arXiv:2611.27937v1 [math.CO] 20 Nov 2026

B_α谱半径的极限点区间

Francesco Belardo[1] Callum Huntington[1]
Elismar R. Oliveira[2] Vilmar Trevisan[2]

[1]那不勒斯费德里科二世大学"R. Caccioppoli"数学与应用系，意大利那不勒斯fbelardo@unina.it,
callum.huntington@unina.it

[2]南里奥格兰德联邦大学数学与统计研究所，巴西阿雷格里港
elismar.oliveira@ufrgs.br, trevisan@mat.ufrgs.br

摘要

对于一个有限简单图 G，令

$$B_\alpha(G) = \alpha A(G) + (1-\alpha)L(G) = (1-\alpha)D(G) + (2\alpha-1)A(G), \qquad 0 \le \alpha \le 1.$$

我们研究这些矩阵的谱半径的极限点。令 $a_\alpha = 1-\alpha$、$b_\alpha = |2\alpha-1|$ 和 $w_\alpha = a_\alpha + b_\alpha$。我们证明，对于每个 $\alpha \neq 1/2$ 和每个整数 $d \ge 3$，区间

$$\left[a_\alpha d + 2b_\alpha\sqrt{d-1},\, w_\alpha d\right]$$

完全由 B_α-极限点组成。所有这些点都可由最大度不超过 d 的连通二分图实现。我们将 Alon 和 Wei 的诱导子图插值从 A 扩展到 $aD+bA$，并利用二部拉马努金图给出统一证明。对于所有充分大的 d，连续区间彼此重叠；因此，对于每个 $\alpha \neq 1/2$，B_α-极限点的集合都包含一条半直线。在例外值 $\alpha = 1/2$ 处，有 $B_{1/2} = D/2$，且谱半径的集合是离散的。结合均匀边细分与广义 Bethe 装饰，我们将拉普拉斯与无符号拉普拉斯半直线改进为 $[29/5, \infty)$。有限覆盖步骤通过精确有理数证书得到验证；文中提供了全部 101 个区间及验证程序。

我们还研究了两种互补树构造。对于星形树 $T_{1,\,m,\,m}$，其极限 B_α-谱半径是一个显式未平方方程在路径阈值以上的唯一解。更一般地，让星形树的若干指定臂趋于无穷，可得到具有树实现的有序极限点。最后，我们给出了 B_α、A_β-矩阵与变形拉普拉斯矩阵之间的精确仿射关系。这些恒等式准确地指出了哪些树结果和毛毛虫图结果只是先前工作的重新参数化。区间定理还为每个 $0 \le \beta < 1$ 给出了半直线上的 A_β-极限点，并为每个固定的非零实变形参数给出了变形拉普拉斯矩阵极限点的半直线。

1 引言

分别令 $A(G)$、$D(G)$ 和 $L(G) = D(G) - A(G)$ 表示有限简单图 G的邻接矩阵、度矩阵和拉普拉斯矩阵。Samanta、Deepshikha 和 Das 引入了这一单参数族

$$B_\alpha(G) = \alpha A(G) + (1-\alpha)L(G) = (1-\alpha)D(G) + (2\alpha-1)A(G), \qquad 0 \le \alpha \le 1. \quad (1)$$

它包含四种标准图矩阵（相差一个正标量）：

$$B_0 = L, \qquad B_{1/2} = \tfrac{1}{2}D, \qquad B_{2/3} = \tfrac{1}{3}Q, \qquad B_1 = A.$$

虽然 B_α 不一定逐项非负，但其谱半径就是其最大特征值[15]。我们将此值记为 $\rho_{B_\alpha}(G)$。事实上，对于 $\alpha \le 1/2$，$B_\alpha = (1-2\alpha)L + \alpha D$ 是半正定的；对于 $\alpha \ge 1/2$，它逐项非负，因此佩龙–弗罗贝尼乌斯定理适用。

霍夫曼问题旨在求图矩阵谱半径的聚点。邻接情形由 Hoffman [6]开创；随后 Shearer 证明，每个不小于 $\sqrt{2+\sqrt{5}}$ 的实数都是邻接矩阵极限点 [16]。此后，人们还研究了若干变体，包括拉普拉斯矩阵和无符号拉普拉斯矩阵 [2, 5],带符号邻接矩阵，以及 A_β-矩阵 [10]

$$A_\beta(G) = \beta D(G) + (1-\beta)A(G) \qquad (0 \le \beta \le 1).$$

Oliveira 和 Trevisan 最近改造了 Shearer 的毛毛虫树，以用于 A_β $\beta < 1/2$ [12]。The deformed 拉普拉斯矩阵

$$M_G(s) = I - sA(G) + s^2(D(G) - I)$$

也从相同的极限点视角进行了研究 [3, 13]。对于二部图，切换和参数的仿射变换将这些矩阵族联系起来；其精确定义域以及最大特征值与谱半径之间的区别记录在第5节。

我们采用严格的、拓扑意义下的极限点概念。

定义 1.1. 对于固定的 α，实数 λ 是一个 B_α-极限点，如果存在一个有限简单图序列 (G_k)，使得数值 $\rho_{B_\alpha}(G_k)$ 两两不同，并且

$$\lim_{k\to\infty} \rho_{B_\alpha}(G_k) = \lambda.$$

所有这类数构成的集合记为 $L_B(\alpha)$。由于非连通图的谱半径由其某个连通分量取得，因此定义中所涉及的图可以限定为连通图。当只允许连通二分图时，我们记为 $L_B^{\mathrm{bip}}(\alpha)$。

主要结果确定了$\mathcal{L}_B(\alpha)$中包含的显式区间。全文中我们使用

$$a_\alpha := 1-\alpha, \qquad c_\alpha := 2\alpha - 1, \qquad b_\alpha := |c_\alpha|, \qquad w_\alpha := a_\alpha + b_\alpha. \tag{2}$$

定理 1.2 (主要区间定理**)。** 设 $\alpha \in [0,1] \setminus \{1/2\}$，且 $d \ge 3$ 为整数。那么

$$I_d(\alpha) := \left[a_\alpha d + 2b_\alpha\sqrt{d-1},\, w_\alpha d \right] \subseteq \mathcal{L}_B(\alpha). \tag{3}$$

更准确地说，$I_d(\alpha)$ 中的每一点，都是一列两两不同的 B_α-谱半径的极限；这些谱半径对应于最大度不超过 d的连通二部图。

证明是对 [1,引理 3.1]中诱导子图插值的加权扩展；该插值策略已在其中用于邻接矩阵。我们证明了一个更精细的 $aD + bA$单顶点平均界，并纳入度对角矩阵的变化。从 Marcus、Spielman 和 Srivastava 的二部拉马努金图 [9], 出发，通过二部切换，我们得到对每个 $\alpha \ne 1/2$ 都成立的相同区间。一则简短的备注还记录了 [1, 定理 1.2] 对 $\alpha < 1/2$ 的正则图推论。区间

(3) 最终会发生重叠。更准确地说，对于 $\alpha \ne 1$ /2 定义

$$d_\alpha := \left\lceil \left(1 + \sqrt{\frac{w_\alpha}{b_\alpha}}\right)^2 \right\rceil, \qquad \Gamma(\alpha) := a_\alpha d_\alpha + 2b_\alpha\sqrt{d_\alpha - 1}. \tag{4}$$

推论 1.3（极限点半直线）。对于每个 $\alpha \in [0,1] \setminus \{1/2\}$，

$$[\Gamma(\alpha), \infty) \subseteq \mathcal{L}_B^{\mathrm{bip}}(\alpha) \subseteq \mathcal{L}_B(\alpha).$$

对于 $\alpha = 1/2$，可能的谱半径集合为 $\{k/2 : \ k \in \mathbb{N}_0\}$，因此 $L_B\ (1/2)\ = \varnothing$。

仅凭加权定理，就能得到拉普拉斯矩阵与无符号拉普拉斯矩阵的共同阈值 $\Gamma_L = 6 + 2\sqrt{5}$。我们的第二个结果通过结合细分与一致有限有根树装饰，降低了这个阈值。

定理 1.4（拉普拉斯与无符号拉普拉斯半直线）。每个实数 $\lambda \geq 29/5$ 都是连通二分图的两两不同的拉普拉斯谱半径的极限。同一批图也给出相同的无符号拉普拉斯谱半径。

证明见第 3 节。其分析部分通过两种图运算传递整个区间；随后由一条包含 101 个此类区间的链覆盖 $[29/5, \Gamma_L]$。附录 A 列出了这条链，并说明了其精确的有理数验证过程。逼近图可能含有圈，因此这并非仅针对树的结果。

作为背景，郭的经典拉普拉斯序列 $\beta_0 = 4$, $\beta_n = \lim_{m\to\infty} \rho_L(T_{1,n,m})$ 在$n \geq 1$下递增至 $\mathfrak{h}_L = 4.382975767\ldots$ [5]。细分给出进一步趋于 $9/2$ 的非平凡区间。这些包含关系既不能对完整极限点集进行分类，也不能确立对 $[9/2, 29/5)$ 的完全覆盖。

第2节在应用之前证明加权区间定理及其重叠推论。第3节建立改进的拉普拉斯矩阵半直线。第4节汇集互补树构造，而第5节给出与 A_β 及变形拉普拉斯矩阵的精确关系，包括继承自先前工作的结果。

2 关于二部图的统一区间定理

对于 $a \geq 0$ 和 $b > 0$，记

$$H_{a,b}(G) = aD(G) + bA(G), \qquad \rho_{a,b}(G) = \lambda_1(H_{a,b}(G)).$$

这些矩阵是非负的，因此 $\rho_{a,b}$ 也是它们的谱半径。该证明将 [1, 引理 3.1] 的诱导子图插值从 A 推广到 $aD + bA$。每次删除后必须重新计算度对角矩阵；引理 2.4 通过边计数恒等式明确纳入了这一变化。

方程 (1) 可写为

$$B_\alpha(G) = a_\alpha D(G) + c_\alpha A(G). \tag{5}$$

以下观察结果将被反复使用。

引理 2.1 (二部切换)。设 G 为二部图。则 $B_\alpha(G)$ 与其相似

$$H_\alpha(G) := a_\alpha D(G) + b_\alpha A(G).$$

特别地，

$$\rho_{B_\alpha}(G) = w_\alpha \rho_{A_{\gamma_\alpha}}(G), \qquad \gamma_\alpha := \frac{a_\alpha}{w_\alpha}. \tag{6}$$

