arXiv:2611.27943v1 [math.FA] 20 Nov 2026

自由就是你所需要的一切

JULIAN BUSHELLI、JAMES ELDRED PASCOE

Abstract. 泛函演算允许对矩阵甚至算子的函数进行严格分析。自由函数演算为任意范畴上的函数提供了自然的函数类。我们开启了将一般自由函数演算引向经典非交换泛函演算的表示论研究，这一方向可追溯至 Taylor、Voiculescu 及许多其他学者，同时着眼于范畴学习。定义在对直和封闭且局部相似变换（即坐标变换）不变的定义域上的泛函演算，继承了复分析和大规模并行网络的优良性质，例如自动解析性、自由泛单值；后者为有益的过拟合提供了一种假设性解释。

1. Introduction

人们早已认识到，如果允许机器学习算法在过多的参数上进行优化，它就会对训练数据产生“过拟合”，无法正确建模其 underlying 现象。然而，最近人们注意到，这种情况并不会发生在计算神经网络中；相反，增加参数会持续不断地提升模型的预测能力 [ZBHRO21]。

我们提出了对这一现象的一种理论解释；也就是说，计算神经网络具有“自由函数”的结构，因而受益于这类函数的诸多优良性质。至关重要的是，自由函数尊重直和结构，这使其特别适合用于理解并行系统。这些自由函数可以被视为复解析函数的非交换类比，并且满足比典型复解析函数更强的定理（得益于其无维数依赖性）。当函数取矩阵或算子变量时，这一理论已得到充分研究 [KVV14、JMS21、HKM12、Tay72], ；而这反过来又与控制理论以及系统流程图的研究有着诸多渊源；其核心理论优雅地延伸到了所谓的“加性范畴”情形， [B25]但尽管有理由相信该理论的适用范围还要更加广泛，我们对这一理论的这些边界仍缺乏充分理解 [Pas23]。

神经网络无法满足加性范畴的要求。为了便于应用这些结果，我们将通过把该范畴表示为希尔伯特空间范畴来“加性化”这一范畴。这些拓扑空间将共同获得一个交叉-

一组彼此兼容的再生核希尔伯特空间，每个空间上各有一个，从而可以将神经网络表示为这些向量空间之间的线性复合算子。这可以看作底层拓扑

日期：2026年11月。

空间的一种“可计算模型”。再生核希尔伯特空间理论已被用于许多领域，包括统计分析、机器学习、控制理论、信号处理和函数论等。

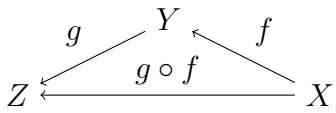
本文的一个主要问题如下：如果我们能够使用再生核希尔伯特空间来构建一族拓扑空间的可观测模型，那么该模型何时能忠实地呈现其底层现象？又在何种情况下，现象的复杂性会使这种可能性不复存在？我们给出了一个部分答案：任何“足够可分解”的第二可数蒂赫诺夫空间族都可以得到忠实呈现。如果这些空间不是第二可数的，那么就无法再保证可观测模型的忠实性。以上内容均在第三节中展开。

第四节对自由分析中的若干结果进行了推广，这些结果有助于分析神经网络，其中最值得注意的是对解析延拓概念的扩展。这一理论以加法结构为基础，为这类空间提供了复分析的有力类比。

第五节接着讨论神经网络这一具体情形，借助所构建的加法结构与自由函数演算，对“有益的过拟合”作出解释。

2. Neural nets, topologies, and categories

2.1. 拓扑与范畴。 假设我们有一组拓扑空间和连续映射。给定连续映射 $f\colon X \to Y$ 和 $g\colon Y \to Z$，我们可以将它们复合，定义连续映射 $g \circ f\colon X \to Z$。



如果允许所有这类复合以及平凡的恒等函数，那么这组空间和映射就称为拓扑空间范畴。这是范畴的典型例子，在许多情况下都是值得首先介绍的例子。事实上，得益于米田引理 [Rie17]，每个小范畴都可以忠实地表示为一个（离散）拓扑空间范畴。因此，可以用平凡核来建模任意范畴。

定义 2.1（范畴）。一个**范畴** C 由以下内容组成

- 一组**对象**，记作 $ob(C)$
- 对于每个 $u,\ v \in ob(C)$，都有一组从 u 到 v的**态射**（也称为箭头或映射），记作 $mor(u,\ v)$。–如果 $x \in mor(u,\ v)$ 且 $y \in mor(v,\ w)$，那么存在一个态射 $yx := y \circ x \in mor(u,\ w)$；这种复合必须满足结合律。

– 存在一个元素 $1 \in mor(u) := mor(u,\ u)$，称为**恒等态射**，使得对于定义域和陪域适当的任意 x，都有 $1x = x$ 和 $x1 = x$。

记号 $x : u \to v$ 等价于 $x \in mor(u,\ v)$。

如上所述，最重要的例子是这样的范畴：其对象是拓扑空间，其态射是连续映射。

我们还必须定义范畴表示。

定义 2.2。设 $C,\ D$ 是范畴。函子 **functor** $f : C \to D$ 是范畴之间的映射，满足以下条件。

对于所有 $u,\ v,\ w \in ob(C)$，以及所有 $x \in mor(u,\ v)$ 和 $y \in mor(v,\ w)$：

- 存在一个对象 $f(u) \in ob(D)$。
- 对于每个 $x \in mor(u, v)$，都存在一个态射 $f(x) \in mor(f(u)\ f(v))$。
- 对于恒等态射 $1_u \in mor(u)$，其像 $f(1) = 1_{f(u)} \in mor(f(u))$ 是恒等态射。
- 该函子保持复合，也就是说 $f(yx) = f(y)f(x)$。

上述函子有时称为“协变”函子。如果将上述最后一个关系替换为 $f(xy) = f(y)f(x)$，则称该映射为反变函子。

如果对于每一对对象 u, v 及所有态射x, y，都有：$u \to v$，则称该函子为**忠实**

$$f(x) \cong f(y) \iff x \cong y.$$

例 2.2.1（对偶化）。反变函子的一个重要例子是“对偶映射”：它将一个向量空间 X 映射到线性泛函空间 X^*，并将一个线性映射 $T : X \to Y$映射到其对偶映射 $T^* : Y^* \to X^*$.

将向量空间 $X \subset X^{**}$ 嵌入其二重对偶是忠实函子的一个很好的例子。

例 2.2.2（遗忘函子）。忠实函子的另一个重要例子是所谓的“遗忘”函子：它取向量空间并“遗忘”其向量空间结构，将它们映射到底层拓扑空间，并将线性变换映射为这些拓扑空间之间的连续映射。

例 2.2.3（复合算子）。可以将一个拓扑空间 X 映射到空间 $C(X)$，其中包含定义在 X. 上的连续（不一定是线性的）泛函。然后，可以将一个连续映射 $\varphi : X \to Y$ 映射到复合算子（即拉回）$C_\varphi : C(Y) \to C(X)$。这是一个反变函子，稍后将详细讨论这类函子。

通过考察目标范畴中的关系，可以大致了解两个函子 $F, G : C \to D$ 的相容程度。

定义 2.3。 考虑两个函子 $F, G: C \to D$。一组态射 η，由态射 $\eta_u: F(u) \to G(u)$ 组成，其中每个 $u \in obC$ 在 D 中对应一个态射，若对每个 $u, v \in obC$,$a: u \to v$., 下图都交换，则称其为从 F 到 G 的自然变换

$$\begin{array}{ccc} F(u) & \xrightarrow{F(a)} & F(v) \\ \downarrow{\scriptstyle \eta_u} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_v} \\ G(u) & \xrightarrow{G(a)} & G(v) \end{array}$$

其代数解释为

$$\eta_{cod(a)} F(a) = G(a) \eta_{dom(a)}$$

对于 $C.$ 的每个态射 a

接着我们定义范畴 D^C，称为函子范畴，其对象是函子 $F: C \to D$，态射则是自然变换 $\eta: F_1 \to F_2$。

在经典情形下，自然变换的概念以内自同构的形式出现在代数中。在分析中，交织是自然变换的一个简单例子，而 Sylvester 方程 $AX - XB = 0$ 的解则告诉我们某些自然变换何时存在。

2.2. **神经网络**。 （计算）神经网络应被视为连续映射的一种特殊情形。考虑一个接收 n 个实数输入并输出 m 个实数输出的神经网络。

定义 2.4（神经网络）。 定义函数 $ReLu: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$，使得 $ReLu(x) = \max\{0, x\}$。

