arXiv:2611.27948v1 [cond-mat.dis-nn] 20 Nov 2026

闵可夫斯基相关函数（MCF）：用于点模式的长程稳健形状描述符

Dominik Pabst,[1] Michael A. Klatt,[2] 和 Klaus Mecke[1]1 *Department of Physics, Friedrich-Alexander-UniversitätErlangen-Nürnberg (FAU), Staudtstraße 7, D-91058 Erlangen, Germany*2 *German Aerospace Center (DLR), Institute for AI Safety and Security, Wilhelm-Runge-Str. 10, 89081 Ulm, Germany; German Aerospace Center (DLR), Institute for Material Physics in Space, 51170 Köln, Germany; Department of Physics, Ludwig-Maximilians-Universität München, Schellingstr. 4, 80799 Munich, Germany*（日期：2026年11月23日）

使用闵可夫斯基泛函对点模式进行形态测量分析，视野较为局限；而相关函数则无法提供稳健的（即可加的）形状描述符。为兼取这两种标准方法的优点并克服其不足，我们提出基于环的闵可夫斯基相关函数（MCF），将其作为无序点模式的稳健且灵敏的描述符。通过为每个点分配一个球壳，并用闵可夫斯基泛函量化由此产生的两相形态，MCF 能够捕捉多个长度尺度上的结构信息；即使在传统的基于圆盘的闵可夫斯基泛函已趋于饱和的半径处，仍保持灵敏度，并能隐式编码超越对相关和结构因子的高阶相关。我们提出一种适用于平面点模式的精确高效算法，将成熟的基于圆盘的形态学方法扩展至长程范围。跨尺度应用——活性胶体（Quincke 滚子）、长叶松和哈勃超深场——显示出它们与均匀泊松参考之间明确且系统性的偏差，覆盖面积、边界长度和欧拉示性数呈现出不同的响应。该方法兼具较短的计算时间、对噪声的稳健性和简便的边缘处理，并且易于解释为外环半径的低维函数。

一、引言

从哈勃超深场中的天文源，到长叶松和显微尺度的 Quincke 滚子，几乎在所有长度尺度上，自然界中都普遍存在无序点模式。我们需要高效且灵敏的结构特征，以获得物理或生物学方面的洞见，例如解释其形成机制；这些特征也可用于统计数据分析或模型选择。此外，这些度量应能抵抗噪声，即使统计数据有限，也应能够检测点构型中的关联，例如聚类或局部结晶。

常用工具是对关联函数$g^{(2)}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)$，或更一般地，所谓的标准$n$点相关函数 $g^{(n)}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}2,..\,\mathrm{x}_n)$。它们描述在位置$\mathrm{x}_1,\mathrm{x}2,\ldots,\mathrm{x}_n$的无穷小邻域内找到点的联合概率密度，并按强度的 n次幂进行归一化。例如，它们被用于材料科学 [1, 2]，、医学图像处理 [3]，和天文学 [4–7]。基于关联的汇总统计量的最新扩展包括局部标记相关函数，用以解析标记点过程中随空间变化的标记关联 [8]。然而，标准对关联函数按定义仅限于二点信息，而多点关联函数在解析和数值上都会迅速变得难以处理。计算 n点相关函数的暴力方法随数据点数量 N 呈$\mathcal{O}(N^n)$缩放。即使对于规模适中的数据集。尽管已开发出复杂算法来改进这一缩放关系，但它们通常仍只能估计三点或四点相关函数 [9–12]。

积分几何中的闵可夫斯基泛函 [13–15] 提供了一种互补的方法，可弥补标准 n点相关函数的不足，例如只能处理低阶相关函数的局限 [16]。其核心思想是为点模式中的每个点赋予一个半径恒定的球 r，见图1 （a）。这样，点模式便转化为一种两相介质（或黑白图像）。随后可利用闵可夫斯基泛函对其进行全面、稳健且高效的表征 [17, 18]。这些闵可夫斯基泛函的平均值随 r 球半径变化所形成的函数，定义了一种相关函数，其中隐含地包含了 n任意阶点相关函数的信息 n [16, 19]。因此，它们能够区分具有相同结构因子的不同点过程。近期研究进一步确立了胚粒闵可夫斯基泛函与 k最近邻分布函数之间的紧密联系，表明二者都可

这些方法对宇宙学参数 [20] 给出的约束几乎相同。闵可夫斯基泛函已为天文学 [21–25]，、凝聚态物理 [26, 27]，和生物学 [19] 提供了新的见解。在 [28]，中，提出了一种算法，用于从点云表示中估算一大类集合的闵可夫斯基泛函，以及更一般的闵可夫斯基张量。

闵可夫斯基泛函的一大优势是

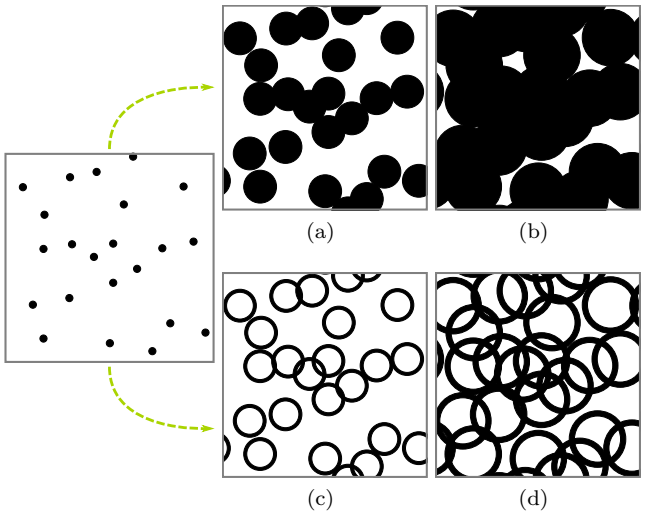


图1. 点模式的形态测量分析（左侧）：若为每个点指定一个恒定半径的圆盘（a），即使在中等半径下，平面也会很快被这些圆盘覆盖（b）。若改为为每个点指定一个环（c），则即使在大半径下也能分辨出细微的结构细节（d）。

它们具有可加性，也就是说，两个物体并集的泛函值等于各自泛函值之和减去它们交集的泛函值。结合在适当几何扰动下的连续性，这为它们作为形状描述符的稳健性提供了数学基础。此外，闵可夫斯基泛函包含了凸体上所有连续、运动不变且可加的标量形状描述符所具有的信息 [29]。从这个意义上说，闵可夫斯基泛函包含了所有稳健的多点信息。

然而，迄今为止，这些Minkowski相关函数仅限于短距离，也就是说，随着球的半径增大，整个系统会很快被球面覆盖 [30]。因此，点模式的特征细节将无法再被分辨，见图1（b）。这种近视性是形态测量分析在物理学应用中的一个主要缺点，尤其不利于探测宇宙中的大尺度结构 [16], 大尺度上的非高斯形态 [22], 去湿图案中的长程关联 [26]或森林中树木的位置 [19]。

在此，我们通过引入基于环的闵可夫斯基相关函数（MCF）来消除这一限制 $M_j(r,\ s,\ \Phi)$ 来描述点过程 Φ，使其在较远距离上仍能提供信息。其基本思想很简单，即用圆环替代圆盘 [31]，见图1 （c）。这一思路受到胶体粒子悬浮液及其润湿层形态学模型的启发 [32, 33]。与圆盘不同，随着外半径增大，圆环不一定会覆盖整个观测窗口，因此闵可夫斯基泛函能够在更大半径处继续对结构细节保持敏感。这样，即使在更远的距离处，也能分辨细微的结构细节，见图1 （d）。

类似于标记相关函数[34] ，闵可夫斯基相关函数 $M_j(r,\ s,\ \Phi)$ 是一种将物理属性与点的空间分布 Φ联系起来的方法，其中内半径 s 和外半径 r 具有物理意义，例如分别表示润湿层或撞击坑的耗尽区。

我们概述了如何在任意维度 d中定义闵可夫斯基泛函。随后，我们重点研究来自数学基准模型、模拟以及实验数据的平面点模式。对于实际上几乎任何点模式，无论是在有限样本中还是在热力学极限下，闵可夫斯基泛函都定义良好。我们讨论其精确数值计算以及边缘效应的修正。此外，我们从解析上将闵可夫斯基泛函与两点（更一般地说， n点）信息联系起来。我们展示了在薄环极限下如何从闵可夫斯基泛函恢复对关联函数，并利用实验数据说明其高阶敏感性。

本文的组织结构如下。在第II节中，我们介绍闵可夫斯基泛函，针对圆环并集建立几何框架（正可达性），并形式化定义基于圆环的闵可夫斯基相关函数及其级数表示和热力学极限。在第III节中，我们针对平面点模式给出一种精确且高效的算法，并讨论边界修正；我们通过泊松点过程的闭式结果验证该实现。在第IV节中，我们分析圆环厚度如何控制高阶内容，推导恢复对关联函数的薄环极限，并利用 Baddeley–Silverman过程展示超越二阶的判别能力。在第V节中，我们将该方法应用于跨尺度的三个数据集：活性胶体（Quincke 滚子）、长叶松树木以及哈勃超深场。附录汇总了技术性界和证明，包括正可达性结果以及泊松（Miles）公式。

II. 闵可夫斯基相关函数（MCF）

我们考虑在有限观测区域 $\mathbb{R}^d$ 中观测到的平稳点过程 Φ 。闵可夫斯基相关函数（MCF）的定义将在热力学极限下给出，即在观测窗口无限大的极限下给出。我们为每个点 $x \in \Phi$ 分配一个外半径为 r 、内半径为 s 的球壳

$$R(x) := R^{r,s}(x) := \{y \in \mathbb{R}^d : s \le \|x - y\| \le r\}.$$

在二维中，球壳是一个环，见图 2 (a)。并集 $\cup_{x\in\Phi} R^{r,s}(x)$ 定义了一种两相介质（前景 = 圆环，背景 = 补集）。核心思想是将这种两相介质的形态 $M_j(r, s, \Phi)$ 量化为外半径r [31]的函数。

内半径 s有若干合理的选择。必要时，可将其用作闵可夫斯基泛函的第二个参数。通常，只需选择 s 与 r 的固定比值，或 s^2 与 r^2的固定比值即可。第一种选择对应于外圆与内圆圆周长的固定比值。第二种选择则得到它们面积的固定比值。在高维中，可以选择例如外球与内球体积的固定比值，或它们表面积的固定比值。

A. 闵可夫斯基泛函

积分几何中的闵可夫斯基泛函 [14]（见第 14.2 节）能够提供全面而稳健的形态测量分析，正如引言中所述。它们是标量描述符，用于量化 d维空间中两相介质的几何特征，并将其映射为一个实数值，例如其面积。最初，闵可夫斯基泛函是针对凸集定义和研究的，随后又推广到凸集的有限并集。然而，就本研究的目的而言，这还不够，因为即使球壳也不属于这一类。在 [35], 闵可夫斯基泛函（此处称为 Lipschitz–Killing 曲率，定义 4.31）被推广到更一般的集合。我们将包含凸体在内的这类集合称为 $\mathcal{U}^c_{PR}$ ，并在小节IIB中明确引入。

首先，考虑凸体集合上的任意实值泛函 F ，它至少是连续的、运动不变的且可加的。后者意味着，两个凸体 K 和 L的并集（该并集为凸集）的泛函值由这两个体各自的泛函值及其交集的泛函值给出：

$$F(K \cup L) = F(K) + F(L) - F(K \cap L). \qquad (1)$$

这些条件导出的泛函具有抗噪声鲁棒性，因为从直观上讲，微小变形只会使泛函值发生微小变化。

闵可夫斯基泛函作为形状描述符，可量化两相介质的几何特性；其重要性源于 Hadwiger 对凸体提出的著名刻画定理 [29]及其推广。 [35]中的定理 8.8指出，任何此类泛函 F 都存在唯一的运动不变且可加的扩展，使其作用于 $\mathcal{U}^c_{PR}$ ；该扩展（此处也记作 F）可表示为闵可夫斯基泛函 M_0、……、 M_d的线性组合

$$F(K) = \sum_{i=0}^{d} c_i M_i(K), \qquad K \in \mathcal{U}^c_{PR}, \qquad (2)$$

其中 c_i 为常数。从这个意义上说，闵可夫斯基泛函包含了所有可加的形状信息。

d 维体积 M_0、表面积 M_1 的一半，以及欧拉示性数 M_d 是最重要的特例。后者由定理 4.53 中 [35], ，而前两者可直接由 [35]中的定义 4.31 得出。具体而言，在二维中，我们得到闵可夫斯基泛函 M_0 （面积）、M_1 （周长的一半），以及 M_2 （欧拉示性数），参见图2 （b）–（d）。后者是一个拓扑不变量；对于紧致平面集合，它等于连通分支数减去孔洞数，参见图2(d)。环 R 的外半径为r 、内半径为 $s > 0$，参见图2(a)，其闵可夫斯基泛函为

$$M_0(R) = \pi(r^2 - s^2) = A(R),$$
$$M_1(R) = \pi(r + s) = \frac{1}{2}P(R),$$
$$M_2(R) = 0 = \chi(R).$$

在 $s = 0$的情况下， $M_0(R)$ $M_1(R)$的公式仍然成立，但 $M_2(R)$的值为 1。关于闵可夫斯基泛函及其典型应用的更详细介绍，请参见 [15, 17, 18, 36]。它们已成功应用于多种物理系统 [17,37], ，包括凝聚态物质和软物质 [38–42], ， 以及天文学和宇宙学 [23, 43, 44] ， 也应用于图案分析和多孔结构分析 [45–50]。

