arXiv:2611.27968v1 [math.SP] 20 Nov 2026

多边形法布尔–克拉恩不等式的证明

YUTIAN LI

摘要。我们证明，对每个整数 $n \geq 3$，在面积给定且边数不超过 n 的简单多边形中，正 n 边形在全等意义下唯一地使第一狄利克雷特征值达到最小。我们还得到了边数少于 n 时的最优线性修正项。在面积固定且底角和小于 π 的凸多边形中，等腰三角形在底边上满足狄利克雷条件、其余边上满足诺伊曼条件时，使第一特征值达到最小。通过比较共形面积密度的傅里叶变换，我们证明了这一不等式，以及整数阶数至少为二的逆谱矩所对应的上界。我们证明了单位面积正多边形特征值的一种插值对实参数（参数至少为四）严格对数凸。随后，我们推导出周期性凸多边形铺砌的尖锐六边形界，以及固定凸多边形的凸多边形划分的渐近界，并对边界交汇点给出显式修正项。

1. 引言

在给定面积的平面区域中，圆盘使第一狄利克雷特征值达到最小，这是由Faber [16] 与 Krahn [23] 证明的。对于具有 n条边的给定面积多边形，Pólya与Szegő在1951年猜想极小化子为正 n边形 [32, 第 158]页。施泰纳对称化在前两种情形下给出等边三角形和正方形 [31, 32]。对于五边或更多边的多边形，对称化可能会增加边数 [3]。

对于有界开区域$\Omega \subset \mathbb{R}^2$，令 $|\Omega|$ 表示其面积， $\lambda_j(\Omega)$表示 $-\Delta$的第 j个狄利克雷特征值，按重数以非递减次序计数。由瑞利原理，

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{0 \neq u \in H_0^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx}{\int_\Omega |u|^2 \, dx}.$$

乘积 $\Phi(\Omega) = |\Omega|\lambda_1(\Omega)$在相似变换下不变。简单多边形 P 是由一条简单多边形曲线围成的有界区域。一条边是 ∂P的极大直线段，且内角可以超过 π。对每个整数 $n \geq 3$，令 R_n 为正 n边形，并记$c_n = \Phi(R_n)$。

定理 1.1（多边形法布尔–克拉恩不等式）。 每个具有 k 条边的简单多边形 P都满足$\Phi(P) \geq c_k$，且等号成立当且仅当该多边形为正多边形。对于 $n \geq 4$，设 $\Delta_n = c_{n-1} - c_n$。若$3 \leq k \leq n$，则

$$\Phi(P) \geq c_n + (n-k)\Delta_n, \qquad \Delta_n > 0. \tag{1.1}$$

系数 Δ_n 是最优的。当且仅当多边形与 R_n 或R相似时，(1.1) 中的等号成立

$_{n-1}$。因此，在面积给定且边数不超过 n 的多边形中，正 n边形在全等意义下是唯一使特征值达到最小的多边形。

Faifman 和 Polterovich 证明了每个正多边形在其保面积仿射轨道上的极小性 [17], ，而当边数足够大时，Indrei 对一类明确的竞争者证明了极小性 [22]。对于固定的 $n \geq 5$，Bogosel 和 Bucur 表明，经认证的计算可以判定该猜想是否成立，或者可容许类闭包中的某个非正多边形与正多边形具有相同的值 [3, 定理 7。6]随后，他们通过验证计算证明了正五边形和六边形的局部极小性 [4]。Cheng、Gui、

日期：2026年11月20日。2020 数学主题分类。 主分类 35P15。次分类 49Q10、52A40。关键词与短语。 多边形法布尔–克拉恩不等式、Pólya–Szegő 猜想、Dirichlet 特征值、形状优化、混合边界条件、谱 zeta 函数、谱划分。

胡和李研究了所有边数足够多的凸多边形 [13]。Wang [34] 证明了对所有 $n \geq 5$成立的不等式，并给出了关于扭转刚度、索об列夫商和稳定性的结果。

对于具有一条指定边（称为底边）的多边形，记 λ_j^{DN} 为在底边上满足狄利克雷条件、在其余边上满足诺伊曼条件的第 j 个特征值，并按不减顺序计重数排列。对于 $0 < \alpha < \pi$，令 I_α 为高为 1、顶角为 α 的等腰三角形，并以其对边为底边，记

$$F(\alpha) = |I_\alpha| \lambda_1^{\mathrm{DN}}(I_\alpha).$$

将 R_n 的中心与其顶点连接，可将其划分为 n 个全等三角形。R_n 的正第一特征函数（即基态）由于反射对称性，在径向线段上法向导数为零。它在每个三角形上的限制为正函数，因此给出该三角形上的第一混合特征值。通过缩放，

$$c_n = nF(2\pi/n).$$

证明使用了三个要素。对于具有指定底边的凸多边形 Q，令 γ 为 π 减去与底边相邻的两个内角之和。对于三角形，γ 是其顶角。命题 2.1 表明，只要 $\gamma > 0$，$|Q|\lambda_1^{\mathrm{DN}}(Q) \geq F(\gamma)$。命题 4.1 表明，对于 $n \geq 4$，在 $2\pi/n$ 处的 F 的切线对其图像构成支撑，且对任意 $0 \leq \gamma < \pi$ 均成立。最后，引理 5.1 将任意简单多边形划分为凸单元，其底边位于原边界上。在每个单元中，γ 超过切线的横截距，且超出量与单元面积成正比。这三个结论为每个单元上的第一混合特征值给出了相同的下界。将狄利克雷试函数限制在各单元上，并对能量不等式求和，即可证明多边形界。

索利宁和扎尔加勒在证明固定面积和边数时正多边形使对数容量最小的过程中，也用到了三角形覆盖 [33]。我们的构造采用 Bogosel、Bucur 和 Fragalà 的划分；他们在比较扭转刚度时，将单元面积与角联系起来 [5, 6]。Wang 利用科勒–若班不等式，从扭转亏量推导出非凸多边形的特征值界 [34]。他在凸单元上进行的重排给出了混合第一特征值比较 [34, 引理 2.1]。第 2 节中的傅里叶比较还给出了 $\sum_{j\geq 1}(|Q|\lambda_j^{\mathrm{DN}}(Q))^{-r}$ 在任意整数 $r \geq 2$ 下的上界，且等号仅在相应的等腰三角形情形下成立（推论 6.7）。关于欧几里得空间中的傅里叶重排，参见 [27]。

我们证明，对于 $x \geq 4$，$x \mapsto \log[xF(2\pi/x)]$ 的二阶导数为正。结合三角形与正方形之间的比较，这就得到了 Dahne、Gómez-Serrano 和 Pech-Alberich [14]，在 Antunes 和弗雷塔斯 [1] 的单调性结果基础上证明的 c_j/c_{j+1} 单调性。对于一个划分，欧拉公式给出了平均边数的上界。在六处应用支撑线，可得单元特征值几何平均数的下界，该下界考虑了非六边形单元、不规则形状和不等面积。对于有界凸多边形的划分，还需计入外边界上的交接点项（定理 6.3 和 6.4）。

1.1. 主定理的证明。 定理 *1.1* 的证明。对于 $n = 3$，其结果是等边三角形 [31, 32] 的经典极小化性质。附录 A 给出了使用 Fragalà 和 Velichkov 的边界矩论证的证明 [18]。

在坐标中，I_α 的顶点为 (0，0)，(1，$\pm t$)，其中 $t = \tan(\alpha/2)$。试探函数$1 - x$ 给出 $0 < F(\alpha) \leq 6t$，因此 F 可连续延拓至 $F(0) = 0$。

现在固定 $n \geq 4$，并令 P 具有 $3 \leq k \leq n$ 条边。设 $a = 2\pi/n$ 和 $s = F'(a)$。根据命题 4.1，$F(a) - as < F(0) = 0$，因此 $s > F(a)/a > 0$。切线在角度 γ 处的值为 $s(\gamma - b)$，其中 $b = a - F(a)/s$ 是其横截距。特别地，$0 < b < a$。为界定 b，将 $I_{\pi/2}$ 映射到 I_α，映射为 $(x, Y) \mapsto (x, tY)$。这给出

$$\frac{F(\alpha)}{t} = \inf_{\substack{0 \neq v \in H^1(I_{\pi/2}) \\ v|_{x=1}=0}} \frac{\int_{I_{\pi/2}} (|v_x|^2 + t^{-2}|v_Y|^2)}{\int_{I_{\pi/2}} |v|^2}.$$

容许函数与 t 无关，并且每个商关于 t 都是非递增的。由于 $(d/d\alpha)\log t = 1/\sin\alpha$，我们得到

$$\sin a\, F'(a) \le F(a), \qquad b \le a - \sin a.$$

由于 $a \le \pi/2$，正弦函数的凹性给出 $\sin a \ge 2a/\pi > a/2$，因此 $(k-1)b < kb < na/2 = \pi$。令 $c = (2\pi - kb)/|P|$。

根据引理 5.1，P 在不计单元边界的意义下被划分为凸多边形 V_j。每一个都有一条底边，它是 V_j 的一整条边，并且位于 ∂P 上。记 γ_j 为 π 减去其两个底角之和，则有 $\gamma_j \ge b + c|V_j| > 0$。因此

$$|V_j|\lambda_1^{\mathrm{DN}}(V_j) \ge F(\gamma_j) \ge s(\gamma_j - b) \ge sc|V_j|. \tag{1.2}$$

每个 $u \in H_0^1(P)$ 在每个 V_j 的底边上限制为一个具有零迹的函数。将所得能量不等式求和，得到 $\lambda_1(P) \ge sc$，因此

$$\Phi(P) \ge s(2\pi - kb) = nF(a) + (n-k)sb. \tag{1.3}$$

记 $d_n = sb = aF\prime(a) - F(a) > 0$。特别地，当 $k = n \ge 4$ 时，$\Phi(P) \ge c_n$。

等号成立。若 $\Phi(P) = c_n$，则由 (1.3) 可得 $k = n$。基态在每个单元上的质量均为正，因此总和取等号意味着每个单元上的 (1.2) 都取等号。基态在该处的限制函数使混合瑞利商达到最小值。切线仅在 a 处与图像相切，因此 $\gamma_j = a$；命题 2.1 中的等号成立又意味着 V_j 为等腰三角形。每个三角形的面积均为 $(a-b)/c = |P|/n$，所以恰有 n 个全等三角形。

除有限个端点外，底边覆盖 ∂P。事实上，若一条诺伊曼边沿着一段边界，则正的混合基态会因 P 上的狄利克雷条件而在该处为零。对称边作偶反射并应用强最大值原理即可排除此情况。因此，P 的每条边都包含一条底边，且每条底边都位于单独一条边上。每种边各有 n 条，因此底边就是完整的边，且所有边长度相等。在每个顶点处，两条相邻三角形占据互不相交的扇形区域，其角度之和为 $\pi - a$。这些下界之和为 $(n-2)\pi$，恰为 P 的内角和，因此每个角都为 $\pi - a$。由此，P 是正多边形。反过来，正多边形能够达到此下界。

最优系数。将 $F(2\pi/i)$ 与其在 $2\pi/j$ 处切线给出的下界进行比较，再乘以 i。命题 4.1 表明，对于 $j \ge 4$，

$$c_i > c_j + (j-i)d_j \qquad (i \ge 3,\ i \ne j).$$

取 $i = j-1$ 和 $i = j+1$ 得到 $\Delta_j > d_j > \Delta_{j+1}$。特别地，对于每个满足 $j \ge 4$ 的 Δ_j，其值均为正。固定边数比较和 $c_k - c_n = \sum_{j=k+1}^{n} \Delta_j$ 现在证明了 (1.1)。若 $k \le n-2$，则总和严格大于 $(n-k)\Delta_n$。对于 $k = n$ 和 $k = n-1$，当且仅当多边形是具有相应边数的正多边形时，等号成立。$k = n-1$ 的情形表明该系数是最优的。□

2. 混合边界问题的傅里叶比较

我们在固定的带状区域上写出混合瑞利商，并通过傅里叶变换比较由此得到的面积密度。指数映射 $(x,\ t) \mapsto e^{x+it}$ 将带状区域 $S = \mathbb{R} \times (0,\ \pi)$ 映射到上半平面。我们将 S 上的密度沿 $t = 0$ 偶延拓，然后周期延拓到圆柱 $\mathcal{C} = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ 上。对于 $\mathcal{C}$ 上的可积密度 p，我们使用傅里叶变换

$$\widehat{p}(\xi, k) = \int_{\mathcal{C}} e^{i(\xi x + kt)} p(x,t)\, d\mu, \qquad d\mu = \frac{dx\, dt}{2\pi}, \qquad (\xi, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}.$$

命题 2.1（与等腰三角形的比较）。设 Q 为一个有界凸多边形，其中一条边指定为底边。取 $H^1(Q)$ 中在底边上具有零迹的函数空间，因此其他边满足自然的诺伊曼条件。设底边端点处的角分别为 πa 和 πb，且 a、$b > 0$ 和 $C = a + b < 1$。则

$$|Q|\lambda_1^{\mathrm{DN}}(Q) \ge F(\pi(1-C)), \tag{2.1}$$

等号恰好在 Q 与 $I_{\pi(1-C)}$ 相似且底边对应时成立。设 p 和 p_* 是由共形映射得到的 Q 与 $I_{\pi(1-C)}$上面积的归一化拉回，并偶延拓至 $\mathcal{C}$，

定义于第 *2.1* 节。它们是关于 $d\mu$的概率密度。对于该三角形，顶点是上半平面坐标中1 的像。于是在每一频率处， $|\widehat{p}(\xi,k)| \le \widehat{p}_*(\xi,k)$ 。除非 Q 与 $I_{\pi(1-C)}$ 相似且底边对应，否则该不等式在偏离$(0,0)$ 处是严格的。

我们首先将 Q 与具有相同底角的三角形进行比较。对于 Q ，其密度是三角形密度与一个概率测度的卷积。随后，我们比较这两个三角形密度的傅里叶变换。下面的引理将这些变换的界转化为一个特征值不等式。