证明。若 $c_\alpha \ge 0$，则该断言显然成立。若 $c_\alpha < 0$，则按二分划分$X \cup Y$对顶点排序，并令

$$A = \begin{pmatrix} 0 & C \\ C^T & 0 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} I_{|X|} & 0 \\ 0 & -I_{|Y|} \end{pmatrix}.$$

于是 $S^{-1} = S$、 $SDS = D$ 和 $SAS = -A$。因此这是正交相似，而不仅仅是合同，并且

$$SB_\alpha(G)S = a_\alpha D(G) - c_\alpha A(G) = a_\alpha D(G) + b_\alpha A(G).$$

最后， $a_\alpha D + b_\alpha A = w_\alpha A_{\gamma_\alpha}$。 □

对于 $\alpha \ge 1/2$ ，不需要二分性假设：

$$B_\alpha(G) = \alpha A_\beta(G), \qquad \beta = \frac{1-\alpha}{\alpha}. \tag{7}$$

事实上， $\alpha\beta = 1-\alpha$ 和 $\alpha(1-\beta) = 2\alpha - 1$。范围 $\alpha > 2/3$ 恰好对应于 $\beta < 1/2$，即 Oliveira 和 Trevisan 的毛毛虫半直线定理的适用范围 [12]。

2.1 Ramanujan 图与二元初等估计

如果一个连通的 d 正则二部图的邻接特征值中，除两个平凡值 d 和 $-d$ 之外的所有特征值的绝对值都不超过 $2\sqrt{d-1}$，那么该图就是 Ramanujan 图。特别地，其第二大邻接特征值满足 $\lambda_2 \le 2\sqrt{d-1}$；负特征值 $-d$ 不会给上界 Rayleigh 估计带来困难。

定理 2.2 (Marcus–Spielman–Srivastava， [9]的定理 5.5）。对于每个整数 $d \ge 3$，都存在一个有限简单连通的 d-正则二部拉马努金图序列，其阶数趋于无穷大。

该构造从$K_{d,\,d}$开始，并反复进行合适的 2-提升。简单性和二分性得以保留。新特征值的界严格小于 d，因此不会出现额外的特征值 d ，这些提升后的图仍保持连通。另一种做法是使用满足 $\lambda_2 \le 2\sqrt{d-1} + o(1)$ 的近似拉马努金图，如 Friedman [4] 所提供的图。仅控制非平凡特征值中趋近于全部的一定比例并不足够：该估计要求控制 λ_2。

引理 2.3 (小诱导子图)。设 G 是一个有 N 个顶点的 d-正则图，且$\lambda_2(G) \le r < d$。对于一个有 m 个顶点的诱导子图 $H = G[S]$ ，

$$\lambda_1(A(H)) \le r + (d-r)\frac{m}{N}, \tag{8}$$

$$\rho_{a,b}(H) \le ad + b\left(r + (d-r)\frac{m}{N}\right). \tag{9}$$

证明。将 S 上的单位向量以零延拓，并记为 $x = tu + z$，其中 $u = \mathbf{1}/\sqrt{N}$ 且 $z \perp u$。由柯西–施瓦茨不等式可得 $t^2 \le m/N$，因此

$$x^T A(G) x \le dt^2 + r(1-t^2) \le r + (d-r)m/N.$$

取最大值可得第一个不等式。由于 H 中的度至多为 d， $D(H) \le dI$，这就证明了第二个不等式。 □

引理 2.4 (平均顶点删除)。 设 H 有 $k \ge 2$ 个顶点，且最大度至多为 d。存在一个顶点 v 满足

$$0 \le \rho_{a,b}(H) - \rho_{a,b}(H - v) \le \frac{\rho_{a,b}(H)}{k-1} \le \frac{(a+b)d}{k-1}. \tag{10}$$

证明。 设 $\rho = \rho_{a,\,b}(H)$，取 x 作为 ρ的单位特征向量，并令 $x^{(v)}$ 为其在$H - v$上的限制。于是

$$\sum_{v} \|x^{(v)}\|^2 = k - 1, \qquad \sum_{v} (x^{(v)})^T H_{a,b}(H - v) x^{(v)} = (k-2)\rho. \tag{11}$$

对于第二个等式，写作

$$x^T H_{a,b}(H) x = \sum_{\{i,j\} \in E(H)} \bigl(a(x_i^2 + x_j^2) + 2b x_i x_j\bigr).$$

每条边的贡献在恰好 $k-2$ 次顶点删除后仍然保留。这解释了邻接项以及所有受影响顶点度数的减少。由 $R = \max_v \rho_{a,\,b}(H - v)$，根据瑞利不等式可得 $(k-2)\rho \le (k-1)R$，其中也包括无需除法的零限制向量。取达到 R的 v。单调性成立，因为 $H_{a,\,b}(H - v)$逐项不大于 $H_{a,\,b}(H)$中对应的主子矩阵。最后，由最大行和可得 $\rho \le (a+b)d$。

□

引理 2.5 (稠密逼近中的严格聚点)。 设 $E \subset \mathbb{R}$，并设 $L < U$。若 $(L, U) \subset E$，则 $[L, U]$ 中的每个点都是 E的聚点，其含义是它是两两不同元素的极限。

证明。 对于给定的 $x \in [L, U]$，选取点 $t_j \in (L, U)$，使其单调趋于x；再选取两两不相交、关于 t_j的开区间 V_j，使其包含于 (L, U) 内，且直径趋于零。由于 $t_j \in E$，选取 $e_j \in E \cap V_j$。于是 e_j 两两不同，并趋于 x。

□

2.2 插值与主定理

定理 2.6 （正系数插值）。 对于 $a \ge 0,\ \ b > 0$，以及整数 $d \ge 3$，每个

$$J_d(a, b) = [ad + 2b\sqrt{d-1},\, (a+b)d] \tag{12}$$

都是两两不同的值$\rho_{a,b}(H)$ 在最大度不超过 d 的连通二分图 H 上所成的极限。

证明。 令 $r = 2\sqrt{d-1} < d$, $L = ad + br$，以及 $U = (a+b)d$。取一个阶为 N、来自定理 2.2 的图 G，并令 $m = \lfloor \sqrt{N} \rfloor$。反复应用引理 2.4，得到诱导子图

$$G = H_N \supset H_{N-1} \supset \cdots \supset H_m, \qquad |V(H_k)| = k.$$

它们仍为二部图，且最大度至多为 d。记作 $r_k = \rho_{a,\,b}(H_k)$，这两个估计给出

$$r_N = U, \qquad r_m \le L + b(d - r)m/N, \qquad 0 \le r_k - r_{k-1} \le \frac{(a+b)d}{m} \quad (k > m).$$

固定 $t \in (L,\ U)$。当 N 足够大时， $r_m < t < r_N$。因此存在一个指标 $k \text{with} r_{k-1} \le t \le r_k$, 且交叉误差至多为 $(a+b)d/m = O(N^{-1/2})$。因此，每个内部

目标都属于这些图指标所成集合的闭包。任何非连通交叉图都可以替换为取得其指标的一个连通分量，同时保持二分性和度数上界。引理 2.5 给出了两两不同的值，包括两个端点处的值。

□

定理 *1.2* 的证明。将 $a = a_\alpha$ 和 $b = b_\alpha > 0$ 应用于定理 2.6。每个逼近图都是二部图，因此引理 2.1 将其$\rho_{a,\ b}$与 ρ_{B_α}对应起来，无论 c_α取何种符号。区间 (12) 恰好是 $I_d(\alpha)$。□

注 2.7（定量逼近）。对于每个 $t \in J_d$（a，b），同一条链中都存在一个指标，其距离至多为

$$\max\left\{ b(d-2\sqrt{d-1})\frac{m}{N},\, \frac{(a+b)d}{m} \right\} = O(N^{-1/2})$$

与 t 的距离：若存在交叉，就利用交叉；否则利用 H_m。在上端点 G 处，其本身的指标为 U；该端点处的严格聚集性由前一个引理单独证明。此构造给出了存在性界限，但并未限定构造拉曼努金起始图所需的运行时间。

2.3 重叠论证

现在证明推论 1.3。假设 $\alpha \neq 1/2$，简记 $a = a_\alpha$、$b = b_\alpha$和 $w = a + b$，并比较两个连续区间。它们的重叠条件为

$$\begin{aligned} a(d+1) + 2b\sqrt{d} &\le wd \\ \iff b(d - 2\sqrt{d}) &\ge a. \end{aligned} \tag{$*$}$$

函数 $d \mapsto d - 2\sqrt{d}$ 在 $d \geq 1$上递增。将实数 d 代入 (∗) 求解，得

$$\sqrt{d} \ge 1 + \sqrt{1 + a/b} = 1 + \sqrt{w/b}.$$

因此，(4) 中的整数 d_α 是所有连续区间开始相互重叠的最小度数。因此，$I_d(\alpha)$ 在 $d \ge d_\alpha$ 上的并为

$$[a d_\alpha + 2b\sqrt{d_\alpha - 1}, \infty) = [\Gamma(\alpha), \infty).$$

这证明了推论 1.3 中关于二分图实现的第一个断言。

如果 $\alpha = 1/2$，那么

$$\rho_{B_{1/2}}(G) = \tfrac{1}{2}\Delta(G).$$

所有可能取值构成离散集$\{k/2 : k \in \mathbb{N}_0\}$，它没有有限聚点。这就证明了例外情形的断言。对于 $a = b = 1$，区间$[d + 2\sqrt{d-1}, 2d]$ 在 $d \ge 6$上相互重叠，因此

$$[\Gamma_L, \infty) \subseteq \mathcal{L}^{\mathrm{bip}}_{L,Q}, \qquad \Gamma_L = 6 + 2\sqrt{5}, \tag{13}$$

其中$\mathcal{L}^{\mathrm{bip}}_{L,Q}$ 表示 L 和 Q 在连通二分图上的共同严格极限点集。这是定理 1.4 中改进所依据的起始半直线。