对于典型的多孔材料，闵可夫斯基泛函的平均增长与观测窗口 W的体积成正比。因此，我们将闵可夫斯基泛函除以观测窗口的体积 $|W|$ 进行缩放，使其在热力学极限（$|W| \to \infty$）下收敛到一个定义良好的值。我们将证明，只要集合 W_n 是凸的，且其内半径收敛到∞，这个极限就存在，并且不依赖于观测窗口序列（W_n）$_{n\in\mathbb{N}}$ 。

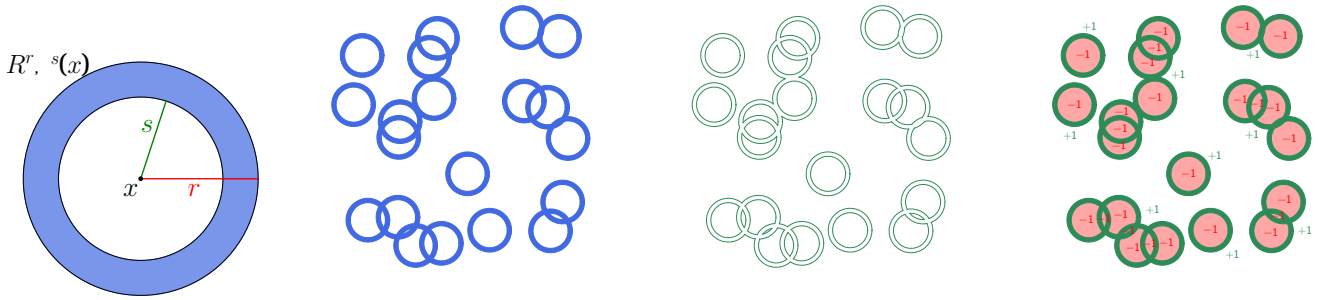
B. 球壳交集的正可达性

本节将给出一个结果，表明对于几乎所有中心，球壳的并集属于 $\mathcal{U}^c_{PR}$类；我们将在下文对此作出明确定义。该结果的证明见附录B。其中的关键是正可达集这一概念。

如果 A 是满足以下性质的最大数，则称集合 A 的逼近半径为 t：对于每个到 A 的距离小于 t的点 x， A 中距离 x 最近的点都是唯一的。如果没有 $t > 0$ 满足此性质，则 A 的逼近半径等于0；如果所有 $t > 0$ 都满足此性质，则为 ∞ 。如果逼近半径$(A) > 0$，则称 A 具有正可达性。注意，具有正可达性的集合是闭集；当且仅当集合是凸闭集时，其逼近半径为 ∞ 。关于精确的数学定义，请参见 [35]（见第4章）。外半径为 r 、内半径为 s 的环 $R^{r,\ s}$ 的逼近半径为

$$\operatorname{reach}(R^{r,s}) = \begin{cases} s, & s > 0, \\ \infty, & s = 0. \end{cases}$$

类 $\mathcal{U}^c_{PR}$ 由所有可表示为具有正可达性的紧集的有限并集 A_1、……、 A_k 的集合组成，其中 pos-



(a) (b) Area (c) 周长 (d) 欧拉示性数

图 2.（重叠）圆环的闵可夫斯基泛函：(a) 圆环由其中心 x 以及外半径和内半径定义。在二维中，（重叠）圆环的闵可夫斯基泛函 M_i 分别为面积 $M_0 = A$ (b)、半周长 $M_1 = \frac{1}{2}P$ (c) 和欧拉示性数 $M_2 = \chi$ (d)。欧拉示性数 χ 是一个拓扑常数，等于连通分支的数量减去孔洞的数量。

itive reach，且每个交集 $\cap_{i\in I}A_i$，$I \subseteq\{1,\dots,k\}$ 也具有正可达性。对于这类集合，可通过可加扩展确定为具有正可达性的集合所定义的闵可夫斯基泛函。

定理 II.1. 固定 $0 < s < r$。对于任意 $n \in \mathbb{N}$，且对于几乎所有的 $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}^d$，交集$\cap_{i=1}^n R^{r,\,s}(x_i)$ 具有正可达性。因此，有限并集 $\cup_{i=1}^n R^{r,\,s}(x_i)$ 属于 $\mathcal{U}_{PR}^c$。

注意，定理 II.1 保证对于几乎所有的$x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}^d$，并集$\cup_{i=1}^n R(x_i)$ 属于类别$\mathcal{U}_{PR}^c$，该类别中闵可夫斯基泛函是可用的。

C. 闵可夫斯基泛函的定义

从现在起，我们考虑定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的平稳点过程 Φ，其相关函数 $\rho_n : (\mathbb{R}^d)^n \to[0,\infty)$ 均存在，对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立；也就是说，对所有 $n \in \mathbb{N}$，等式

$$\mathbb{E}\left[\sum_{x_1,\dots,x_n\in\Phi}^{\neq} f(x_1,\dots,x_n)\right] = \int_{(\mathbb{R}^d)^n} f(x_1,\dots,x_n)\rho_n(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n)$$

对所有 f 均成立：$(\mathbb{R}^d)^n \to [0,\infty)$，其中 $\sum^{\neq}$ 表示求和是对 Φ 中两两不同的点进行的。 Φ 的平稳性意味着函数 ρ_n 是平移不变的，也就是说

$$\rho_n(x_1+t,\dots,x_n+t) = \rho_n(x_1,\dots,x_n)$$

对于所有 $t, x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}^d$。由此可知，例如，单点相关函数 ρ_1 是常数。这个常数值 γ 称为强度，等于每单位 d维体积内点的平均数量。对关联函数为 $g^{(2)}(x,y) := \rho_2(x,y)\gamma^{-2}$；对于平稳各向同性过程， $g^{(2)}$只取决于距离。它是结构因子的实空间对应物。我们假设存在一个常数 $C > 0$ 使得

$$\rho_n(x_1,\dots,x_n) \le C^n \tag{3}$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$ 以及几乎所有 x_1，……，$x_n \in \mathbb{R}^d$ 均成立。于是

$$M_j(r,s,\Phi,W) := \mathbb{E}\left[M_j\Big(\bigcup_{x\in\Phi\cap W} R^{r,s}(x)\Big)\right] \tag{4}$$

表示在 j 阶闵可夫斯基泛函，其取值对象为以 Φ 中的点为中心、且位于 W 内的圆环并集。根据定理 II.1，期望值中的表达式几乎必然有唯一确定的定义。由于闵可夫斯基相关泛函的定义不应取决于观测窗口的选择，我们将取热力学极限，即观测窗口的体积趋于无穷大。我们将看到，在观测窗口序列满足某些条件时，该极限与所选的具体序列无关。为了从数学上证明极限存在并推导其表示公式，我们在此着重讨论二维情形 $d = 2$，并指出该论证适用于所有维度下的体积 M_0 和表面积 M_1。

设 $(W_m)_{m\in\mathbb{N}}$ 是一列紧凸集，且内半径 $r(W_m)$ 趋于无穷大。凸集 A 的内半径定义为包含在 A中的最大球的半径。例如， W_m 可以是边长为 m 的立方体，也可以是半径为 m 的球。我们将Φ 的第 j 阶闵可夫斯基相关函数（MCF）定义为

$$M_j(r,s,\Phi) := \lim_{m\to\infty}\frac{M_j(r,s,\Phi,W_m)}{|W_m|}. \tag{5}$$

命题 II.2 (级数表示)。 设 $0 < s < r$，并假设 $j \in \{0,1\}$ 或 $d = j = 2$成立。假设乘积密度满足界 (3)，并设 (W_m) 是一列紧凸集，且满足 $r(W_m) \to \infty$。则极限 (5) 存在，且

$$M_j(r,s,\Phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} g_j(r,s,\Phi,n), \tag{6}$$

其中 $g_j(r,s,\Phi,n)$ 由以下积分给出

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^{n-1}} f(\mathbf{0}, x_2, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}(x_2, \ldots, x_n). \tag{7}$$

其中函数 $f : (\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{R}$ 由下式给出

$$f(x_1, \ldots, x_n) := M_j\left(\cap_{i=1}^n R(x_i)\right) \rho_n(x_1, \ldots, x_n).$$

这可由（A5）推出。特别是，$M_j(r,s,\Phi)$ 的取值不依赖于观测窗口序列 $(W_m)_{m\in\mathbb{N}}$ 的具体选择。如果观测窗口内只有一个样本，则其按窗口体积归一化的闵可夫斯基泛函可用作平均值的估计。这些泛函值是全局性质，对应于空间平均。请注意，对于遍历系统，在热力学极限下，空间平均与系综平均一致。

对于 $s = 0$，闵可夫斯基泛函退化为先前研究过的重叠圆盘/球相关函数。对于 $s > 0$，在基于圆盘的函数已经饱和的半径处，闵可夫斯基泛函仍对高阶相关保持敏感。在第IV节中，我们将表明，极限 $s \uparrow r$ 可恢复对关联函数 $g^{(2)}$。

III. 精确数值算法

这里，我们给出适用于任意平面点模式的重叠圆环的闵可夫斯基泛函显式公式（以点的坐标为变量）。重叠圆盘系综的相应公式见 [51]，圆环的公式见 [52]。最早的可加相关函数算法已在 [52, 53]中提出，并已用于复杂流体的形态学模型；在该模型中，硬胶体粒子的润湿层需要计算基于圆环的结构 [32, 33]。

A. 对局部贡献求和的显式公式

为了实现一种高效算法来计算圆环并集的闵可夫斯基泛函 M_0, M_1, M_2，我们利用了这样一个事实：闵可夫斯基泛函可以表示为边界上的积分。对于具有 C^2 边界的紧集，其闵可夫斯基泛函在任意维度下的显式公式可用边界上的积分表示，参见 [15, 18] (第 2 节)。然而，对于有限个圆环的并集 A，这些公式无法直接应用，因为各个圆环边界的交点处会出现不连续性。尽管如此，仍存在适用于这种情形的公式变体。对于（半）周长 M_1，情况则很简单

$$M_1(A) = \frac{1}{2} \int_{\partial A} \mathcal{H}(\mathrm{d}x),$$

其中，$\mathcal{H}$ 表示（$d-1$）维豪斯多夫测度。令 $x \in \partial A$ 处的单位法向量为 $n(x)$（该向量几乎处处有定义），则由散度定理可得面积

$$M_0(A) = \frac{1}{2} \int_{\partial A} \langle x, n(x) \rangle\, \mathcal{H}(\mathrm{d}x).$$

最后，根据高斯-博内定理，我们得到

$$M_2(A) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial A} \kappa(x)\, \mathcal{H}(\mathrm{d}x) + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{k} \theta_i,$$

其中，$\kappa(x)$ 是 $x \in \partial A$ 处的测地曲率，而θ_1、……、θ_k是边界不连续点处的外角。所有这些适用于更一般集合的公式，在当前情形下都可以显式计算。为此，我们首先注意到，A 的边界可表示为一组圆弧的并集，这些圆弧仅在端点处相交。每段圆弧要么位于半径为 r 的外圆上，要么位于半径为 s的内圆上。我们用 γ_1、……、γ_m 表示外圆上的圆弧，用 ρ_{m+1}、……、$\rho_{m+\ell}$ 表示内圆上的圆弧。分别以（x_i、y_i）、α_i和 β_i 表示第 i段圆弧的中心、初始角和终止角，则由上述公式可得

$$\begin{aligned}
M_0(A) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} g(x_i, y_i, r, \alpha_i, \beta_i) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=m+1}^{m+\ell} g(x_i, y_i, s, \alpha_i, \beta_i), \\
M_1(A) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{m} \mathcal{H}(\gamma_i) + \sum_{i=m+1}^{m+\ell} \mathcal{H}(\rho_i) \right), \\
M_2(A) &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^{m} \mathcal{H}(\gamma_i) - \frac{1}{s} \sum_{i=m+1}^{m+\ell} \mathcal{H}(\rho_i) \right) + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{k} \theta_i.
\end{aligned}$$

其中 $g(x,y,t,\alpha,\beta)$ 表示

$$t\left[x(\sin(\beta) - \sin(\alpha)) + y(\cos(\alpha) - \cos(\beta)) + t(\beta - \alpha)\right].$$

这使我们能够开发一种既高效又精确的算法。

算法III.1。 计算中心为 x_1、…、$x_n \in \mathbb{R}^2$ 的圆环并集的闵可夫斯基泛函。

（1）确定并集 $\bigcup_{i=1}^{n} R(x_i)$ 的边界，该边界由弧 γ_1、…、γ_ℓ 表示，并确定边界不连续点处的外角 θ_1、…、θ_k。

(2)计算每段圆弧上的指定积分γ_i ，并应用上述公式计算闵可夫斯基泛函。

步骤 (1) 中边界的确定是算法中最具挑战性、计算开销最大的部分。该方法在数学上严谨，理论上可得出精确结果；数值误差仅源于有限精度算术。该算法以 Python 实现，代码以开源软件包的形式公开发布，名称为 `minkowski-correlations` [54]。