引理 2.2（条带上的傅里叶比较）。 设 p 和 q 是 C 上非零的非负可积密度，并且关于角变量为偶函数。在 $u \in H^1(S)$ 的空间上，在 $t=\pi$上具有零迹，令

$$E(u)=\int_S |\nabla u|^2\,dx\,dt, \qquad M_p(u)=\int_S p|u|^2\,\frac{dx\,dt}{\pi}.$$

用 q 代替 p，按照相同公式定义 M_q 。假设两个质量型关于范数 $E^{1/2}$连续。在此空间上定义

$$\Lambda(p)=\inf_{M_p(u)>0}\frac{E(u)}{M_p(u)}.$$

以相同方式定义 $\Lambda(q)$ 。如果 $\widehat{q}(\xi、k)$ 在每个频率处 $\ge |\widehat{p}(\xi、k)|$，那么 $\Lambda(p) \ge \Lambda(q)$。如果 $\Lambda(p)$ 的下确界也能取到，并且

$$\widehat{q}(\xi,0) > |\widehat{p}(\xi,0)| \qquad (\xi \neq 0),$$

那么特征值不等式是严格的。

证明。 将 u 按基 $\sqrt{2}\cos((m+\frac12)t)$， $m=0,-1$，……展开，该基关于 dt/π正交归一。令 U_m为系数 $u_m(x)$ 关于 x 的酉傅里叶变换，采用约定：对于可积函数， $U_m(\xi)=(2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}u_m(x)\,dx$ 。由 Parseval恒等式，能量是对角的，每个模态对应乘子 $\xi^2+(m+\frac12)^2$和测度 $\pi\,d\xi$。对于角指标 m，$n\ge 0$及实频率 ξ， η，将两个余弦相乘，得到 $U_m(\xi)U_n(\eta)$ 在 $M_p(u)$ 中的系数为_____

$$\frac{\widehat{p}(\xi-\eta,m-n)+\widehat{p}(\xi-\eta,m+n+1)}{2\pi}.$$

将系数 U_m 替换为 $|U_m|$，得到 v。这保留了 E 以及 $t=\pi$上的零迹。由三角不等式和 $\widehat{p}$ 上的界可得 $M_p(u) \le M_q(v)$，对于具有有界水平频率支撑的有限个角模态成立。由能量收敛可知，同一不等式对所有容许函数均成立，因为取模在能量范数下连续，且质量型连续。取下确界得到 $\Lambda(p)\ge\Lambda(q)$。

为保证严格性，选择一个指标 $m\ge 0$ ，使得 $U_m\not\equiv 0$，以及一个具有正测度的有界可测集 B，在该集合上 $|U_m|$ 被一个正的常数从下方界定。除去因子$1/(2\pi)$后，两个角指标都等于 m的项贡献为

$$\iint_{B\times B}\left[\widehat{q}(\xi-\eta,0)-|\widehat{p}(\xi-\eta,0)|\right]|U_m(\xi)U_m(\eta)|\,d\xi\,d\eta>0.$$

被积函数在对角线之外为正，而对角线的测度为零。取实部并应用三角不等式后，对 $M_q(v)-M_p(u)$ 的每一项剩余贡献均为非负。因此，对于在模态 m 中包含 B 的每个截断，该严格界均成立，并且在取极限时也成立。将该界应用于 $\Lambda(p)$ 的一个极小化子，得到 $\Lambda(q)<\Lambda(p)$。□

2.1. **从带状区域到多边形的共形映射**。 命题 *2.1* 的证明。 将上半平面共形映射到 Q，使 0、∞ 分别映到角为 πa、πb 的端点，并将负实轴映到底边。令 r_1、……、$r_N>0$ 为其余顶点的原像，并令 $\pi\delta_j$ 为 r_j像处的外角。各边都是极大的直线段，因此 $\delta_j>0$，由内角和可得 $\sum_j \delta_j = C$。根据施瓦茨–克里斯托费尔公式， [15], 导数正比于 $z^{a-1}\prod_j (z-r_j)^{-\delta_j}$。各指数由用幂映射拉直每个角得到。将导数除以这些幂的乘积后，其边界

论证的辐角模 π。反射以及无穷远处的性质使商可全纯延拓到球面上，因此它是常数。

对于 $(x,\ t)\in S$ 设 $z=e^{x+it}$。从 S 到 Q 的复合映射的雅可比行列式与 $|z|^{2a}\prod_j|z-r_j|^{-2\delta_j}$ 成正比。将雅可比行列式乘以 $\pi/|Q|$，并将其偶延拓至 $\mathcal{C}$，即可得到 $d\mu$ 的概率密度 p。狄利克雷积分的共形不变性给出

$$|Q|\lambda_1^{\mathrm{DN}}(Q)=\inf_{\substack{0\neq u\in H^1(S)\\ u(\cdot,\pi)=0}}\frac{\int_S|\nabla u|^2\,dx\,dt}{\int_S p|u|^2\,dx\,dt/\pi}. \tag{2.2}$$

t 中的庞加莱不等式表明，在 $t=\pi$ 上具有零迹的有限能量函数与式（2.2）下确界中的函数相同，另加零函数。该密度在两个无穷远端都呈指数衰减。在对应于 r_j 的顶点的原像附近，它有一个阶为 $-2\delta_j>-2$ 的奇点。因此，对于某个 $\epsilon>0$，有 $p\in L^{1+\epsilon}$；由 Hölder 不等式和索об列夫嵌入可知，质量关于能量范数连续。在底边端点处使用对数截断函数，其能量趋于零，因此端点不施加额外的迹条件。有界多边形上的紧索об列夫嵌入保证极小化子的存在。

2.2. 面积密度的卷积。 记 $p_{a,b}$ 为底角为 $\pi a,\pi b$、顶点为 1 的像的三角形的密度。将 $*$ 记作 $\mathcal{C}$ 上的卷积，我们证明存在某个概率测度 ν，使得

$$p=p_{a,b}*\nu. \tag{2.3}$$

令 Γ 表示欧拉伽马函数。将其积分表示应用为

$$\Gamma(\delta_j)|z-r_j|^{-2\delta_j}=\int_0^\infty s_j^{\delta_j-1}e^{-s_j|z-r_j|^2}\,ds_j.$$

换元为总和 $\sum_j s_j$ 和比例 $t_j=s_j/\sum_\ell s_\ell$。对总和积分后，可将 $\prod_j|z-r_j|^{-2\delta_j}$ 表示为单纯形 $\{t_j\ge 0,\ \sum_j t_j=1\}$ 上 $(\sum_j t_j|z-r_j|^2)^{-C}$ 的平均值。前 $N-1$ 个坐标上的概率密度为 $\Gamma(C)\prod_j t_j^{\delta_j-1}/\prod_j\Gamma(\delta_j)$。若 $N=1$，则使用位于 $t_1=1$ 的点质量。令 $w_0=\sum_j t_j r_j$ 和 $h=(\sum_j t_j|r_j-w_0|^2)^{1/2}$。于是 $\sum_j t_j|z-r_j|^2=|z-w_0|^2+h^2$。

对于 $h>0$，对 $|z|^{-2C}$ 的平移像进行积分可得

$$(|z-w_0|^2+h^2)^{-C}=\frac{1-C}{\pi}\int_{\mathbb{C}}|z-w|^{-2C}\frac{h^{2-2C}}{(|w-w_0|^2+h^2)^{2-2C}}\,dA(w). \tag{2.4}$$

这里，dA 表示平面面积。通过平移和缩放，不妨取 $w_0=0$ 和 $h=1$。立体投影将单位球面上的均匀概率分布映射为 $d\omega(w)=dA(w)/[\pi(1+|w|^2)^2]$。对应于 z 和 w 的两点之间的弦长的一半为 $d(z,\ w)=|z-w|/\sqrt{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}$。由旋转不变性，$\int d(z,\ w)^{-2C}\,d\omega(w)$ 与 z 无关。在 $z=0$ 处，极坐标积分表明，$d(0,\ w)^2=|w|^2/(1+|w|^2)$ 在 $[0,1]$ 上服从均匀分布，因此该积分为 $1/(1-C)$。这就得到（2.4）。对于 $h=0$，以 w_0 处的点质量作为平移像的测度。

对于 $w\neq 0$，因子 $|z|^{2a}|z-w|^{-2C}$ 是三角形归一化前密度的 $|w|^{-2b}$ 倍，在 $\mathcal{C}$ 上平移 $(\log|w|,\ \arg w)$。Tonelli定理以及面积有限，使我们能够对这些平移像的权重进行归一化，从而得到 (2.3)。如果 $N>1$，那么 $h>0$ 位于单纯形内部，并且 (2.4) 中平移像的测度在整个平面上都有正密度。因此，ν 在 $\mathcal{C}$ 上的每个非空开集都赋予正质量。其傅里叶变换是 $e^{i(\xi x+kt)}$ 关于 ν 的积分。在非零频率处，该函数在 ν 的支撑集上取不同值，因此三角不等式不可能取等号，且 $|\widehat{\nu}(\xi,k)|<1$。

2.3. 三角形的变换。 令 $q=1-C$，$u=(|k|+i\xi)/2$ 和 $p_*=p_{C/2,\ C/2}$。根据下面的伽马函数比值，为 $A>0$ 定义 $r_u(A)$。则

$$r_u(A)=\frac{\Gamma(A+u)\Gamma(A+q)}{\Gamma(A)\Gamma(A+q+u)},\qquad \widehat{p}_{a,b}(\xi,k)=r_u(a)r_{\bar{u}}(b). \tag{2.5}$$

三角形密度与 $e^{(a-b)x}(\cosh x-\cos t)^{-C}$ 成正比。对于实数 $A>B$，贝塔积分给出

$$(A-B)^{-C}=\frac{\sin(\pi C)}{\pi}\int_A^\infty \frac{(v-A)^{-C}}{v-B}\,dv.$$

取 $A=\cosh x,\quad B=\cos t,\quad v=\cosh w$。角因子 $\sinh w/(\cosh w-\cos t)$ 是半径为 e^{-w} 的泊松核，其第 k 个傅里叶系数为 $e^{-|k|w}$。因此，未归一化的变换正比于

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{|x|}^\infty \frac{e^{(a-b+i\xi)x-|k|w}}{(\cosh w-\cosh x)^C}\,dw\,dx.$$

令 $r=(w+x)/2$ 且 $s=(w-x)/2$，从而积分区域为正象限，且 $\cosh w-\cosh x=2\sinh r\sinh s$。记 B 为贝塔函数，则代换 e^{-2r} 与 e^{-2s} 给出 $\mathrm{B}(b+\bar u,\ q)\mathrm{B}(a+u,\ q)$ 乘以一个与频率无关的常数。该被积函数的模被零频率被积函数所控制，而后者的积分有限，因为 $a,\ b,\ q>0$。除以该零频率值即证明 (2.5)。特别地，$\widehat{p}_*=|r_u(C/2)|^2>0$。

Γ 的欧拉乘积为

$$\log|r_u(A)|=-\int_0^\infty e^{-Av}\frac{(1-e^{-qv})(1-\Re e^{-uv})}{v(1-e^{-v})}\,dv.$$

为验证该积分，将 $(1-e^{-v})^{-1}$ 展开为几何级数，并利用实部为正时的 $\int_0^\infty (e^{-Av}-e^{-Bv})\,dv/v=\log|B/A|$ A,B。将表达式在 $A=a,b$ 处的值从表达式在 $A=C/2$ 处的两倍中减去。由于 $e^{-av}+e^{-bv}-2e^{-Cv/2}=(e^{-av/2}-e^{-bv/2})^2$，，得到

$$\log\frac{\widehat{p}_*(\xi,k)}{|\widehat{p}_{a,b}(\xi,k)|}=\int_0^\infty (e^{-av/2}-e^{-bv/2})^2\frac{(1-e^{-qv})(1-e^{-|k|v/2}\cos(\xi v/2))}{v(1-e^{-v})}\,dv. \tag{2.6}$$

若 $a\neq b$，则在每个非零频率处，被积函数在一个正测度集合上为正。结合 (2.3) 中的 $\widehat{p}=\widehat{p}_{a,b}\widehat{\nu}$，即可证明傅里叶界；当 $N>1$ 或 $a\neq b$时，在非零频率处严格成立。

为完成证明，将引理 2.2 应用于 p 和 p_*。由 (2.2) 后的论证可知，质量型是连续的，且 Q 的下确界可以达到。当 Q 与具有对应底边的等腰三角形不相似时，对每个 $\xi\neq 0$，傅里叶不等式在 (ξ,0) 处严格成立。因此，该引理推出 (2.1) 中的不等式严格成立。具有对应底边的相似形给出等号。□

3. Convexity for small apex angles

命题 3.1（小顶角）。设 $J=\lambda_1(\mathbb{D})$，其中 $\mathbb{D}$ 为单位圆盘。对于 $0<r\le 1/7$，

$$F''(2\pi r)>\frac{11Jr^2}{4\pi},\qquad F(2\pi r)\le\frac{16}{15}\pi Jr.$$

证明。我们将圆形扇区映射到等腰三角形，并分别估计其像的面积与第一混合特征值。

3.1. 从扇区出发的共形映射。我们首先对共形映射使用实参数 $0<s<1/2$。随后，r 将是由复参数 σ构成的圆盘的中心。在扇区$0<\arg z<2\pi s,\ |z|<1$上，取 $(1-z^{1/s})^{-2s}$ 在零点处为零的原函数。使用带有 $0<\arg z<2\pi s$（对 $z^{1/s}$）的分支，并使 $1-z^{1/s}$ 的解析幂在零点处等于一。边界半径映射为等长的直线段。在圆弧 $z=e^{i\theta}$上，$\arg(1-e^{i\theta/s})=\theta/(2s)-\pi/2$ 对 $0<\theta<2\pi s$成立，因此像切线具有常辐角$\pi/2+\pi s$。端点奇点是可积的。该映射使边界绕三角形一周，因此辐角原理给出一个共形双射。该映射以及 (3.2) 中的权也出现在 Wang 的附录 S1.1 [34]中。

沿半径积分得到直角边长度 $s\,\mathrm{B}(s,1-2s)$。面积为该长度的平方乘以 $\sin(2\pi s)$ 的一半。利用伽马反射恒等式，可将其写为 $\pi sZ(s)$，其中 Z 如下。