注 2.8（第一个未覆盖区间）。I_4（α）的左端点超过了 I_3（α）的右端点 $a_\alpha + b_\alpha$（$2\sqrt{3} - 3$）> 0。因此，I_3和 I_4永远不会重叠。I_4与 I_5仅在 $a_\alpha = 0$时重叠，也就是在 $\alpha = 1$处，此时它们在 4处相交。对于其他所有非例外参数 $d_\alpha \ge 5$，情况均如此。这些是所显示区间覆盖中的空缺，并不意味着完整的极限点集在这些位置存在空缺；关于邻接性，*Shearer* 定理已经填补了这部分直线。

注意， $\Gamma(\alpha) \to \infty$在 $\alpha \to 1/2$ 从两侧趋近时。因而，充分阈值的发散性与 $\alpha = 1/2$处真正离散的行为是一致的。

注记 2.9（正则图路径）。 对于 $\alpha < 1/2$ 以及一个 d-正则图， $\rho_{B_\alpha}(G) = a_\alpha d - b_\alpha \lambda_n(A(G))$。*Alon* 与 *Wei [1,* 定理 *1.2]*证明，规模不断增长且奇围长不断增大的 d-正则图的最小邻接特征值以 $[-d, -2\sqrt{d-1}]$ 为极限集。这借助所展示的仿射映射给出$I_d(\alpha)$；引理 *2.5* 给出两两不同的值，包括端点处的值。达到该指标的连通分支仍为 d-正则。上述加权证明还额外给出二分图实现，并同时处理 $2\alpha - 1$ 的两种符号。

3 细分与广义 Bethe 装饰

3.1 细分区间

设 $S_\ell(G)$ 由将 G 的每条边替换为恰好含 ℓ 条边的路径得到，其中$\ell \geq 1$。定义

$$p_{-1}(x) = 0, \quad p_0(x) = 1, \quad p_j(x) = (x-2)p_{j-1}(x) - p_{j-2}(x) \quad (j \geq 1),$$

并且，对于 $x > 4$,

$$a_\ell(x) = 1 + \frac{p_{\ell-2}(x)}{p_{\ell-1}(x)}, \qquad b_\ell(x) = \frac{1}{p_{\ell-1}(x)}. \tag{14}$$

对于 $\ell = 1$，这两个值都是 1。

引理 3.1（舒尔补）。 对于 $x > 4$,

$$\rho(Q(S_\ell(G))) < x \iff \rho(a_\ell(x)D(G) + b_\ell(x)A(G)) < x. \tag{15}$$

在两处均取等号时，同样的等价关系仍然成立。

证明。 对于 $\ell = 1$，结论显然成立。对于 $\ell \geq 2$， $xI - Q(S_\ell(G))$ 在每条细分边的内部顶点上对应的块为

$$C = (x-2)I - A(P_{\ell-1}),$$

当 $x > 4$ 时，该矩阵正定。其逆矩阵的角元素为 $(C^{-1})_{11} = p_{\ell-2}/p_{\ell-1}$ 和 $(C^{-1})_{\ell-1} = 1/p_{\ell-1}$。消去所有这些块后，得到舒尔补

$$xI - a_\ell(x)D(G) - b_\ell(x)A(G).$$

正定性证明了严格不等式的等价关系。半正定性和奇异性证明了等式情形的等价关系。 □

定理 3.2 (细分区间). 对于 $d \geq 3$ 和 $\ell \geq 1$，定义 $J_{d,\ell} = [L_{d,\ell}, R_{d,\ell}]$，其中端点是上述大于 4 的唯一解

$$(x-d)p_{\ell-1}(x) - dp_{\ell-2}(x) = 2\sqrt{d-1} \qquad \text{for } L_{d,\ell}, \tag{16}$$

$$(x-d)p_{\ell-1}(x) - dp_{\ell-2}(x) = d \qquad \text{for } R_{d,\ell}. \tag{17}$$

于是 $J_{d,\ell}$ 是包含于 L_L^{bip}，Q中的一个非平凡区间。

证明。这些方程等价于 $x = da_\ell(x) + cb_\ell(x)$，其中 $c = 2\sqrt{d-1}$ 或 $c = d$。对于 $\ell \geq 2$，$a_\ell - 1$ 和 b_ℓ 均为非负且单调递减：它们是正预解式 C^{-1}的元素，其导数为 $-C^{-2}$。对于 $\ell = 1$，它们是常数。因此，$x - da_\ell(x) - cb_\ell(x)$ 的增长速度至少与 x一样快。在 $x = 4$处，它等于 $4 - 2d + (d-c)/\ell < 0$，而当其趋于无穷大时亦然。根唯一存在，而 $2\sqrt{d-1} \leq d$ 使得 $L_{d,\,\ell} < R_{d,\,\ell}$。

固定 $x \in J_{d,\ell}$，并令 $a = a_\ell(x)$、$b = b_\ell(x)$。端点刻画表明

$$ad + 2b\sqrt{d-1} \leq x \leq (a+b)d.$$

定理 2.6 给出一个连通二部图 G_n，其值 $\mu_n = \rho(aD(G_n) + bA(G_n)) \to x$两两不同。去掉可能等于 x的单个值。令

$$f_n(y) = y - \rho(a_\ell(y)D(G_n) + b_\ell(y)A(G_n)) \qquad (y > 4).$$

逐项单调性给出 $f_n(v) - f_n(u) \geq v - u$，其中 $4 < u < v$。由于 $f_n(x) = x - \mu_n \to 0$，对于每个 $0 < \varepsilon < x - 4$，当 n 充分大时，我们有 $f_n(x-\varepsilon) < 0 < f_n(x+\varepsilon)$。根据引理 3.1，$S_\ell(G_n)$ 的半径趋于 x。根据同一引理，没有一个等于 x；存在一个子序列，其半径两两不同。细分保持连通性和二分性。 □

特别地，$J_{d,1} = I_d(0)$ 以及

$$J_{d,2} = \left[\frac{d + 2 + \sqrt{d^2 + 4 + 8\sqrt{d-1}}}{2},\; d+2 \right]. \tag{18}$$

当 $\ell \to \infty$ 时，$J_{d,\ell}$ 的两个端点都趋于 $d^2/(d-1)$。事实上，对于固定的 $x > 4$，$p_{\ell-2}/p_{\ell-1} \to r(x)$ 与 $1/p_{\ell-1} \to 0$，其中

$$r(x) = \frac{x - 2 - \sqrt{x(x-4)}}{2}.$$

极限方程为 $x = d(1 + r(x))$，其唯一解为 $d^2/(d-1)$；单调性将这些有限根夹在该解附近。对于 $d = 3$，极限为 $9/2$。严格聚点集是闭的，因此 $9/2 \in \mathcal{L}_L^{\mathrm{bip}}{}_{,Q}$ 亦然。例如，

$$J_{3,2} = \left[\frac{5 + \sqrt{13 + 8\sqrt{2}}}{2}, 5 \right], \qquad J_{3,3} \approx [4.718680276, 4.732050808].$$

这些近似仅供大致定位；(16)–(17) 定义了精确端点。

3.2 广义贝特装饰

由正整数构成的字 $\mathbf{b} = (b_0, \dots, b_{h-1})$ 指定一棵有限有根广义贝特树：第 j 层的每个顶点有 b_j 个子顶点，而第 h 层由叶子组成。令 $\mathcal{D}_{\mathbf{b}}(G)$ 将此树一个副本的根与 G的每个顶点等同。空字表示没有装饰。Rojo 与 Medina [14] 已研究过此类复合图及其谱；该图类本身并非新的。

定义 $F_{\mathbf{b}}(\mu) = \lambda_{\max}(H_{\mathbf{b}}(\mu))$，其中 $H_{\mathbf{b}}$ 是对角线为

$$(\mu + b_0,\; b_1 + 1, \dots, b_{h-1} + 1,\; 1) \tag{19}$$

以及非对角元 $\sqrt{b_0}, \dots, \sqrt{b_{h-1}}$。令 $F_\varnothing(\mu) = \mu$。例如，

$$H_{(q,b)}(\mu) = \begin{pmatrix} \mu + q & \sqrt{q} & 0 \\ \sqrt{q} & b+1 & \sqrt{b} \\ 0 & \sqrt{b} & 1 \end{pmatrix}.$$

命题 3.3（精确装饰公式）**.** 对每个连通图 G,

$$\rho(Q(\mathcal{D}_{\mathbf{b}}(G))) = F_{\mathbf{b}}(\rho(Q(G))). \tag{20}$$

函数 $F_{\mathbf{b}}$ 在 $[0,\infty)$ 上连续且严格递增。因此，对每个 $[u,v] \subseteq \boldsymbol{L}_{L,Q}^{\mathrm{bip}}$,

$$[F_{\mathbf{b}}(u), F_{\mathbf{b}}(v)] \subseteq \mathcal{L}_{L,Q}^{\mathrm{bip}}.$$

证明。设 $z > 0$ 是 $Q(G)$ 的 Perron 向量，其特征值为 μ，并设 $y > 0$ 是 $H_{\mathbf{b}}(\mu)$ 的 Perron 向量。一个装饰中层 j 的顶点数为 $N_0 = 1$、$N_j = b_0 \cdots b_{j-1}$。在以 v 为根的装饰中，给层-j 顶点赋值 $z_v y_j / \sqrt{N_j}$。特征值方程可化为 $H_{\mathbf{b}}(\mu)y$ 的方程，其中包括根方程 $Q(G)z = \mu z$。由此得到装饰图的一个正特征向量，根据佩龙–弗罗贝尼乌斯定理可证 (20)。

连续性由变分刻画可得。若 $\mu_2 > \mu_1$，则在 μ_1 处的单位顶部特征向量 y 满足 $y_0 > 0$，且

$$F_{\mathbf{b}}(\mu_2) \geq F_{\mathbf{b}}(\mu_1) + (\mu_2 - \mu_1) y_0^2 > F_{\mathbf{b}}(\mu_1).$$