B. 用于校正边缘效应的边界条件

对于有限观测区域中的点 $x_1, \ldots, x_n$，圆环可能与窗口边界相交，而位于窗口外的点所对应的圆环也可能延伸至窗口内。闵可夫斯基泛函的另一项优点是，可以通过为闵可夫斯基泛函选择适当的边界条件，轻松校正有限系统尺寸造成的此类边缘效应。对此有多种处理方式，我们的算法提供以下三种方法。最后两种方法要求观测窗口为（轴对齐的）矩形。为正确计算体积 M_0，还会考虑被圆环覆盖的观测窗口边界部分。默认情况下，计算 M_1 和 M_2时不计入这些贡献；不过，用户可以选择将其纳入（见下文的减法抽样）。

一种直接的方法是忽略窗口，只计算并集的闵可夫斯基泛函$R(x_1) \cup \cdots \cup R(x_n)$。在这种情况下，重要的只有点的坐标，而不是观测这些点的观测窗口（见图3(a)）。

另一种方法是施加周期性边界条件（图 3(b)），如此一来，延伸到观测窗口一侧之外的圆环会从另一侧重新出现。周期性边界条件假设观测窗口是周期性晶体的晶胞，也就是说，离开观测窗口左侧的物体会从右侧进入窗口。这种方法尤其有助于减少边缘效应。对于均匀泊松过程，周期性边界条件不会在相关函数中引入系统偏差。

最后，还可以选择缩小观测窗口，并将落在窗口外的点视为边界条件。这种称为减法抽样的缩减方法（图 3(c)），通过从窗口的每条边长中减去外半径 r 来实现，但这只有在两条边长都大于 $2r$时才可行。虽然代价是有效统计量减少，但这些边界条件可以避免边界诱导偏差。该算法还可以选择将由圆环覆盖的观测窗口边界部分纳入 M_1 和 M_2的计算中。因此，M_2 的估计值确实为整数，而使用减法抽样时通常并非如此。

C. 无关联泊松点过程：基准测试

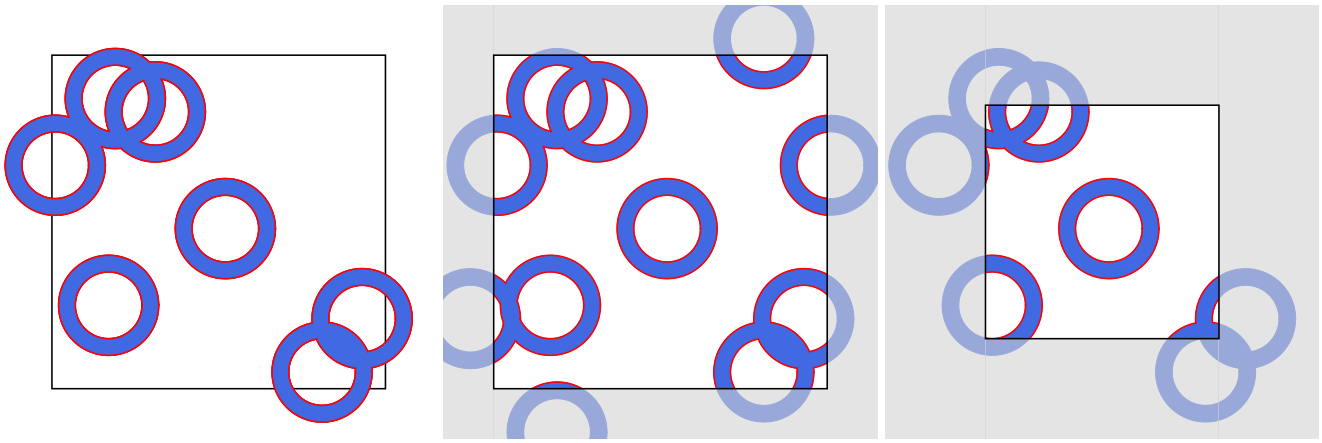
为了证明数值算法的有效性，我们将理想气体巨正则系综的数值结果与解析结果进行比较。该系综也是随机几何中的一个基准模型，称为泊松点过程。点过程中的各点彼此完全独立，并在空间中随机、均匀分布 [55, 56]。强度为 $\gamma > 0$ 的平稳泊松过程可在有界观测窗口 W内模拟：首先抽取一个参数为$\gamma|W|$的泊松分布随机变量 τ，然后在 W中生成 τ 个相互独立的随机点 $X_1, \ldots, X_\tau$，且这些点均匀分布。 [56] 中的命题 3.5 表明，所得点模式的分布等同于强度为 γ、限制在 W内的平稳泊松过程。

重叠圆环对应于所谓的布尔模型 [57]，它也是多孔材料 [42, 48, 49, 58, 59]的一种标准模型。对于具有凸粒子的布尔模型，其闵可夫斯基泛函的一阶和二阶矩在许多情况下都是解析已知的，其概率分布的中心极限定理 [18, 23, 60–63]也同样如此。这些结果可为构建基于闵可夫斯基泛函的假设检验提供基础。拒绝完全空间随机性假设将表明其偏离泊松模型，并促使人们开展进一步研究。对于强度为 γ的平稳泊松过程 Φ，闵可夫斯基泛函 $M_0(r、s、\Phi)$ 和 $M_1(r、s、\Phi)$ 可直接根据式（6）在任意维度中计算。为此，请注意，Φ 的相关函数由 $\rho_n \equiv \gamma^n$给出。这一点例如可由多元迈克方程（ [56]中的定理 4.4）推出。式（7）中积分的计算基于 [14]中定理 5.2.1 的证明。

引理 III.2 (Miles 公式)。 对于强度为 γ 的平稳泊松过程 Φ，在 $\mathbb{R}^d$ 上有

$$
\begin{aligned}
M_0(r, s, \Phi) &= 1 - \exp\left(-\gamma M_0(R^{r,s}(\mathbf{0}))\right), \\
M_1(r, s, \Phi) &= \gamma M_1(R^{r,s}(\mathbf{0})) \exp\left(-\gamma M_0(R^{r,s}(\mathbf{0}))\right).
\end{aligned}
$$

引理中的公式 III.2 与著名的 Miles 公式一致，尽管 Miles 公式讨论的是另一种渐近情形下的极限。此处，我们推导出了环形粒子的这些公式。对于凸集，在各向同性情形下也能找到这些公式，例如 [14]（定理 9.1.4）。我们坚信，Miles 公式对于圆环也普遍成立，



(a) (b) (c)

图3. (a) 无边界条件、(b) 具有周期性边界条件以及 (c) 使用减法抽样的圆环并集；每幅图中算法所使用的边界均以红色标出。

因此我们使用欧拉示性数 M_d 在 $d=2$ 中的 Miles 公式，将其与我们的模拟结果进行比较。正如我们将看到的，这些结果有力地支持了这一猜想。在二维中，欧拉示性数的 Miles 公式为

$$\widetilde{M}_2(\Phi) := -\frac{\gamma^2}{\pi} M_1(R(\mathbf{0}))^2 \exp\left(-\gamma M_0(R(\mathbf{0}))\right), \quad (8)$$

此处我们采用不同的记号，因为这并不是一个经过证明的公式 M_2。需要注意的是，对于球的情况，即对于 $s=0$，该公式有所不同，因为会出现一个附加项，而对于 $s>0$ 该项会消失，这是因为 $M_2(R(\mathbf{0}))=0$。将闵可夫斯基泛函的具体值代入引理 III.2 中的公式以及（8）中，我们得到

$$\begin{aligned} M_0(r,s,\Phi) &= 1-\exp\left(-\gamma\pi(r^2-s^2)\right), \\ M_1(r,s,\Phi) &= \gamma\pi(r+s)\exp\left(-\gamma\pi(r^2-s^2)\right), \\ \widetilde{M}_2(r,s,\Phi) &= -\gamma^2\pi(r+s)^2\exp\left(-\gamma\pi(r^2-s^2)\right). \end{aligned}$$

我们还可以用描述内半径与外半径之间关系的其他量来表示这些公式。内半径和外半径之间有三种有用的关联方式：

对于具有常数因子 $f=s/r$ 的圆环，其闵可夫斯基泛函为

$$\begin{aligned} M_0(r,s,\Phi) &= 1-\exp\left(-\gamma\pi r^2(1-f^2)\right), \\ M_1(r,s,\Phi) &= \gamma\pi\, r(1+f)\exp\left(-\gamma\pi r^2(1-f^2)\right), \\ \widetilde{M}_2(r,s,\Phi) &= -\gamma^2\pi\, r^2(1+f)^2\exp\left(-\gamma\pi r^2(1-f^2)\right). \end{aligned}$$

对于具有恒定厚度的圆环，$\varepsilon=r-s$ 闵可夫斯基泛函表示为

$$\begin{aligned} M_0(r,s,\Phi) &= 1-\exp\left(-\gamma\pi\varepsilon(2r-\varepsilon)\right), \\ M_1(r,s,\Phi) &= \gamma\pi\,(2r-\varepsilon)\exp\left(-\gamma\pi\varepsilon(2r-\varepsilon)\right), \\ \widetilde{M}_2(r,s,\Phi) &= -\gamma^2\pi\,(2r-\varepsilon)^2\exp\left(-\gamma\pi\varepsilon(2r-\varepsilon)\right). \end{aligned}$$

通过选择内半径 $s=\sqrt{r^2-A_0/\pi}$，可以为 $r>\sqrt{A_0/\pi}$ 获得恒定面积 A_0。在这种情况下，闵可夫斯基泛函表示为

$$\begin{aligned} M_0(r,s,\Phi) &= 1-\exp\left(-\gamma A_0\right), \\ M_1(r,s,\Phi) &= \gamma\pi(r+\sqrt{r^2-A_0/\pi})\exp\left(-\gamma A_0\right), \\ \widetilde{M}_2(r,s,\Phi) &= -\gamma^2\pi(r+\sqrt{r^2-A_0/\pi})^2\exp\left(-\gamma A_0\right). \end{aligned}$$

因此，对于泊松点过程，被圆环覆盖的面积分数 $C:=1-\exp(-\gamma A_0)$ 为常数。

图 4 展示了常数因子情况下泊松点过程的三个闵可夫斯基泛函相关函数 f，并将数值结果与解析结果进行了比较。

IV. 鲁棒任意多点信息

A. 欧拉示性数与对关联函数之间的关系

两个、三个或一般情况下 n 个圆环的交集包含有关两个、三个或 n 个点之间关联的信息。因此，它们的闵可夫斯基泛函及闵可夫斯基泛函包含任意阶关联的信息。这一点也可从公式（6）中明显看出。

通过多点关联函数来表示闵可夫斯基泛函，揭示了环厚度$\varepsilon=r-s$ 选择的重要性。从启发式角度来看，它可以控制闵可夫斯基泛函中包含的高阶或低阶统计量的程度。当 ε取值不太小时，闵可夫斯基泛函包含三个或更多圆环的交集，因此包含高阶统计量。如果 ε 取值足够小，以至于不会出现三个或更多圆环的交集，那么闵可夫斯基泛函就会简化为二阶统计量

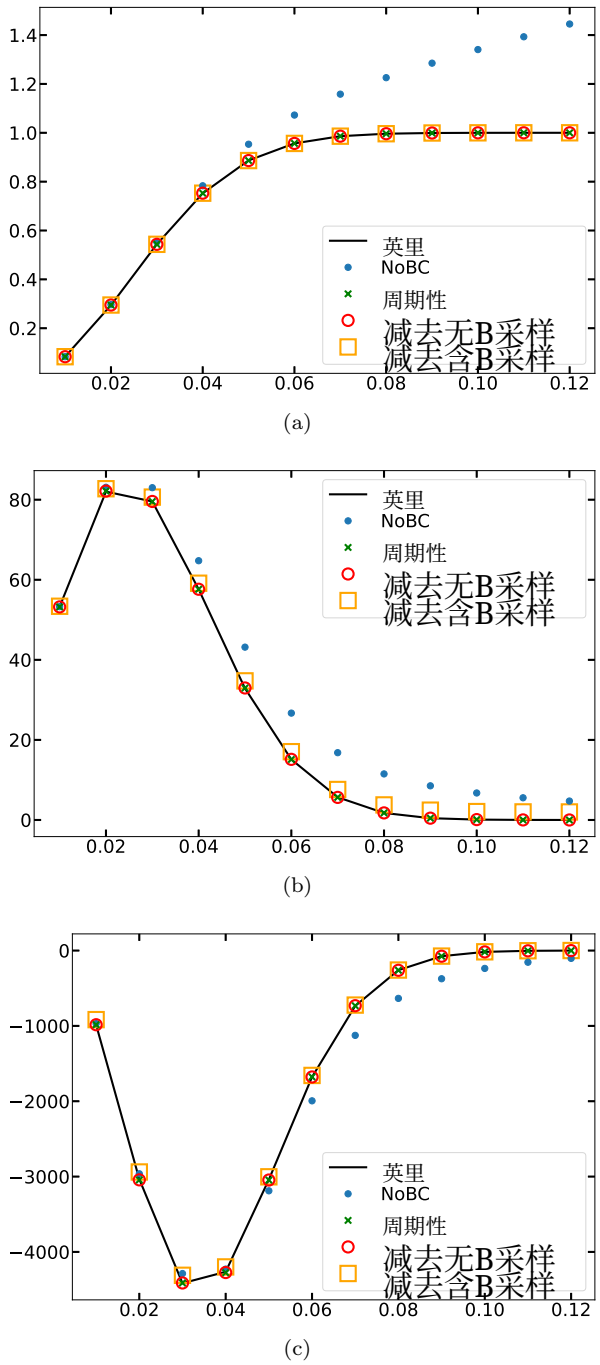


图 4. 泊松过程在单位正方形中生成 1000 个点时，圆环的闵可夫斯基泛函：(a) 面积 M_0，(b) 周长（的一半） M_1，以及 (c) 欧拉示性数，均随外半径 r 变化，其中常数因子为 $\frac{s}{r} = 0.85$。对于 r 的每个取值，我们对 500 次相互独立的实现取平均值。