深度为零的（计算型）神经网络 $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是如下形式的函数

$$F(x) = (F_1(x), \ldots, F_m(x)) = (ReLu\left(\sum_{i\in[n]} a_{i1}x_i\right), \ldots, ReLu\left(\sum_{i\in[n]} a_{im}x_i\right)). \tag{2.1}$$

深度为 ℓ 的神经网络是由 ℓ 个深度为零的神经网络复合而成的。这个数对应于神经网络中“隐藏层”的数量。

注 2.4.1。 上述描述有几种常见的变体。通常会用光滑逼近函数替代 $ReLu$，例如 exp 或 *Sigmoid* 函数。类似地，神经网络的最后一层通常不会应用 $ReLu$，因此该函数不一定总是正值。

由于以下讨论并不依赖于具体细节，我们只考虑上文定义的“标准”情形。

神经网络的范畴 CNN 可以自然地按以下方式定义。

- CNN 的对象是向量空间 $\mathbb{R}^n$、 $n \in \mathbb{N}$。
- 态射是任意深度的神经网络；
- $\mathbb{R}^n$ 上的恒等态射是神经网络
$$F(x) = (x_1, \ldots, x_n);$$
- 态射的复合是神经网络的函数复合；
  - 如果 f 的深度为 n，且 g 的深度为 m，则 $f \circ g$ 的深度为 $n + m + 1$。

注意，按照构造方式，这些函数的值域仅是每个 $\mathbb{R}^n$ 的正正交象限。因此，将这些对象视为只有正正交象限 $\mathbb{R}^{n+}$ 是非常合理的。

f， $g \in mor(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ 上定义了加法运算，定义为 $(f + g)(x) := f(x) + g(x) \in \mathbb{R}^m$。我们或许希望这能让我们构造一个加性范畴，并对这些映射应用自由函数演算；事实上，从加法的定义显然可知 $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$，因此左分配律成立。然而，由于我们的函数通常不是线性的，我们看到
$$h \circ (f + g) \neq h \circ f + h \circ g.$$

例如，若 $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 定义为 $h(x, y) = ReLU(x - 2y)$，且 $f(x_0) = (0, 3)$ $g(x_0) = (1, 0)$，那么
$$h \circ (f + g)(x_0) = h(1, 3) = ReLU(1 - 6) = 0$$
$$(h \circ f + h \circ g)(x_0) = h(1, 0) + h(0, 3) = ReLU(1) + ReLU(-6) = 1$$

因此，神经网络范畴并非加性范畴，尽管它是笛卡尔左加性范畴，这是在其他背景下研究过的一类范畴。在这些范畴中，矩阵计算无法正常进行，这严重限制了我们可用的分析技术。

为了重新运用这些技术，我们必须找到一种方法，通过再生核希尔伯特空间上的复合算子，将这个拓扑空间范畴表示为加性范畴。

2.3. 再生核希尔伯特空间。 这里我们将简要介绍再生核希尔伯特空间（RKHS），并说明它为何是反变函子的一个良好例子。

再生核希尔伯特空间 $\mathcal{H}_k$ 是一个由函数组成的希尔伯特空间 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ （或 $\mathbb{C}$），其中点求值定义了一个线性泛函，也就是说 $\lambda_x f\colon \mathcal{H}_k \to \mathbb{R}$ 由 $\lambda_x f = f(x)$ 定义，是一个线性泛函。

之所以称其为再生核希尔伯特空间，是因为这类空间与正半定二元“核”函数之间存在双射。

定义 2.5。 若函数 $\mathcal{K} : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ 满足$\mathcal{K}(x, y) = \mathcal{K}(y, x)$，并且满足以下不等式，则称其为再生核

$$\sum_{i,j}^{n} c_i c_j \mathcal{K}(x_i, y_j) \geq 0.$$

根据 Moore-Aronszajn 定理，我们能够为每个再生核构造一个唯一的再生核希尔伯特空间。该空间中的函数由点函数 $K_x := K(x, \ -)$ 的线性组合的闭包生成，而内积通过定义 $\langle K_x, \ K_y \rangle = K(x, \ y)$ 并将任意函数展开为其分量来给出。因此，如果 $f = \sum_i c_i \mathcal{K}_i(x_i, \ -)$，

$$\langle f, f \rangle = \sum_{i,j} c_i c_j \mathcal{K}(x_i, y_j) = \|f\|^2.$$

如果 $\mathcal{K}$ 是严格正定的（也就是说，上述不等式是严格的），那么这个内积定义良好；否则，我们必须对零元素取商。这表明，点函数 k_x 线性无关，当且仅当核是严格正定的。

请注意，在下文中，我们将遵循再生核希尔伯特空间文献中的惯例：当我们指不等式是严格的时，称其为“严格正定”，并将“正定”和“半正定”视为同义词。

例 2.5.1. 以下是再生核的示例。

- 线性核 $k(x, y) = y^T x$。
- 次数为 d 的多项式核 $k(x, y) = (a y^T x + c)^d$，其中 $a, c > 0$。这些核生成次数为 d 的多项式。
- Drury-Arveson 核， $k(x, y) = \frac{1}{1 - \langle x, y \rangle}$，它生成 Drury-Arveson 空间，这是 Hardy 空间 H^2 的多变量类比。
- 度量空间上的高斯核（径向基函数），其中 $k(x, y) = \exp(-\gamma^2 d(x, y))$

定义 2.6. 若存在某个连续非零函数 w，使得 $h(x, y) = w(x) w(y) k(x, y)$，则称两个核 k, h 为**酉等价** 。

3. Additivizing Topological Categories

采用 Koopman [Koo31]推广并被许多人使用的一种方法是，我们将对空间进行线性化，以构造一个加性范畴。以下推理适用于任意以连续函数为态射的拓扑空间范畴。我们先进行一般性讨论，然后再具体化到神经网络范畴，以得出更具体的结果。

3.1. **复合算子**。

定义 3.1。对于每个拓扑空间 X，我们都可以构造一个由连续泛函 $\mathcal{H}_X$构成的再生核希尔伯特空间，其元素为 $f\colon\ X \to \mathbb{R}$。[1]

每个函数 $\varphi\colon Y \to X$ 都定义了一个线性算子；我们定义 $C_\varphi\colon \mathcal{H}_X \to C(Y)$，使得对于每个 $y \in Y$，$C_\varphi f(y) = f(\varphi(y))$，其中 $C(Y)$ 是定义在Y上的连续泛函集合。

显然可以验证 C_φ 是线性的。事实上，

$$C_\varphi(f+\alpha g)(y) = (f+\alpha g)(\varphi(y)) = f(\varphi(y)) + \alpha g(\varphi(y)) = C_\varphi f(y) + \alpha C_\varphi g(y).$$

这里有一种简单的加法结构，其中 $C_\varphi + K_\psi$ 定义为

$$(C_\varphi + C_\psi)f = C_\varphi f + C_\psi f.$$

结合这两个事实，很容易验证这种加法在两侧都满足分配律。将加法逆元定义为 $-C_\varphi$ 映射 $f \mapsto -f\circ\varphi$，我们看到，由映射 $\varphi\colon Y \to X$生成了一个复合算子的向量空间。

目标是为每个空间赋予再生核希尔伯特空间结构，使其构成一个预加性范畴，然后纳入 $\mathcal{H}_X \oplus \mathcal{H}_Y$ 以及所有其他此类直和，从而构成一个加性范畴。[SaSa16] 的定理 2.19 告诉我们，这些直和本身同构于再生核希尔伯特空间，因此我们的加性范畴由再生核希尔伯特空间构成。

然而，这里有个问题：如果我们有一个定义在空间Y上的函数再生核希尔伯特空间 $\mathcal{H}_Y$，并不能保证 $C_\varphi f \in \mathcal{H}_Y$，即使 $f \in \mathcal{H}_X$。特别是，很容易找到定义在 X，Y，$X \times Y$上的核，使得 $\mathcal{H}(X) \not\subset H(X \times Y)$，或者更确切地说，$H(X) \oplus H(Y) \not\subset H(X \times Y)$。例如，如果 k_X是二次多项式核，而$k_{X\times X}$ 是四次多项式核，那么受限空间将无法匹配。