将精确公式应用于每个严格逼近序列，即可证明区间断言。附加树不会改变二分性和连通性，因此 L 和 Q 在整个过程中具有相同的半径。

□

3.3 有限覆盖论证

定理 *1.4* 的证明。对于附录 A 中的 101 行数据，取区间

$$K_i = F_{\mathbf{b}_i}(J_{d_i,\ell_i}).$$

定理 3.2 和命题 3.3 给出 $K_i \subseteq \mathcal{L}_{L,Q}^{\mathrm{bip}}$。相应的精确证书给出满足以下条件的有理内区间 $[u_i, v_i] \subseteq K_i$

$$u_1 < 29/5 < v_1, \qquad u_i < v_{i-1} < v_i \ (2 \leq i \leq 101), \qquad v_{101} > 6 + 2\sqrt{5}. \tag{21}$$

因此，它们的并集包含 $[29/5, \Gamma_L]$，而式 (13) 完成了证明。式 (21) 中的所有断言均由所提供的验证器仅使用整数和有理数进行检验。 □

第一个区间为 $F_{(1,1,1)}(J_{3,7})$，其内区间的端点约为

$$5.799661200535042, \qquad 5.8004998873099805.$$

最后一个是 $F_{(1,6,4,3)}(J_{5,\ 1})$；其经认证的右端点约为 11.306678106894612。链中最小的相邻重叠约为 $4.496717526157948 \cdot 10^{-7}$，作为精确有理数严格大于零。所用基度为 3，4，5，最大细分长度为 8，最大的 Bethe 字长度为 9。未使用平移或笛卡尔积法则。

该证明并未覆盖整个区间 $[9/2, 29/5)$。尤其是，向图中附加 Bethe 树并不会消除其中的圈，而且所依据的定理并不局限于树。因此，关于线性树的结果（例如 [2],中的结果）仍属于拉普拉斯极限点问题的另一个独立部分。

4 互补树构造

引理 4.1 (树的严格增长)。 设 $\alpha \neq 1/2$ ，且 T' 是由树 T附加至少一个新顶点得到的。那么

$$\rho_{B_\alpha}(T') > \rho_{B_\alpha}(T).$$

证明。 根据引理 2.1，只需考虑不可约非负矩阵 $H_\alpha = a_\alpha D + b_\alpha A$，其中 $b_\alpha > 0$。将 $H_\alpha(T)$ 的一个正 Perron 向量在新增顶点处补零。若 $a_\alpha > 0$，则由于一个附着顶点的度数增加，其瑞利商严格增大。若 $a_\alpha = 0$，则商起初不变，但谱半径比较中不可能取等：新顶点处的特征值方程会迫使一个原有的正坐标变为零。因此，两种情况下不等式都严格成立。

□

在 $\alpha = 1/2$ 处，有 $B_{1/2} = D/2$，而严格子树单调性不成立。

4.1 路径上的特征值位置

我们使用对称矩阵的标准对角化算法，其底层图是一棵树 [8, 7]。将该算法应用于 $B_\alpha(T) - \lambda I$ 时，通过 c_α 初始化一条边，并通过 $a_\alpha d(v) - \lambda$ 初始化一个顶点 v。处理一个当前对角值为 $z \neq 0$ 的子顶点时，从其父顶点处减去 c_α^2/z。根据西尔维斯特惯性定律，最终对角元的符号分别计数大于、小于和等于 λ的特征值。

在递推的讨论中，假设 $\alpha \neq 1/2$，从而 $b_\alpha > 0$。度矩阵情形将单独处理。在一条悬挂路径上，令 $q_\alpha := b_\alpha^2 = c_\alpha^2$。对角线元素满足

$$z_1 = a_\alpha - \lambda, \qquad z_{j+1} = \phi_{\alpha,\lambda}(z_j), \qquad \phi_{\alpha,\lambda}(t) := 2a_\alpha - \lambda - \frac{q_\alpha}{t}. \tag{22}$$

不动点方程的判别式为

$$\Delta_\alpha(\lambda) := (2a_\alpha - \lambda)^2 - 4q_\alpha. \tag{23}$$

相关阈值为

$$\pi(\alpha) := 2(a_\alpha + b_\alpha) = \begin{cases} 4 - 6\alpha, & 0 \le \alpha \le 1/2, \\ 2\alpha, & 1/2 \le \alpha \le 1. \end{cases} \tag{24}$$

对于 $\lambda > \pi(\alpha)$，有 $2a_\alpha - \lambda < -2b_\alpha$ ，因此 $\Delta_\alpha(\lambda) > 0$。两个不动点为

$$\theta_\alpha(\lambda) = \frac{2a_\alpha - \lambda - \sqrt{\Delta_\alpha(\lambda)}}{2}, \qquad \theta'_\alpha(\lambda) = \frac{2a_\alpha - \lambda + \sqrt{\Delta_\alpha(\lambda)}}{2}. \tag{25}$$

它们满足

$$\theta_\alpha < -b_\alpha < \theta'_\alpha < 0, \qquad \theta_\alpha \theta'_\alpha = q_\alpha.$$

此外， $z_1 < \theta_\alpha$ ，且（22）中的序列递增并收敛于吸引不动点 θ_α。这些是有理递推的标准双曲性质；参见 [11]。对于 λ ，在任意紧区间 $K \subset (\pi(\alpha), \infty)$ 上，该收敛是一致的。事实上，对于 $t \le \theta_\alpha(\lambda)$，

$$0 \le \phi'_{\alpha,\lambda}(t) \le \max_{x \in K} \frac{q_\alpha}{\theta_\alpha(x)^2} < 1.$$

初始值和不动点在 K上有界，因此压缩估计是一致的。

4.2 星形树 $T_{1,m,m}$

令 $T_{1、m、m}$ 为将一条长度为 1 的路径和两条长度为m 的路径在一个公共根处连接所得的树。当 $T_{1、3、3}$ 时，可得到一个一致的下界，从而使所有后续计算都处于双曲区域。

命题 4.2. 对于每个 $\alpha \in [0,1]$,

$$\rho_{B_\alpha}(T_{1,3,3}) \geq \pi(\alpha),$$

当且仅当 $\alpha = 1$ 时，等号成立。

证明。 首先假设 $b_\alpha > 0$。通过二部切换，将 $H_\alpha(T_{1,3,3}) - \pi(\alpha)I$ 对角化，其中 $H_\alpha = a_\alpha D + b_\alpha A$。设 $x = a_\alpha/b_\alpha$。在任一条长臂上，依次得到的值为

$$z_1 = -b_\alpha(x+2), \qquad z_2 = -b_\alpha \frac{2x+3}{x+2}, \qquad z_3 = -b_\alpha \frac{3x+4}{2x+3},$$

因此它们全都为负。处理完短臂和两条长臂后，根处的值为

$$\begin{aligned} \xi &= 3a_\alpha - \pi(\alpha) - \frac{b_\alpha^2}{z_1} - 2\frac{b_\alpha^2}{z_3} \\ &= b_\alpha \left(x - 2 + \frac{1}{x+2} + 2\frac{2x+3}{3x+4} \right) \\ &= b_\alpha \frac{x(x+1)(3x+5)}{(x+2)(3x+4)} \geq 0. \end{aligned}$$

当 $a_\alpha > 0$ 时它为正，当 $a_\alpha = 0$ 时它为零，也就是说，当 $\alpha = 1$ 时为零。由惯性定理即可得出结论。若 $b_\alpha = 0$ $\alpha = 1/2$ $B_{1/2} = D/2$ $\rho_{B_{1/2}}\ T_{1\,3\,3} = 3/2 >$，则 且； 因此 (.,) ($1 = \pi$ $1/2)$。 □

注 4.3。 无需为 ρ_{B_α}（$T_{1,\ 3,\ 3}$）求出闭式表达式。命题 *4.2* 正好提供了确保路径递推具有两个实不动点所需的信息。对于 $\alpha \neq 1/2$ 和 $m \geq 4$，严格树增长给出 ρ_{B_α}（$T_{1,\ m,\ m}$）$> \pi$（α），其中包括在 $m = 3$处等号成立的邻接情形。因此，极限计算严格在路径阈值之上进行。

根据引理 4.1，只要 $\alpha \neq 1/2$，序列 $\rho_{B_\alpha}(T_{1,\ m,\ m})$ 就关于 m 严格递增。它是有界的，例如其上界可取为切换后的非负矩阵的最大行和，因此该序列收敛。在 $\alpha = 1/2$ 处，该序列恒等于 $3/2$。

定理 4.4 （$T_{1,\ m,\ m}$ 极限）。 对于每个 $\alpha \in [0,1]$，极限

$$\tau_0(\alpha) := \lim_{m\to\infty} \rho_{B_\alpha}(T_{1,m,m})$$

是唯一解 $\lambda > \pi(\alpha)$ 的

$$F_\alpha(\lambda) := a_\alpha + \frac{q_\alpha}{\lambda - a_\alpha} - \sqrt{(\lambda - 2a_\alpha)^2 - 4q_\alpha} = 0. \tag{26}$$

若 $\alpha \neq 1/2$，则 τ_0（α） 是一个 B_α-极限点。在 $\alpha = 1/2$ 处，数值极限为 $3/2$，但按照定义 *1.1* 的意义，它不是一个极限点。

证明。若 $\alpha = 1/2$，则 $\rho_{B_{1/2}}(T_{1,\,m,\,m}) = 3/2$ 且 $F_{1/2}(\lambda) = 3/2 - \lambda$ 对于 $\lambda > 1$成立，从而可直接证明该断言。以下假设 $\alpha \neq 1/2$ 且 $m \geq 4$。令 $\lambda_m = \rho_{B_\alpha}(T_{1,\,m,\,m})$。在 λ_m 处处理$T_{1,\,m,\,m}$ 的三臂，得到

$$3a_\alpha - \lambda_m - \frac{q_\alpha}{a_\alpha - \lambda_m} - 2\frac{q_\alpha}{z_m(\lambda_m)} = 0, \tag{27}$$

其中 z_m 由（22）生成。前述命题与严格增长表明，极限值严格高于 $\pi(\alpha)$，包括在 $(\alpha,\, m) = (1,\, 3)$ 处的例外等式。因此，双曲递推在极限参数的某个紧邻域上一致收敛，并且

$$z_m(\lambda_m) \longrightarrow \theta_\alpha(\lambda), \qquad \lambda := \lim_m \lambda_m.$$