并且主要包含二点关联函数 ρ_2的信息。后者可以直接由欧拉示性数推导得出。

对于 $\varepsilon \to 0$ （更精确地说 $s \uparrow r$），所有项 $n > 2$ 在式(6)中消失，因为不存在该阶的交集（且空集的闵可夫斯基泛函为零）。对于欧拉示性数 M_2，第一项同样消失，因为单个环的欧拉示性数消失。因此，只有包含对关联函数的第二项不消失[31]:

$$\begin{aligned}\lim_{s\uparrow r} M_2(r,s,\Phi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_{(\mathbb{R}^2)^{n-1}} \rho_n(\mathbf{0}, x_2, \ldots, x_n) \\ &\quad \cdot \lim_{s\uparrow r} M_2\left(R(\mathbf{0}) \cap \cap_{i=2}^{n} R(x_i)\right) \, \mathrm{d}(x_2, \ldots, x_n) \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \rho_2(\mathbf{0}, x) \lim_{s\uparrow r} M_2\left(R(\mathbf{0}) \cap R(x)\right) \, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

利用界限（A2），可以证明极限与积分的交换是合理的。对于 $0<\|x\| < 2r$，交集 $R(\mathbf{0}) \cap R(x)$ 的欧拉示性数在极限 $s \uparrow r$下等于 2，因此

$$\lim_{s\uparrow r} M_2(r,s,\Phi) = -\int_{B(\mathbf{0},2r)} \rho_2(\mathbf{0}, x) \, \mathrm{d}x.$$

对于统计各向同性且齐次的点过程，二点相关函数 $\rho_2(x, y)$ 仅取决于距离 $\|x - y\|$。利用平稳各向同性过程的 $\rho_2(x) = \gamma^2 g^{(2)}(\|x\|)$，我们得到

$$\lim_{s\uparrow r} M_2(r,s,\Phi) = -2\pi\gamma^2 \int_0^{2r} g^{(2)}(t)\, t \, \mathrm{d}t.$$

特别地，极限欧拉示性数关于 r 的导数，除去一个已知的依赖于 r的前因子后，与在间距 $2r$处取值的对关联函数$g^{(2)}$ 成正比。

这证明了原则上可以从闵可夫斯基泛函中提取 n点相关函数。不过，我们想强调的是，我们并非建议采用一种新方法来计算这些标准相关函数。相反，我们提出将闵可夫斯基泛函作为一种新方法；作为可加赋值，它能以统计上稳健的方式包含 n点信息。对于 $\varepsilon > 0$，闵可夫斯基泛函确实包含高阶关联，并且能够区分具有相同对关联函数、因而具有相同结构因子的点过程。

在下一小节中，我们将展示，对于 $\varepsilon > 0$，闵可夫斯基泛函如何区分具有相同二阶性质的两个过程。

B. Baddeley–Silverman过程

对于环具有有限厚度的情况，形态函数包含超出二阶统计量的信息。为说明这一性质，我们考察Baddeley–Silverman过程这一经典点过程示例：它与均匀泊松过程具有相同的对关联函数，因此也具有相同的结构因子，但其高阶空间结构有所不同 [19]。

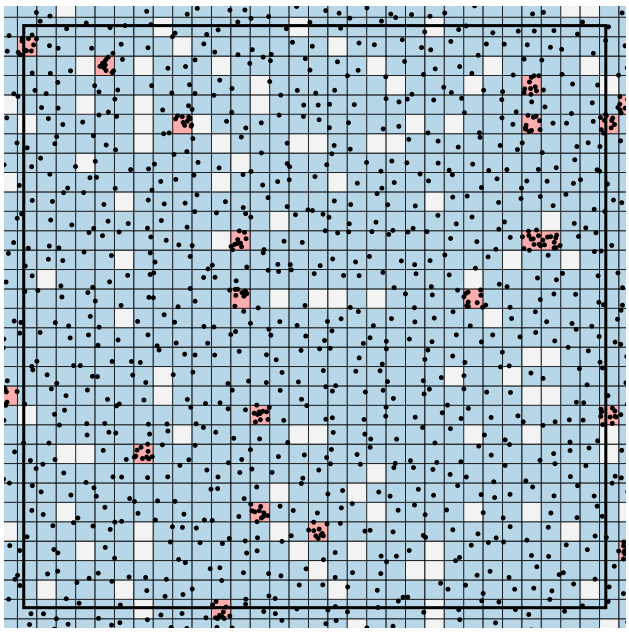


图5. Baddeley–Silverman过程在观测窗口 $W = [0,30]^2$中的一次实现。底层单位胞的颜色表示一个胞包含零个、一个还是十个点。

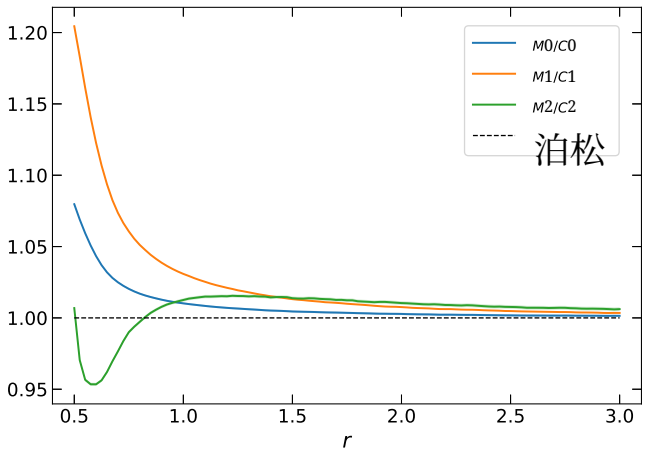


图 6. Baddeley–Silverman 过程的归一化 MCF 随外半径的变化 r，其中内半径s 根据（9）选取。曲线为 500 次独立实现的平均值。虚线表示相应的泊松参照。

该过程的构造方式尤为简单。我们将平面划分为单位正方形，并根据以下规则，独立地为每个正方形分配一个随机数量N 的点：

$$\mathbb{P}(N=0)=\frac{1}{10},\quad \mathbb{P}(N=1)=\frac{8}{9},\quad \mathbb{P}(N=10)=\frac{1}{90}.$$

在给定 N的条件下，这些点被独立且均匀地放置在相应的正方形内。由于

$$\mathbb{E}[N]=1 \qquad \text{and} \qquad \mathrm{Var}(N)=1,$$

每个单位正方形内点数的前两个矩与均值为 1 的泊松随机变量的前两个矩相同。由此得到的过程强度为 $\gamma=1$，且具有与泊松点过程相同的对关联函数。然而，其局部结构显然不同：大多数单元格中有一个点，有些单元格为空，少数单元格中则有十个点，从而形成小而密集的簇。为了得到平稳点过程，而非与底层网格某个固定位置绑定的过程，单元格结构会在一个单位正方形内按均匀分布的随机向量进行平移。

图5 展示了观测窗口中的一个实现 $W=[0,30]^2$。图中包含底层单元，以便直观展示其构造。图6给出了归一化 MCF 作为外半径的函数 r，结果是对Baddeley–Silverman过程的500个独立实现取平均得到的。对于每个 r，内半径 $s=s(r)$的选取使得环的面积 R 与 r无关，

$$M_0(R)=\pi\big(r^2-s^2\big)=\log 2. \tag{9}$$

对于强度为 1 的齐次泊松过程，这一选择对应的期望覆盖面积分数为 $1/2$。闵可夫斯基泛函采用减法抽样计算，不计入观测窗口边界的贡献。对于每个半径 r，因此在 $[-r,30+r]^2$ 中对点模式进行抽样，使得相应的缩减观测窗口恰好为 $[0,30]^2$。我们将三个闵可夫斯基泛函归一化为

$$\begin{aligned}C_0(r)&=\frac{1}{2},\\ C_1(r)&=\frac{\pi}{2}\gamma(r+s),\\ C_2(r)&=-\frac{\pi}{2}\gamma^2(r+s)^2.\end{aligned}$$

采用此归一化后，对于这三个量 M_0/C_0、 M_1/C_1和 M_2/C_2，泊松参照均等于 1。

尽管成对相关函数完全相同，形态函数仍能清晰地区分 Baddeley–Silverman过程与其泊松对应过程。偏差在较小的环半径处最为明显。然而，即使在较大的半径处，偏离泊松参照的现象仍然可见，这证实闵可夫斯基泛函也能捕捉较长程范围内的空间相关性。在此背景下，请注意，Baddeley–Silverman过程的单元边长为 1，因此半径为 2 的环已大致跨越四个单元。特别是，即使在相对较大的半径处，Baddeley–Silverman过程的函数 M_1和 M_2 仍可与泊松过程的相应函数区分开来。因此，Baddeley–Silverman示例直接证明，闵可夫斯基泛函包含了成对相关之外的空间信息。这类

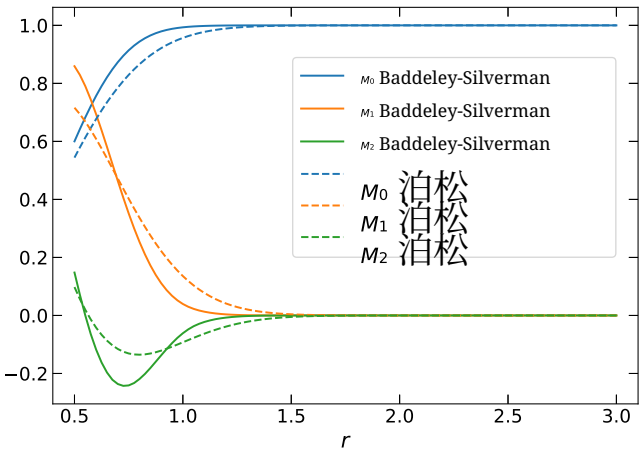


图 7. Baddeley–Silverman过程的闵可夫斯基泛函随外半径 r 变化（内半径为 $s = 0$）。曲线为 500 次独立实现的平均值。虚线表示相应的泊松参照。

高阶信息对于物理点模式的分析尤为重要，因为这类模式的特征性空间结构往往反映在高阶统计量中 [15, 18, 19]。

最后，我们将闵可夫斯基泛函能够区分 Baddeley–Silverman过程与泊松过程的空间尺度范围，与此前建立的相关函数所对应的范围进行比较；这些相关函数在 [16],中被引入，其中的点以球而非圆环进行装饰，这对应于我们设定中的特殊情形 $s = 0$ 。[19]为此，我们还计算了 $s = 0$ 下 Baddeley–Silverman过程的闵可夫斯基泛函，并将其与相应的泊松参照进行比较。由于球的半径增大时会迅速覆盖几乎整个空间， M_1 和 M_2 都会变得非常小。因此，在此次比较中，我们不再使用泊松参考值 $C_j(r)$ 对闵可夫斯基泛函进行归一化。如图 7所示，对于 $s = 0$ ，当半径大于约 1.7 时，Baddeley–Silverman过程与泊松过程的闵可夫斯基泛函实际上已难以区分。相比之下，当 $s > 0$ 时，基于圆环的形态学特征函数在大得多的半径范围内仍能清楚地区分这两个过程；见图 6。

V. 科学数据中的应用

在前几节中，我们研究了底层空间结构已知的点过程模型的形态特征。现在，我们将形态学分析应用于从科学数据中获得的三种点模式。这些示例涵盖了迥异的空间尺度，从显微尺度的粒子系统，到树木的位置，再到天文点模式。这表明，闵可夫斯基泛函可应用于来自各种科学领域的点模式。

对于每个数据集，我们通过以下方式估计点强度：

$$\widehat{\gamma} = \frac{N}{|W|},$$

其中 N 为观测点的数量， W 为观测窗口。为了使不同空间尺度和强度下的分析具有可比性，距离以无量纲半径 $\sqrt{\widehat{\gamma}}\, r$表示。与第 IVB 节一样，我们选择每个环的内半径$\bar{s} = s(r)$，使其面积不依赖于 r ，且对于强度为 $\widehat{\gamma}$的齐次泊松过程，期望覆盖面积分数为 $1/2$ 。

由于数据是在有界且非周期性窗口中观测到的，我们采用第 IIIB 节介绍的减边界条件，不考虑观测窗口边界的贡献。对于矩形观测窗口

$$W = [x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}],$$

外环半径为 r 时，有效观测窗口为

$$W_{\ominus r} = [x_{\min} + r, x_{\max} - r] \times [y_{\min} + r, y_{\max} - r].$$

与之前一样，归一化因子的选取使得三个对应的泊松参考值均为 1：

$$\begin{aligned} C_0(r) &= \frac{1}{2}|W_{\ominus r}|, \\ C_1(r) &= \frac{\pi}{2}\widehat{\gamma}(r+s)|W_{\ominus r}|, \\ C_2(r) &= -\frac{\pi}{2}\widehat{\gamma}^2(r+s)^2|W_{\ominus r}|. \end{aligned}$$