为处理这些微妙之处，我们引入“通用核族”的概念，它是在一个拓扑空间范畴 T 上的核族，并且与积相容。

3.2. **通用核族与忠实表示**。

定义 3.2. 设 T 为拓扑空间的一个笛卡尔范畴，也就是说，它包含所有有限积。对每个 $T_i \in obT$，选取一个点 $0_i =: 0$。设 k 为一个核族，其中每个拓扑空间 $X \in obT$都对应唯一的核 k_X。

定义

$$\mathcal{H}_k(X \times Y)|_{(X,0)}$$

为将 $k_{X\times Y}\colon (X\times Y)\times(X\times Y) \to \mathbb{R}$限制到 $(X,\ 0)\times(X,\ 0)$。后生成的再生核希尔伯特空间。

如果 k 满足以下条件，我们就称其为 $\mathcal{T}$–核的泛族：

$$\mathcal{H}_k(X \times Y)|_{(X,0)} \cong \mathcal{H}_k(X),$$

[1]这本质上是对实向量空间范畴进行切片

其中，同构是再生核希尔伯特空间之间的酉等价，并且

$$\mathcal{H}_k(X \times Y)|_{(0,Y)} \cong \mathcal{H}_k(Y).$$

这意味着

$$k_{X\times Y}((x_1,0),(y_1,0)) = w(x_1)w(x_2)k_X(x_1,x_2)$$

对于某个连续非零函数 w。

由于这些核是唯一的，满足 $\mathcal{H}_k(X) := \mathcal{H}_{k_X}(X)$。

有时我们也会使用记法 $\mathcal{H}_X := \mathcal{H}_{k_X}(X)$，因为对于给定的 T， k，它只可能表示一种含义。

例 3.2.1. 若 T 是一个具有连续函数的度量空间范畴，且度量 d_i 定义在空间 T_i上，则高斯核

$$e^{-\gamma d(x,y)}$$

对于 $\gamma > 0$ ，定义了一个 T 泛核族。

例 3.2.2。 多项式核

$$k(x,y) = (ax^T y + c)^d,$$

其中 $x, y \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$，其中 a, c, d 为固定值，而 n 取决于所讨论的拓扑空间。这些核在有限维实向量空间范畴或其子范畴上构成一个核的泛族。有限维空间$\mathcal{H}_{\mathbb{R}^n}$ 是次数为 d 的 $n-$ 元实多项式空间，如 [Zwi08]和[EEM22]所示。

命题 3.3。 若我们选取一个核的泛族 k，则对于拓扑空间 $X, Y \in obT$，诱导出的再生核希尔伯特空间满足 $H_X \oplus H_Y \subset H_{X\times Y}$。

特别地，当将 $\oplus$ 视为由加法给出的内直和时， $H_X \oplus H_Y$ 本身就是一个再生核希尔伯特空间。

证明。 考虑包含映射 $X \hookrightarrow X \coprod Y \hookrightarrow X \times Y$。这可以通过将 X与 $(X,0)$ 认同，并将 Y与 $(0,Y)$ 认同来实现。

于是，根据 [定理2.19, 3], 我们可以通过简单地将函数相加，构造一个与 $\mathcal{H}_X \oplus \mathcal{H}_Y$ 在$X \coprod Y$上同构的再生核希尔伯特空间。

由核的泛族的定义显然可知 $\mathcal{H}_X \hookrightarrow \mathcal{H}_{X\times Y}$，对 Y亦然。我们将此包含实现为 $\mathcal{H}_X \cong \mathcal{H}_{X\times Y}|_{(X,0)}$，对 Y亦然。

接下来，我们将 $\mathcal{H}_X \oplus \mathcal{H}_Y$与内直和$\mathcal{H}_{X\times Y}|_{(X,0)} \oplus \mathcal{H}_{X\times Y}|_{(0,Y)} \subset \mathcal{H}_{X\times Y}$. □

我们已经详细讨论了再生核希尔伯特空间本身的性质，但我们希望将态射函数演算应用于修改后的范畴。这些复合算子在这个再生核希尔伯特空间范畴中真的是线性映射吗？这种映射是忠实的吗？我们将探讨这些问题。

命题 3.4. 若 K 是一个核的泛族，则 $f\colon X \to Y$ 成为复合算子 $C_f\colon K_Y \to K_X$。

证明。由于 K 是一个核的泛族，我们将注意力转向 $K_{X\times Y}$。在此背景下， f是一个自同态，由映射 $(x,y) \mapsto (0, f(x))$ 定义；特别地，$(x,0) \mapsto (0, f(x))$。此映射是连续的，因为 $f^{-1}(0,U) = (f^{-1}(U)$ $Y)$。

~现在我们将 K_Y 上的核函数记为 k'，将 K_X 上的核函数记为 k。

现在令 $k'_y \in K_Y$。我们将其扩展到 $k_{(0,y)} \in K_{X\times Y}$。于是

$$\begin{aligned}\langle \tilde{k}_x, C_f k'_y\rangle &= \langle k_{(x,0)}, C_f k_{(0,y)}\rangle \\ &= k_{(0,y)}(f(x,0)) \\ &= k_{(0,y)}(0, f(x)) \\ &= k'(y, f(x))\end{aligned}$$

因此 $C_f k'_y \in K_X$。 □

~通过考察伴随算子，或许可以更容易地看出这一点：$\langle C_f^* k_x,\ k'_y\rangle =$
~ $\langle k_{f(x)},\ k'_y\rangle = k'(y,\ f(x))$，因此 $C_f^* k_x \in K_Y$。

这表明，我们的加性范畴表示将连续函数映射为再生核希尔伯特空间之间真正的线性映射。

接下来要证明，态射的映射是忠实的。回想一下，如果一个核是（严格）正定的，那么对于不同的 x，每个 k_x 都各不相同，因此该映射是单射。事实上，若有 $k(x,\ y) = k(y,\ y) = k(x,\ x)$，那么令 $c_x = 1, c_y = -1$ ，我们便有

$$k(x,x) - k(y,x) - k(x,y) + k(y,y) = 0.$$

因此，我们可以通过选择正定核而非半正定核来满足以下判据。

命题 3.5。 如果映射 $x \mapsto k_x$ 对于空间 X_1, X_2是单射的，那么每个不同的连续函数 $\varphi\colon X_1 \to X_2$ 都会给出一个不同的复合算子 C_φ。

~证明。我们可以将 f 视为命题 3.4 中的连续函数 $X \to Y$，因此不失一般性，假设任意函数 $f : X \to X$ 都对应某个空间 X。

考虑 f，它是定义在 X 上的连续函数，并令 C_f 为其复合映射。我们定义伴随算子 C_f^*，使其满足 $\langle k_x,\ C_f k_y\rangle = \langle C_f^* k_x,\ k_y\rangle$。那么

$$\begin{aligned}\langle k_x, C_f k_y\rangle &= C_f k_y(x)\\ &= k_y(f(x))\\ &= k(y, f(x))\\ &= k_{f(x)}(y).\end{aligned}$$

另一方面，$\langle C_f^* k_x,\ k_y\rangle = C_f^* k_x(y)$，因此

$$C_f^* k_x = k_{f(x)}.$$

现在令 $f \neq g$，即对于某个 $x \in X$，$f(x) \neq g(x)$。那么

$$C_f^* k_x \neq C_g^* k_x,$$

特别地，存在 $y \in X$，使得 $k_{f(x)}(y) \neq k_{g(x)}(y)$。

这意味着

$$\langle k_x, C_f k_y\rangle = \langle C_f^* k_x, k_y\rangle \neq \langle C_g^* k_x, k_y\rangle = \langle k_x, C_g k_y\rangle.$$

□

上述结果可以大致概括如下。

定理 3.6。给定一个拓扑空间的笛卡尔范畴 $\mathcal{T}$，核的 $\mathcal{T}$ 泛族 $\mathfrak{K}$ 诱导出一个协变函子 $\mathcal{K}$，它将 $\mathcal{T}$ 映射到再生核希尔伯特空间的加性范畴，并将每个连续函数 φ 映射到 C_φ^*。