在（27）中取极限并利用 $q_\alpha/\theta_\alpha = \theta'_\alpha$，得到

$$3a_\alpha - \lambda - \frac{q_\alpha}{a_\alpha - \lambda} - 2\theta'_\alpha(\lambda) = 0.$$

由于 $2\theta'_\alpha = 2a_\alpha - \lambda + \sqrt{\Delta_\alpha(\lambda)}$，这正是（26）。

对于 $\lambda > \pi(\alpha)$,

$$F'_\alpha(\lambda) = -\frac{q_\alpha}{(\lambda - a_\alpha)^2} - \frac{\lambda - 2a_\alpha}{\sqrt{(\lambda - 2a_\alpha)^2 - 4q_\alpha}} < 0.$$

此外，$F_\alpha(\pi(\alpha)^+) > 0$ 且 $F_\alpha(\lambda) \to -\infty$ 当 $\lambda \to \infty$时。因此，（26）在所要求的定义域内恰有一个解。对于 $\alpha \neq 1/2$，有限谱半径严格递增，因而两两不同；其极限是一个极限点。$\alpha = 1/2$ 处的断言由$B_{1/2} = D/2$得到。

□

对于符号计算，可以将(26)平方，但必须保留未平方方程中的定义域和符号。在 $x = \lambda - a_\alpha$下，相关根满足

$$x^4 - 2a_\alpha x^3 - 4q_\alpha x^2 - 2a_\alpha q_\alpha x - q_\alpha^2 = 0, \qquad \lambda > \pi(\alpha), \tag{28}$$

以及(26)。这一限制消除了在不加定义域限制的情况下求解平方方程时所出现的伪根。

下面列出一些代表性数值。我们用 $\mathfrak{h}_L = 4.382975767\ldots$ 表示经典的$T_{1,m,m}$ 拉普拉斯矩阵极限。

表1：路径阈值、$T_{1,m,m}$ 极限，以及由加权插值得到的界。

α	$\pi(\alpha)$	$\tau_0(\alpha)$	d_α	$\Gamma(\alpha)$
0	4	$\mathfrak{h}_L$	6	$6 + 2\sqrt{5}$
1/4	5/2	2.825768143…	7	$21/4 + \sqrt{6}$
1/2	1	3/2	–	–
2/3	4/3	$\mathfrak{h}_L/3$	6	$(6 + 2\sqrt{5})/3$
3/4	3/2	1。591081806。。。	5	13/4
1	2	$\sqrt{2 + \sqrt{5}}$	4	$2\sqrt{3}$

列 $\Gamma(\alpha)$ 仅记录推论 1.3 给出的界。定理 1.4 将其改进为 $29/5$，当 $\alpha = 0$ 时；并改进为 $29/15$，当 $\alpha = 2/3$ 时，因为 $B_{2/3} = Q/3$。本节中的构造作为树实现仍有其独立价值。

4.3 进一步的星状极限点

对于正整数 $q_1 \le \cdots \le q_m$，令 $S(q_1,\dots,q_m)$ 表示臂长分别为这些数值的星状树。在本小节中始终假设 $\alpha \neq 1/2$，简记为 $a = a_\alpha$、$b = b_\alpha > 0$ 和 $q = b^2$，并对 $x > \pi(\alpha)$ 定义分支响应

$$R_1(x) := \frac{q}{x-a}, \qquad R_{j+1}(x) := \frac{q}{x-2a-R_j(x)}, \tag{29}$$

and

$$R_\infty(x) := \frac{x-2a-\sqrt{(x-2a)^2-4q}}{2}. \tag{30}$$

它们分别是有限悬挂路径和单向无限路径的正Schur补贡献。

引理 4.5. 对每一个 $x > \pi(\alpha)$，

$$0 < R_1(x) < R_2(x) < \cdots < R_\infty(x) < b.$$

每个 R_j 和 R_∞ 关于 x 严格递减。如果 $\rho_{B_\alpha}(S(q_1,\dots,q_m)) > \pi(\alpha)$，则其谱半径是该范围内的唯一解，即

$$x - ma = \sum_{i=1}^{m} R_{q_i}(x). \tag{31}$$

证明。 映射 $u \mapsto q/(x-2a-u)$ 在 $[0, R_\infty(x)]$ 上递增，并以 $R_\infty(x)$ 为不动点。此外，

$$R_1(x) < R_\infty(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x - a > \frac{q}{R_\infty(x)} = x - 2a - R_\infty(x),$$

这是显然的。迭代证明了第一组不等式链。关于 x 的严格递减可由(29)经归纳得到，并可直接由(30)得到。为完整起见，在紧区间 $K \subset (\pi(\alpha)\ \infty)$ 上，对 $0 \le u \le R_\infty(x)$，$u \mapsto q/(x-2a-u)$ 的导数至多为

$$\kappa_K := \max_{x\in K} \frac{R_\infty(x)^2}{q} < 1.$$

因此，$0 < R_\infty(x) - R_j(x)$ 在 K 上一致收敛。这为下文使用的依赖参数的极限提供了依据。最后，从叶到根逐一消去各臂，得到 (31)。其左侧严格递增，右侧严格递减，从而证明了唯一性。 □

下一个定理给出了一个绝对星状带，以及其中产生极限点的系统方法。

定理 4.6 (趋于无穷的星状臂)。 令 $m \ge 5$ 且 $\alpha \neq 1/2$。定义

$$t_m(\alpha) := \frac{\sqrt{(m-2)^2a_\alpha^2 + 4(m-1)b_\alpha^2} - (m-2)a_\alpha}{2(m-1)b_\alpha}, \qquad \Lambda_m(\alpha) := ma_\alpha + mb_\alpha t_m(\alpha), \tag{32}$$

and

$$\sigma_m(\alpha) := \frac{(m+1)a_\alpha + \sqrt{(m-1)^2a_\alpha^2 + 4mb_\alpha^2}}{2}. \tag{33}$$

那么：

(i) $\Lambda_m(\alpha)$ </style>是一个 -极限点，由 $(n,\dots,n)$ 在 $n \to \infty$ 时得到。

(ii) 每棵有限的 m-臂星状树都满足

$$\sigma_m(\alpha) \le \rho_{B_\alpha}(S(q_1,\dots,q_m)) < \Lambda_m(\alpha),$$

左侧等号当且仅当图为星形树 $S(1、\dots、1)$ 时成立。

(iii) 若固定 $1 \le r < m$ 和 $q_1 \le \cdots \le q_{m-r}$，则

$$\ell_\alpha(q_1,\dots,q_{m-r};r) := \lim_{n\to\infty} \rho_{B_\alpha}\big(S(q_1,\dots,q_{m-r},\underbrace{n,\dots,n}_{r})\big) \tag{34}$$

存在，是一个 B_α-极限点，并且是方程 $x > \pi(\alpha)$ 的唯一解

$$x - ma_\alpha = \sum_{i=1}^{m-r} R_{q_i}(x) + rR_\infty(x). \tag{35}$$

它严格小于 $\Lambda_m(\alpha)$。

证明。 $aD + bA$ 在星形树 $K_{1,m}$ 上的商矩阵具有特征因子

$$p_m(x) = (x - ma)(x - a) - mb^2,$$

其较大的根为（33）。在 $x = \pi(\alpha) = 2a + 2b$ 处，令 $y = a/b$，可得

$$\frac{p_m(\pi(\alpha))}{b^2} = -\big((m-2)y^2 + 2(m-3)y + (m-4)\big) < 0.$$

因此，对于 $m \ge 5$， $\sigma_m(\alpha) > \pi(\alpha)$。

由引理 4.1， $S(n,\dots,n)$ 的谱半径严格递增且有界。它们的根方程为

$$x_n - ma = mR_n(x_n).$$

由于参数始终处于 $\pi(\alpha)$ 以上的某个紧子区间内， R_n 在该区间上一致收敛到 R_∞。若 $x_n \to x$ 且 $t = R_\infty(x)/b$，则极限根方程和 R_∞ 的不动点方程给出

$$x = ma + mbt = 2a + b(t + t^{-1}).$$

因此

$$(m-1)bt^2 + (m-2)at - b = 0.$$

其唯一正根是 (32) 中的 $t_m(\alpha)$；它位于 (0,1) 内，因此极限值高于路径阈值。这就证明了 (i)。

星形树是每棵 m 臂星状树的子树。反过来，对于所有充分大的 N，每棵有限的 $S(q_1,\dots,q_m)$ 都是 $S(N,\dots,N)$ 的真子树。由严格树增长和 (i) 部分，(ii) 部分随即得证。

对于 (iii)，增大 n 会向 r 臂添加顶点，因此有限谱半径严格递增，且以 $\Lambda_m(\alpha)$ 为上界。将根方程取极限，得到 (35)。唯一性由引理 4.5 得出。在 $x = \Lambda_m(\alpha)$ 处，(35) 的左侧减去右侧等于

$$\sum_{i=1}^{m-r} \big(R_\infty(x) - R_{q_i}(x)\big) > 0,$$

因此，其根严格小于 $\Lambda_m(\alpha)$。 □

一种特别简单的嵌套族可通过保留 $m-1$ 个相等的有限臂得到。

推论 4.7。对于 $m \geq 5$ 和 $\alpha \neq 1/2$，令

$$\eta_{m,k}(\alpha) := \ell_\alpha(\underbrace{k, \ldots, k}_{m-1}; 1), \qquad k \geq 1.$$

那么，所有$\eta_{m,\,k}(\alpha)$ 都是 B_α-极限点，并且

$$\sigma_m(\alpha) < \eta_{m,1}(\alpha) < \eta_{m,2}(\alpha) < \cdots < \Lambda_m(\alpha), \qquad \lim_{k\to\infty} \eta_{m,k}(\alpha) = \Lambda_m(\alpha).$$

证明。固定一个 $x > \pi(\alpha)$后，引理 4.5 给出 $R_{k+1}(x) > R_k(x)$。因此，比较式 (35) 中严格递增的左减右函数可知，根随 k严格递增。由树增长可知，第一个根严格大于星形树对应的值。最后，$R_k \to R_\infty$在路径阈值以上的紧子区间上一致收敛，因此根的递增极限满足全无限方程，且等于 $\Lambda_m(\alpha)$。 □