因此，它们相对于1的偏离直接表征了所观测点模式与相同强度的齐次泊松过程之间的形态差异。

A. Quincke粒子系统

我们的第一个应用研究了微流控通道中由 2137 个 Quincke 滚子构成的实验点模式。Quincke 滚子是微米级胶体粒子，由于电流体动力学不稳定性而沿表面自行推进，可作为活性极性粒子系统的实验实现 [64, 65]。粒子的直径为 $4.8\,\mu$m，速度可达每秒数毫米。此处分析的粒子位置取自 Supekar 等人 [65]用于推断 Quincke 滚子集体动力学流体动力学方程的实验数据。我们考察了一个包含 2137 个粒子的快照，观测窗口约为 1。203 mm $\times$ 0.292mm。图8展示了相应的粒子位置。

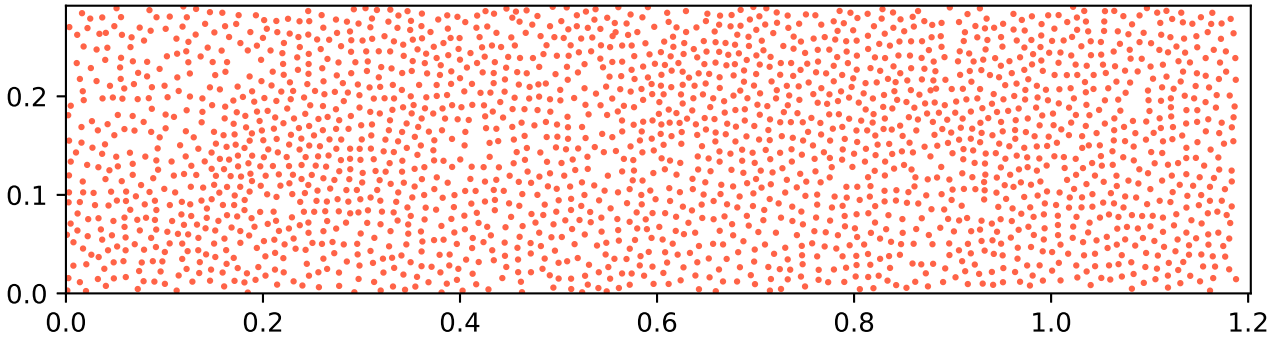


图 8. 实验快照中的 2137 个 Quincke 滚子

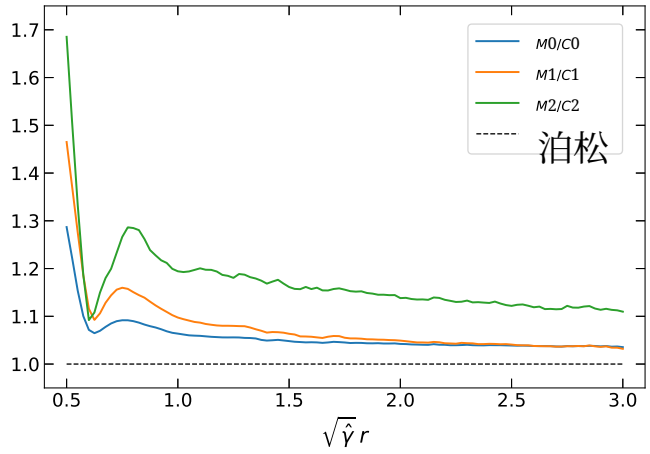


图 9. Quincke粒子图案的归一化 MCF。虚线表示相应的泊松参照。

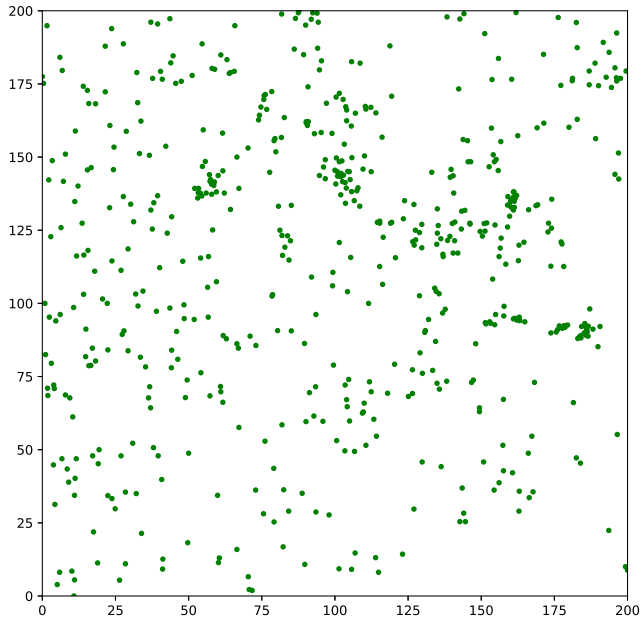


图10. 美国佐治亚州的584棵长叶松

相应的归一化 MCF 如图9所示。在所考察的标度半径范围内，三种形态函数均高于泊松参照。对于 M_0/C_0 和M_1/C_1，这种偏离已经显现，但对于 M_2/C_2则明显得多。

相对于泊松参照的偏离，与粒子相较于齐次泊松点模式更为规则的空间排布相一致。具体而言， M_0/C_0 和 M_1/C_1大于1的取值可从几何上解释为：与泊松参照相比，相邻环之间的重叠有所减少。 M_2/C_2 明显更强的响应凸显了欧拉示性数对并集拓扑变化的敏感性，尤其是对连通分支与孔洞的形成及合并的敏感性。因此，闵可夫斯基泛函在全部三种闵可夫斯基泛函上揭示了与齐次泊松点模式的结构差异，其中最显著的响应出现在拓扑描述子M_2。

B. 长叶松

我们的第二个应用考察了长叶松（长叶松）在Wade Tract中的位置，Wade Tract是位于美国佐治亚州托马斯县的一片老龄林 [66]。此处分析的数据集包含200 m $\times$ 200 m观测窗口内的584个树木位置。该点模式此前已使用圆盘的闵可夫斯基泛函进行过研究，见 [19, 31, 53] 。图10 显示了观测到的树木位置。该模式在空间上具有异质性，间距较近的树木成群分布，并由分布更为稀疏的区域分隔开来。

相应的归一化 MCF 如图 11所示。在较小的标度半径下，三种形态函数的值都明显低于泊松参照。随着环半径增大，这些函数逐渐趋近于 1。

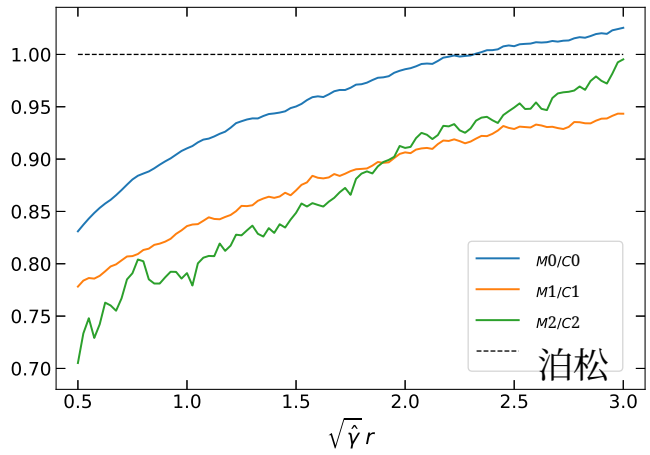


图11. 长叶松点模式的归一化 MCF。虚线表示相应的泊松参照。

相对于泊松参照的偏差，与点模式中可见的空间异质性相一致。在树木密度局部较高的区域，以相邻树木为中心的圆环比在树木较稀疏的区域重叠得更明显。这种重叠增加，为并集覆盖面积和总边界长度减少提供了几何解释，也因此解释了小半径和中等半径下 M_0/C_0 和 M_1/C_1 的值低于 1 的现象。三种闵可夫斯基泛函都揭示出其与齐次泊松点模式之间明显的形态差异。

C. 哈勃超深场

我们的第三个应用研究了来自哈勃超深场（HUDF）的天文点模式。HUDF 是一项深场成像巡天，使用哈勃太空望远镜上高级巡天相机的广角相机获取。我们使用从 F775W（i波段）图像 [67]，中提取的源目录，其中包含 10179 个已探测到的天文源，其位置以像素坐标表示。相应的 Drizzle 合成图像尺寸为 10500×10500 像素，像素尺度为 $0.03''$ 每像素。原始目录的覆盖范围近似呈正方形，相对于坐标轴有一定旋转。为获得适用于负采样程序的矩形观测窗口，我们将点模式与其最小面积包围矩形对齐，对应的旋转角度约为 $42.18°$，然后将所得矩形平移至原点。由此得到观测窗口

$$W = [0, 6666.93] \times [0, 6657.41]$$

以像素坐标表示。所得点模式用于后续分析，见图12。

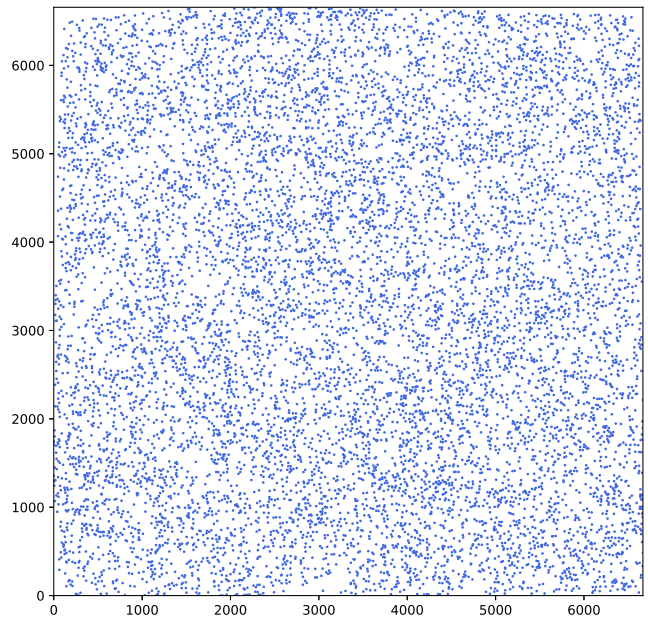


图12. 经过旋转和平移后的哈勃超深场点模式

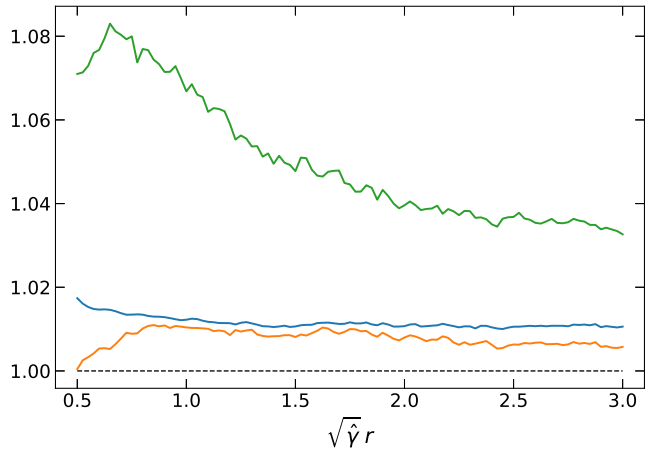


图13。哈勃超深场点模式的归一化 MCF。虚线表示相应的泊松参照。

由于没有单独的观测掩膜，该矩形应视为有效观测覆盖范围的数据驱动近似。所施加的旋转和平移属于刚体运动，因此保持了点模式的距离和形态结构。

变换后的点模式的归一化 MCF 如图13所示。强度 $\hat{\gamma}$ 根据估计的矩形窗口内的变换后的目录计算得出。

所有三种归一化 MCF 在所考虑半径的整个范围内，都表现出相对于泊松参照的系统性偏差。虽然 M_0/C_0 的偏差

和 M_1/C_1 的偏差相对较小，但 M_2/C_2 表现出明显更大的偏差。不过，尤其是在较大半径处，这些偏差可能部分源于观测窗口的近似处理及相应的强度估计，而非空间相关性。因此，HUDF 数据展示了闵可夫斯基泛函在检测相对于泊松参照的形态差异方面的潜力，同时也凸显了准确界定观测覆盖范围的重要性。

VI. 结论与展望

我们提出了闵可夫斯基相关函数（闵可夫斯基泛函，MCF），将其作为基于圆环的几何描述符，用于表征无序点模式及其空间相关性。为每个点配置一个外半径为 r 、内半径为 s的圆环，并通过其闵可夫斯基泛函表征所得圆环并集，从而使闵可夫斯基泛函提供了一种补充传统 n点相关函数的方法。特别是，它们将多尺度几何描述与对高阶相关的敏感性结合起来，而这些高阶相关无法由对关联函数或结构因子捕捉。事实证明，闵可夫斯基泛函作为几何和形态学描述符，在广泛的应用中都很有用 [17, 26, 27, 36, 37, 60, 68]。本文的构造扩展了早期基于圆盘的方法 [16, 19]，为各点配置具有有限厚度的圆环。通过避免重叠圆盘迅速覆盖观测窗口，使用圆环显著扩展了形态学分析所能触及的空间尺度范围。