这个函 子也可以视为一个反变函子，映射 $\varphi \mapsto C_\varphi$。

此外，$\mathcal{K}(\mathcal{T})$ 具有以下超可加性：

$$\mathcal{K}(X) \oplus \mathcal{K}(Y) \subset \mathcal{K}(X \times Y).$$

如果核族 $\mathfrak{K}$ 是严格正定的，那么函子 $\mathcal{K}$ 就是忠实的。

3.3. 第二可数空间中的泛核。现在我们来关注如何构造这类核。显然，在任何度量空间范畴上，我们都可以通过使用高斯核来构造一个核的泛族。

定义 3.7。若每个投影序列都会终止，则拓扑空间范畴 $\mathcal{T}$ 是**可分解的**。

也就是说，该范畴中的每个对象都由一组空间的积生成，而这些空间本身并不是 T 中任何其他空间的积。这些不可分解空间在本文中称为**原子，**或**原子空间**。

定理 3.8。 任何由第二可数 *Tychonoff* 空间构成的可分解范畴，都可以配备一族连续且严格正定的核。

为证明这一点，我们将借助以下两个经典命题。

命题 3.9 (Mun00 中的定理 32.1)。 每个第二可数正则拓扑空间都是正规空间。

命题 3.10 (乌雷松引理，Mun00 中的 33.1)。 拓扑空间 T 是正规空间，当且仅当对于任意两个不相交闭集 A 和 B，存在一个函数 $f\colon\ T \to \mathbb{R}$，使得 $f(A) = 1$ 且 $f(B) = 0$。

这两个经典命题主要用于以下引理。

引理 3.11。 若 T 是第二可数正规空间，则对每个开集 $U \subset T$，都存在一个函数 f: $T \to \mathbb{R}$，使得 $1 > f(U) > 0$且 $f(T \setminus U) = 0$。

证明。 对于每个开集 U，我们进行如下操作。令 $B = T \setminus U$ 为T的一个闭子集，并令 $\mathcal{B}$ 为拓扑的一个可数基。由于 U 是一个开集，对于每个 $a \in U$，存在一个 $a \in U_a \subset U$使得 $U_a \subset U$。事实上，在 $\mathcal{B}$中必定存在这样一个开集。因此，我们有这样一个 U_a的可数族。

由于 T 是正规的，我们可以构造函数 f_i，使得 $f_i|_{U_i} = 1$， $f_i|_{X\setminus B} = 0$。然后选取某个非零的 α_i 使得 $\sum_i^\infty \alpha_i = 1$，定义 $f_U = \sum_i \alpha_i f_i$。它在 U上处处非零，在其他地方处处为零。□

为了完成论证，我们还需要以下几个引理。

引理 3.12。 每个第二可数正则豪斯多夫空间都有一个严格正定连续核。

特别地，存在一个形如 $k(x, y) = \sum_i \alpha_i f_i(x) f_i(y)$ 的核，其中$\sum_i \alpha_i = 1$。

证明。 设 T 是一个第二可数正则豪斯多夫空间；根据命题 3.9，T 是正规的。我们可以选取 U 的一个可数开覆盖，使得 T 的每个开集都是 T的若干 $U_i \in U$之并；将这个可数基记为 $\mathcal{B}$。根据前一个引理，对每个开集 $U_i \in \mathcal{B}$，存在一个函数 f_i，使得 $1 > f_i|_U > 0$，但 $f_i|_{T\setminus U} = 0$。

Ch选取一些权重 α_i，使得 $\sum_i \alpha_i^2 = 1$。然后，我们在 T 上定义一个核:

$$k(x, y) = \sum_i \alpha_i^2 f_i(x) f_i(y),$$

它是连续的，且始终有界于 1。

现在只需证明 $k(x,\ y)$ 是严格正定的。为此，我们证明求值泛函 $k_x = k(x,\ -)$ 线性无关。因此

我们选取一个由互不相同的点组成的有限集合 $x_1, \ldots\ldots, x_n \in T$。由于 T能分离点，有限个开集的交集保证存在一个包含 x_i 、但不包含其他所有点的开集；进而可知， U中存在这样一个开集。

我们考虑所谓的“特征映射”表示，即将 k_x 视为 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 中的一个向量，其第 i 个坐标由 $f_i(x)$ 给出，并且 $\langle k_x, k_y\rangle_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} = k(x, y)$。但上一段表明，任意有限点集在特征映射下都会得到一组线性无关的向量。

Then
$$\sum_i \sum_j a_i a_j k(x_i, x_j) = \sum_i \sum_j a_i a_j \langle k_{x_i}, k_{x_j}\rangle = \| \sum_i a_i k_{x_i}\|^2$$

当 x_i 互不相同时，若 a_i 不全为零，则其值严格为正。

□

引理 3.13。 若 X、Y 是第二可数正则豪斯多夫空间，且其核如上引理所述，则

$$k(x, y) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j (f_i \times g_j)(x) \cdot (f_i \times g_j)(y)$$

是一个严格正定连续核。

特别地，将此核限制在 （X,**0**） 上，等于某个标量 $\gamma > 0$ 的 γk_X 。

证明。 考虑 $X \times Y$ 上的积拓扑，其中 X 有可数开生成集 U，而 Y 有 V。那么，如果开集 $\bigcup_i U_i = u \subset X$ 和 $\bigcup_k V_k = v \subset Y$ 满足 $\{U_i\} \subset U$， $\{V_i\} \subset V$，则

$$\bigcup_{i,j} U_i \times V_j = u \times v \subset X \times Y.$$

因此， $U \times V$ 是 $X \times Y$ 上拓扑的可数开生成集。

那么，对于 $f\colon X \to \mathbb{R}$， $g\colon Y \to \mathbb{R}$，我们定义 $f \times g\colon X \times Y \to \mathbb{R}$，使得 $(f \times g)(x, y) = f(x)g(y) \in \mathbb{R}$ 对于 $(x, y) \in X \times Y$ 成立。

由于 $\sum_i \alpha_i = 1 = \sum_j \beta_j$，我们也有 $\sum_i \sum_j \alpha_i \beta_j = 1$。然后利用核 $k_X(x_1, x_2) = \sum_i \alpha_i f_i(x_1) f_i(x_2)$ 和 $k_Y(y_1, y_2) = \sum_i \beta_i g_i(y_1) g_i(y_2)$，我们可以定义核

$$\begin{aligned} k_{X\times Y}(z_1, z_2) &= \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j (f_i \times g_j)(z_1) \cdot (f_i \times g_j)(z_2) \\ &= \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j f_i(x_1) \cdot f_i(x_2) \cdot g_j(y_1) \cdot g_j(y_2) \end{aligned}$$

对于 $z_1, z_2 \in X \times Y$. 但这恰好具有我们在前一引理中所构造的结构，因此这是一个严格正定连续核。

现在剩下的就是证明它能适当地加以限制。因此，让我们通过在 Y的选定点0处对$(x,0)$求值，将其限制到 X。于是，对某个 g_j，我们有$g_j(0) \neq 0$，因此

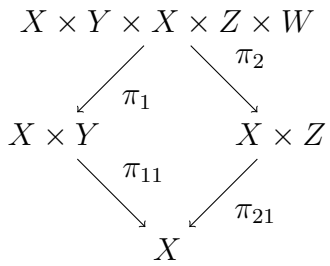
$$\begin{aligned} k_{X\times Y}((x_1,0),(x_2,0)) &= \sum_{i,j} \alpha_i\beta_j f_i(x_1)\cdot f_i(x_2)\cdot g_j(0)\cdot g_j(0) \\ &= \sum_j \sum_i \alpha_i f_i(x_1) f_i(x_2)\cdot \beta_j g_j(0)^2 \\ &= \sum_j \beta_j g_j(0)^2 \sum_i \alpha_i f_i(x_1) f_i(x_2) \\ &= \gamma \sum_i \alpha_i f_i(x_1) f_i(x_2) \leq 1. \end{aligned}$$

□

接下来的这条引理具有上述引理之“逆”引理的意味。

引理 3.14. 若 T 是一个空间，其上具有形如 $k(x,y) = \sum_i \alpha_i f_i(x) f_i(y)$ 的严格正定连续核，其中 $\sum_i \alpha_i = 1$，则到任一子空间的任何限制都具有相同形式的严格正定核。

特别地，若在 $X \times Y \times X \times Z \times W$、$X \times Y$ 和 X 上存在具有适当限制性质的核，则它可以以某种方式扩展到 $X \times Z$，使得下面的图表交换。



特别地，我们要求如下关系

$$k_{X\times Y\times X\times Z\times W}|_{(X,0,0,0,0)} \cong k_{X\times Y\times X\times Z\times W}|_{(0,0,X,0,0)} \cong k_X,$$