对伽马函数取对数，并令 $\zeta(m)=\sum_{j\ge 1} j^{-m}$ 为 $m>1$，得到展开

$$Z(s)=\frac{\Gamma(1+s)^2\Gamma(1-2s)}{\Gamma(1-s)^2\Gamma(1+2s)},\qquad \log Z(s)=\sum_{\substack{m\ge 3\\ m\ \text{odd}}}\frac{2^{m+1}-4}{m}\zeta(m)s^m. \tag{3.1}$$

令 $\tau=-\log|z|$ and $\varphi=\arg(z)/s$。下文中的各形式均关于 $d\tau\,d\varphi/(2\pi)$ 在 $(0,\infty)\times(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ 上积分，并取关于第一个变量线性的形式。由于关于角平分线的反射使混合基态的两个半径具有相同的迹，因此我们使用关于 φ 的周期函数。反过来，沿着识别后的半径切割周期测试函数，就得到一个适用于混合问题且商值相同的函数。顶点的容量为零。对于下文的能量 E_s 和质量 m_s，记 $E_s(u)=E_s(u,u)$。令 $L(s)$ 表示 $E_s(u)/m_s(u,u)$ 在有限能量且在 $\tau=0$ 处为零迹的非零周期函数上的最小值。由共形不变性和面积公式可得

$$\begin{aligned} E_s(u,v)&=\int (u_\tau\overline{v_\tau}+s^{-2}u_\varphi\overline{v_\varphi}),\\ m_s(u,v)&=\int e^{-2\tau}|1-e^{-\tau/s+i\varphi}|^{-4s}u\bar v,\\ F(2\pi s)&=\pi s Z(s)L(s), \end{aligned} \tag{3.2}$$

对每个固定的 $r>0$，在这个空间上使用范数 $E_r^{1/2}$，并将零函数也包括在内。零迹与柯西–施瓦茨不等式给出 $\|u(\tau,\cdot)\|_2^2\le \tau E_r(u)$，其中角度测度为 $d\varphi/(2\pi)$。这个估计控制每个有限圆柱上的收敛，并证明其完备性。记

$$\frac{F(2\pi r)}{\pi}=JrZ(r)+rZ(r)(L(r)-J).$$

我们将下面第一项的二阶导数控制为 $54Jr^2$，并将上面余项的二阶导数的绝对值控制为 $43Jr^2$。

3.2. 圆盘基态与径向谱隙。令 $m_0(u,\ v)=\int e^{-2\tau}u\bar v$。有界圆柱上的 Rellich 紧性以及无穷远处的切片估计，为该质量给出了紧性。在代换 $\rho=e^{-\tau}$ 下，对于与 φ 无关的函数，商 $E_r(u)/m_0(u,\ u)$ 是单位圆盘上的径向狄利克雷商。由于旋转不变性和单纯性，圆盘基态是径向的。用 τ-坐标表示该基态为 B，并通过 $m_0(B,\ B)=1$ 对其进行归一化。试探函数 $1-e^{-2\tau}$ 的能量为 1，质量为 $1/6$，因此 $0<J\le 6$。径向方程为 $B''=-Je^{-2\tau}B$。由于 B 为正且凹的，并且 B' 平方可积，所以 $B'(\tau)\to 0$ 当 $\tau\to\infty$ 时成立。将方程乘以 $2B'$ 并积分。由迹以及界 $|B(\tau)|^2\le \tau E_r(B)$，边界项 $e^{-2\tau}B^2$ 在两端均消失。这给出

$$B'(0)^2=2J,\qquad 0\le B(\tau)\le\sqrt{2J}\,\tau. \tag{3.3}$$

取平均　在径向方程中，对圆上的任意测试函数取平均，得到 $E_r(B,\ v)=Jm_0(B,\ v)$　.

令 V为满足 $m_0(v,\ B)=0$的函数子空间。由极小极大原理和零延拓，第二个径向特征值至少为圆盘的第二个狄利克雷特征值，而后者又至少为 $(-1,\ 1)^2$的第二个狄利克雷特征值。根据分离变量法，后者为 $5\pi^2/4$。因此，对于径向$v\in V$，

$$m_0(v,v)\le\frac{4}{5\pi^2}E_r(v).$$

3.3. 质量权重的傅里叶估计。固定 $0<r\le 1/7$。对于复参数$|\sigma-r|\le r/3$，令 $c=3/4$，$x=c\tau/r$ 和 $p=|\sigma|$。于是 $p\le r/c$。商 r/σ 位于一个以 $3/4$ 和 $3/2$为实端点的圆盘内。在此圆盘上，实部至少为 c，且平方的实部至少为 c^2。事实上，当实部为 y时，虚部平方至多为 $(y-3/4)(3/2-y)$，而这又至多为 $y^2-(3/4)^2$。在 (3.2) 的角向项中使用 σ^{-2}，定义 E_σ。将 $e^{-2\tau}$ 之后的因子替换为

$$W_\sigma=(1-e^{-\tau/\sigma+i\varphi})^{-2\sigma}(1-e^{-\tau/\sigma-i\varphi})^{-2\sigma}.$$

利用 $\log(1-w)$ 的幂级数 $|w|<1$定义这些因子。由于 $R(1/\sigma)\ge c/r$，二项级数给出 $|W_\sigma|\le(1-e^{-x})^{-4p}$，其中 $4p\le 16/21$。对于有界

能量的测试函数，切片估计进而将 $0<\tau<\epsilon$ 上的质量限制为 $O_r(\epsilon^{26/21})$，并将 $\tau>R$上的质量限制为 $O_r((1+R)e^{-2R})$。在每个截断圆柱上，这些级数都局部一致收敛。综合这些界，可得 m_σ 对算子范数的全纯依赖。对于实参数，截断圆柱上的 Rellich紧性以及端部处的相同界给出质量嵌入的紧性。

令$\langle\cdot\rangle$ 表示在 φ 上关于测度 $d\varphi/(2\pi)$ 的平均值，并令$\mathcal{V}=\langle|W_\sigma-\langle W_\sigma\rangle|^2\rangle$。二项式展开给出

$$\begin{aligned}|W_\sigma-1|&\le 4p\sum_{n\ge1}e^{-nx},\\ |\langle W_\sigma\rangle-1|&\le 4p^2\sum_{n\ge1}e^{-2nx},\\ \mathcal{V}&\le 16p^2\left[\tfrac12 e^{-2x}+\sum_{n\ge2}e^{-2nx}\right].\end{aligned}\tag{3.4}$$

二项式系数为 $a_0(v)=1$和 $a_n(v)=v(v+1)\cdots(v+n-1)/n!$，其中 $n\ge1$。它们满足 $|a_n(v)|\le a_n(|v|)\le|v|$，若 $n\ge1$ 且 $|v|\le1$。为界定乘积的模，将两个因子都替换为 $(1-e^{-x})^{-2p}$。它们的乘积的系数为 $a_n(4p)$，从而得到第一个界。对于平均值，只有两个因子中幂次相等的项会有贡献，因此第二个界中的系数为 $a_n(2p)^2$。对于方差，令 $\rho=e^{-x}$且 $H_\rho=|1-\rho e^{i\varphi}|^{-4p}$。$W_\sigma$ 的每个傅里叶系数的模都不超过 H_ρ中对应的非负系数。由 Parseval恒等式可得

$$\mathcal{V}\le\langle H_\rho^2\rangle-\langle H_\rho\rangle^2,\qquad \langle H_\rho^2\rangle=\sum_{j\ge0}a_j(4p)^2\rho^{2j},\qquad \langle H_\rho\rangle=\sum_{j\ge0}a_j(2p)^2\rho^{2j}.$$

ρ^2 在差值中的系数为（$4p$）$^2-2$（$2p$）$^2=8p^2$。对于满足 $j\ge2$ 的每个幂 ρ^{2j}，其系数至多为（$4p$）^{2}。这证明了（3.4）的最后一行。

3.4. 质量扰动的界。 设 $\Delta=m_\sigma-m_0$，并分别取关于 $E_r^{1/2}$ 的算子范数和对偶范数。对于 $j>1$ 和 $t\ge0$，设 $S_j(t)=\sum_{n\ge1}(n+t)^{-j}$。由凸性，$(n+t)^{-j}$受$(x+t)^{-j}$在 $[n-\frac12,n+\frac12]$上的积分所界。对 $n\ge2$ 求和可得

$$S_j(t)\le U_j(t):=(1+t)^{-j}+\frac{(3/2+t)^{1-j}}{j-1}.$$

固定 r，将 $D(r)$ 和 $H(r)$ 分别简记为 D 和 H，其中

$$D(r)=\frac{2}{c^5}S_3(r/c),\qquad H(r)=\frac{8}{c^5}\left[S_3(2r/c)-\tfrac12(1+2r/c)^{-3}\right].$$

Then

$$\begin{aligned}\|\Delta\|&\le 4r^3c^{-3}S_2(2r/c),\qquad |\Delta(B,B)|\le Jr^5D,\\ \max\{\|\Delta(B,\cdot)\|^2,\|\Delta(\cdot,B)\|^2\}&\le Jr^7[H+(16/3)r^2D].\end{aligned}\tag{3.5}$$

对于算子界，应用（3.4）的第一行，并在两个自变量中使用切片不等式，然后对 $\tau e^{-(2+nc/r)\tau}$ 积分。对于两个径向函数，（3.4）的第二行表明，权重差的绝对值受测度的密度所界

$$d\omega=4p^2e^{-2\tau}\sum_{n\ge1}e^{-2nc\tau/r}\,d\tau.$$

由 (3.3)，$\int B^2d\omega\le Jr^5D$。对于径向测试函数 v，切片界给出

$$\int|v|^2d\omega\le r^4c^{-4}S_2(r/c)E_r(v)\le\frac{16}{3}r^4E_r(v),$$

由于 $c^{-4}U_2(0)=1280/243<16/3$。对 $d\omega$ 应用柯西–施瓦茨不等式，可将径向测试函数上的平方对偶范数界定为 $(16/3)Jr^9D$。对于角平均值为零的测试函数，角向庞加莱不等式给出 $\int|v|^2\le r^2E_r(v)$。在圆周上应用柯西–施瓦茨不等式，减去 W_σ 的均值后，可将平方对偶范数界定为 $2Jr^2\int_0^\infty\tau^2e^{-4\tau}\mathcal{V}\,d\tau\le Jr^7H$。这些平方界

可以相加，因为这两个子空间关于 E_r 正交。这些积分用到 $\int_0^\infty \tau^{j} e^{-d\tau}\,d\tau = j!/d^{j+1}$，其中 $j \ge 0$ 与 $d > 0$ 为整数。

3.5. 二阶导数估计。 对于 $|\lambda - J| \le 1/4$，记作 $\Lambda = 25/4$，于是 $|\lambda| \le \Lambda$。在 V 上，径向谱隙和角向庞加莱不等式给出 $E_\sigma - \lambda m_0$ 实部的下界 $\min(1 - 4\Lambda/(5\pi^2)\; c^2 - \Lambda r^2) E_r$。(3.5) 中关于 $\|\Delta\|$ 的界逐项随 r 项增大。在 $r = 1/7$ 处，$U_2(8/21) < 17/16$。利用这个关于 $|\lambda|\|\Delta\|$ 的上界，对于 $v \in V$，

$$\Re (E_\sigma - \lambda m_\sigma)(v,v) \ge \left[\frac{341}{784} - \frac{1700}{9261}\right] E_r(v) > \frac{1}{4} E_r(v) \qquad (v \neq 0). \tag{3.6}$$

令 $\mathcal{A}:\; V \to V^{*}$ 为由 $E_\sigma - \lambda m_\sigma$ 诱导在 V 上的算子，其中 V^{*} 是它的连续共轭对偶。由 (3.6) 和复拉克斯–米尔格拉姆定理，$\|\mathcal{A}^{-1}\| \le 4$。其逆关于 σ, λ 全纯，这可由局部纽曼级数得到。

由 (3.6)，具有 $|\lambda - J| \le 1/4$ 的特征函数沿 B 有非零分量。将其归一化为 $B + v$，使得 $v \in V$。在 V 上测试，得到 $v = \lambda \mathcal{A}^{-1} \Delta(B, \cdot)$。以 B 为测试函数，得到

$$\lambda [1 + \Delta(B,B) + \Delta(v,B)] - J = 0.$$

由 (3.5)，其左侧与 $\lambda - J$ 的差至多为 $J r^5 Q(r)$，其中

$$Q(r) = \Lambda D + 4\Lambda^2 \{ r^2 H + (16/3) r^4 D \}.$$

乘积 $r^2 Q(r)$ 对 $0 < r \le 1/7$ 单调递增。事实上，当 $n \ge 1$ 时，$r^2/(n + r/c)^3$ 在此区间上递增；而 $r^4/(n + 2r/c)^3$ 对所有 $r > 0$ 均递增。H 中的所有级数系数均为正。利用 U_3 的界，得到

$$D(1/7) \le \frac{2}{c^5} U_3(4/21) < \frac{13}{2}, \qquad H(1/7) \le \frac{8}{c^5}\left[U_3(8/21) - \tfrac{1}{2}(21/29)^3\right] < 12.$$

因此，$49 r^2 Q(r) \le Q(1/7) < \Lambda(13/2) + 4\Lambda^2 (12/49 + 35/49^2) < 82$，且 $J r^5 Q(r) < 6 \cdot 82 / 7^5 < 1/4$。由鲁歇定理，$|\lambda - J| = 1/4$ 内有一个根（按重数计）。记该根为 $\mathcal{L}(\sigma)$。该根是单根，因此关于 σ 全纯，且 $|\mathcal{L}(\sigma) - J| \le J r^5 Q(r)$。

对于圆盘内的实数 σ，由唯一性可知根为实数，而 V 和 B 上的方程给出一个特征函数。若第二特征值不大于 $J + 1/4$，则前两个特征函数张成的空间会与 V 相交于一个非零向量，且该向量满足 $(E_\sigma - (J + 1/4) m_\sigma)(v,\; v) \le 0$。这与 (3.6) 矛盾。因此，对于圆盘内的实数 σ，$\mathcal{L}(\sigma) = L(\sigma)$。