在理论方面，我们确立了热力学极限下特定闵可夫斯基泛函的存在性，并证明所得量与所选观测窗口序列无关。我们推导了以乘积密度表示的级数表示，明确表明闵可夫斯基泛函通常包含任意阶关联。借助正逼近半径几何的结果，我们进一步证明，构造中涉及的圆环有限并集与交集所对应的闵可夫斯基泛函均有良好定义。在薄环极限 $s \uparrow r$下，我们明确地将基于欧拉示性数的闵可夫斯基泛函与对关联函数 $g^{(2)}$联系起来，由此说明传统的二阶信息如何嵌入形态学描述中。对于齐次泊松过程，我们推导出 M_0和 M_1 的闭式表达式，并将 M_2 的 Miles 型表达式用作解析参照。

为了数值计算闵可夫斯基泛函，我们开发了一种精确高效的算法，该算法基于圆环并集边界上的局部弧贡献。该算法计算三个闵可夫斯基泛函 M_0、 M_1和 M_2，并支持周期性和非周期性点模式的边界条件。闵可夫斯基泛函所具有的可加性和运动不变性，以及数值计算的局部特性，使得由此得到的描述符特别适用于点模式的几何分析。此外，将闵可夫斯基泛函表示为环半径的函数，提供了一种直观的方式，可用于比较不同空间尺度下的几何和拓扑属性。

数值示例展现了不同闵可夫斯基泛函所包含的互补信息，尤其是它们对高阶空间结构的敏感性。Baddeley–Silverman过程直接体现了这一性质：它与齐次泊松过程具有相同的对关联函数和结构因子，但其闵可夫斯基泛函系统性地偏离相应的泊松参照。因此，无需为其高阶关联建立参数模型，闵可夫斯基泛函便能区分那些无法通过传统二阶描述符加以区分的点过程。此外，我们观察到，对于 $s = 0$（对应于使用球），当半径超过某一阈值后，Baddeley–Silverman过程的闵可夫斯基泛函与泊松过程的几乎无法区分；而使用真正的环，则能在更大的半径范围内区分这两个过程。

我们对实验和观测数据的应用进一步证明了该方法适用于产生于大不相同物理尺度上的点模式。对于活性 Quincke 滚子、长叶松以及哈勃超深场中的天文源，闵可夫斯基泛函揭示了它们相对于具有相同强度的齐次泊松过程所表现出的系统性形态偏差。三个闵可夫斯基泛函分别响应点模式几何与拓扑的不同方面，因此覆盖面积、边界长度和欧拉示性数能够提供关于其空间结构的互补信息。

当前框架的若干扩展为未来研究提供了有前景的方向。一个自然的方向是将其扩展到更高维点模式以及更一般的粒子形状；对于这类情形，相应的内在体积可提供本文所讨论的平面闵可夫斯基泛函的高维类比。另一个自然的推广涉及曲空间上的点模式。特别是，闵可夫斯基泛函也可以在球面上定义，从而有望为球面点模式或方向点模式构造相应的相关函数。

另一个扩展方向是各向异性点模式，其方向结构无法通过标量闵可夫斯基泛函得到充分表征。闵可夫斯基张量是闵可夫斯基泛函的张量值推广，可系统地量化方向结构和各向异性 [36]。因此，将闵可夫斯基张量或由其导出的标量各向异性指标纳入当前关联框架，可以为各向异性空间相关性提供多尺度描述符。

另一个重要方向是基于闵可夫斯基泛函开展统计推断。置信带、重采样程序，以及针对泊松模型或拟合参考模型的正式假设检验，可通过量化统计不确定性来补充形态学比较。内环和外环半径的选择也有进一步研究的空间，包括根据给定数据集的分辨率和特征结构，系统地确定环的厚度或面积，以及所考察的空间尺度范围。

总而言之，基于圆环的形态学特征函数为探究不同长度尺度上的空间相关性提供了统一的几何框架，并突破了传统二阶描述符的局限。它们兼具高阶敏感性、互补的几何与拓扑信息，以及高效的计算能力，因此可作为分析复杂点模式的既有方法的有力补充，并为进一步的理论、统计和计算发展提供了多个方向。

致谢

我们感谢 Sebastian Bittner 和 Uwe Brodatzki 在本项目早期阶段作出的宝贵贡献，这些贡献为本研究奠定了重要基础 [52, 53]。本研究获得德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）通过 SPP 2265 提供的经费支持，资助编号为 ME 1361/16-1 和 KL 3391/2-2。本研究还获得亥姆霍兹联合会“亥姆霍兹青年研究者团队”项目（VH-NG-19-34，DataMat）下倡议与联网基金的支持。作者衷心感谢埃尔朗根-纽伦堡弗里德里希-亚历山大大学（FAU）的埃尔朗根国家高性能计算中心（NHR@FAU）提供的科研支持和高性能计算资源¨（埃尔朗根-纽伦堡 FAU）¨。本研究使用了法国斯特拉斯堡 CDS 的 VizieR星表访问工具 [69]。VizieR 服务的原始介绍发表于 [70]。

附录

本附录汇集了支撑本文理论结果的技术性论证。第A 节为有限个圆环交集的闵可夫斯基泛函建立一致界，并利用这些界证明，在闵可夫斯基泛函级数表示中应用富比尼定理和控制收敛定理是合理的。第B节给出了关于有限个圆环交集具有正可达性的定理II.1 的证明。最后，第C 节给出了泊松参照下引理III.2 的证明。

在整个附录中，我们固定半径 $0 < s < r$，并用 $R(x)$ 表示以 $x \in \mathbb{R}^d$ 为中心、内半径为 s、外半径为 r的闭环。我们用 $B(x,t)$ 表示以 $x \in \mathbb{R}^d$ 为中心、半径为 $t > 0$的闭球，并用 κ_d 表示单位球的d维体积，使得 $|B(x,t)| = \kappa_d t^d$。在下文的论证中，只要涉及欧拉示性数 M_2，我们就限制在 $d = 2$。平稳点过程的第 n 阶乘积密度记为ρ_n，并且始终假设一致界 (3) 成立。

附录 A：技术假设与论证

本节验证第 IIC 节中为应用富比尼定理和控制收敛定理所需的数学假设。我们所证明的结论适用于任意维度下的体积 M_0 以及（半）表面积 M_1。对于欧拉示性数 M_2，我们将范围限制为 $d = 2$，此时可由高斯-博内定理得到所需的界。为此，我们需要对有限个圆环的交集 $R(x_1)$ ……，$R(x_n)$ 的闵可夫斯基泛函绝对值给出适当的上界。

交集的体积 $\cap_{i=1}^n R(x_i)$由若干子集组成 可以直接由其中一个圆环的体积加以界定。由于其边界这些子集分别属于各个圆环 $R(x_i)$ 的边界，因此我们得到上界

$$M_j\big(\cap_{i=1}^n R(x_i)\big) \le \sum_{i=1}^n M_j(R(x_i)) = nM_j(R(\mathbf{0})), \qquad j \in \{0,1\}, \tag{A1}$$

其中因子 n 对于 $j = 0$ 可以省略。在情形 $d = 2$ 下，$\cap_{i=1}^n R(x_i)$ 的边界是一条分段光滑曲线，我们可以应用高斯-博内定理。每个非光滑边界点都是至少两个圆环的边界的交点。由于两个圆环的边界至多有 8 个交点，非光滑边界点的数目可以从上方由 $8\binom{n}{2}$ 界定。综上所述，我们得到上界

$$\big|M_2\big(\cap_{i=1}^n R(x_i)\big)\big| \le \frac{1}{\pi s} M_1\big(\cap_{i=1}^n R(x_i)\big) + 8\binom{n}{2} \le \frac{n}{\pi s} M_1(R(\mathbf{0})) + 8\binom{n}{2}. \tag{A2}$$

对于几乎所有的 $(x_1, \ldots x_n) \in (\mathbb{R}^d)^n$，界（A1）和（A2）成立，这足以推出以下引理。

引理 A.1。 设 $n \in \mathbb{N}$， ρ_n 是定义在 n上的平稳点过程的第 $\mathbb{R}^d$ 阶相关函数，满足 （3）且$W \subset \mathbb{R}^d$ 为有界可测集，且满足 $|W| > 0$。此外，定义

$$a_n := nC^n D^{n-1} M_0(R(\mathbf{0})), \qquad b_n := nC^n D^{n-1} M_1(R(\mathbf{0})), \qquad c_n := nC^n D^{n-1} \left(\frac{1}{\pi s} M_1(R(\mathbf{0})) + 4(n-1) \right),$$

其中 C 是 (3) 中的常数 且 $D := |B(\mathbf{0}, 2r)| = (2r)^d \kappa_d$。则

$$\frac{1}{|W|} \int_{W^n} M_0\big(\cap_{i=1}^n R(x_i) \big) \rho_n(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n) \le a_n$$
$$\frac{1}{|W|} \int_{W^n} M_1\big(\cap_{i=1}^n R(x_i) \big) \rho_n(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n) \le b_n.$$

在情形 $d = 2$ 下，我们还得到

$$\frac{1}{|W|} \int_{W^n} \big| M_2\big(\cap_{i=1}^n R(x_i) \big) \big| \rho_n(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n) \le c_n.$$

此外，我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} < \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n!} < \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n!} < \infty.$$

证明。 这些结论对 $n = 1$ 是显然的，因此下文我们假设 $n \ge 2$ 。设 $j \in \{0, 1\}$ 或 $j = 2$ 且 $d = 2$。则

$$\frac{1}{|W|} \int_{W^n} \big| M_j\big(\cap_{i=1}^n R(x_i) \big) \big| \rho_n(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n)$$
$$\le \frac{1}{|W|} \int_W \int_{(\mathbb{R}^d)^{n-1}} \big| M_j\big(\cap_{i=1}^n R(x_i) \big) \big| \rho_n(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{d}(x_2, \ldots, x_n) \, \mathrm{d}x_1.$$

右侧积分中的函数是平移不变的，因此内层积分与 x_1 无关。将 x_1 替换为 $\mathbf{0}$ ，我们得到上界

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^{n-1}} \big| M_j\big(R(\mathbf{0}) \cap \cap_{i=2}^n R(x_i) \big) \big| \rho_n(\mathbf{0}, x_2, \ldots, x_n) \, \mathrm{d}(x_2, \ldots, x_n). \tag{A3}$$

交集 $R(\mathbf{0}) \cap \cap_{i=2}^n R(x_i)$ 为空，只要其中某一个 x_i 与原点的距离大于 $2r$ 。因此（A3）中的被积函数在 $B(\mathbf{0}, 2r)^{n-1}$ 之外为零。对于 $j \in \{0, 1\}$，通过应用（A1）并结合（3），我们得到上界

$$\int_{B(\mathbf{0}, 2r)^{n-1}} nM_j(R(\mathbf{0})) C^n \, \mathrm{d}(x_2, \ldots, x_n) = nC^n D^{n-1} M_j(R(\mathbf{0})).$$

在 $j = 2$ 和 $d = 2$ 的情况下，我们使用（A2）和（3）将（A3）中的积分界定为

$$\int_{B(\mathbf{0}, 2r)^{n-1}} \left(\frac{n}{\pi s} M_1(R(\mathbf{0})) + 8 \binom{n}{2} \right) C^n \, \mathrm{d}(x_2, \ldots, x_n) = c_n.$$

此外，我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} = C \, M_0(R(\mathbf{0})) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(CD)^{n-1}}{(n-1)!} = C \, M_0(R(\mathbf{0})) \exp(CD).$$

用 b_n 替换 a_n ，并用 M_1 替换 M_0 ，也能得到相同的结果。最后，我们得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n!} = \left(\frac{1}{\pi s} C M_1(R(\mathbf{0})) + 4C^2 D \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(CD)^n}{n!} = \left(\frac{1}{\pi s} M_1(R(\mathbf{0})) + 4CD \right) C \exp(CD).$$

□

现在我们使用引理A.1，以证明在推导 MCF 表示时应用富比尼定理和控制收敛定理的合理性。下文中，我们考虑 $j \in \{0,1\}$ 或 $d = j = 2$。设 Φ是定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的平稳点过程，满足（3），并令 Φ_W 表示其在可测集$W \subset \mathbb{R}^d$内的点上的限制。根据坎贝尔公式（ [56]中的命题 2.7），对于任意满足 $W \subset \mathbb{R}^d$的有界可测集 $|W| > 0$，有

$$\mathbb{E}\left[\sum_{x_1,\dots,x_n \in \Phi_W}^{\neq} M_j\left(\cap_{i=1}^n R(x_i)\right)\right] = \int_{W^n} M_j\left(\cap_{i=1}^n R(x_i)\right) \rho_n(x_1,\dots,x_n)\, \mathrm{d}(x_1,\dots,x_n),$$

其中，$\sum^{\neq}$ 表示求和是对 Φ中两两不同的点进行的。根据容斥原理和富比尼定理，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[M_j\left(\cup_{x\in\Phi_W} R(x)\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\sum_{x_1,\dots,x_n\in\Phi_W}^{\neq} M_j\left(\cap_{i=1}^n R(x_i)\right)\right]\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\int_{W^n} M_j\left(\cap_{i=1}^n R(x_i)\right)\rho_n(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n), \qquad \text{(A4)}\end{aligned}$$

其中，引理 A.1 验证了在上一个等式中应用富比尼定理的条件。为取热力学极限，我们考虑凸集序列 $(W_m)_{m\in\mathbb{N}}$，使得内半径 $r(W_m)$ 在 $m \to \infty$ 时趋于无穷大。凸集 A 的内半径定义为包含在 A中的最大球的半径。根据引理 A.1，我们可以应用控制收敛定理，并利用 (A4) 得到