也就是说，它沿着到 X 的两个限制都表现得适当。

证明。令 $X \subset T$ 为一个子空间。然后通过限制到子空间拓扑，我们从 T的可数基 $\mathcal{B}$ 中得到 $X \subset T$ 的可数基 $\mathcal{B}_X$。

类似地，对于每个开集 $b \in \mathcal{B}_X$，我们都有一个连续函数 f_b，它在 b 上严格为正，在其他地方为零；该函数是通过限制前一个引理中的适当 f 得到的。

因此，与上文相同的论证表明，受限核中每个带有 $x \in b$ 的核函数 k_x 都是线性无关的，因为该子空间仍然是豪斯多夫的。

为证明该命题的后半部分，假设我们在 $X \times Y \times X \times Z \times W$、$X \times Y$ 和 X 上有核，使得 $k_{X\times Y\times X\times Z\times W}|_{(X,Y,0,0,0)} \cong k_{X\times Y}$，并且

$$k_{X\times Y\times X\times Z\times W}|_{(X,0,0,0,0)} \cong k_{X\times Y\times X\times Z\times W}|_{(0,0,X,0,0)} \cong k_X.$$

然后我们定义 $k_{X\times Z} := k_{X\times Y\times X\times Z\times W}|_{(0,0,X,Z,0)}$. 那么，将 $K_{X\times Z}$ 限制到 X 所得的结果将是 $k_{X\times Y\times X\times Z\times W_{(0,0,X,0,0)}}$，这正是我们所需要的。□

定理 *3.8* 的证明。考虑 $\mathcal{T}$ 的原子空间集合 $\mathcal{A}$，并选取其中一个空间，记为 A。由于蒂科诺夫空间是正则豪斯多夫空间，我们可以在 A 上定义一个严格正定连续核。

现在生成 A, $\prod^n A$ 的积。我们为它们赋予适当的核，如引理 3.13 所述。

将这些空间的集合记为 $A^\times$。现在，如果任何一个 $B \in A^\times$ 满足一个方程

$$B = \prod_{}^{\infty} \Gamma_j,$$

其中每个 $\Gamma_j \in \mathcal{A}$，那么我们就通过限制在它的所有组成空间上定义核，包括原子空间和积空间。在解决了所有这类方程之后，我们将新的空间集合称为 A。

如果这涵盖了所有原子空间，那么我们就完成了。否则，我们选取一个空间 A_2，为它赋予一个核，再将它与自身以及 A 中的所有空间取积，然后重复上述整个过程。最终，我们得到一个集合 A_{12}。经过西西弗式的反复努力，我们实现了目标。□

如果我们的拓扑空间范畴不可分解，我们可以通过选取每个投影序列的终止点，并移除其后的一切，来对它进行近似。这样，你就能选出一组原子空间，从而可以在所有“高于”所选原子的空间上赋予一个泛核。

事实上，可以在产生这些原子的空间上赋予核，从而形成无限回归；但它们能否被构造得满足核族的公理，尚不得而知。

由此结果可以得出几个有用的推论。

推论 3.14.1. 如果 $\mathcal{T}$ 是一个由第二可数紧 *Tychonoff* 空间组成的范畴，那么拓扑可由函子 $\mathcal{K}$ 忠实映射。

证明。 每个拓扑空间 $X \in ob\mathcal{T}$ 都通过 $x \mapsto k_x$ 嵌入到 $\mathcal{K}(X)$ 中。每个连续函数 $\varphi : X \to Y$ 都通过 $C^*_\varphi k_x = k_{\varphi(x)}$ 得到忠实表示。即使没有紧性，这些结论依然成立。

如果 $\mathcal{T}$ 是紧空间范畴，那么 K 应用于每个空间 $T \in ob\mathcal{T}$ 都是紧空间的连续嵌入，因此限制到像 $\mathcal{K}(T)$（视为函数）便给出了一个同胚。□

一般而言，核的连续性保证了像拓扑不会比原拓扑更精细。

推论 3.14.2。 如果 $\mathcal{T}$ 是由第二可数紧豪斯多夫空间组成的可分解范畴，那么核族还可以是泛核。

也就是说，再生核希尔伯特空间可以在每个空间 $X \in ob\mathcal{T}$ 上对所有连续函数进行逐点逼近。

证明。 每个紧豪斯多夫空间都是 Tychonoff 空间。

设 $\mathcal{B}$ 是拓扑 T的拓扑基。于是，如引理 3.12 的证明中那样，我们构造一个核函数。不过，我们注意到它是 ℓ^2的一个紧子集，而不是将其用作我们的核函数，因为它是从一个紧空间到其中的单射。

然后，我们在 ℓ^2的紧子集上应用若干泛核中的一个，例如 [Tan25]中所描述的径向核或 Taylor 核。

引理 3.13 和 3.14 的证明方式相同；空间 X 和 Y 上泛核的乘积本身就是 $X \times Y$ 上的泛核。根据定义，任何泛核在其空间的限制上仍是泛核。□

在紧的 $V \subset \ell^2$ 上使用泛核，是在 [Tan25] 中寻找紧致度量空间上的泛核的方法。

3.4. **非第二可数空间上的再生核**。让我们来考察一般 Tychonoff 空间上的再生核。

按照引理 3.12 中给出的论证，我们可以在任意 Tychonoff 空间 T 上构造一个连续核。我们使用在所选点处取正值、在所选邻域之外为零的函数来实现这一点，但无法保证它在集合其余部分上的行为。因此，我们构造出了一个连续核，但无法保证它是严格正定的。

选取一个可数点集 $x_i \in T$。由于 T 是 Tychonoff 空间，我们可以选取一个开邻域 U_{x_i}，使其包含 x_i，并选取一个函数 f_i，使得 $f_i(x_i) = 1$ 且 $f_i|_{T\setminus U_{x_i}} \equiv 0$。

确实，我们可以选择额外的开集和函数，使得对于每个 $x_j \in \{x_i\}$，$x_i \neq x_j$，都有一个开集 $U_{i\setminus j}$，它包含 x_i，但不包含 x_j。然后，在围绕每个 x_i 构造开集族的最后一步中，我们取 j 上变化的 $U_{i\setminus j}$ 的所有有限交。

因此，我们构造一族围绕 x_i的开集 $\mathcal{U}_i$，使得 x_i 与任何有限集 $\{x_j\}_{j\in J}$、 $i \notin J$都不相交。每个开集 $u \in \mathcal{U}_i$都容许一个函数 f_u，使得 $f_u(x_i) = 1$且 $f_u|_{T\setminus u} \equiv 0$。

族 $\mathcal{U}_i$ 是可数的。由于我们只选取了可数多个这样的点x_i，集合 $\mathcal{U} = \bigcup_i \mathcal{U}_i$ 也是可数的，因此我们可以通过以下方式构造一个连续核：

$$k(x, y) = \sum_{u \in \mathcal{U}} \alpha_u f_u(x) f_u(y)$$

其中 $\sum_u \alpha_u = 1$。

集合 k_{x_i} 是线性无关的，因为对任意有限集 $\{x_i\}_{i \in I}$ ，存在开集 $u_i \in \mathcal{U}_i$ ，使得 $x_i \in u_i$ ，但对所有 $i \neq j \in I$都有 $x_j \notin u_i$ 。

于是，引理3.13和3.14中给出的论证只需作形式上的改动即可成立，此时考虑的是所选 x_i 的覆盖 $\mathcal{U}$ ，而非整个空间的开覆盖。

注记 3.14.1. 注意，这并不能保证 x_i 的邻域中的给定点 y 会被逼近。它们可能恰好被每一个满足 $y \in u$的函数 f_u “错过”。

若我们希望保证积空间中的某些点被赋予非零核函数，则在到原子空间的投影下，可以保证其组成元素被赋予非零核函数。可数性要求在这一有限限制下不会失效。

另一方面，如果 $\mathcal{T}$ 是局部第二可数的，那么我们可以在局部作出与定理 3.8 的证明中完全相同的论证，这种情况下我们可以保证不会遗漏这些点 y 。

由此，我们证明了以下结论。

命题 3.15。 设 $\mathcal{T}$ 是一个由 *Tychonoff* 空间构成的可分解范畴 .

