claeys, A.B.J. Kuijlaars, M. Vanlessen. 多临界酉随机矩阵系综与一般 Painlev´e II 方程。《数学年刊》168, 601–641 (2008).[37] M.G. Clerc, J.D. D´avila, M. Kowalczyk, P. Smyrnelis, E. Vidal-Henriquez. 向列相液晶中的光物质相互作用理论与第二 Painlev´e 方程。《变分法与偏微分方程》56, 93 (2017).[38] A.M. Il'in, B.I. Suleimanov. 与尖点灾变相关的阶跃状对比结构的产生。《数学文集》195(11–12), 1727–1746 (2004).[39] A.N. Kuznetsov. 退化常微分方程组的可微解。《函数分析及其应用》6(2), 119–127 (1972).[40] B. Malgrange. 关于 ´微分´方程的奇点。Goulaouic-Schwartz 研讨会 XX，1–13 (1972).