(3.1) 中的正系数 $\zeta(3) < 5/4$ 和 $|\sigma| \le 4/21$ 给出

$$|\log Z(\sigma)| \le \frac{20}{3} \frac{|\sigma|^3}{1 - 4|\sigma|^2} < \frac{1}{16}, \qquad |Z(\sigma)| < \frac{16}{15}.$$

在 $|\sigma - r| \le r/3$ 上，全纯余项 $\sigma Z(\sigma)(\mathcal{L}(\sigma) - J)$ 的模至多为 $(4r/3)(16/15) J r^5 Q(r)$。由柯西估计可得

$$\left|[r Z(r)(L(r) - J)]''\right| \le \frac{2}{(r/3)^2} \frac{4r}{3} \frac{16}{15} J r^5 Q(r) < 43 J r^2.$$

Z 的三次系数为 $4\zeta(3)$，且其所有系数均非负。因此 $J[r Z(r)]'' \ge 48 \zeta(3) J r^2 > 54 J r^2$，因为 $\zeta(3) > 9/8$。结合两个二阶导数估计可得 $[r Z(r) L(r)]'' > 11 J r^2$。由 (3.2) 和链式法则可得关于 $F_\nu(2\pi r)$ 的所述上界。对于上界，$|1 - e^{-\tau/r + i\varphi}|^{-4r}$ 的圆周平均等于 $\sum_{n \ge 0} a_n (2r)^2 e^{-2n\tau/r}$，其值不小于常数项 1。用径向态 B 作试验函数，得到 $L(r) \le J$。现在在 (3.2) 中使用 $Z(r) < 16/15$。$\square$

4. 三角形特征值的支撑线

命题 4.1 (支撑线不等式)。函数 F 在 $(0, \pi/2]$ 上具有严格凸性。对于每个 $0 < a \le \pi/2$，其在 a 处的切线在 $F(\alpha)$ 的每个 $\alpha \in [0, \pi)$ 点（a 除外）都严格位于其下方。特别地，$a F_\prime(a) > F(a) > 0$。

4.1. 固定三角形和试探函数。 证明。 我们首先证明顶角不超过 $\pi/2$ 时的严格凸性。然后，对于钝角，我们将 F 与其在 $\pi/2$ 处的切线进行比较；这将支撑线不等式扩展到整个区间。

对于 $0<\alpha<\pi$，令 $t=\tan(\alpha/2)$ 和 $z=t^{-2}$。三角形 I_α 的顶点为 $(0,\ 0)$、$(1,\ \pm t)$，面积为 t，并且关于水平轴具有偶对称的基态。映射 $(x,\ y)\mapsto(x,\ ty)$ 将 $D=\{(x,\ y):\ 0<y<x<1\}$ 映到其上半部分。在 $H^1(D)$ 上令 $x=1$ 为零迹，定义

$$A(u,v)=\int_D u_x\overline{v_x}\,d\mu,\qquad B(u,v)=\int_D u_y\overline{v_y}\,d\mu,\qquad m(u,v)=\int_D u\bar v\,d\mu,\qquad d\mu=2\,dx\,dy.$$

记 $A(v)=A(v,\ v)$、$B(v)=B(v,\ v)$ 和 $\|v\|_2^2=m(v,\ v)$。本节中的正交性针对 m。令 $G(z)$ 为能量 $Q_z=A+zB$ 和质量 m 对应的第一特征值。对瑞利商作变量代换可得

$$F(\alpha)=tG(z).$$

瑞利原理使 G 递增且凹。对于 $z>0$，基态是单重的，其特征值是解析的。事实上，在固定的正质量平移之后，逆算子关于 z 在能量范数下由纽曼级数局部解析地依赖。其紧性以及围绕孤立特征值的围道给出了投影到一维特征子空间上的解析投影。

在 $z=1$，沿对角线进行偶反射，将问题扩展到单位正方形上的对称子空间，其中坐标轴上满足诺伊曼条件，而在 $x=1$ 和 $y=1$ 上满足狄利克雷条件。 D 上的归一化基态为 $e=2\cos(\pi x/2)\cos(\pi y/2)$，且 $\lambda=G(1)=\pi^2/2$。求导得到 $G'(1)=B(e,\ e)$，因此积分得到 $\eta=G'(1)=\lambda/2-2$。继 $1+1$ 之后的下一个两个奇数平方之和为 $1+9$，因此分离变量法给出 $Q_1(w,\ w)\ge 5\lambda\|w\|_2^2$ for $w\perp e$。固定 y 后，在 $y<x<1$ 上的狄利克雷–纽曼不等式给出 $A(w)\ge(\lambda/2)\|w\|_2^2$，在 y 中积分后得到。

对于 $1\le z\le 5$，使用试探函数 $v=(1-x^2)(3-x^2-y^2)$。对于整数 i，恒等式 $\int_D x^iy^j\,dx\,dy=1/[(1+j)(2+i+j)]$，$j\ge 0$ 给出 $A(v)=569/45$、$B(v)=1/9$ 和 $m(v,\ v)=539/225$。令 $\delta=z-1$、$q=G(z)-\lambda$ 和 $h=5\lambda-G(z)$。试探商给出

$$p(\delta)=\frac{5(574+5\delta)}{539}-\lambda,\qquad 0\le q\le p(\delta),\qquad h>19. \tag{4.1}$$

在此处及下文中，我们使用 $223/71<\pi<22/7$，因此特别有 $\lambda>4.93$。所有有限小数都表示精确有理数。 π 的界可通过在 $\pi/4=4\arctan(1/5)-\arctan(1/239)$ 中分别对 $\arctan(1/5)$ 使用交错级数的四项和五项、对 $\arctan(1/239)$ 使用一项和两项而得到。最后一个恒等式由正切加法公式推出。

4.2. 其余锐角的凸性。我们将 z 处的基态投影到 $z=1$ 处基态的正交补上，如 Wang 的 (S1.7)–(S1.8) [34] 所示。在整个计算过程中， $1\le z\le 5$。我们将 $G(z)$ 简写为 G，并记 $R=z^2(z+1)$ 和 $g=G'(z)$。由凹性可得 $0\le g\le\eta<0.47$。在 $e^\perp$ 上使用内积 $v,w_H=Q_1(v,w)-G(z)m(v,w)$，根据 (4.1) 以及 $z=1$ 处的谱隙，该内积是正定的。对每个固定的 z，定义算子 T、M 和向量 f，使其满足 $Tv,w_H=B(v,w)$、$\mathsf{M}v,w_H=m(v,w)$ 以及 $f,w_H=B(e,w)$。取关于此内积的范数，并令 I 表示恒等算子。于是

$$0\le T\le\kappa I,\quad \kappa=\frac{9\lambda/2}{5\lambda-G}<1.2,\qquad \|\mathcal{M}\|\le 1/h,\qquad f=T^{1/2}\xi,\quad \|\xi\|_H^2\le\eta.$$

事实上， $B\le Q_1-(\lambda/2)m$ 以及 $(v-\lambda/2)\ /\ (v-G(z))$ 随 $v\ge 5\lambda$ 递减。该间隙还将 $\|\mathcal{M}\|$ 控制在 $1/h$ 以内。对 B 应用柯西 – 施瓦茨不等式可得 $|\langle f,w\rangle_H|\le\sqrt{\eta}\|T^{1/2}w\|_H$。对 $T^{1/2}$ 的值域闭包应用里斯表示定理，即得所述向量 ξ。

在 $e^\perp$ 上，令 $C=(I+\delta T)^{-1}$，并将归一化正基态写作 $u=c(e-y)$，其中 $y\perp e$ 且 $c=m(u,e)>0$。分别对 $e^\perp$ 和 e 检验特征值方程，得到

$$u=c(e-y),\qquad y=\delta Cf,\qquad c=(1+\|y\|_2^2)^{-1/2},\qquad q=\delta\eta-\delta^2\langle f,Cf\rangle_H. \tag{4.2}$$

令 $\mathcal{S}_z=Q_z-G(z)m$。在通过这些依赖于 z 的算子来表示它之前，我们对变分方程求导。对于固定的 $w\perp e$，将 $\mathcal{S}_z(y,w)=\delta B(e,w)$ 对 z 求导。由此得到

$$\mathcal{S}_z(y',w)=B(e-y,w)+g\,m(y,w).$$

现在利用 t 当前 z处的内积，连同 $y=\delta C f$和 $I-\delta T C=C$，以得到 in

$$C^{-1}y' = f - Ty + g\mathcal{M}y = Cf + \delta g\mathcal{M}Cf, \qquad y' = C^2 f + \delta g C\mathcal{M}Cf.$$

对于实归一化基态，对 $m(u,u)=1$ 求导得到 $m(u,u')=0$，而对特征值方程求导得到 $G'=B(u,u)$。在 u' 上检验求导后的方程得到 $-G''/2=\mathsf{S}_z(u',u')$。记 $K=-G''/2$。由于 $u'=(c'/c)u-cy'$ 且 $\mathsf{S}_z(u,\cdot)=0$，我们有 $K=c^2\|C^{-1/2}y'\|_H^2$。令 $K_0=f,C^3 f_H$。对于 $0\le v\le 6/5$和 $0\le\delta\le 4$，

$$3(1+\delta v)^2 - z(z+1)v = 3 - 2v + (3-\delta)\delta v + 3(\delta v)^2 \ge 3/5 - \delta v + 3(\delta v)^2 > 0.$$

因此 $Rv/(1+\delta v)^2 \le 3z$在 T 的谱上。由于 $f=T^{1/2}\xi$，谱定理与$0<C\le I$ 给出 $RK_0 \le R\|Cf\|_H^2 \le 3z\eta$。关于 y' 的公式，连同 $c\le 1$、$\|C^{1/2}\|\le 1$以及 $\|\mathcal{M}\|\le 1/h$，现在给出

$$\sqrt{RK} \le \sqrt{RK_0} + \frac{\delta g}{h}\sqrt{3z\eta}. \tag{4.3}$$

由于 $dt/d\alpha=(1+t^2)/2$ 且 $dz/d\alpha=-z(1+t^2)/t$，我们有 $F'=(1+t^2)(G-2zg)/2$。结合 $M=2F''(\alpha)/(t(1+t^2))$，二阶导数给出

$$M = G - 2zg + z(z+1)(g+2zG'') = G + z\delta g - 4RK.$$

将 (4.3) 平方并利用 $RK_0\le 3z\eta$ 与 $g\le\eta$，我们得到 $4RK-4RK_0$ 至多为$z\delta g($ $24\eta/h + 12\delta\eta^2/h^2)$。括号中的因子小于 1，因为 $\eta<0.47$、$h>19$ 以及 $\delta\le 4$。因此

$$M \ge G - 4RK_0 \qquad (1\le z\le 5). \tag{4.4}$$

以下两个界给出了直至命题 3.1 所覆盖范围的 $F''>0$。它们也将用于定理 6.2 的证明。

$$M > 5/7 \quad (1\le z\le 5/2), \qquad M > 21/50 \quad (5/2\le z\le 9/2). \tag{4.5}$$

对于第一个范围，T的谱位于 $[0,\kappa]$中，其中 $\kappa=9\lambda/(2h)$。对于 $1\le v\le\kappa$，

$$\frac{Rv}{(1+\delta v)^3} \le \left(1+\frac{1}{z}\right)\kappa \le \frac{9}{4}.$$

事实上，凹性给出 $h\ge 4\lambda-\delta\eta\ge 2\lambda(1+1/z)$。对于 $z>1$，第二个不等式由 $z\eta\le 2\lambda$ 推出，其中使用了 $z\le 5/2$、$\eta<0.47$ 和 $\lambda>4.93$。在 $z=1$ 处，第二个不等式取等号。在 $0\le v\le 1$ 和 $1\le z\le 3/2$ 上，最大值在 $v=1$ 处取得，且等于 $1+1/z\le 2$。对于 $3/2\le z\le 5/2$，在 $v\ge 0$ 上的最大值为 $4R/(27\delta)$。函数

$$R/\delta = \delta^2 + 4\delta + 5 + 2/\delta$$

在 $[1/2,3/2]$上是凸函数，因此其端点值给出 $4R/(27\delta)\le 175/81<9/4$。谱定理现在给出 $4RK_0\le 9\eta$，而 (4.4) 得到

$$M \ge \lambda - 9\eta = 18 - 7\pi^2/4 > 5/7.$$

对于第二个范围，$3/2\le\delta\le 7/2$。算子不等式（$I-\delta T$）$^2\ge 0$给出 $4\delta TC^3\le C$。方程（4.2）和 $\|\xi\|_H^2\le\eta$ 意味着

$$4\delta^2 K_0 \le \delta\langle\xi, C\xi\rangle_H \le q, \tag{4.6}$$

由于 $q/\delta=\eta-\|\xi\|_H^2+\langle\xi,\ C\xi\rangle_H$。因此

$$M \ge \lambda - (R/\delta^2 - 1)q \ge \lambda - (\delta + 3 + 5/\delta + 2/\delta^2)p(\delta).$$

最右侧的表达式关于 δ 是凹的。事实上，$p(\delta)$ 是仿射函数，其常数项和线性项系数均为正，因此被减去的乘积是 δ^{-2}、δ^{-1}、1、δ、δ^2 的正线性组合。将 λ 替换为 $493/100$ 会使表达式减小，因为 λ 的系数为 $1+\delta+3+5/\delta+2/\delta^2>0$。在 $\delta=3/2$ 和 $\delta=7/2$ 两处代入，所得值均大于 $21/50$。这就证明了 (4.5) 中的第二个界。

为验证与命题 3.1 的重叠部分，使用 $\pi/7 > 4/9$ 并对 $0 < u < \pi/2$ 积分 $(\tan u)' = 1 + \tan^2 u > 1 + u^2$。得到

$$\tan(\pi/7) > \frac{4}{9} + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^3 = \frac{1036}{2187} > \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

因此 $\cot^2(\pi/7) < 9/2$，从而完成了在 $(0, \pi/2]$ 上的曲率证明。

4.3. 直角顶角处的切线。 由于 $G(1) = \lambda$ 且 $G'(1) = \lambda/2 - 2$，我们有$F(\pi/2) = \lambda$ 且 $F'(\pi/2) = 4$。对于 $t > 1$，令 $d = (t-1)/(t+1)$。于是 $\alpha - \pi/2 = 2$ 反正切 $d \le 2d$。要证明切线严格位于 $F(\alpha)$ 下方，只需证明 $F(\alpha) > J_t$，其中$J_t = \lambda + 8d$。