(1) 我们可以为 $\mathcal{T}$ 构造一个连续核的泛族。(2) 可以选择该核族，使其在每个 $T \in ob\mathcal{T}$ 的任意可数子集上严格正定。(3)如果每个 $T \in ob\mathcal{T}$ 都是局部第二可数的，则可以使该核族在某些开集上严格正定。

如果 T 既是局部第二可数的，又有一个可数稠密集，那么它就是第二可数的，我们便回到前一节。因此，如果缺少第二可数性，就必须接受某种取舍：要么忠实地逼近点的邻域，要么逼近点的稠密子集。

4. FREE UNIVERSAL MONODROMY

4.1. 自由函数。设 Q 是一个箭图，即一个有向多重图。我们考虑自由范畴（也称为路径范畴），其对象是 Q 的顶点，态射是 Q 中的路径（从右向左书写）。那么，如果 C 是一个加性范畴，

例如带有线性变换的向量空间范畴，我们定义函子范畴 C^Q.

令 $W_{u,\ v}$ 表示 Q 中从 u 到 v 的路径集合。自由多项式 $\mathbb{C}\langle Q\rangle(u,\ v)$ 由有限项之和组成

$$f = \sum_{w\in W_{u,\ v}} a_w w.$$

如果我们有 $f \in \mathbb{C}\langle Q\rangle(u,\ v)$ 和 $g = \sum_p b_p p \in \mathbb{C}\langle Q\rangle(v,\ r)$，则定义

$$g \cdot f = \sum_w \sum_p b_p a_w p \cdot w \in \mathbb{C}\langle Q\rangle(u, r)$$

，其中乘法是路径连接，因此每个 $w \cdot p \in W_{u,\ r}$。

这些多项式可以在表示 $X \in C^Q$ 上求值，方法是将每个 w 替换为表示 $X(w)$。如果 C 是有限维向量空间的范畴，那么这些表示将由矩阵组成，因此求值结果将是关于矩阵变量的多项式。

这些所谓的自由多项式是典型的**自由函数**，其定义基于自由多项式的一个关键特征；如果存在满足 $X\Gamma = \Gamma Y$ 的自然变换 Γ，那么 $f(X)\Gamma = \Gamma f(Y)$。

定义 4.1. D 的子范畴 C 称为**诱导子范畴**，如果每当$u, v \in obC$ 时，若 $a \in morD$, 则 $a:\ u \to v$ 属于 $morC$。也就是说，所有适格态射都包含在内。

只要 U 在直和和自然自同构下封闭，函子范畴 C^Q 的诱导子范畴 U 就称为 C^Q 的**满 nc- 子范畴**。也就是说：如果 $X, Y \in U$，那么 $X \oplus Y \in U$；如果 S是自然同构，那么 $S^{-1}XS \in U$。

自由映射 是一个函数 f，其定义域是 C^Q 的 nc-子范畴 U，陪域为 C^R；其中，Q, R 是顶点数相同的自由路径范畴，而 C 是加性范畴；对于每个 $X, Y \in U$，如果存在U 中的自然变换 Γ，使得

$$X\Gamma = \Gamma Y$$

我们也有

$$f(X)\Gamma = \Gamma f(Y).$$

我们也可以将自由映射刻画为保持直和和自然同构的映射。

定义 4.2. 设 C^Q 是一个函子范畴，其中 Q 是自由范畴，且 C 是可加的。那么，若 $V: obQ \to obC$ 是任意函数，我们将 C_V^Q 定义为仅包含满足对每个 $u \in obQ$，$X(u) = V(u)$ 的函子 $X \in C^Q$ 的诱导子范畴。这通常不是一个 nc-子范畴。

在典型设置中，自由映射 f 将 $X \in C_V^Q$ 映射到 $f(X) \in C_V^R$，也就是说，它是分次的，或“保持层次”。

4.2. **自动解析性**。就我们的目的而言，我们假设加性范畴 C的每个同态集都具有度量空间结构。于是，如果 Q 有有限多个对象，我们就可以在 C_V^Q 的每个层次上施加乘积度量。

那么，路径定义为光滑函数 $\gamma : (0，1) \to C_V^Q$，这也是通常的定义方式。

定义 4.3。假设我们有自由开集 $U \subset C^Q$，并令 $f : U \to C^R$ 为一个局部有界自由函数。

那么，如果存在一个开集 $V \supset U$ 和一个局部有界自由函数 $F : V \to C^R$，满足 $F|_U = f$，我们就称 F为 f的一个**自由 bornologic 延拓**。

我们称 f **在** V上自由延拓。

这显然是解析延拓概念的一个类比。事实上，由于自由分析的以下基础性结果 [KVV14, AM18]，它是一个真正的泛化。

命题 4.4. 设 C 为有限维复向量空间范畴。

当且仅当 $f : C^{\langle x_1,\ldots,x_d\rangle} \to C^{\langle x_1,\ldots,x_e\rangle}$ 是解析的时，它才是局部有界自由映射。

在更一般的情形下，我们也可以证明一个类似的定理。值得注意的一项重要区别是，在所有加性范畴中，可微性与幂级数表示之间尚未建立稳固的联系。

命题 4.5. 设 C 是一个同态集为度量空间的加性范畴， Q、 R 是小范畴。对于自由子范畴 $U \subset C^Q$，设 $f : U \to C^R$ 是一个自由映射。则以下条件等价。

- f 是局部有界的；
- f 是连续的；
- f 可微。

众所周知，可微性蕴含连续性，进而蕴含局部有界性；我们将证明局部有界蕴含连续，而连续蕴含可微。

首先，我们陈述一个引理，它在本证明中多次出现，在后续证明中也会以类似的思路出现。

引理 4.6. 如果范畴 $\mathcal{X} \in C^Q$ 中的态射具有 $x = \left(\begin{smallmatrix} X & X\Gamma - \Gamma Y \\ & Y \end{smallmatrix}\right)$这种形式，那么

$$f(x) = \begin{pmatrix} f(X) & f(X)\Gamma - \Gamma f(Y) \\ & f(Y) \end{pmatrix}$$

证明. 注意到，通过自然变换 $s = \begin{pmatrix} 1 & \Gamma \\ & 1 \end{pmatrix}$，$x$ 与 $\tilde{x}$ 自然同构，其中 $\tilde{x} = \begin{pmatrix} X & \\ & Y \end{pmatrix}$。计算 $f(x) = s^{-1}f(\tilde{x})s$ 即可证明该引理。□

局部有界性意味着连续性。每个评价层 C_V^Q 都是一个带有乘积度量的度量空间。

我们先证明局部有界自由函数是连续的。为此，取一点 $X \oplus X \in U_V$；选择该点周围半径为 r 的邻域 $B(X \oplus X, r)$，其中 r 足够小，使得 $B(X \oplus X, r) \subset U_V$。特别地，选择足够小的 r，使得闭包包含于 U_V 内。

那么，由于闭包 $B(X \oplus \overline{X, r)}$ 是紧的，且 f 是局部有界的，我们可知存在某个 $k > 0$，使得对于每个 $z \in B(X \oplus X, r)$，都有 $\|f(z)\| < k$。

现在给定 $\epsilon > 0$，并考虑 $B(f(X)\ \epsilon)$。令 $\delta <$ 为 $r/2, r\epsilon/2C$ 中的最小值，使得 $B(X, \delta) \subset U_V$。

现在取 $Y \in B(X,\ \delta)$。那么 $\|Y - X\| < \frac{r}{2}$和 $\|\frac{k}{\epsilon}(Y - X)\| < \frac{r}{2}$。根据三角不等式

$$\left\| \begin{pmatrix} Y & \frac{k}{\epsilon}(Y - X) \\ & X \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X & \\ & X \end{pmatrix} \right\| < r.$$

因此 $\begin{pmatrix} Y & \frac{k}{\epsilon}(Y - X) \\ & X \end{pmatrix} \in B(X \oplus X,$ $r)$，所以

$$\left\| f \begin{pmatrix} Y & \frac{k}{\epsilon}(Y - X) \\ & X \end{pmatrix} \right\| < k.$$

但根据引理 4.2

$$f \begin{pmatrix} Y & \frac{k}{\epsilon}(Y - X) \\ & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(Y) & \frac{k}{\epsilon}(f(Y) - f(X)) \\ & f(X) \end{pmatrix},$$