对于拉普拉斯矩阵，$a_0 = b_0 = 1$，公式可简化为

$$\sigma_m(0) = m + 1, \qquad t_m(0) = \frac{1}{m-1}, \qquad \Lambda_m(0) = m + \frac{m}{m-1}. \tag{36}$$

例如，$\eta_{7,\,k}(0) \uparrow 49/6$ 以及 $\eta_{9,\,k}(0) \uparrow 81/8$，其中

$$8 < \eta_{7,k}(0) < 49/6 < 9, \qquad 10 < \eta_{9,k}(0) < 81/8 < 6 + 2\sqrt{5}.$$

这些是半直线内的显式树实现，已由定理 1.4 涵盖。接下来的障碍仅涉及星状树；完整拉普拉斯极限点集并不存在缺口。

命题 4.8（星状树的一个障碍）。无论是（$49/6$、9）还是（$81/8$、$6+2\sqrt{5}$），其中都不包含有限星状树的拉普拉斯谱半径，也不包含此类半径的极限。

证明。根据定理 4.6，具有 $m \geq 5$ 个臂的星状树的指标属于 $[m+1, m+m/(m-1))$。对于 $m = 5$，6，其指标至多为 $36/5 < 8$；对于 $m = 7$，上极限界为 $49/6$；对于 $m = 8$，整个区间均可取；对于 $m = 9$，上极限界为 $81/8$；对于 $m \geq 10$，下界至少为 11。臂数至多为四的树的最大度至多为四，且 $\rho_L \leq 2\Delta \leq 8$。这些界在取极限时仍然成立。更明确地说，在指标有界的收敛序列中，臂数受下界 $m+1$ 的限制，因此存在一个子序列具有固定的臂数。 □

5 与 A_β 及变形拉普拉斯矩阵的关系

5.1 变形拉普拉斯矩阵

对于实参数 s，令

$$M_G(s) = I - sA(G) + s^2(D(G) - I).$$

因此 $M_G(1) = L(G)$ 且 $M_G(-1) = Q(G)$。记 $\mathcal{L}_M(s)$ 为固定 s 时其谱半径的严格极限点集。

命题 5.1（二部图上的显式仿射相似）。设 G 为具有固定二分划分 $X \cup Y$的二部图，设 $s \neq 0$，令 $r = |s|$，并设 $\zeta_r = (1+r)/(1+2r)$ 和$\beta_r = r/(1+r)$。按二分划分对顶点排序并定义

$$S_s = \begin{cases} I, & s < 0, \\ \mathrm{diag}(I_{|X|}, -I_{|Y|}), & s > 0. \end{cases}$$

则 $S_s^{-1} = S_s$ 且

$$\begin{aligned} S_s M_G(s) S_s &= (1-r^2) I + r(1+2r) B_{\zeta_r}(G) \\ &= (1-r^2) I + r(1+r) A_{\beta_r}(G). \end{aligned} \tag{37}$$

若 G 没有孤立顶点，则 $M_G(s)$ 的谱半径等于其最大特征值，并且

$$\rho(M_G(s)) = 1 - r^2 + r(1+2r)\rho_{B_{\zeta_r}}(G). \tag{38}$$

因此，同一个正仿射映射将任意固定的、包含至少两个顶点的连通二部图类上的极限点集映射到彼此。

证明。 展开 $M_G(s) = (1-r^2)I + r^2 D - sA$。根据 S_s 的定义，有 $S_s D S_s = D$ 和 $S_s(-sA) S_s = rA$：对于 $s < 0$，这显然成立；而对于 $s > 0$，则由二部切换可得。因此

$$S_s M_G(s) S_s = (1-r^2) I + r^2 D + rA.$$

系数恒等式

$$r(1+2r) B_{\zeta_r} = r^2 D + rA = r(1+r) A_{\beta_r}$$

证明了（37）。这是一个正交相似变换，写成共轭后的等式形式。若不存在孤立顶点，则共轭矩阵的对角元为 $1 + r^2(d(v) - 1) \geq 1$，且非对角元非负 rA_{uv}。因此，根据佩龙–弗罗贝尼乌斯定理，其谱半径等于其最大特征值。正交相似变换和正仿射公式给出（38），并保持收敛性和两两不同性。排除孤立顶点的条件，是为了避免依赖这样一种通常不成立的断言：任意标量平移都会保持谱半径不变。

□

对于 $s \geq 1$，即使不要求二分性，也有直接恒等式，

$$M_G(s) = (1-s^2) I + s(2s-1) B_{(s-1)/(2s-1)}(G). \tag{39}$$

对于 $s < 0$、$S_s = I$，因此式 (37) 中的仿射等式对于每个图都直接成立，无需二分性假设。二分图构造消除了区间推论中对 s 的符号或大小的限制。

推论 5.2（对于每个非零参数的变形拉普拉斯区间）。 设 $s \neq 0$，$r = |s|$，且 $d \geq 3$。则

$$K_d(s) = \left[1 - r^2 + r^2 d + 2r\sqrt{d-1},\, 1 - r^2 + (r^2 + r)d\right] \subseteq \mathcal{L}_M(s). \tag{40}$$

所有点都有连通二分图实现。特别地，令

$$d_s = \left\lceil (1 + \sqrt{1+r})^2 \right\rceil, \qquad \Gamma_M(s) = 1 - r^2 + r^2 d_s + 2r\sqrt{d_s - 1},$$

则有 $[\Gamma_M(s)\ \infty) \subseteq L_M(s)$。当 $s = 0$、$M_G(0) = I$ 且 $L_M(0) = \varnothing$。

证明。 将定理 2.6 应用于 $a = r^2$、$b = r$。其连通近似图最终至少有两个顶点，因为它们的指标为正。命题 5.1 将它们的指标平移 $1 - r^2$，从而得到式 (40) 并保持互异性。相邻区间恰好在 $r(d - 2\sqrt{d}) \geq r^2$ 时重叠，这给出 d_s，如第 2.3 节所述。零点处的断言是直接的。

□

对于 $0 < r < 1$、$\beta_r < 1/2$ 和 $\zeta_r > 2/3$。因此，[13] 中的树 $T_{1,\ m,\ m}$ 以及 Shearer-毛毛虫图结果，都是 [12] 中相应 A_β 构造的仿射像。特别地，对于每个 $s \neq 0$，

$$\lim_m \rho(M_{T_{1,m,m}}(s)) = 1 - r^2 + r(1+2r)\tau_0(\zeta_r). \tag{41}$$

其他星形极限也通过相同的公式进行传递。这些恒等式将树重参数化与加权插值定理区分开来。

5.2 The A_β 缩放与Shearer毛毛虫树

推论 5.3 （A_β 完整非退化范围的区间）。 对于每个 $0 \le \beta < 1$ 和整数 $d \ge 3$,

$$[\beta d + 2(1-\beta)\sqrt{d-1}, d] \subseteq \mathcal{L}_A^{\mathrm{bip}}(\beta).$$

若 $d_\beta = \lceil (1 + 1/\sqrt{1-\beta})^2 \rceil$，则

$$[\beta d_\beta + 2(1-\beta)\sqrt{d_\beta - 1}, \infty) \subseteq \mathcal{L}_A^{\mathrm{bip}}(\beta).$$

对于 $\beta = 1$，矩阵为 D，其严格极限点集为空。

证明。 将定理 2.6 应用于 $a = \beta$、 $b = 1-\beta$，并使用关于$a/b = \beta/(1-\beta)$的重叠计算。 □

该结论对每个 $\beta < 1$ 都给出一条半直线，包括 $\beta \ge 1/2$；这超出了 [12] 中毛毛虫半直线定理的参数范围。其充分下端点未必是最优的：在 $\beta = 0$ 处，该端点为 $\underline{2\sqrt{3},}$ 而 Shearer 界为 $\sqrt{2+\sqrt{5}}$。

恒等式 (7) 有两个推论。首先，对每个 $\alpha > 1/2$,

$$\mathcal{L}_B(\alpha) = \alpha\, \mathcal{L}_A\!\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right), \tag{42}$$

其中，$\mathcal{L}_A(\beta)$ 表示 A_β-极限点的集合。其次，直接的 B_α 毛毛虫图递推并非一个独立的动力系统：经过缩放后，它恰好就是[12]中研究的递推。

对于毛毛虫图递推，假设 $\alpha \ne 1/2$，令 $\lambda > \pi(\alpha)$，并定义

$$\delta_\alpha(\lambda) := a_\alpha + \frac{q_\alpha}{\lambda - a_\alpha} > 0. \tag{43}$$

如果将 r_j 片叶子连接到毛毛虫的第 j 个脊柱顶点，那么第一个脊柱顶点及每个非末端脊柱顶点处的对角化结果满足

$$b_1 = a_\alpha - \lambda + r_1\delta_\alpha(\lambda), \qquad b_{j+1} = \phi_{\alpha,\lambda}(b_j) + r_{j+1}\delta_\alpha(\lambda). \tag{44}$$

在末端脊柱顶点处，初始对角项是 a_α，而不是 $2a_\alpha$；这种标准的端点修正与 A_β 构造中出现的修正完全相同。因此，选择 r_{j+1}，使得

$$\theta'_\alpha - \delta_\alpha \le b_{j+1} < \theta'_\alpha.$$

当商为整数时，必须用严格小于该商的最大整数替代通常的向下取整；等价地，$\lfloor x \rfloor_< = \lceil x \rceil - 1$。这一约定确保严格的上界不等式成立，包括商为整数的情形。

最简单的收敛判据要求

$$\theta'_\alpha(\lambda) - \delta_\alpha(\lambda) > -b_\alpha, \tag{45}$$

因为此时 $b_j^2 < b_\alpha^2$，并且特征值定位判据中的导数乘积发散。当 $\lambda \to \infty$ 时,

$$\theta'_\alpha(\lambda) \longrightarrow 0, \qquad \delta_\alpha(\lambda) \longrightarrow a_\alpha.$$

因此，当且仅当 $a_\alpha < b_\alpha$，也就是当 $\alpha > 2/3$ 时，条件（45）对所有充分大的 λ 都成立。这恰好确定了该充分判据的参数范围。