对于 $w \perp e$，对 y 分部积分。内部项为 $(\lambda/2)m(e, w) = 0$。利用 $w(1, y) = 0$ 将剩余的边界值写成 w_x 的积分，得到

$$B(e, w) = -\pi \int_0^1 \sin(\pi y)\overline{w(y, y)}\, dy = \int_D \tfrac{\pi}{2} \sin(\pi y)\overline{w_x}\, d\mu.$$

由恒等式 $2\int_0^1 (1 - y)\sin^2(\pi y)\, dy = 1/2$ 以及柯西–施瓦茨不等式可得下面的第一个估计。对 B 应用柯西–施瓦茨不等式可得第二个估计。

$$|B(e, w)|^2 \le (\lambda/4)A(w), \qquad |B(e, w)|^2 \le \eta B(w).$$

对于 $1 < t \le 2$，令 $\rho = J_t/(5\lambda) = 1/5 + 8d/(5\lambda) < 1/3$，并令 $S = 4(t-\rho)/\lambda + (t^{-1} - \rho)/\eta > 0$。$e^\perp$ 上的间隙以及 $B(e, w)$ 上的两个界给出

$$(tA + t^{-1}B - J_t m)(w, w) \ge (t - \rho)A(w) + (t^{-1} - \rho)B(w) \ge S|B(e, w)|^2,$$

将 t 处的归一化正基态分解为 $ce + w$，其中 $c > 0$ 和 $w \perp e$。由于$A(e, w) = -B(e, w)$，交叉项为 $2c(t^{-1} - t)RB(e, w)$。配方得

$$F(2\arctan t) - J_t \ge c^2 \left[tA(e) + B(e)/t - J_t - \frac{(t^{-1} - t)^2}{S} \right]. \tag{4.7}$$

令 $W(t) = t\lambda S/2 = 2t^2 - 2\rho t + \lambda(1 - \rho t)/(2\eta)$。

项 $tA(e) + B(e)/t - J_t$ 等于 $(t-1)^2(\lambda/2 + 2d)/t$。在 (4.7) 的括号中约去 $(t-1)^2$ 后，我们需要 $(1 + 4d/\lambda)W(t) > (t+1)^2$。由于 $\rho t < 1$, $\rho < 1/3$，且 $\lambda/(2\eta) > 5$，我们有$W(t) \ge 2t^2 - 7t/3 + 5 \ge 14/3$。由于 $t + 1 \le 3$，这给出 $4W(t)/(t+1) \ge 56/9 > \lambda$。因此

$$\begin{aligned}(1 + 4d/\lambda)W(t) - (t+1)^2 &> W(t) + (t-1) - (t+1)^2 \\ &\ge 2t^2 - 7t/3 + 5 + (t-1) - (t+1)^2 \\ &= (t - 5/3)^2 + 2/9 > 0.\end{aligned}$$

对于 $t \ge 2$，利用 G 在 $z = 0$ 与 $z = 1/3$之间的凹性。由于 G 递增，且水平狄利克雷–纽曼不等式给出 $G(z) \ge \lambda/2$，极限 $G(0) = \lim_{z \downarrow 0} G(z)$ 存在，且不小于 $\lambda/2$。在 $z = 1/3$处，混合三角形连接着一个内切半径为一的等边三角形的一条边与其中心。设 d_1, d_2, d_3 为到该等边三角形三条边的向内距离。它们的和为三。函数 $\sum_i \sin(2\pi d_i/3) = 4\prod_i \sin(\pi d_i/3)$ 在内部为正，在边界上为零，并满足特征值为$4\pi^2/9$的特征值方程。由反射可得 $G(1/3) = 4\pi^2/9$。弦界给出

$$F(\alpha) \ge \frac{\pi^2}{12}\left(3t + \frac{7}{t}\right).$$

与 J_t 的比较可由精确恒等式得出

$$\frac{\pi^2}{12}(3t + 7/t) - \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{7}t = \frac{\pi^2(3t-7)^2}{84t}.$$

事实上，$t/d = 3 + (t-1) + 2/(t-1) \ge 3 + 2\sqrt{2}$，因此 $8d/t \le 8/(3 + 2\sqrt{2}) < 7/5 < \pi^2/7$。由此$F(\alpha) > J_t$ 对 $t \ge 2$也成立。

严格凸性给出 $(0, \pi/2]$ 上的切线不等式，等号仅在切点处成立。对于 $a < \pi/2$, a 处切线的斜率小于 $\pi/2$ 处切线的斜率，并且

在该处的值更小。因此，对于 $\alpha > \pi/2$，它也位于图像下方。由于 $F(0+) = 0$ 且 $F > 0$，严格凸性给出 $F'(a) > F(a)/a > 0$。因此该切线在零处取负值。□

5. 简单多边形的划分

该划分必须使支撑线在每个单元上给出相同的混合特征值界。若该直线为 $s(\gamma - b)$，且 $s, b > 0$，则根据 (1.2)，$\gamma \geq b + c|V|$ 对单元 V 给出 $\lambda_1^{\mathrm{DN}}(V) \geq sc$。这里 $c > 0$，而 γ 等于 π 减去底角之和。切分一个单元会保持其总面积不变，但会在所需角度界之和中增加一个 b。因此，我们为每个需要经过切割的顶点额外分配一个角度 b。该构造分三步：在凸包中选取带权单元，切过剩余的多边形顶点，然后选取位于多边形内部的部分。最后一步可能需要将某个单元的底边改为多边形边界上的一条边。

引理 5.1 (划分为凸单元)。设 P 是一个面积为正、具有 $k \geq 3$条边的简单多边形。假设

$$b > 0, \qquad (k-1)b < \pi, \qquad c = \frac{2\pi - kb}{|P|}. \tag{5.1}$$

于是，$c > 0$和 P 除单元边界外，都可以有限地划分为正面积凸多边形 V_j。每个多边形在 ∂P 上都有一整条边。以此边为底边，令γ_j 为 π 减去与其相邻的两个内角之和。于是

$$\gamma_j \geq b + c|V_j| > 0. \tag{5.2}$$

证明。由于 $kb < k\pi/(k-1) < 2\pi$，我们有 $c > 0$。按循环序将 P的凸包的各边写作E_1、.....、E_m。令 $\beta_i \in (0, \pi)$为 E_i初始端点处的凸包角，并令$h_i(x)$为从 x 到经过 E_i的直线的距离。对于 $t \in \mathbb{R}^m$，令 $Q_i(t)$由凸包内部满足 $e^{t_i} h_i$ 严格小于其他所有 $e^{t_\ell} h_\ell$的点组成。由于距离在凸包上是仿射的，这些是凸单元。每个单元的闭包都以 E_i 为底边，并且除有限条线段外，这些单元覆盖凸包的内部。

此构造中的所有指标均按 m 循环取模。令 x_i 表示 E_i 与从其初始端点出发、在该射线上到 E_{i-1} 和 E_i 的加权距离相等的射线之间的角。两个距离相等给出 $e^{t_i - t_{i-1}} \sin x_i = \sin(\beta_i - x_i)$。因此

$$\varphi_i(v) = \arg(e^v + e^{\mathrm{i}\beta_i}) \in (0, \beta_i), \qquad x_i = \varphi_i(t_i - t_{i-1}).$$

与底边 E_i 对应的两个角为 x_i 和 $\beta_{i+1} - x_{i+1}$。从 π 中减去它们的和，得到

$$\alpha_i = \pi - \beta_{i+1} - x_i + x_{i+1} < \pi, \qquad \sum_i \alpha_i = 2\pi.$$

如果 $\alpha_i > 0$，则两条射线与 E_i 在顶角为 α_i 的三角形中围成 $Q_i(t)$。令

$$\mathcal{A}(t) = \sum_i (\pi - \beta_{i+1}) t_i - \sum_i \int_0^{t_i - t_{i-1}} \varphi_i(v)\, dv.$$

由于 φ_i 减小，$\mathcal{A}$ 是凸的，并且 $\partial_i \mathcal{A} = \alpha_i$。

对于 P 中不是凸包顶点的每个顶点 X，定义 $q_X(t)$ 为

$$q_X(t) = \begin{cases} \min_i (t_i + \log h_i(X)), & X \text{ strictly inside the hull}, \\ t_i, & X \text{ in the relative interior of } E_i. \end{cases}$$

在这些对数中以固定单位测量距离。我们将连续凸函数最小化

$$\mathcal{A}(t) - c \int_P \min_i (t_i + \log h_i(x))\, dx - b \sum_i t_i - b \sum_X q_X(t). \tag{5.3}$$

对 X 的求和遍历的是 P 中并非凸包顶点的 $k - m$ 顶点。对数关于面积可积。给 t_i 的各项加上同一个常数不会改变 (5.3)，因为 $c|P| + kb = 2\pi$。

将 $\min_i t_i = 0$ 归一化，并令 $T = \max_i t_i$。函数 φ_i 在 $+\infty$ 处指数趋于零，并在 $-\infty$ 处向 β_i 指数趋近。积分得

$$\mathcal{A}(t) = \sum_i (\pi - \beta_{i+1}) t_i + \sum_i \beta_i (t_{i-1} - t_i)_+ + O(1),$$

其中 $v_+ = \max(v, 0)$，且误差的界与 t 无关。为估计这两个和，将 t_i 写成 h 中 $0 < h < t_i$ 的示性函数的积分，并将 $(t_{i-1} - t_i)_+$ 写成 $t_i < h < t_{i-1}$ 的示性函数的积分。在每一层 $0 < h < T$，将满足 $t_i > h$ 的指标按循环序分成极大连续块。一个块 $L, \dots, R$ 的贡献为

$$\sum_{i=L}^{R} (\pi - \beta_{i+1}) + \beta_{R+1} = \pi + \sum_{i=L+1}^{R} (\pi - \beta_i) \geq \pi.$$

对 h 积分得到 $\mathcal{A}(t) \geq \pi T - O(1)$。在每个最小值中使用一个满足 $t_i = 0$ 的指标，可对面积积分以及严格位于凸包内部的顶点的 q_X 给出一致上界。剩余项乘以 b 后的和至多为 $b(k-1)T$，因为每个 $t_i \leq T$ 以及至少一个 $t_i = 0$。由 (5.1)，待最小化的表达式当 $T \to \infty$ 时趋于无穷。因此它在 $\min_i t_i = 0$ 上达到最小值，从而也在 $\mathbb{R}^m$ 上达到最小值。

在一个达到最小值的 t 处，记作 $Q_i = Q_i(t)$。由于并列情形具有零面积且差商有界，积分 (5.3) 关于 t_i 的偏导数为 $|P \cap Q_i|$。对于严格位于凸包内部的顶点 X，$-q_X$ 的次微分是对应最小化指标的负坐标向量的凸包。因此，最小值条件将一个单位权重从 X 分配给具有这些指标的单元。开单元中的顶点向该单元贡献一个单位。位于内部分割线上的顶点可以向多个单元贡献权重份额。位于凸包边相对内部的顶点向基于该凸包边的单元贡献一个单位。在最小值处，α_i 等于 $c|P \cap Q_i|$ 加上该凸包边对应的 b，再加上 b 乘以这些顶点贡献的总权重。令 d_i 计数 P 中位于 Q_i 或 E_i 的相对内部的顶点。每个顶点贡献一个单位。内部分割线上的顶点可能贡献额外的非负权重；舍弃这些权重可得到

$$\alpha_i \geq c|P \cap Q_i| + b(1 + d_i). \tag{5.4}$$

特别地 $\alpha_i > 0$，因此每个单元都包含在以 E_i 为底边、顶角为 α_i 的三角形内。

经过剩余顶点的切割。考虑一个单元 Q，它有一个以同一边为底边、顶角为 θ 的包含三角形。记 $M = |P \cap Q|$，并令 d 统计 P 中位于 Q 内或底边相对内部的顶点数。设 $d \geq 1$ 且 $\theta \geq b(1 + d) + cM$。选取一个由 d 计数的顶点 Z。沿严格位于包含三角形两腰方向之间的方向，作一条经过 Z 的直线；该直线与底边的相对内部相交。令 $0 < \tau < \theta$ 为从第一条腰到该方向测得的角，采用原始欧几里得坐标。切割将底边分成两条线段。每一条都是一个三角形的底边，该三角形包含对应的部分，其顶角分别为 τ 和 $\theta - \tau$。为证明这一点，使用仿射坐标，使包含三角形为 $x,\ y \geq 0,\ \ x + y \leq 1$。切割方向的两个分量均为正。它与直线 $y = 0$ 和 $x = 0$ 的交点给出两个顶点。当 Z 位于底边的相对内部时，这一方法同样适用。

设 M_L, M_R 为 P 与 d_L 内部的面积，d_R 为两块按顶角 $\tau, \theta - \tau$ 顺序的顶点数。这些面积随 τ 连续变化。这些计数是下半连续的，因为先前计入的顶点当且仅当其严格位于切割线的相应一侧时才被计入该块。这包括开放底边上的顶点。旧分割线上的顶点仍留在包含它们的每一块的边界上，且新底边的相对内部位于旧底边的相对内部之中。由于 Z 位于该切割上，

$$M_L + M_R = M, \qquad d_L + d_R \leq d - 1.$$

使左侧不等式与右侧不等式不成立的方向集合为

$$\{\tau : \tau < b(1 + d_L) + cM_L\}, \qquad \{\tau : \theta - \tau < b(1 + d_R) + cM_R\}.$$

两个集合都是开集。它们互不相交，因为将这两个严格不等式相加会得到 $\theta < b(2 + d_L + d_R) + cM \leq b(1 + d) + cM$。第一个集合包含 0 附近的一个区间，而第二个集合