我们得出

$$\|\frac{k}{\epsilon}(f(Y) - f(X))\| < k,$$

也就是说 $f(Y) \in B(f(X)\ \epsilon)$。因此，根据柯西判别法，$f$是连续的 . □

连续性蕴含可微性。令 $f:\ U \to C^R$ 连续。

选择 $X \in U$。然后 $X \oplus X \in U$。由于 U 在度量空间中是开集，我们可以选择足够小的 H，使得 $\begin{pmatrix} X & H \\ & X \end{pmatrix} \in U$。同样，我们可以选择一个足够小的标量 z，使得

$$Z(z) = \begin{pmatrix} X + zH & H \\ & X \end{pmatrix} \in U.$$

如果我们选择一个自然变换 $\Gamma = \frac{1}{z}I$，那么实际上有

$$Z(z) = \begin{pmatrix} X + zH & (X + zH)\Gamma - \Gamma X \\ & X \end{pmatrix}.$$

于是我们的引理告诉我们

$$f(Z(z)) = \begin{pmatrix} f(X + zH) & \frac{f(X+zH)-f(X)}{z} \\ & f(X) \end{pmatrix}.$$

由于 f 连续，我们可以取极限，并在右上角得到 Fr´echet 方向导数。

□

请注意，连续性与可微性等价并不需要度量空间结构；一般来说，连续性意味着序列的收敛，因此我们可以如上所示计算导数。我们需要度量，因为“局部有界”在度量空间之外并没有什么明确意义。

以下定理及其证明是对 [Pas26]，中证明的自然推广，此处重述以使论述完整。

定理 4.7 (万有自由单值定理)**.** 假设 f 在非交换域 $D \subset C_V^Q$ 上连续。若 f 沿非交换域 $U \subset C^Q$ 中的每条路径都可以自由延拓，则它可以自由延拓到所有 U。

证明。 假设 f 沿着两条端点相同的路径 γ_1， γ_2 在 C^Q 上自由延拓，设其端点为 s 和 t，并且以 (0，1) 为参数化区间。那么，它也必定沿着这条路径自由延拓

$$\gamma_1 \oplus \gamma_2 = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \\ & \gamma_2 \end{pmatrix} \in C^Q$$

从 $s \oplus s$ 到 $t \oplus t$。

因此，对于充分小的 $\varepsilon > 0$， f 的同一个自由 bornologic 延拓沿着该路径延伸

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 & \varepsilon\frac{\gamma_1-\gamma_2}{\|\gamma_1-\gamma_2\|^{1/2}} \\ & \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\varepsilon}{\|\gamma_1-\gamma_2\|^{1/2}} \\ & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_1 & \\ & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\varepsilon}{\|\gamma_1-\gamma_2\|^{1/2}} \\ & 1 \end{pmatrix}$$

.

由于 f 的自由 bornologic 延拓是自由的，我们有

$$f\begin{pmatrix} \gamma_1 & \varepsilon\frac{\gamma_1-\gamma_2}{\|\gamma_1-\gamma_2\|^{1/2}} \\ & \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\varepsilon}{\|\gamma_1-\gamma_2\|^{1/2}} \\ & 1 \end{pmatrix}^{-1} f\begin{pmatrix} \gamma_1 & \\ & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\varepsilon}{\|\gamma_1-\gamma_2\|^{1/2}} \\ & 1 \end{pmatrix},$$

也就是说

$$f\begin{pmatrix}\gamma_1 & \varepsilon\frac{\gamma_1-\gamma_2}{\|\gamma_1-\gamma_2\|^{1/2}}\\ & \gamma_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f(\gamma_1) & \varepsilon\frac{f(\gamma_1)-f(\gamma_2)}{\|\gamma_1-\gamma_2\|^{1/2}}\\ & f(\gamma_2)\end{pmatrix}.$$

假设自由 bornologic 延拓不一致；在端点处，该评估将会发散。但这与延拓沿我们平移后的路径的局部有界性相矛盾，因此也与沿我们原始路径的局部有界性相矛盾。□

5. EXPLAINING OVERFITTING

现在我们将注意力转向既定目标：为神经网络在过度参数化情况下的鲁棒性提供理论解释。

现在假设我们希望针对某种度量优化一个神经网络 $f:\ \mathbb{B}_n \to \mathbb{B}_m$ 。我们将用一个正规态来建模，它是定义在算子上的归一化半正定函数。我们这样做是因为态提供了一种直接而稳健的算子度量方式，因此能够让我们有效地度量底层函数 φ。

定义 5.1. 算子代数 $\mathcal{A}=\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上的一个**态** ρ 是一个线性泛函，并满足 $\rho(1)=1$ 且对于每个 $a\in\mathcal{A}$，都有 $\rho(a^*a)\geq 0$ 。

一个**向量态** ρ_x 由 $\rho_x(a)=\frac{x^*ax}{\|x\|^2}$ 给出，其中 $a\in\mathcal{A}, x\in\mathcal{H}$。

若态 ρ 在$\mathcal{A}$的单位球上弱算子连续，则称其为**正规**态（或者，等价地，满足许多其他条件） [KR86，定理 7.1.12]。

正规态是向量态的凸和；也就是说，若 ρ 是正规态，则

$$\rho=\sum_{n\in\mathbb{N}}\lambda_n\rho_{x_n}$$

其中 $\sum_{n\in\mathbb{N}}\lambda_n=1$ 和 ρ_{x_n} 是向量态，其向量为 $x_n\in\mathcal{H}$。

为了有效地应用我们的态，我们还定义如下概念。

定义 5.2。若 Koopman 函子 $\mathcal{K}:\mathcal{T}\to RKHS$ 满足：对于$\mathcal{T}$中的每个连续映射 φ，算子 C_φ 在 $\mathcal{K}(\mathcal{T})$中有界，则称其为$\mathcal{T}$的**稳定模型**。或者，对于一类连续映射 $\{\psi\}\subset mor\mathcal{T}$，若每个 C_ψ 都是 $\mathcal{K}(\mathcal{T})$中的有界算子，则称 $\mathcal{K}$ **稳定地建模** $\{\psi\}$ 。

注意，若 $\mathcal{K}$ 稳定地建模一类 $\{\psi\}$，则它也稳定地建模由这类 ψ及其复合映射构成的类，从而得到一个子范畴 $\{\psi\}$，它是由 $\mathcal{K}$稳定建模的 $\mathcal{T}$。

例 5.2.1。设 $\mathfrak{B}$ 是一个范畴，其对象是所有 $n\in\mathbb{N}$ 的单位球 $\mathbb{B}_n$，其态射是全纯映射 $\varphi\colon\ \mathbb{B}_n\to\mathbb{B}_m$，满足

$$\left(\frac{1-\langle\varphi(z),\varphi(w)\rangle}{1-\langle z,w\rangle}\right)^n$$

是 $\mathbb{B}_n$ 上的核函数。

Drury-Arveson 核的泛族为我们提供了 $\mathfrak{B}$的稳定模型。

这是 [KM25]中的定理 4.2 的一个推论。

例 5.2.2。 令 $\mathfrak{R}$ 为拓扑空间 $\mathbb{R}^n$范畴，其态射包含所有解析映射。

因此，我们选取的几乎所有核都无法稳定地建模所有态射。正如[IIS22], 所示，对于 $\mathbb{R}^d$上的大类正定核函数，只有仿射映射才能诱导有界复合算子。

由于对无界算子进行优化颇为微妙，接下来我们将只考虑稳定模型。

接着，我们选取一个正规态 $\rho = \sum_n \lambda_n \rho_{f_n}$，其中每个 f_n 都属于再生核希尔伯特空间 $\mathcal{K}(X)$。

那么，若 $\varphi \in morX$，复合算子 C_φ 是有界的；并且我们选择每个 f_n，使得 $\|f_n\| = 1$，于是

$$\rho C_\varphi = \sum_n \lambda_n f_n^* C_\varphi f_n. \tag{5.1}$$

引理 5.3. 将映射 $F(f^*, f, C_\varphi) = \rho C_\varphi$ 视为变量 f^*、f、C_φ 的函数时，它是一个自由函数（如 *[B25]* 中所述），但也可以看作一个泛函。

证明. 允许在 $\mathcal{K}(X)$ 上取算子的直和，同时也允许对再生核希尔伯特空间中的元素 f 取直和，我们得到

$$\begin{aligned} F(f \oplus g, f^* \oplus g^*, C_\varphi \oplus C_\psi) &= \sum_n \lambda_n (f_n^* \oplus g_n^*)(C_\varphi \oplus C_\psi)(f_n \oplus g_n) \\ &= \sum_n \lambda_n \Big(f_n^* C_\varphi f_n \oplus g_n^* C_\psi g_n \Big). \end{aligned}$$