设 $\kappa_2(\alpha)$ 是 $\alpha > 2/3$ 时下列方程的唯一解：

$$\delta_\alpha(\lambda) - \theta'_\alpha(\lambda) = b_\alpha. \tag{46}$$

等价地，

$$\kappa_2(\alpha) = \alpha\tau_2\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right),$$

其中 τ_2 是定理 4.4]中的阈值 [12, 。因此

$$[\kappa_2(\alpha), \infty) \subseteq \mathcal{L}_B(\alpha), \qquad \alpha > 2/3, \tag{47}$$

且该半直线上的每个点都可通过毛虫树得到。在 $\alpha = 2/3$附近，式（46）中的阈值发散，而推论 1.3 中的一般阈值 $\Gamma(\alpha)$ 仍为有限值。因此，导出子图定理涵盖了毛虫准则无法覆盖的范围。

A_β 结果中参数较低时更精确的部分也同样适用。具体而言，推论 5.3] 给出如下结论：[12,

推论 5.4（邻接附近的一条尖锐射线）。 若

$$\alpha > \frac{5+\sqrt{5}}{8} \approx 0.9045,$$

then

$$[\tau_0(\alpha), \infty) \subseteq \mathcal{L}_B(\alpha).$$

证明。 在 $\beta = (1-\alpha)/\alpha$下，所示条件等价于 $0 \le \beta < 1 - 2\sqrt{5}/5$。Oliveira 和 Trevisan [12] 证明，在此范围内，所有不小于其$T_{1,m,m}$ 极限的数都是 A_β-极限点。将它们的极限点乘以 α 并使用（42）。根据定理 4.4，缩放类星极限恰为 $\tau_0(\alpha)$。 □

5.3 由 I、 D和 A生成的仿射族

上述族是$\Psi_{u,v,w}(G) = uI + vD(G) + wA(G)$的实例。它们的等价性既依赖于系数域，也依赖于图类。

命题 5.5. 若 $v \ge 0$, $w \ge -v$，且$(v, w) \ne (0,0)$，则

$$\Psi_{u,v,w} = uI + (2v + w)B_{(v+w)/(2v+w)}, \tag{48}$$

其中尺度为正，且 B参数位于 $[0, 1]$中。这些条件恰好描述了由 B_α、 $0 \le \alpha \le 1$的正倍数得到的系数对。若 G 是二部图且 $v \ge 0$，则切换还给出

$$\Psi_{u,v,w}(G) \sim uI + (2v + |w|)B_{(v+|w|)/(2v+|w|)}(G)$$

每当$(v, w) \ne (0,0)$。

证明。 写出 $tB_\alpha = t(1-\alpha)D + t(2\alpha - 1)A$，比较系数可得 $t = 2v + w$ 和$\alpha = (v + w)/(2v + w)$。所述不等式恰好是 $t > 0$ 和 $0 \le \alpha \le 1$。对于二部图，通过切换可以将 A的系数从 w 改为 $|w|$。 □

若没有系数或二部性限制，这种等价关系未必对所有图都一致成立。例如，对于每个图，$D-2A$ 都不可能在系数固定的情况下等于 $uI+tB_\alpha$：比较 D 和 A 将推出 $t=0$。对于正则图，关系$D=dI$ 会降低这一族的维数，但负的邻接系数会使最大特征值对应于最小邻接特征值。具体而言，对于 d-正则图以及 $w<0$，

$$\lambda_{\max}(\Psi_{u,v,w}) = u + vd + w\lambda_n(A),$$

而对于任意实数 w，

$$\rho(\Psi_{u,v,w}) = \max\{|u+vd+wd|,\ |u+vd+w\lambda_n(A)|\}.$$

因此，标量平移保留有序特征值的仿射规律，但通常不保留谱半径。例如，$-I-A(K_3)$ 的最大特征值为 0，谱半径为 3。

6 总结与开放方向

加权插值定理为每个 B_α 都给出了显式区间和一个半直线，离散情形 $\alpha=1/2$ 除外，且全程都有连通二部图实现。同样的论证还给出了每个具有 $\beta<1$ 的 A_β 以及每个非零变形拉普拉斯参数对应的半直线。细分和广义贝特装饰将拉普拉斯与无符号拉普拉斯共有的半直线扩展到 $[29/5,\infty)$，并给出了有限精确覆盖证书。

树公式补充了这一结果，描述了显式序列以及星状子类的局限性。前述区间（$4\underline{9}/6$, 9）和（$81/8$, $6+2\sqrt{5}$）由定理 1.4 覆盖；仅靠星状树仍无法达到这些区间。以下问题涉及这些论证尚未解决的部分。

(P1) 确定在$\mathcal{L}_B(\alpha)$中出现完整半直线的最小起点，并将其与连通二部图对应的起点进行比较。在拉普拉斯矩阵情形下，能否降低界限 $29/5$，并覆盖整个区间 $[9/2,29/5)$? (P2) 确定哪些其他区间可以由树实现，或具体而言，由线性树实现。二部图覆盖定理并未解决这一限制。(P3) 确定低于 $\tau_0(\alpha)$的第一个 B_α-极限点，以及使从 $\tau_0(\alpha)$开始的完整半直线被填满的参数。(P4) 量化构造逼近图的成本，并在可能的情况下提高注 2.7 中 $O(N^{-1/2})$的精度。

致谢

Francesco Belardo 和 Callum Huntington 感谢意大利国家高等数学研究所（INdAM）下属的代数、几何及其应用国家研究组（GNSAGA）提供的部分支持。Elismar R. Oliveira 和 Vilmar Trevisan 的工作部分由 CNPq（巴西）资助，资助编号为 408180/2023-4。Vilmar Trevisan 还获得了 CNPq（巴西）的支持，资助编号为 308774/2025-6。

生成式人工智能使用声明

在准备本稿件期间，作者使用 ChatGPT（OpenAI）协助完成特定任务，例如拟定初步提纲和集思广益提出论据。作者审阅、编辑并核实了所有生成内容，并对最终稿件的准确性和原创性承担全部责任。

参考文献

[1] N. Alon 和 F. Wei，正则图最大与最小特征值的极限点，arXiv:2304.01281v2，2023 年。[2] F. Belardo、E. R. Oliveira 和 V. Trevisan，线性树的（无符号）拉普拉斯谱半径的极限点，《应用数学与计算》477（2024），128819。 https://doi.org/10.1016/j.amc.2024.128819。[3] R. C. Díaz、E. R. Oliveira 和 V. Trevisan，树及 H-join 图的变形拉普拉斯矩阵的谱性质。《SIAM矩阵分析与应用》47（2026），第 3 期，1530–1550。doi:10.1137/25M1759823。[4] J. Friedman，Alon第二特征值猜想及相关问题的证明，《美国数学会回忆录》195（2008），第 910 号。[5] J.-M. Guo，关于图的拉普拉斯谱半径的极限点，《线性代数及其应用》 429 （2008），1705–1718。[6] A. J. Hoffman，关于非负对称整数矩阵谱半径的极限点，载于《图论及其应用》，《数学讲义》303，施普林格，1972 年，第 165–172 页。[7] C. Hoppen、D. P. Jacobs 和 V. Trevisan，《图中特征值定位：算法与应用》，施普林格，2022 年。[8] D. P. Jacobs 和 V. Trevisan，树的特征值定位，《线性代数及其应用》434（2011），81–88。[9] A. W. Marcus、D. A. Spielman 和 N. Srivastava，交错族I：任意度数的二部拉马努金图，《数学年刊》182（2015），307–325。 https://arxiv.org/abs/1304.4132.[10] V. Nikiforov，合并 A-谱理论与 Q-谱理论，《应用分析与离散数学》11（2017），81–107。[11] E. R. Oliveira 和 V. Trevisan，有理差分方程在谱图论中的应用，《差分方程及其应用》27（2021），1024–1051。[12] E. R. Oliveira 和 V. Trevisan，图的 A_α-矩阵的极限点，《线性代数及其应用》728（2026），1–25。 https://doi.org/10.1016/j.laa.2025.08.014.[13] E. R. Oliveira、J. Szutkoski 和 V. Trevisan，变形拉普拉斯极限点的分布。《线性代数及其应用》753（2027），169–197。doi:10.1016/j.laa.2026.08.032。[14] O. Rojo 和 L. Medina，广义贝特树加权复合图的谱，《电子线性代数期刊》18（2009），30–57。 https://doi.org/10.13001/1081-3810.1292.[15] A. Samanta、Deepshikha 和 K. C. Das，统一邻接、拉普拉斯矩阵和无符号拉普拉斯理论，《当代数学艺术》24（2024），论文 P4.10。 https://doi.org/10.26493/1855-3974.3163.6hw.[16] J. B. Shearer，关于图的最大特征值分布，《线性代数及其应用》114/115（1989），17–20。

一个 The101 区间证书

下表每一行都指定 $K_i = F_{\mathbf{b}_i}(J_{d_i,\ \ell_i})$。配套 JSON 文件记录了精确的有理数括区和内区间 $[u_i, v_i] \subseteq K_i$。最后两列显示 u_i，v_i 四舍五入到小数点后九位的数值；这些显示的小数不用于证明。空词$\varnothing$ 表示没有装饰。

精确验证

JSON 文件记录了每个端点在两个阶段的有理数括区。

1. 对于基区间，令 $P(x) = (x-d)p_{\ell-1}(x) - dp_{\ell-2}(x)$。要检验$P(x)-2\sqrt{d-1}$的符号，先检验 $P(x) < 0$ 是否成立；否则检验 $P(x)^2-4(d-1)$ 的符号。上端点使用 $P(x) - d$。定理 3.2 证明的唯一性使这些成为精确的根的括区。

2. 使用下方基区间端点的上 界和上方基区间端点的下 界。它们构成一个内基区间。$F_{\mathbf{b}}$ 的单调性保持了这一包含关系。

3. 对于有理数 μ，通过检验 $xI - H_{\mathbf{b}}(\mu)$ 是否正定，确定 $F_{\mathbf{b}}(\mu)$ 的位置。其连续的 LDL^T 主元为

$$t_0 = x - \mu - b_0, \qquad t_j = x - c_j - b_{j-1}/t_{j-1} \quad (1 \le j \le h),$$