包含 θ附近的一个区间，因为 $b > 0$。它们不可能覆盖连通区间 $0 < \tau < \theta$。因此，它们之间的一个切割同时满足两个角度不等式。

每次切割都会从计数中移除至少一个顶点。从 m 个凸包单元开始，至多需要进行 $k - m$ 次切割。舍弃与 P 的交集为零面积的单元。剩余的至多 k 个单元，其底边位于凸包边上，并且位于以这些底边为底的三角形内。包含单元 Q 的三角形的顶角至少为 $b + c|P \cap Q|$。这些单元与 P 的交集将 P 划分为若干部分，直至其边界。

多边形内部的连通分量。 我们采用 Bogosel、Bucur 和 Fragalà 的弦构造[6, 定理 5 和 §6]。固定一个剩余单元 Q，其包含三角形的顶角为θ。 P 的顶点均不位于 Q 中，也不位于其底边的相对内部。 P 与 Q相交的每条边因此都会沿一条完整弦穿过它。开弦彼此不相交，并且没有一条终止于开放底边内，因为该底边位于凸包的一条支撑线上，且该处不包含多边形顶点。这些弦将 Q 划分为若干凸片，每一片完全位于 P的内部或外部。

如果与底边相邻的那块区域位于 P 中，那么它的底边就在 ∂P 上，因为这块区域中的点趋近于整条底边，而 P 位于底边所在直线的一侧。对于 P 内的任何其他区域，将其内部一点与开放底边上的一点相连，并选择一条避开弦端点的线段。线段穿过的第一条弦是该区域的一整条边，因为没有其他弦与这条弦的相对内部相交。它将整个区域与整条底边分隔开，并位于 ∂P 上。

设 pq 是这样一条弦。分别用 O、 A、 B 表示包含三角形的顶点和底边端点，并像图 1 中那样，采用仿射坐标，使 $O =$ 为 $(0, 0)$， $A =$ 为 $(1, 0)$， $B =$ 为 $(0, 1)$。经过 p、 q 的直线将 Q 的某些点与 AB 分隔开。因此， O 严格位于与 AB 相对的一侧，否则整个三角形就会位于与 AB 相同的一侧。将该直线写作 $ux + vy = 1$，其中 u、 $v \geq 1$，并对端点作如下标记，使得 $p_x < q_x$ 且 $p_y > q_y$。对于位于 Q 中、且在 pq 的另一侧（相对于 AB）的 Z，由凸性可知， ZB 和 ZA 都与该弦相交。第一次相交给出 $Z_x \geq p_x$，第二次相交给出 $Z_y \geq q_y$。结合 $uZ_x + vZ_y \leq 1$，这些不等式表明 Z 位于一个三角形内，该三角形以 pq 为底边、以 $O' = (p_x, q_y)$ 为顶点。经过 O' 的两腰与原来的两腰平行，因此它在原始欧几里得坐标中的角度为 θ。

将 P 内的各块枚举为 V_j。来自 Q 的每一块都位于 ∂P中所选底边上、顶角为 θ 的一个三角形内。其底角至多等于该三角形的底角，因此

$$\gamma_j \geq \theta \geq b + c|P \cap Q| \geq b + c|V_j|.$$

这些块 V_j 在不计其边界的意义下划分 P，符合要求。 □

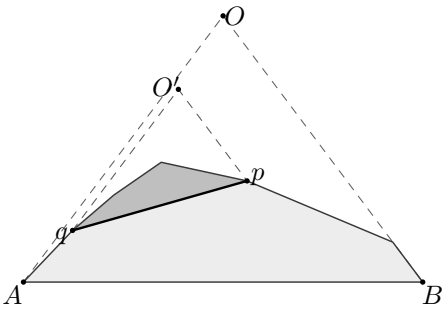


图 1. 该单元中颜色较深的部分位于底边 AB 的 pq 对侧，并位于三角形 $O'pq$内。过 O' 的腰与过 O的腰平行，因此顶角相等。

6. 应用

我们首先研究对边数的依赖，并将所得不等式应用于多边形划分。最后一小节回到傅里叶比较，并推导混合谱逆矩的界。

6.1. **边数较少情形的特征值界**。设 n, h 为满足 $1 \le h \le n-3$ 的整数。定理 1.1 表明，c_{n-h} 是至多有 $n-h$ 条边的多边形上 Φ 的最小值。利用 (1.3) 之后所定义的 d_n，该证明中的切线不等式给出

$$c_{n-h} - c_n > h\, d_n.$$

对于面积相等的正多边形，Dahne、Gómez-Serrano 和 Pech-Alberich 证明，第一特征值及其相继比值随边数的增加而减小 [14]。Grinfeld 和 Strang 研究了关于边数倒数的展开 [20]。Berghaus、Georgiev、Monien 和 Radchenko 证明了等面积展开，并计算了其直至十四阶的系数 [2]。这里我们利用第 3 节推导插值的首项系数和导数估计 $g(x) = xF(2\pi/x)$，$x \ge 3$。

推论 6.1. 设 $J = \lambda_1(\mathbb{D})$ 如命题 *3.1* 中所述。当 $n \to \infty$ 时，

$$d_n = 12\pi J\zeta(3) n^{-4} + O(n^{-6}).$$

对于整数 $1 \le h = h(n) \le n-3$，比值 $(c_{n-h} - c_n)/(h\Delta_n)$ 当 $n \to \infty$ 时趋于 *1*，当且仅当 $h/n \to 0$。对于固定的 h，

$$\frac{c_{n-h} - c_n}{h\Delta_n} = 1 + \frac{2(h-1)}{n} + \frac{2(h-1)(5h-1)}{3n^2} + O_h(n^{-3}). \tag{6.1}$$

证明。在第 3 节中，$D(r)$ $H(r)$ $Q(r)$ 有界于 $r \downarrow 0$。因此，(3.2) 中第一混合特征值的全纯延拓 $\mathcal{L}$ 满足，对于 $|\sigma - r| \le r/3$，$\mathcal{L}(\sigma) = J + O(r^5)$ 一致成立。由面积公式 (3.1) 得到 $Z(\sigma) = 1 + 4\zeta(3)\sigma^3 + O(\sigma^5)$。因此，由 (3.2) 给出的 $F(2\pi\sigma)$ 的延拓具有如下形式

$$F(2\pi\sigma) = \pi J[\sigma + 4\zeta(3)\sigma^4] + E(\sigma), \qquad \sup_{|\sigma - r| \le r/3} |E(\sigma)| = O(r^6).$$

由柯西估计得到 $E'(r) = O(r^5)$。令 $r = 1/x$，则当 $x \to \infty$ 时，有

$$g(x) = \pi J[1 + 4\zeta(3)x^{-3} + O(x^{-5})],$$
$$g'(x) = -12\pi J\zeta(3)x^{-4} + O(x^{-6}).$$

对于整数 $n \ge 4$，$g(n) = c_n$ 以及 $-g'(n) = d_n$。由 $-g'(x) = 12\pi J\zeta(3)x^{-4}B(x)$ 定义 $B(x)$。柯西估计还给出 $E''(r) = O(r^4)$，因此 $B(x) = 1 + O(x^{-2})$ 且 $B'(x) = O(x^{-3})$。令 $m = n - h$。对 B' 的界进行积分，得到当 $m \le x \le n$ 时，$B(x)/B(n) = 1 + O(m^{-2} - n^{-2})$ 一致成立，其中 $m \to \infty$。取 $v = m/n$，对 $-g'$ 积分得到

$$\frac{c_m - c_n}{h d_n} = \frac{1 + v + v^2}{3v^3}\left[1 + O(m^{-2} - n^{-2})\right].$$

对于 $0 < v \le 1$，因子 $(1 + v + v^2)/(3v^3)$ 恰好在 $v \to 1$ 时趋于 1。对于任何满足 m 有界的子序列，由于 c_n 严格递减至 πJ，$c_m - c_n$ 始终远离零；且 $hd_n = O(n^{-3})$。因此，与 d_n 的比值恰好在 $h/n \to 0$ 时趋于 1。取$h = 1$得 $\Delta_n/d_n \to 1$。对于固定的 h，在 $v = 1$ 处展开，得出与 d_n的比值为 $1 + 2h/n + 10h^2/(3n^2) + O_h(n^{-3})$。将此展开式除以关于 $h = 1$ 的展开式，便得到 (6.1)。□

6.2. **正多边形的对数凸性**。

定理 6.2 (插值的对数凸性)。对于 $g(x) = xF(2\pi/x)$，函数 对数 g在 $[4, \infty)$上严格递减且具有正的二阶导数。比值 c_j/c_{j+1} 对所有整数 $j \ge 3$均严格递减。

证明。令 $a = 2\pi/x$和 $d = aF\prime(a) - F(a) > 0$。由于 $g' = -d$和 $g'' = a^2F\prime\prime(a)/x$，$(\log g)''$ 为正等价于

$$a^2F(a)F''(a) > d^2.$$

定理 1.1 的证明中的界 $\sin a\, F\prime(a) \le F(a)$ 给出

$$0 < \frac{d}{aF(a)} \le \csc a - \frac{1}{a}.$$

因此只需证明 $F''(a)/F(a) > (\csc a - 1/a)^2$。

对于 $0 < a \le 2\pi/7$，命题 3.1 给出 $F(a) \le (8J/15)a$ 和 $F_{\prime\prime}(a) > 11J(a/(2\pi))^2/(4\pi)$。因此

$$\frac{F''(a)}{F(a)} > \frac{165a}{128\pi^3} > \frac{a}{25} > \left(\csc a - \frac{1}{a}\right)^2.$$

第二个不等式用到了 $\pi^3 < 32$。对于第三个不等式，由 $a < 1$ 和 $\sin a \ge a - a^3/6$ 可得 $\csc a - 1/a \le a/(6 - a^2) < a/5$。

对于 $2\pi/7 \le a \le \pi/2$，如第 4 节所示，使用 $t = \tan(a/2)$、$z = t^{-2}$、$G(z) = F(a)/t$ 以及 $M = 2F''(a)/(t(1 + t^2))$。不等式 $a^2F(a)F''(a) > d^2$ 变为

$$M > \frac{2d^2}{a^2t^2(1 + t^2)G}.$$

右侧至多为 $2G(z)\cos^2(a/2)(\csc a - 1/a)^2$。恒等式

$$\cot(a/2)\left(\csc a - \frac{1}{a}\right) = \int_0^1 \left(\frac{\sin(va/2)}{\sin(a/2)}\right)^2 dv$$

通过对 $\sin^2(va/2)$ 积分即可得到。对于 $0 < v < 1$，被积函数随 a 增大，因为 $u\cot u$ 在 $(0, \pi/2)$ 上递减。在 $a = \pi/2$ 处取值并乘以 $\sin(a/2)$，得到

$$\cos^2(a/2)\left(\csc a - \frac{1}{a}\right)^2 \le \frac{(1 - 2/\pi)^2}{1 + z}.$$

对于 $1 \le z \le 5/2$，由凹性以及 $G(1) = \pi^2/2$、$G'(1) = \pi^2/4 - 2$ 的值可得 $G(z) \le G(1)(1 + z)/2$。由 (4.5) 得，

$$\frac{2G(z)(1 - 2/\pi)^2}{1 + z} \le \frac{(\pi - 2)^2}{2} < \frac{5}{7} < M.$$

对于 $5/2 \le z \le 9/2$，(4.1) 给出 $G < 11/2$。由于 $1 - 2/\pi < 4/11$，

$$\frac{2G(z)(1 - 2/\pi)^2}{1 + z} < \frac{11(4/11)^2}{7/2} = \frac{32}{77} < \frac{21}{50} < M.$$

M 的最后一个界仍然是 (4.5)。由于根据第 4 节，$\cot^2(\pi/7) < 9/2$，这些不等式证明了 $(\log g)'' > 0$ 在 $[4, \infty)$ 上成立。

根据第 4 节，内切半径为 1 的等边三角形面积为 $3\sqrt{3}$，特征值为 $4\pi^2/9$，因此 $c_3 = 4\pi^2/\sqrt{3}$。对于正方形，$c_4 = 2\pi^2$，$F(\pi/2) = \pi^2/2$，且 $F'(\pi/2) = 4$。因此

$$(\log g)'(4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi}, \qquad \log(2/\sqrt{3}) \ge 1 - \sqrt{3}/2 > 1/8 > 1/\pi - 1/4.$$

连接 $(3, \log c_3)$ 与 $(4, \log c_4)$ 的弦，其斜率小于 4 处的右导数。在 $[3, 4]$ 上使用这条弦，并将 $\log g$ 用于 $[4, \infty)$。所得的 $\log c_j$ 插值是递减且凸的，并且其相邻整数之间的斜率严格递增。等价地，c_j/c_{j+1} 严格递减。已知固定边最小值后，这个离散不等式 [14] 也可推出 (1.1)，因为 $c_j < \sqrt{c_{j-1}c_{j+1}} \le (c_{j-1} + c_{j+1})/2$ 当 $j \ge 4$ 时。

对于下面的划分估计，设

$$\beta = \tfrac{1}{2}\log(c_5/c_7), \qquad \varepsilon = \tfrac{1}{2}\log(c_5c_7/c_6^2).$$

于是 $\beta > \varepsilon > 0$，将六两侧依次递增的斜率相加，得到

$$\log c_j \ge \log c_6 - \beta(j - 6) + \varepsilon|j - 6| \qquad (j \ge 3). \tag{6.2}$$

□

6.3. **周期性凸多边形铺砌。** Hales 证明，在将平面划分为单位面积区域的所有划分中，正六边形铺砌的单位面积周长最小 [21]。谱蜂窝问题研究相应的特征值之和的最小值。对于一个面积为单位面积的光滑有界平面区域 Ω，Geng 和 Lin 证明，对 $N^{-2}\sum_{i=1}^{N}\lambda_1(\Omega_i)$ 在划分为 N 个单元 Ω_i 的所有划分中取最小值，其极限为一个与 Ω [19]无关的常数。Caffarelli 和 Lin 猜想，该常数为 c_6，即单位面积正六边形的第一特征值 [10]。在这个问题中，单元之间的边界可以是曲线 [11, 28]。对于由同一个凸多边形的平移像构成的铺砌，Cesaroni、Fragalà 和 Novaga 运用施泰纳对称化证明了六边形的最优性 [12]。我们允许在周期格的作用下，铺块具有有限多个轨道。