因此，它保持直和结构；其多项式性质也保持相似变换，因此它是一个自由函数。

如果我们将直和空间视为再生核希尔伯特空间的内直和，则得到

$$\begin{aligned} \sum_n \lambda_n (f_n^* + g_n^*)(C_\varphi f_n + C_\psi g_n) &= \sum_n \lambda_n (f_n^* C_\varphi f_n + g_n^* C_\varphi f_n + f_n^* C_\psi g_n + g_n^* C_\psi g_n) \\ &= \lambda_n \Big(f_n^* C_\varphi f_n + g_n^* C_\psi g_n \Big) \end{aligned}$$

因为 $f^* C_\psi g$ 被计算为 $\begin{pmatrix} f & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & g \end{pmatrix} = 0$, 如命题 3.4 所示。 □

注 5.3.1。 请注意，即使 $\|f_n\| = 1 = \|g_n\|$. 二者都是态，F 在直和下也不再是态。不过，如果我们对 f 和 g取凸组合，它又是一个态。

因此，正泛函是自由函数。为了得到一个态，我们来看一个特殊情形。

这可以表示为一个函数方程；具体来说，我们可以利用再生核希尔伯特空间的定义来证明

$$\rho C_\varphi = \sum_n \lambda_n \sum_{i_n} a_{i_n} f_n(\varphi(x_{i_n})) \tag{5.2}$$

其中 $f_n = \sum_{i_n} a_{i_n} k_{x_{i_n}}$.

然后我们希望针对 φ 优化 ρC_φ。如果直接最小化 ρC_φ，可能会遇到这样的问题：尽管算子有界，$\sup_\varphi \|C_\varphi\| = \infty$ 仍然成立，因此我们将改为最小化 $\frac{1}{\|C_\varphi\|}\rho C_\varphi$，其范数由 $\|\rho\| = 1$ 限定。

然后，给定任意映射 φ，我们使用标准方法进行优化，得到一个局部极小值，即 ψ。由于 ρC_φ 是自由函数，定理 4.7 告诉我们，将 ρC_φ 扩展以包含 ρC_ψ 是唯一的。

这为我们提供了一个局部极小值，但绝不应假设它是全局极小值。为了找到全局最优解，我们实际上会并行计算最优值。

让我们根据分布 μ 随机选择连续映射 φ_i for $i \in [n] = \{0, \ldots, n\}$。然后选择一个态 $\rho_{n,\ \eta}$ 它由在态 ρ 上计算得到的 C_{φ_i} 的凸组合给出。也就是说，

$$\rho_{n,\eta} \bigoplus_{i\in[n]} C_{\varphi_i} = \sum_i \frac{\eta_i}{\|C_{\varphi_i}\|} \cdot \rho C_{\varphi_i} \tag{5.3}$$

其中 $\sum_i \eta_i = 1$。

如果将这些 φ_i 分别进行优化，以得到局部最优的 ψ_i，那么我们可以找到 $\inf_\eta \rho_{n,\ \eta} \bigoplus_{i\in[n]} C_{\psi_i}$。这实际上选择了最佳的 ψ_i，并将 η 的全部权重赋予相关的 η_i。

注 5.3.2。 φ_i 的集合可以被视为在空间中进行搜索的一组并行过程。

由于 $n \to \infty$，只要分布 μ 没有遗漏函数空间 ϕ 的大范围区域： $X \to X$，我们就有

$$\inf_\eta \rho_{n,\eta} \bigoplus_{i\in[n]} C_{\psi_i} \to \inf_\varphi \frac{1}{\|C_\varphi\|} \rho C_\varphi.$$

注 5.3.3（解读有益的过拟合）。 这可以通过以下方式在神经网络的语境中进行解释。

在神经网络的稀疏初始化中，稀疏性实际上会促使多个彼此独立的神经网络并行建立。随后，在优化过程中，

这些神经网络会分别进行优化，同时也会对并行神经网络的权重进行优化。

因此，增加节点数量，实际上就是添加更多神经网络，最终会对这些网络进行优化，并从中进行选择。

因此，增加节点数量会扩大搜索解的可能空间。

同一框架也可以更广泛地加以利用，例如将多个简单的“效用”函数组合成一个更全面的工具。

注释 5.3.4. 假设我们有一个有限集合，其中包含一组经过优化的“效用”神经网络，它们将 Ψ映射到其自身；我们选择元组 $x_i = C_{\psi_i}$ 作为 $\psi_i \in \Psi.$ 。这个元组 x 是 $\mathcal{B}^n$ 中的一个点，其中 $\mathcal{B}$ 是由 $\Phi = \{\varphi$ 生成的复合算子的向量空间： $X \to X\}$。因此，在 $\mathcal{B}$中， x 的一个 ε-邻域是存在的，因为我们假设这些函数都能被稳定地建模。

现在假设我们有一个目标泛函 ρ，希望利用这些工具对其进行优化。由于我们要寻找这些函数的最佳组合，因此会对这些函数的权重设定上限。为简单起见，我们将权重限定为系数非负且总和必须为1。因此，我们的函数形式如下

$$f = \sum_w a_w w,$$

其中 w 是一个多重指标。由于这是一个有界的函数凸空间，我们˜ ˜保证存在一个（未必唯一的）最优解，记为 f，使得 $\rho f \geq \rho f.$ 由于该函数是解析的，它可以唯一地延拓到 x的邻域。

6. References

[AM18] Agler, Jim与John E. McCarthy。“若干非交换变量中的全局全纯函数。”加拿大数学杂志 67，第2期，第241-285页。（2018）

[B25]Bushelli, Julian。《一般情形下的自由函数演算》。arXiv:2506.00170（2025年）

[EEM22]Elefante, Giacomo；Erb, Wolfgang；Marchetti, Francesco；Perracchione, Emma；Poggiali, Davide；以及 Gabriele Santin。《多项式核插值》。arXiv:2212.07658（2022年）

[HKM12] Helton, J. William；Klep, Igor；McCullough, Scott。《自由代数中的凸 Positivstellensatz 》。《数学进展》，第 231 卷，第 1 期，第 516–534 页（ 2012 年）

[IIS22]Ikeda, Masahiro；Ishakawa, Isao；以及 Yoshihiro Sawano。《具有解析正定函数的再生核希尔伯特空间上的复合算子有界性》。《数学分析与应用杂志》，第511卷，第1期。（2022年）

[JMS21] Jury, Michael；Martin, Robert T. W.；Shamovich, Eli。《全 Fock 空间中的非交换有理函数》。美国数学会汇刊，第 374 卷，第 9 期（2021年）

[KM25] Kumari, Preeti 和 P. Muthukumar。《再生核希尔伯特空间上的复合算子》，arXiv:2509.14655v1（2025年）

[Koo31] Koopman, B. O.。《希尔伯特空间中的哈密顿系统与变换》。美国国家科学院院刊第 17 卷第 5 期，第 315-318 页。（1931）

[KR86] 算子代数理论基础 *II*，Richard V. Kadison 和 John R. Ringrose。美国数学会。（1986）

[KVV14]Kalyuzhnyi-Verbovetskiı, Dmitry S. 和 Victor Vinnikov。《非交换函数理论基础》。数学调查与专著；第 199 卷。（美国数学会，2014）

[Mun00]拓扑，James R. Munkres。培生，2000。

[Pas23] Pascoe, James Eldred。《不变结构保持函数和冈田-外尔-卡普兰斯基型稠密性定理》。东北大学（2023）：465-482。

[Pas26]非交换拟次调和性、拟次调和共轭的存在性与自由泛单值，James E. Pascoe。美国数学会汇刊，2026年2月20日。

[Rie17] Riehl, Emily。《语境中的范畴论》。Courier Dover Publications，2017年 .

[SaSa16]再生核理论及其应用，Saburou Saitoh 和 YoshihiroSawano。施普林格。（2016年）

[Tan25]紧致度量空间上的显式通用核与近似通用核，Eloi Tanguy，2025年。HAL 编号：hal-05084408。

[Tay72] Taylor, Joseph L.《多算子函数演算的一般框架》。《数学进展》9，第183-252页（1972年）

[ZBHRO21]Zhang, Chiyuan；Bengio, Samy；Hardt, Moritz；Recht, Benjamin；以及Oriol Vinyols。《理解深度学习（仍然）需要重新思考泛化》。《*ACM*通讯》，64卷第3期，第107-115页。（2021年）

[Zwi08] Zwicknagel, Barbara。《幂级数核》，《构造逼近杂志》。29，第61-84页。（2008年）