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\frac{1}{|W_m|}\mathbb{E}\left[M_j\left(\cup_{x\in\Phi_{W_m}} R(x)\right)\right] &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\lim_{m\to\infty}\frac{1}{|W_m|}\int_{W_m^n} M_j\left(\cap_{i=1}^n R(x_i)\right)\rho_n(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\int_{(\mathbb{R}^d)^{n-1}} M_j\left(R(\mathbf{0})\cap\cap_{i=2}^n R(x_i)\right)\rho_n(\mathbf{0},x_2,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_2,\dots,x_n). \qquad \text{(A5)}\end{aligned}$$

对每个固定的 n，第二个等式由 [71]中的引理 7.1 得出。对于 $n = 1$，该积分应解释为$M_j(R(\mathbf{0}))\rho_1(\mathbf{0})$。所得级数中的积分由引理 A.1可知均为有限值。

附录 B：定理 II.1 的证明

对于 a，$x \in \mathbb{R}^d$满足 $\|x - a\| \in \{s, r\}$，即 $a \in \partial R(x)$ 的情形，用 $N(x,\ a)$ 表示 $R(x)$ 在 a 处的单位法向量。否则，令 $N(x,\ a) := \mathbf{0}$（ $\mathbb{R}^d$ 中的原点）。对于 $k \in \mathbb{N}$，定义函数 $f_k\colon (\mathbb{S}^{d-1})^k \to \mathbb{R}$ 如下

$$f_k(u_1,\dots,u_k) := \inf_{(t_1,\dots,t_k)\in\mathbb{R}^k_{\geq 0}\setminus\{\mathbf{0}\}} \frac{\|t_1u_1+\cdots+t_ku_k\|}{t_1+\cdots+t_k}.$$

这里，$\mathbb{S}^{d-1}$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 中的单位球面。下面的引理给出了函数 f_k 的一些重要初始性质。

引理 B.1。 (i) 采用记号 $\Delta := \{t \in [0,1]^k\colon \sum_{i=1}^k t_i = 1\}$，函数 f_k 满足

$$f_k(u_1,\dots,u_k) = \inf_{(t_1,\dots,t_k)\in\Delta}\|t_1u_1+\cdots+t_ku_k\|.$$

(ii) 函数 f_k 连续。

(iii) 我们有

$$f_k(u_1,\dots,u_k) > 0 \iff \exists w \in \mathbb{S}^{d-1}\colon\ \langle w, u_i\rangle > 0\ \ \forall i \in \{1,\dots,k\}. \qquad \text{(B1)}$$

证明。 (i) 所需结论源于以下事实：对于每个 $(u_1,\dots,u_k) \in (\mathbb{S}^{d-1})^k$，函数

$$g : \mathbb{R}^k_{\geq 0}\setminus\{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R},\quad g(t_1,\dots,t_k) := \frac{\|t_1u_1+\cdots+t_ku_k\|}{t_1+\cdots+t_k}$$

对所有 $\lambda > 0$ 和 $t \in \mathbb{R}^k_{\geq 0}\setminus\{\mathbf{0}\}$，满足 $g(\lambda t) = g(t)$。

（ii）利用第（i）部分，贝尔热最大值定理（ [72]中的定理 17.31）表明 f_k 是连续的，只需选取常值对应 φ： $(\mathbb{S}^{d-1})^k \to \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$， $\varphi(u) = \Delta$。

（iii）由（i）可立即推出

$$f_k(u_1, \dots, u_k) > 0 \iff \mathbf{0} \notin \operatorname{conv}(u_1, \dots, u_k) =: S,$$

其中，conv(u_1、……、u_k) 表示 $\{u_1, \dots, u_k\}$ 的凸包。最后，通过证明以下内容完成证明

$$\mathbf{0} \notin S \iff \exists w \in \mathbb{S}^{d-1} : \langle w, u_i \rangle > 0 \ \forall i \in \{1, \dots, k\}.$$

“$\Longrightarrow$”： [73] 中的分离定理（定理 1.17）表明，取 $A = \{\mathbf{0}\}$ 和 $B = S$，存在一个 $w \in \mathbb{S}^{d-1}$，使得 $\langle w, x \rangle > 0$ 对所有 $x \in S$ 都成立，从而得到所需结果。

“$\Longleftarrow$”：令 $x \in S$，并定义 $\varepsilon := \min_{i \in \{1,\dots,k\}} \langle w, u_i \rangle > 0$。于是， x 可写成 $\sum_{i=1}^k t_i u_i$，其中 $t \in \Delta$，从而得到

$$\langle w, x \rangle = \sum_{i=1}^k t_i \langle w, u_i \rangle \geq \varepsilon.$$

由于这对所有 $x \in S$ 都成立，因此可推出 $\mathbf{0} \notin S$。

□

注意，B1）右侧的条件意味着 u_1、……、u_k 位于同一个开半空间内。例如，当 u_1、……、u_k 线性无关时，该条件便成立，因为此时 $\mathbf{0} \notin \operatorname{conv}(u_1$、……、$u_k)$。下面的引理表明，对于几乎所有的环中心配置，这种线性无关性都成立。

引理 B.2。 对于几乎所有 $(x_1$、…、$x_n) \in (\mathbb{R}^d)^n$，以下结论成立：对于每个 $a \in \mathbb{R}^d$，向量 $a - x_i$、 $i \in I(a)$：$=\{i :$ $a \in \partial R(x_i)\}$ 都是线性无关的。特别地，没有任何点位于多于 d 个圆环的边界上。

证明。固定一个 非空集合 $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ 以及半径 $t_i \in \{s, r\}$，其中 $i \in J$。考虑光滑映射

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d)^J &\longrightarrow \mathbb{R}^J, \\ (a, (x_i)_{i \in J}) &\longmapsto \left(\|a - x_i\|^2 - t_i^2 \right)_{i \in J}. \end{aligned}$$

在 F 的每个零点处， i 阶分量关于 x_i 的导数为 $v \mapsto -2\langle a - x_i, v \rangle$；由于 $\|a - x_i\| = t_i > 0$，该导数不为零，而它关于 x_j、 $j \neq i$ 的导数为零。因此，0 是 F 的正则值。根据参数横截性定理（见 [74, 第 68] 页），对于几乎所有 $(x_i)_{i \in J}$，0 都是 $F(\cdot, (x_i)_{i \in J})$ 的正则值；也就是说，对于所有 $i \in J$，在满足 $\|a - x_i\| = t_i$ 的每个 a 处，梯度 $2(a - x_i)$、 $i \in J$ 都是线性无关的。由于 J 和 $(t_i)_{i \in J}$ 的选择只有有限种，断言得证。 □

利用引理 B.1 和 B.2，我们现在可以证明定理 II.1。

证明。 证明中的关键结果是 [35] 中的定理 4.19。首先，我们证明对于几乎所有的 $x_1, \dots, x_n$，对于每个边界点 $a \in \partial(\cap_{i=1}^n R(x_i))$，以下结论成立：

$$\eta(a) := \inf \left\{ \frac{\|v_1 + \dots + v_n\|}{\|v_1\| + \dots + \|v_n\|} : v_i \in \operatorname{Nor}(R(x_i), a), \|v_1\| + \dots + \|v_n\| > 0 \right\} > 0.$$

固定一个边界点 $a \in \partial(\cap_{i=1}^n R(x_i))$，并定义 $I(a) := \{i \in \{1, \dots, n\} : a \in \partial R(x_i)\}$。注意到 $I(a) \neq \emptyset$。不失一般性，设 $I(a) = \{1, \dots, k\}$。由于对于 $i \in I(a)$，Nor($R(x_i)$ a) 的形式为 $\{tu_i : t \geq 0\}$ with$u_i = N(x_i, a)$，因此我们有

$$\eta(a) = f_k(u_1, \dots, u_k)$$

由引理 B.2，对几乎所有 x_1，……，$x_n \in \mathbb{R}^d$，单位法向量 $u_i := N(x_i, a)$， $i \in I(a)$ 在每个边界点 $a \in \partial(\cap_{i=1}^n R(x_i))$ 处线性无关。因此，它们满足 (B1) 的右端，且引理 B.1 (iii) 在每个这样的边界点处给出 $\eta(a) > 0$。

现在固定 $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$，使得对所有边界点 $a \in \partial(\cap_{i=1}^n R(x_i))$，都有 $\eta(a) > 0$。接下来要证明 η 在整个边界上统一地远离零。我们将边界 $\partial(\cap_{i=1}^n R(x_i))$分解为以下集合

$$A_J := \left\{ a \in \partial(\cap_{i=1}^n R(x_i)) : I(a) = J \right\}, \qquad \emptyset \neq J \subseteq \{1, \dots, n\}.$$

由于对于每个 i， $\partial R(x_i)$ 都是闭集，因此对于每个 $a \in \mathrm{cl}(A_J)$，都有 $J \subseteq I(a)$。对于 $J = \{i_1, \dots, i_k\}$，我们考虑函数

$$g_J : \mathrm{cl}(A_J) \to \mathbb{R}, \quad a \mapsto f_k\big(N(x_{i_1}, a), \dots, N(x_{i_k}, a)\big)$$

在 A_J 的闭包 $\mathrm{cl}(A_J)$ 上。该假设意味着，对于所有 $a \in \partial(\cap_{i=1}^n R(x_i))$，$g_{I(a)}(a) > 0$，这也意味着对于 $J \subseteq I(a)$，$g_J(a) > 0$。注意，$\mathrm{cl}(A_J)$ 可能包含满足 $J \subseteq I(a)$ 的点 a，但 $J \neq I(a)$。结合引理 B.1 (ii)，可知 g_J 是定义在紧集上的严格正连续函数。因此，对于每个满足 $A_J \neq \emptyset$ 的 J，由极值定理可知 $\inf_{a \in \mathrm{cl}(A_J)} g_J(a) > 0$。因此，我们得到

$$\inf\left\{\eta(a) : a \in \partial(\cap_{i=1}^n R(x_i))\right\} = \inf_{\emptyset \neq J \subseteq \{1,\dots,n\}} \inf_{a \in A_J} g_J(a) > 0.$$

由 [35], 中的定理 4.19 可推得， $\cap_{i=1}^n R(x_i)$ 具有正逼近半径。 □

附录 C：英里公式的证明

我们以引理 III.2 的证明结束本附录。令 Φ 是定义在 $\mathbb{R}^d$ 上、强度为 γ 的平稳泊松过程。其 n 阶相关函数为

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n) = \gamma^n.$$

因此我们可以应用一般表示（6），并显式计算所得积分，其中对象为 M_0 和 M_1。

证明。 对于体积 M_0，我们应用富比尼定理得到

$$\begin{aligned}
&\int_{(\mathbb{R}^d)^{n-1}} M_0\left(R(\mathbf{0}) \cap R(x_2) \cap \cdots \cap R(x_n)\right) \gamma^n \, \mathrm{d}(x_2, \dots, x_n) \\
&\quad = \gamma^n \int_{(\mathbb{R}^d)^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{y \in R(\mathbf{0})\}\mathbb{1}\{y \in R(x_2)\} \cdot \ldots \cdot \mathbb{1}\{y \in R(x_n)\} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}(x_2, \dots, x_n) \\
&\quad = \gamma^n \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{y \in R(\mathbf{0})\} \int_{(\mathbb{R}^d)^{n-1}} \mathbb{1}\{x_2 \in R(y)\} \cdot \ldots \cdot \mathbb{1}\{x_n \in R(y)\} \, \mathrm{d}(x_2, \dots, x_n) \, \mathrm{d}y \\
&\quad = \gamma^n M_0(R(\mathbf{0}))^{n-1} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{y \in R(\mathbf{0})\} \, \mathrm{d}y = \gamma^n M_0(R(\mathbf{0}))^n.
\end{aligned}$$

表示（6）所对应的 $M_0(r, s, \Phi)$ 现在给出

$$M_0(r, s, \Phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \gamma^n M_0(R(\mathbf{0}))^n = 1 - \exp\left(-\gamma M_0(R(\mathbf{0}))\right).$$

在不计 $(d-1)$ 维豪斯多夫测度为零的集合的意义下，圆环交集的边界可分解为各个圆环边界的子集。以 α_i 与 α 分别表示 $\mathbb{R}^d$ 上限制于 $R(x_i)$ 与 $R(\mathbf{0})$ 边界的 $(d-1)$ 维豪斯多夫测度，则有

$$M_1\left(R(x_1) \cap \cdots \cap R(x_n)\right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_i\left(R(x_1) \cap R(x_2) \cap \cdots \cap R(x_n)\right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \alpha\big(R(x_1 - x_i) \cap \cdots \cap R(x_n - x_i)\big)$$

因此，在 $x_1 := \mathbf{0}$ 下

$$\begin{aligned}
&\int_{(\mathbb{R}^d)^{n-1}} M_1\left(R(\mathbf{0}) \cap R(x_2) \cap \cdots \cap R(x_n)\right) \gamma^n \, \mathrm{d}(x_2, \dots, x_n) \\
&\quad = \frac{1}{2} \gamma^n \sum_{i=1}^n \int_{(\mathbb{R}^d)^{n-1}} \alpha\big(R(-x_i) \cap R(x_2 - x_i) \cap \cdots \cap R(x_n - x_i)\big) \, \mathrm{d}(x_2, \dots, x_n).
\end{aligned}$$