定理 6.3 (周期凸镶嵌)。 设平面上由有界凸多边形构成的局部有限镶嵌在基本区域面积为 A 的平移格作用下保持不变。选取其每个 N 轨道中的一个铺块 P_i。记 j_i 为 P_i 的边数，$a_i = N|P_i|/A$ 为其面积除以铺块平均面积所得的比值。令 ε 为式(6.2)前紧邻处定义的常数。则归一化几何平均数 $G = (A/N)(\prod_i \lambda_1(P_i))^{1/N}$ 满足

$$\log\frac{\mathcal{G}}{c_6} \;\geq\; \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\varepsilon|j_i-6| + \log\frac{\Phi(P_i)}{c_{j_i}} + a_i - 1 - \log a_i\right]. \tag{6.3}$$

右侧每一项均非负。G 的最小值为 c_6，且当且仅当镶嵌为正六边形铺砌时取到。对于 $p>0$，归一化幂平均 $(A/N)(N^{-1}\sum_i \lambda_1(P_i)^p)^{1/p}$ 以及归一化最大值 $(A/N)\max_i \lambda_1(P_i)$ 具有相同的最小值和等号成立条件。

证明。 在商环面上计数顶点和边；必要时扩大周期，使每个铺块都单射投影。这样会将 A 和 N 同时乘以相同因子，并保持归一化量不变。在每个铺块的角点处分割边。每个顶点至少有三条边相交，因为度为二的顶点处的两个凸面都会是直的。对于 V 个顶点和 E 条边，欧拉公式和度数之和给出 $V-E+N=0$ 和 $3V\leq 2E$。因此$\sum_i j_i \leq 2E \leq 6N$，即使某个铺块的角点落在邻接铺块边的内部也成立。由于$\sum_i a_i = N$，

$$\log\frac{\mathcal{G}}{c_6} = \frac{1}{N}\sum\left[\log\frac{c_{j_i}}{c_6} + \log\frac{\Phi(P_i)}{c_{j_i}} + a_i - 1 - \log a_i\right].$$

对括号中的第一项应用 (6.2)，并使用 $\sum_i j_i \leq 6N$ 得到 (6.3)。如果 $\mathcal{G} = c_6$，则 (6.3) 右侧的每一项都为零。根据定理 1.1，每个铺块都是正六边形，并且 $a_i = 1$对所有 i均成立。于是 $\sum_i j_i = 6N = 2E$，因此图像中没有任何边被分割。正六边形沿着一整条边确定其邻接铺块，因此该铺嵌是正六边形铺嵌。在此铺嵌中，所有第一特征值都相同，且所有归一化平均数均等于 c_6。对于任意铺嵌，每个正幂平均数和最大值都不小于几何平均数。□

非六边形瓦片所占的比例至多为 $\log(\mathcal{G}/c_6)/\varepsilon$。此外

$$\frac{1}{N}\sum_i |a_i - 1| \leq 2\sqrt{\log(\mathcal{G}/c_6)}.$$

事实上，对于 $a>0$，将 $1-1/t$ 在 1 和 a 之间积分可得 $a-1-\log a \geq (a-1)^2/(2\max(1,a))$。应用柯西–施瓦茨不等式和 $N^{-1}\sum_i \max(1,a_i) \leq 2$。

对于 $\rho>0$，令 $\delta_6(\rho)$为$\log(\Phi(P)/c_6)$在所有与每一个单位面积正六边形的豪斯多夫距离至少为 ρ 的单位面积凸六边形 P 上的下确界。当该类为空时使用 $+\infty$。为看出 $\delta_6(\rho)>0$，假设下确界为零，并取一个极小化序列。若一个六边形的直径为 D，则由处于该距离的两个顶点与第三个顶点构成的任一三角形的面积至多为1。因此，所有顶点都位于过所选顶点对的直线的 $2/D$ 范围内，且该六边形位于宽度至多为 $4/D$的带状区域中。由于序列中的特征值有界，该带状区域的狄利克雷不等式限制了序列中的直径。

经过平移并取子序列后，顶点收敛到一个面积为一、边数至多六的凸多边形的顶点，允许顶点重合。将原点置于该极限的内部。该极限的支撑函数以半径为下界，该半径来自一个内部

关于原点的球。于是，支撑函数的一致收敛使该子序列的每个成员夹在极限的两个膨胀集之间，且膨胀因子趋于一。区域单调性与缩放给出特征值收敛。由定理 1.1，该极限为正多边形，这与距离界矛盾。因此由 (6.3)，边数不为六，或在重新缩放到面积为一后与每一个单位面积正六边形的豪斯多夫距离至少为 ρ 的铺块所占比例，至多为 $\log(\mathcal{G}/c_6)/\min\{\varepsilon,\delta_6(\rho)\}$。

6.4. **凸多边形的有限划分。**

定理 6.4 (带边界项的六边形界)。 设Ω 是一个面积为 A 的凸 m 边形，划分为 N 个正面积凸多边形 P_i，它们的内部互不相交，且其闭包的并为Ω。令 B 为Ω 各边相对内部中内部边与边界相交的点的数量。使用(6.2) 之前刚刚定义的常数 β、ε，以及定理 *6.3* 中定义的量 j_i、a_i、G，此处取 $A=|\Omega|$。则

$$\log\frac{\mathcal{G}}{c_6}\geq\frac{\beta(6-m+B)}{N}+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\varepsilon|j_i-6|+\log\frac{\Phi(P_i)}{c_{j_i}}+a_i-1-\log a_i\right]. \tag{6.4}$$

对于固定的Ω，这些划分上的 G 的下确界在 $N\to\infty$ 时收敛于 c_6。对于每个固定阶数 $p>0$ 的归一化幂平均，以及按定理 *6.3* 中定义的归一化最大值，其下确界也有相同的极限。

证明。 在每个胞腔角点处（包括 T 形连接点处）将胞腔边分割，并保留 Ω 的 m 个角点，由此构造一个平面图。令 V,E 分别表示顶点数和边数。该图是连通的，其 N 个有界面为各个单元，因此 $V-E+N=1$。在度为二的内部顶点处，若边不共线，就会形成一个优角；若边共线，则相邻的两个单元都会留下平直边。由于单元是凸的，且该图在内部只包含胞腔角点，因此每个内部顶点的度至少为三。另外，B 个新增边界顶点的度也至少为三。m 个角点的度至少为二，因此 $2E\geq 3V-m$ 且 $V\leq 2N+m-2$。边界上有 $m+B$ 条图边。将内部边计数两次、边界边计数一次，得到

$$\sum_i j_i\leq 2E-(m+B)\leq 6N+m-6-B.$$

第一个不等式允许图像中被分割的边。将 (6.2) 求和，并利用定理 6.3 的证明中关于 $\log(\mathcal{G}/c_6)$ 的恒等式，即得 (6.4)。

由于 m 固定且 $B\geq 0$，(6.4) 给出的下确界下极限下界为 c_6。为得到上界，固定 $0<\delta<1$，并用面积为 $h=(1-\delta)A/N$ 的正六边形铺满平面。其中心构成一个三角晶格。每个六边形由所有以其中心为最近晶格点的点组成。完全包含在 Ω 内的六边形覆盖 Ω 中所有与边界的距离大于六边形直径的点。该内部区域的面积在 $N\to\infty$ 时趋于 A，因此当 N 足够大时，该面积大于 Nh。

选择 N 个完全包含于 Ω 内的六边形中心，并将 Ω 中的每个点分配给距离最近的所选中心；若距离相同，则归属于边界上的中心。由此得到的每个单元都是凸多边形，并包含以其中心为中心的原六边形。区域单调性给出 $\lambda_1(P_i)\leq c_6/h$。特别地，归一化最大值不超过 $c_6/(1-\delta)$。令 $\delta\downarrow 0$，即可证明最大值、几何平均数以及介于两者之间的正幂平均数的极限。□

对于具有 $N\to\infty$ 且 $\mathcal{G}\to c_6$ 的固定 Ω 的划分，(6.4) 以及 (6.3) 后的面积估计表明，非六边形的比例、$N^{-1}\sum_i|a_i-1|$ 和 B/N 都趋于零。对于每个固定的 $\rho>0$，边数不同于六，或在缩放至面积为一后，与任意单元面积正六边形的豪斯多夫距离至少为 ρ 的单元所占的比例至多为

$$\frac{\log(\mathcal{G}/c_6)-\beta(6-m+B)/N}{\min\{\varepsilon,\delta_6(\rho)\}}.$$

推论 6.5 (多边形划分中的弯折)。 设 $P_1, \dots, P_N$ 为具有正面积且内部不相交的简单多边形，其闭包的并集为 Ω，其中 Ω 是一个凸 m 边形。按照定理 *6.4* 中的约定取 A、B、G β、ε，并令 j_i 为 P_i 的边数。在所有角点和交接点处分割各条边。令 s 计数内部顶点：在这些顶点处恰有两条边相交并改变方向，并置 $q = (6 - m + B - 2s)/N$。则

$$\mathcal{E}_N := \frac{A}{N^2} \sum_{i=1}^{N} \lambda_1(P_i) \;\geq\; \mathcal{G} \;\geq\; c_6 \exp\{\beta q + \varepsilon |q|\}. \tag{6.5}$$

对于固定的 Ω，任意满足 $s = o(N)$ 的序列都满足 下极限$_{N\to\infty} E_N \geq c_6$，且该常数是最佳的。如果沿着满足 $N \to \infty$ 且固定 $\eta > 0$的序列有 $E_N \leq c_6 e^{-\eta}$，那么

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{s}{N} \geq \frac{\eta}{2\log(c_6/c_7)}.$$

证明。 省略直线段上度为二的顶点。在 Ω 中，任意两个单元内部之间都可以选取一条避开顶点并横截地穿过边的多边形路径。它所经过的单元具有连通边界，且相邻单元共享一条边。因此，边界的并集是连通的。设有 V个顶点和 E条边，则度数之和至少为 $3V - m - s$。由欧拉公式 $V - E + N = 1$ 以及 $m + B$ 条边界边可得

$$\sum_i j_i \leq 2E - (m + B) \leq 6N + m - 6 - B + 2s.$$

令 $D = N^{-1}\sum_i (6 - j_i)$。则 $D \geq q$。根据定理 1.1，恒等式 $\log(\mathcal{G}/c_6)$ 中的形状项和面积项均为非负，并且对于 $a > 0$， $a - 1 - \log a \geq 0$。由公式 (6.2) 和三角不等式可得

$$\log(\mathcal{G}/c_6) \geq \beta D + \frac{\varepsilon}{N} \sum_i |6 - j_i| \geq \beta D + \varepsilon |D| \geq \beta q + \varepsilon |q|.$$

最后一个不等式成立，是因为 $\beta > \varepsilon$ 使 $x \mapsto \beta x + \varepsilon|x|$ 递增。算术平均数大于几何平均数，由此得到 (6.5)。固定 m时， $B \geq 0$ 给出的下极限至少为c_6，当 $s = o(N)$时取到。若 $\mathcal{E}_N \leq c_6 e^{-\eta}$，则 $q < 0$ 且 $2s \geq 6 - m + B + \eta N/(\beta - \varepsilon)$。由于 $\beta - \varepsilon = \log(c_6/c_7)$，便得到所述界。定理 6.4 中构造的凸划分满足$s = 0$，并达到极限值。□

备注。 弯折正六边形的一条边，可以在保持其面积和六个顶角不变的同时，降低其第一狄利克雷特征值。

设 u 为 R_6上的正基态，并按 $\int_{R_6} u^2 = 1$归一化，再令 $\lambda = \lambda_1(R_6)$。在外单位法向量为 ν的一条开边上，平方项 $(\partial_\nu u)^2$ 不是常数。若它是常数，Hopf 引理将推出 $\partial_\nu u$ 在该处也为常数。奇反射以及解析柯西数据的唯一性将迫使 u 成为 $\sin(\sqrt{\lambda}\, r)$的一个常数倍，其中 r 是到经过该边的直线的有向距离。由解析性可知，该公式在整个 R_6上都成立，这与另一条不平行边上的零迹相矛盾。

在开边上减去两个积分相等且具有紧支集的光滑凸起函数，得到f，其中 $\int f = 0$且 $\int f(\partial_\nu u)^2 > 0$。沿 tf的法向位移使面积恰好改变$t\int f = 0$，并在端点附近固定该边。

将 $f\nu$ 延拓为在其他边附近消失的光滑场 V，并通过$X \mapsto X + tV(X)$输运 u 。在 $t = 0$ 处，该商的导数是$(|\nabla u|^2 - \lambda u^2)$ div $V - 2\nabla u \cdot DV\, \nabla u$的积分。该被积函数是附录 A 中该场散度的相反数。其边界通量给出导数 $-\int f(\partial_\nu u)^2 < 0$。对于较小的 $t > 0$，该商将新的第一特征值严格界定在 λ之下。

不必填满区域的凸体。对于有界 Lipschitz 平面域 Ω，令$\mathcal{C}_k(\Omega)$ 表示由元组 $(K_1, \dots, K_k)$ 构成的集合，其中各凸体包含于 Ω 内，且彼此的内部不相交。我们取每个凸体内部 K_i° 上的狄利克雷特征值。这些凸体不必

填满 Ω。 对于每个 $p>0$，Bucur、Fragalà、Velichkov 和 Verzini 的定理 [8] 现在给出

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|\Omega|^p}{k^{p+1}}\inf_{(K_i)\in\mathcal{C}_k(\Omega)}\sum_{i=1}^{k}\lambda_1(K_i^\circ)^p=c_6^p,\qquad \lim_{k\to\infty}\frac{|\Omega|}{k}\inf_{(K_i)\in\mathcal{C}_k(\Omega)}\max_i\lambda_1(K_i^\circ)=c_6.$$

事实上， λ_1^p 在包含关系下递减，且按次数 $-2p$缩放。由定理 1.1 可知，其在单位面积的 j边多边形上的最小值为 c_j^p 。对于和的判据，要求对于任何平均值至多为六的边数列表 j_i ，$c_{j_i}^{p/(p+1)}$ 的平均值至少为$c_6^{p/(p+1)}$ 。这就是詹森不等式，其中所用函数是对定理 6.2 中 $\log c_j$ 的插值乘以 $p/(p+1)$ 后取指数得到的递减凸插值。对于最大值，同样的论证使用 c_j。无约束划分的尖锐谱下界仍未解决。