   其中 $c_j = b_j + 1$ 对于 $j < h$ 和 $c_h = 1$。所有主元都必须严格为正；若主元非正，则测试终止。由于只涉及非对角元的平方，因此所有运算都是有理数运算。

4. 在两个像端点处再次向内取整，检查所有严格重叠，并检查$v_{101} > 6$ 和 $(v_{101}-6)^2 > 20$。后两个不等式无需计算 $\sqrt{5}$，即可证明 $v_{101} > \Gamma_L$。

生成器对每个特征值括区都进行了 64 次二分。独立验证器会检查记录的特征值括区本身；它不信任生成器、浮点特征值、舍入后的表格条目，也不依赖图示上的重叠外观。
Python 的标准库已足够：

```
python3 verify_bethe_cover.py Bethe_interval_certificate.json
```

程序会检查每一行、所有参数限制、所有根和特征值括区、所有包含关系和重叠、所声称的最小重叠以及最终端点。在 `python3 -O` 下，这些检查仍然有效。

No.	d	ℓ	**b**	内部左侧	内部右侧
1	3	7	(1, 1, 1)	5.799661201	5.800499887
2	3	7	(1, 1, 1,1, 2, 3)	5.800486144	5.801322277
3	3	7	(1, 1, 1,2, 1, 2, 3)	5.801318372	5.802153457
4	3	7	(1, 1, 1,2, 2, 2, 1, 3, 1)	5.802082971	5.802915367
5	3	7	(1, 1, 1,1, 3, 2, 1, 2, 2)	5.802673577	5.803481771
6	3	8	(1, 1, 2)	5.803468633	5.803896879
7	3	7	(1, 1, 1,1, 3, 2, 1, 3)	5.803720404	5.804500546
8	3	7	(1, 1, 1, 3)	5.804188761	5.805017309
9	3	7	(1, 1, 1,1, 3, 2, 1, 3, 1)	5.804972366	5.805707967
10	3	7	(1,1, 1, 2, 2, 3)	5.805520334	5.806313968
11	3	7	(1,1, 1, 3, 1, 1,3, 1, 2)	5.806303230	5.807122416
12	3	7	(1,1, 1, 3, 1, 2,2, 2, 2)	5.807078825	5.807892713
13	3	7	(1,1, 1, 2, 2, 2,3)	5.807546041	5.808255221
14	3	6	(1, 1)	5.808118379	5.809726712
15	3	7	(1,1, 1, 3, 1, 3,1)	5.809719389	5.810511208
16	3	7	(1, 1, 2)	5.810408947	5.811235363
17	3	7	(1,1, 1, 2, 3, 1,1, 3, 1)	5.810944125	5.811683010
18	3	8	(1,1, 2, 1, 2, 3,1, 2)	5.811490305	5.811879726
19	3	8	(1,1, 2, 2, 1, 1,2, 2, 2)	5.811875855	5.812294517
20	3	8	(1,1, 2, 2, 1, 2,2, 2, 1)	5.812286325	5.812703985
21	3	7	(1,1, 2, 1, 1, 2,2, 2, 2)	5.812702386	5.813524496
22	3	6	(1, 1, 1)	5.813171732	5.814771319
23	3	6	(1,1, 1, 2, 1, 3)	5.814759035	5.816352904
24	3	6	(1,1, 1, 2, 2, 2,2, 2, 2)	5.815862389	5.817444929
25	3	6	(1,1, 1, 1, 3, 2,1, 3, 1)	5.817175711	5.818659668
26	3	6	(1,1, 1, 2, 2, 3)	5.818376845	5.819908046
27	3	4	(1)	5.819150394	5.825276019
28	3	6	(1,1, 1, 2, 3, 1,2, 2)	5.825219295	5.826599100
29	3	6	(1,1, 2, 1, 1, 3,2, 1)	5.826579750	5.828137027
30	3	6	(1,1, 2, 1, 2, 2,2, 3)	5.828079218	5.829591573
31	3	1	$\varnothing$	5.828427125	6.000000000
32	3	3	(1,1, 2, 1, 3, 2,1, 3)	5.999969580	6.012004202
33	3	3	(1,1, 2, 2, 2, 3,1, 2, 2)	6.012001347	6.022873182
34	3	3	(1,1, 2, 3, 1, 1,3, 2, 1)	6.022749407	6.033651193
35	3	3	(1,1, 3, 1, 2, 2,3)	6.033177882	6.044327148
36	3	3	(1,1, 3, 1, 3, 1,3, 2, 2)	6.043962922	6.053988946
37	3	3	(1,1, 3, 1, 3, 2,2, 1, 1)	6.053846575	6.063042273
38	3	3	(1,1, 3, 2, 1, 2,2, 2, 3)	6.062900497	6.072706984
39	3	3	(1,1, 3, 2, 1, 3,2, 1, 3)	6.070826729	6.079925776
40	3	3	(1,1, 3, 2, 2, 1,3)	6.079857133	6.088649590
41	3	3	(1,1, 3, 2, 2, 2,1, 1, 4)	6.088267739	6.096018964
42	3	3	(1,1, 3, 2, 2, 2,2, 2, 3)	6.093622842	6.101284939
43	3	3	(1,1, 3, 2, 2, 2,2, 3, 1)	6.099892452	6.106890060
44	3	3	(1,2, 1, 1, 3, 2,1, 3, 2)	6.106803197	6.118151688
45	3	3	(1,2, 1, 3, 1, 3,2)	6.118044877	6.128957106
46	3	3	(1,2, 1, 3, 2, 2,2, 1, 3)	6.128831025	6.138999377
47	3	3	(1,2, 1, 3, 2, 2,3)	6.137603488	6.146691328
48	3	3	(1,2, 2, 1, 3, 2,2, 2, 1)	6.146485469	6.156875799
49	3	3	(1,2, 2, 2, 2, 2,2)	6.156806724	6.167058333
50	3	2	(1)	6.159272418	6.192582404
51	3	4	(1,2, 3, 1, 2, 3,1, 3, 1)	6.192498948	6.195943759
52	3	3	(1, 2, 1, 4)	6.193985457	6.200168466
53	3	3	(1,2, 2, 3, 1, 2,2, 1, 3)	6.200167988	6.208779890

续见下页

No.	d	ℓ	**b**	内部左側	内部右側
54	3	3	(1,2, 2, 3, 1, 3,1, 3, 2)	6.208559523	6.216621244
55	3	2	(1, 1)	6.214062270	6.246551365
56	3	2	(1,1, 3, 1, 2, 2,3, 1, 3)	6.246463150	6.277185095
57	3	2	(1,1, 3, 2, 2, 3,1, 2, 3)	6.276826874	6.303020612
58	3	2	(1,1, 3, 2, 3, 1,3, 1, 3)	6.300809336	6.322641473
59	3	2	(1,2, 1, 2, 3, 1,3)	6.322620779	6.352629019
60	3	2	(1,2, 2, 2, 2, 1,2, 2, 3)	6.352628569	6.381273503
61	3	2	(1,2, 2, 3, 1, 3,2, 3)	6.380743294	6.406234581
62	3	2	(1,2, 2, 3, 2, 2,3)	6.404722294	6.426892821
63	3	2	(1,2, 3, 1, 3, 2,2, 3, 2)	6.426350543	6.450125092
64	3	2	(1,2, 3, 2, 1)	6.449860310	6.472531761
65	3	2	(1,2, 3, 2, 2, 2,3, 2, 3)	6.472142176	6.491895329
66	3	2	(1, 3)	6.482238131	6.509040333
67	3	2	(1,2, 3, 2, 3, 1,3, 3)	6.508166307	6.524261692
68	3	2	(1,3, 1, 2, 3, 1,4)	6.524148421	6.549094148
69	3	2	(1, 3, 1, 3, 3)	6.548485431	6.571106167
70	3	2	(1, 3, 1, 3, 3, 1, 4)	6.568373455	6.587156946
71	3	2	(1, 3, 2, 1, 3, 2, 3, 2)	6.587145395	6.609688509
72	3	2	(1, 3, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 4)	6.609512119	6.629587805
73	3	2	(1,3, 2, 3)	6.628899387	6.649255919
74	3	2	(1, 3, 2, 3, 1, 3, 3, 2, 2)	6.649212608	6.667088540
75	3	2	(1,3, 2, 3, 2, 2,3, 2, 3)	6.666221560	6.683281550
76	3	2	(1,3, 2, 3, 2, 3,2, 2, 3)	6.682908978	6.698201277
77	4	4	(1,1, 4, 1, 2, 3,2, 2, 1)	6.698196798	6.706340288
78	3	2	(1,3, 2, 3, 2, 3,2, 3, 3)	6.704411073	6.715963512
79	4	3	(1)	6.707872203	6.735893565
80	4	4	(1,2, 2, 3)	6.734193101	6.743200947
81	3	2	(1,3, 3, 1)	6.737502289	6.754425712
82	4	3	(1,1, 1, 3)	6.753836379	6.781292490
83	4	3	(1, 1, 3, 3)	6.777347068	6.803505485
84	4	3	(1,1, 4, 1)	6.800587161	6.825400140
85	4	3	(1, 2)	6.820306162	6.846874841
86	4	3	(1,2, 2, 2)	6.842203728	6.868091652
87	5	2	∅	6.854101966	7.000000000
88	3	1	(1)	6.995226494	7.162277660
89	3	1	(1, 2, 3, 3)	7.145512149	7.294347122
90	3	1	(1,3, 3, 1)	7.287641072	7.421919844
91	3	1	(1, 4)	7.393930223	7.523476271
92	4	1	∅	7.464101615	8.000000000
93	5	2	(1)	7.997019952	8.140054945
94	3	1	(2)	8.109731692	8.274917218
95	3	1	(2,2, 4, 1)	8.272018779	8.424834874
96	3	1	(2,3, 4)	8.420303241	8.560159706
97	3	1	(2,4, 2, 4)	8.558009255	8.689853903
98	4	1	(1,2, 5, 2)	8.683935365	9.187442196
99	5	1	∅	9.000000000	10.000000000
100	4	1	(2, 4, 5, 2)	9.995049618	10.455282688
101	5	1	(1, 6, 4,3)	10.453686744	11.306678107