我们给出了 $i = 1$中求和项的显式计算。其余求和项也可以用类似的方法计算，并得到相同的结果，不过它们的表达式稍微复杂一些。我们再次使用

富比尼定理并得到

$$\begin{aligned}
&\int_{(\mathbb{R}^d)^{n-1}} \alpha\big(R(\mathbf{0}) \cap R(x_2) \cap \cdots \cap R(x_n)\big)\, \mathrm{d}(x_2, \ldots, x_n) \\
&\quad = \int_{(\mathbb{R}^d)^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{y \in R(\mathbf{0})\} \mathbb{1}\{y \in R(x_2)\} \cdot \ldots \cdot \mathbb{1}\{y \in R(x_n)\}\, \alpha(\mathrm{d}y)\, \mathrm{d}(x_2, \ldots, x_n) \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{y \in R(\mathbf{0})\} \int_{(\mathbb{R}^d)^{n-1}} \mathbb{1}\{x_2 \in R(y)\} \cdot \ldots \cdot \mathbb{1}\{x_n \in R(y)\}\, \mathrm{d}(x_2, \ldots, x_n)\, \alpha(\mathrm{d}y) \\
&\quad = M_0(R(\mathbf{0}))^{n-1} \alpha(R(\mathbf{0})) \;=\; 2M_0(R(\mathbf{0}))^{n-1} M_1(R(\mathbf{0})).
\end{aligned}$$

综合起来，我们得到

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^{n-1}} M_1\left(R(\mathbf{0}) \cap R(x_2) \cap \cdots \cap R(x_n)\right) \gamma^n\, \mathrm{d}(x_2, \ldots, x_n) \;=\; \gamma^n n M_0(R(\mathbf{0}))^{n-1} M_1(R(\mathbf{0}))$$

因此由（6）

$$M_1(r, s, \Phi) \;=\; \gamma M_1(R(\mathbf{0})) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \gamma^{n-1} M_0(R(\mathbf{0}))^{n-1} \;=\; \gamma M_1(R(\mathbf{0})) \exp\left(-\gamma M_0(R(\mathbf{0}))\right).$$

□

---

[1] S. Torquato 和 G. Stell，《J. Chem. Phys.》77，2071（1982）。[2] S. Torquato，*Random Heterogeneous Materials: Microstructure and Macroscopic Properties*，《跨学科应用数学》（施普林格，2002）。[3] K. Mosaliganti、F. Janoos、O. Irfanoglu、R. Ridgway、R. Machiraju、K. Huang、J. Saltz、G. Leone 和 M. Ostrowski，《Med. Image Anal.》13，156（2008）。[4] S. D. M. White，《Mon. Not. R. Astron. Soc.》186，145（1979）。[5] P. Peebles，*The Large-scale Structure of the Universe*，《普林斯顿物理学系列》（普林斯顿大学出版社，1980）。[6] I. Szapudi、M. Postman、T. R. Lauer 和 W. Oegerle，《Astrophys. J.》548，114（2001）。[7] C. K. McBride、A. J. Connolly、J. P. Gardner、R. Scranton、R. Scoccimarro、A. A. Berlind、F. Mar´ın 和 D. P. Schneider，《Astrophys. J.》739，85（2011）。[8] M. Eckardt 和 M. Moradi，《计算与图形统计学杂志》35，1397（2026）。[9] A. W. Moore、A. J. Connolly、C. Genovese、A. Gray、L. Grone、N. Kanidoris II、R. C. Nichol、J. Schneider、A. Szalay、I. Szapudi 和 L. Wasserman，载于 *Mining the Sky*，《ESO天体物理学专题研讨会》，A. Banday、S. Zaroubi 和 M. Bartelmann 编（Springer Berlin Heidelberg，2001），第71–82页。[10] L. L. Zhang 和 U.-L. Pen，《新天文学》10，569（2005）。[11] X. Zhang 和 C. Yu，载于 *Cloud Computing Technology and Science (CloudCom) 2011 IEEE Third International Conference on* 2011 634 639，（）第–页。[12] W. B. March、K. Czechowski、M. Dukhan、T. Benson、D. Lee、A. J. Connolly、R. Vuduc、E. Chow 和 A. G. Gray，载于 *Proceedings of the International Conference on High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis*，SC '12（IEEE计算机学会出版社，洛斯阿拉米托斯，加利福尼亚州，美国，2012），第74:1–74:12页。[13] L. Santal´o，*Integral Geometry and Geometric Probability*（Addison-Wesley，1976）。[14] R. Schneider 和 W. Weil，*Stochastic and Integral Geometry (Probability and Its Applications)*（施普林格，柏林，2008）。[15] K. Mecke，*Integralgeometrie in der Statistischen Physik*（Harri Deutsch，法兰克福，1994）。[16] K. R. Mecke、T. Buchert 和 H. Wagner，《天文学与天体物理学》288，697（1994）。[17] K. Mecke，《Int. J. Mod. Phys. B》12，861（1998）。[18] K. R. Mecke，载于 *Statistical Physics and Spatial Statistics*，《物理学讲义》第554卷，K. R. Mecke 和 D. Stoyan 编（施普林格（柏林、海德堡），2000），第111–184页。[19] K. R. Mecke 和 D. Stoyan，《Biometrical J.》47，473（2005）。[20] K. Gangopadhyay、A. Banerjee 和 T. Abel，《皇家天文学会月刊》543，3409（2025）。[21] M. Kerscher、J. Schmalzing、J. Retzlaff、S. Borgani、T. Buchert、S. Gottlober、V. Muller、M. Plionis 和 H. Wagner，《皇家天文学会月刊》284，73（1997）。[22] M. Kerscher、K. Mecke、P. Schuecker、H. B¨ohringer、L. Guzzo、C. A. Collins、S. Schindler、S. De Grandi 和 R. Cruddace，《天文学与天体物理学》377，1（2001）。[23] M. Kerscher、K. Mecke、J. Schmalzing、C. Beisbart、T. Buchert 和 H. Wagner，《天文学与天体物理学》373，1（2001）。[24] A. Wiegand、T. Buchert 和 M. Ostermann，《皇家天文学会月刊》443，241（2014）。

[25] A. Wiegand 和 D. J. Eisenstein，《皇家天文学会月刊》467，3361（2017）。[26] Jacobs, K.、Herminghaus, S. 和 Mecke, Klaus，《Langmuir》14，965（1998）。[27] S. Herminghaus、K. Jacobs、K. Mecke、J. Bischof、A. Fery、M. Ibn-Elhaj 和 S. Schlagowski，《科学》282，916（1998）。[28] D. Hug、M. A. Klatt 和 D. Pabst，SIAM《成像科学杂志》19，1698（2026）。[29] H. Hadwiger，*Vorlesungen über Inhalt Oberfläche und Isoperimetrie*（施普林格，柏林，1957）。[30] 这与所谓的覆盖问题有关。覆盖半径是覆盖整个系统所需的最小半径，即以该半径的球覆盖整个系统。[31] K. Mecke（2008），工作论文，物理系，埃尔朗根-纽伦堡大学（FAU），德国。[32] Mecke, Klaus，《物理学杂志：凝聚态》8，9663（1996）。[33] U. Brodatzki 和 K. Mecke，胶体悬浮液的形态学模型，arXiv:cond-mat/0112009（2002）。[34] C. Beisbart、M. Kerscher 和 K. Mecke，载于 *Morphology of Condensed Matter - Physics and Geometry of Spatially Complex Systems* 600，2002 1，

《物理学讲义》，由 K. Mecke 和 D. Stoyan 编（施普林格，柏林，）第版，第375–408页。[35] J. Rataj 和 M. Z¨ahle，*Curvature Measures of Singular Sets*（施普林格，尚，2019）。[36] G. E. Schr¨oder-Turk、W. Mickel、S. C. Kapfer、M. A. Klatt、F. M. Schaller、M. J. F. Hoffmann、N. Kleppmann、P. Arm-strong、A. Inayat、D. Hug、M. Reichelsdorfer、W. Peukert、W. Schwieger 和 K. Mecke，《Adv. Mater.》23，2535（2011）。[37] K. Mecke 和 D. Stoyan，*Statistical Physics and Spatial Statistics – The Art of Analyzing and Modeling Spatial Structures and Pattern Formation* 1 554 2000，第

版，《物理学讲义》，第卷（施普林格，柏林，）。[38] K. Mecke 和 D. Stoyan，*Morphology of Condensed Matter - Physics and Geometry of Spatially Complex Systems*，第1版，《物理学讲义》第600卷（施普林格，柏林，2002）。[39] H. Hansen-Goos 和 K. Mecke，《物理评论快报》102，018302（2009）。[40] S. C. Kapfer、W. Mickel、K. Mecke 和 G. E. Schr¨oder-Turk，《物理评论E》85，030301（2012）。[41] Wittmann, Ren´e 和 Marechal, Matthieu 和 Mecke, Klaus，《J. Chem. Phys.》141，064103（2014）。[42] C. Scholz、F. Wirner、M. A. Klatt、D. Hirneise、G. E. Schr¨oder-Turk、K. Mecke 和 C. Bechinger，《物理评论E》92，043023（2015）。[43] J. Schmalzing、T. Buchert、A. L. Melott、V. Sahni、B. S. Sathyaprakash 和 S. F. Shandarin，《Astrophys. J.》526，568（1999）。[44] D. G¨oring、M. A. Klatt、C. Stegmann 和 K. Mecke，《天文学与天体物理学》555，A38（2013）。[45] K. Mecke，《物理评论E》53，4794（1996）。[46] J. Becker、G. Grun、R. Seemann、H. Mantz、K. Jacobs、K. R. Mecke 和 R. Blossey，《自然材料》2，59（2003）。[47] H. Mantz、K. Jacobs 和 K. Mecke，《统计力学杂志》12，P12015（2008）。[48] Arns, C.H. 和 Knackstedt, M. A. 和 Mecke, K.，《物理评论快报》91，215506（2003）。[49] Arns, C.H. 和 Knackstedt, M. A. 和 Mecke, K.，《物理评论E》80，051303（2009）。[50] C. Scholz、G. E. Schr¨oder-Turk 和 K. Mecke，《物理评论E》91，042907（2015）。[51] U. Brodatzki 和 K. Mecke，《计算机物理通讯》147，218（2002）。[52] U. Brodatzki，*Statistische Physik stochastischer Geometrien*，博士论文，伍珀塔尔大学，德国（2003）。[53] S. Bittner，*Morphometrie von Punktprozessen*，硕士论文，埃尔朗根-纽伦堡大学（FAU，德国）（2008）。[54] D. Pabst，minkowski-correlations（2026）。[55] D. J. Daley 和 D. Vere-Jones，*An Introduction to the Theory of Point Processes*，《概率及其应用》（施普林格出版社，纽约，2003）。[56] G. Last 和 M. D. Penrose，*Lectures on the Poisson Process*（剑桥大学出版社，2017）。[57] Stoyan, Dietrich 和 Mecke, Klaus，载于 *Space, Structure and Randomness*，《统计学讲义》第183卷，M. Bilodeau、F. Meyer 和 M. Schmitt 编（施普林格（纽约），2005），第151–182页。[58] Mecke, Klaus，《波兰物理学报B辑》28，1747（1997）。[59] Arns, C.H. 和 Mecke, K.，《物理学杂志：凝聚态》17，S503（2005）。[60] K. Mecke 和 H. Wagner，《统计物理学杂志》64，843（1991）。[61] K. R. Mecke，《统计物理学杂志》102，1343（2001）。[62] D. Hug、G. Last 和 M. Schulte，《应用概率年刊》26，73（2016）。[63] D. Hug、M. A. Klatt、G. Last 和 M. Schulte，《布尔模型几何泛函的二阶分析》，载于*Tensor Valuations and Their Applications in Stochastic Geometry and Imaging*，E. B. V. Jensen 和 M. Kiderlen 编（施普林格国际出版，尚，2017），第339–383页。[64] D. Geyer、A. Morin 和 D. Bartolo，《自然材料》17，789（2018）。[65] R. Supekar、B. Song、A. Hastewell、G. P. T. Choi、A. Mietke 和 J. Dunkel，《美国国家科学院院刊》120，e2206994120（2023）。[66] W. J. Platt、G. W. Evans 和 S. L. Rathbun，《美国博物学家》131，491（1988）。[67] 太空望远镜科学研究所，哈勃超深场星表，VizieR在线数据目录，II/258（2004）。[68] M. A. Klatt，*Morphometry of random spatial structures in physics*，博士论文，弗里德里希-亚历山大-埃尔朗根-纽伦堡大学（2016）。[69] F. Ochsenbein，VizieR天文星表数据库（1996）。[70] F. Ochsenbein、P. Bauer 和 J. Marcout，《天文学与天体物理学增刊》143，23（2000），arXiv:astro- ph/0002122 [astro-ph]。[71] D. Pabst，高维单纯复形随机连接模型中欧拉示性数的中心极限定理，arXiv:2506.11918（2025）。

[72] C. D. Aliprantis 和 K. C. Border， *Infinite Dimensional Analysis: a Hitchhiker's Guide*，第 3 版（施普林格，2006）。[73] D. Hug 和 W. Weil， *Lectures on convex geometry*，数学研究生教材（施普林格，2020）。[74] V. Guillemin 和 A. Pollack， *Differential Topology*（普伦蒂斯-霍尔，恩格尔伍德克利夫斯，新泽西州，1974）。