6.5. 直线切割与节点域。

推论 6.6 (连续直线切割所得的划分)。 设凸的 m边多边形 Ω 经反复直线切割划分为 k 个单元 $P_1,\dots,P_k$，每次切割均连接当前某个单元的两个边界点。设 C 为整数 $j\ge 3$对应的 $C(j)=c_j$ 的分段线性插值。那么

$$|\Omega|\max_i\lambda_1(P_i)\ge k\,C\!\left(4+\frac{m-4}{k}\right). \tag{6.6}$$

对于 $|\Omega|\lambda$ ，若特征值为 λ 的实狄利克雷特征函数有 k 个节点域，且其整个内部零集是有限条直线段的并集，同样的下界也成立。

证明。 每次切割都会增加两份切割线段，并至多将已有的两条边分开。因此，设 j_i 为 P_i的边数，则有 $\sum_i j_i\le m+4(k-1)$，包括穿过已有顶点的切割。根据定理 1.1 的证明， C 的斜率为 $-\Delta_{j+1}$，且均为负数并严格递增。由多边形不等式和詹森不等式可得

$$|\Omega|\max_i\lambda_1(P_i)\ge\sum_i\Phi(P_i)\ge\sum_i c_{j_i}\ge kC\!\left(\frac{1}{k}\sum_i j_i\right).$$

由于 C 递减，边数可证明 (6.6)。对于三角形，(6.6) 右侧为 $2\pi^2k+c_3-c_4$；对于四边形，则为 $2\pi^2k$。对于 $m\ge5$ 和 $k\ge m-4$，右侧为 $2\pi^2k-(m-4)(c_4-c_5)$。

对于节点陈述，令 u 为特征函数。函数 $(x,\ t)\mapsto u(x)\cosh(\sqrt{\lambda}\,t)$ 在 $\Omega\times\mathbb{R}$ 上是调和函数，因此 u 是实解析的。因此，它在一条包含内部零点线段的直线上的限制，会沿整条弦消失。依次插入这些弦，切割它们所穿过的每个单元。所得单元就是节点域。在每个节点域上，u 具有定号且零迹，因此 λ是其第一狄利克雷特征值。应用 (6.6) 即可证明节点界。□

在固定的凸多边形 Ω 上，为每个 $\lambda_j(\Omega)$ 选取一个实特征函数，并令 k_j 为其节点域的数量。沿着满足零点集假设的任意子序列 $j\to\infty$ ，韦伊定律 $\lambda_j(\Omega)/j\to 4\pi/|\Omega|$ 与 (6.6) 给出 $\limsup k_j/j\le 2/\pi$。

对于这个Weyl渐近公式，使用间距为 $\delta>0$的方形网格。包含于Ω中的正方形上的Dirichlet计数之和，为Ω上的Dirichlet计数提供下界。通过零延拓并沿网格线进行切割，与Ω相交的正方形上的Neumann计数之和为其提供上界。在四分之一圆盘中计算格点数量，可得到在任一条件下每个正方形中低于 λ的 $\delta^2\lambda/(4\pi)+O_\delta(\sqrt{\lambda}+1)$个特征值。除以 λ 并令 $\lambda\to\infty$。由于 $\delta\downarrow0$，内面积和外面积都趋于 $|\Omega|$。

在单位正方形上，对于每个正整数 ℓ，$\sin(\ell\pi x)\sin(\ell\pi y)$ 的特征值为 $2\pi^2\ell^2$ ，并且有 ℓ^2 个节点域。对于每个 ℓ ，它都取到 (6.6)；当 $\ell\to\infty$ 时达到极限常数。Polterovich 在平面节点计数中强调了这个常数，见备注 2.5]。

6.6. **混合谱的逆矩**。

推论 6.7 (混合谱ζ值)。 设 Q 为一个凸多边形，在一条边上满足狄利克雷条件，在其余边上满足诺伊曼条件。设与狄利克雷边相邻的两个内角之和为 $\pi-\gamma$，其中 $0<\gamma<\pi$。对于每个整数 $r\geq 2$，

$$\sum_{j\geq 1}\frac{1}{\left(|Q|\lambda_j^{\mathrm{DN}}(Q)\right)^r}\leq\sum_{j\geq 1}\frac{1}{\left(|I_\gamma|\lambda_j^{\mathrm{DN}}(I_\gamma)\right)^r}. \tag{6.7}$$

两个级数均收敛。对于任意一个 r ，等号成立当且仅当 Q 与具有对应狄利克雷边的 I_γ 相似。

证明。 使用命题 2.1 中的密度 p, p_* 。根据引理 2.2 中极化能量型与质量型（取第一变元为线性），令 T_p 满足带状区域上的 $E(T_p u, v) = M_p(u, v)$。变换 (2.2) 在整个型定义域上保持能量和归一化质量不变。由极小极大原理， T_p 的特征值为 $(|Q|\lambda_j^{\mathrm{DN}}(Q))^{-1}$。同样的构造也适用于 p_*。

为证明两个算子均为希尔伯特–施密特算子，将每个多边形进行三角剖分，并在每个三角形的所有边上施加诺伊曼条件。这会扩大型定义域，因此低于 $L>0$ 的混合特征值数量不超过各三角形上的诺伊曼计数之和。可逆仿射映射给出下界：每个三角形上的瑞利商不小于某个正常数乘以固定等腰直角三角形上的瑞利商。沿斜边作偶反射，可将后者的诺伊曼问题嵌入正方形。对正方形的余弦模态进行计数，可得每个计数均有一个与 $1+L$ 成正比的上界。因此，对于所有充分大的 j，两个多边形上的第 j 个混合特征值均有一个下界，该下界为某个正常数乘以 j 。所以特征值倒数的平方可和。

使用引理 2.2 的傅里叶系数 U_m。令 $\omega_m(\xi) = \xi^2 + (m+\frac{1}{2})^2$。能量为$\pi\sum_{\overline{m}}\int_{\mathbb{R}}\omega_m(\xi)|U_m(\xi)|^2\,d\xi$。将 U_m 乘以 $\sqrt{\pi\omega_m}$，可将能量空间与$\{0,\ 1,\ \ldots\}\times\overline{\mathbb{R}}$上的 L^2 识别。对于 $X=(m,\ \xi)$，在 m 上使用 dX 计数测度与在 ξ上的勒贝格测度的乘积。在这些坐标下，对于 $Y=(n,\ \eta)$， T_p 的核为

$$K_p(X,Y)=\frac{\widehat{p}(\eta-\xi,m-n)+\widehat{p}(\eta-\xi,m+n+1)}{2\pi^2\sqrt{\omega_m(\xi)\omega_n(\eta)}}.$$

在由有限个模态组成的集合和有界频率区间上，所显示的核是有界的。余弦乘积公式给出了它与该集合上有支集的任意两个测试函数之积的积分。此类乘积的有限和在变量对的 L^2 中稠密，因此该公式在其中几乎处处与希尔伯特–施密特核一致。通过穷尽可将该公式推广到整个空间。令 K_* 为以p替代 p_* 的核。命题 2.1 和 $\widehat{p}_*>0$给出 $|K_p(X,\ Y)|\leq K_*(X,\ Y)$。除非 Q与具有相应底边的 I_γ相似，否则对于每个 $X,\ Y$，该界都是严格的，因为角指标为$m+n+1$的频率非零。

对每个整数 $R\geq 1$，令 $\mathcal{X}_R=\{0,\ldots,R\}\times[-R,R]$，并令 P_R 为其示性函数的乘法算子。这些核在 $\mathcal{X}_R^2$ 上有界。复合并取迹，结合 $X_{r+1}=X_1$，得到

$$\operatorname{tr}\big((P_R T_p P_R)^r\big)=\int_{\mathcal{X}_R^r}\prod_{i=1}^{r}K_p(X_i,X_{i+1})\,dX_1\cdots dX_r.$$

对 $r=2$ ，迹是希尔伯特–施密特范数的平方。对 $r>2$，对 $(r-1)$ 次幂与最后一个因子的乘积使用迹公式。 K_* 的乘积给出上述被积函数实部的上界。当核不等式为严格不等式时，取实部后的差在 $(\{0\}\times[-1,1])^r$ 上已具有正积分。该差的这一下界与 R 无关。

当 $R\to\infty$时，截断核在 L^2 中收敛，因此相应算子按希尔伯特–施密特范数收敛。它们的 r 次幂按迹范数收敛。事实上，将幂之差展开为望远镜求和。在每一项中，对差因子和另一个因子使用希尔伯特–施密特范数估计，对其余因子使用算子范数估计。因此，迹不等式在取极限后仍成立，其中

在严格情形下，差严格为正。这就证明了 (6.7)。与相应基底相似的变换保留所有面积归一化特征值，并给出等号。□

对于共形半径固定的单连通平面域，Laugesen 和 Morpurgo 证明了，在每个大于 1 的实指数下，圆盘都使狄利克雷谱ζ函数取最小值 [26]。对于双连通膜，Laugesen 对边界分支上的狄利克雷条件和诺伊曼条件的两种分配取平均，并将该平均值的下界估计为具有给定模数和质量的圆柱所对应的值 [24, 定理 6]。对于加权圆柱，他在满足累积质量条件时，针对一种分配得到了一个下界 [25,定理 4]。推论 6.7 给出了在给定面积和底角之和的条件下，具有一条狄利克雷边的凸多边形的一个上界。

为恢复第一混合特征值不等式，将 $\mu_j = (|Q|\lambda_j^{\mathrm{DN}}(Q))^{-1}$ 按非递增顺序排列。对于整数 $r \geq 2$,

$$\mu_1^r \leq \sum_j \mu_j^r \leq \mu_1^{r-2} \sum_j \mu_j^2.$$

I_γ也满足相同的界。在 (6.7) 中取 r 次方根，并令 $r \to \infty$ 取遍整数，即可得到 (2.1)。特征值增长估计保证对于每个实数 $r > 1$，两个级数都收敛。这个比较对于非整数 $r > 1$ 也成立吗?

7. 总结

在面积为 1 时，Brasco、De Philippis 和 Velichkov 证明，圆盘的第一特征值与最接近的单位面积圆盘 [7] 之间的对称差面积的平方乘以某个常数，给出了第一特征值之上的超额项的下界。

多边形上的狄利克雷试函数限制到每个单元后，都是该单元上混合问题的可容许函数。此限制未必保持与基态正交。对于面积为 1 的 n 边形 P 和 R_n，当 R_n 正则时，固定 $j \geq 2$, $|\lambda_j(P) - \lambda_j(R_n)|$ 关于 $\lambda_1(P) - \lambda_1(R_n)$ 的最佳界是多少? 对于球，Bucur、Lamboley、Nahon 和 Prunier 得到了单个特征值以及簇上特征值之和的最佳界 [9]。

对于将一个固定的凸多边形划分为 N 多边形单元的划分，假设由（6.5）给出的归一化和$\mathcal{E}_N$比 c_6 低一个固定量，当 $N \to \infty$时，推论 6.5 便得到至少为 N 的正倍数个内部顶点，在这些顶点处两条边相交并改变方向。Caffarelli 和 Lin 的无约束问题允许曲线界面 [10]。在一个最优平面划分中，三条 $C^{1,\alpha}$ 弧在 120° 处相交，形成一个 Almgren 频率为 $3/2$的结点，这是 Ognibene 和 Velichkov 的定理 [29]所表明的。推论 6.5 后面的例子促使我们研究公共边的弯折如何改变两个相邻特征值之和。

附录 A. 三角形情形

我们采用 Fragalà 和 Velichkov [18, 定理 1.1]中的边界矩与反射论证。

命题 A.1（极小三角形）。 在具有给定正面积的三角形中，等边三角形在全等意义下唯一地使第一狄利克雷特征值达到最小。

证明。 面积为 A 、最长边长为 D 的三角形包含在宽度为 $2A/D$的带状区域内。对该带状区域应用狄利克雷不等式，得到 $\lambda_1 \geq \pi^2 D^2/(4A^2)$。因此，面积固定的极小化序列具有有界的直径。经过刚体运动并取一个子序列后，其顶点收敛到一个面积相同的三角形 T 的顶点。将 T 映射到该子序列中各三角形的仿射映射收敛于恒等映射。比较这些映射下的瑞利商，可证明 T 是极小化子。

任取一边作为底边，并将顶点记为 $(-b,0), (b,0), (t,h)$，其中 $b, h > 0$。设$u > 0$ 为基态，按 $\int_T u^2 = 1$ 归一化，并令 $\lambda = \lambda_1(T)$。记 ν 为每条开边上的外单位法向量。使底边绕其中点倾斜的变分，沿半径序列 $\rho \downarrow 0$，给出

$$\lim_{\rho \downarrow 0} \int_{-b+\rho}^{b-\rho} x\, u_y(x,0)^2\, dx = 0. \tag{A.1}$$

取在顶点处为零的仿射场 V，它使两个底边端点沿其关联腰移动，左侧竖直速度为 b，右侧为 $-b$。该场与两条腰相切，并在底边上满足 $V\cdot\nu = x$。其散度为常数且积分为零，故 $\operatorname{div} V = 0$。对小的 s，用 $X \mapsto X + sV(X)$ 输运 u。输运后的瑞利商乘以面积在 $s = 0$ 处取最小值，因为 Φ 是尺度不变的，且 T 使其最小化。面积与输运后的 L^2 质量的导数为零，因为 $\operatorname{div} V = 0$。对能量求导得到 $\int_T \nabla u\cdot\, DV\,\nabla u = 0$。该向量场

$$2(V\cdot\nabla u)\nabla u - |\nabla u|^2 V + \lambda u^2 V$$

根据特征值方程和散度 $2\nabla u\cdot\, DV\,\nabla u$，其具有散度 $V = 0$。在开边上，其法向分量为 $(V\cdot\nu)\,|\partial_\nu u|^2$。

为控制顶点附近的通量，设 B_r 为以该点为中心、半径为 r 的圆盘，并设 ℓ 为沿单位内向角平分线、从顶点量起的坐标。顶角小于 π，因此 ℓ 在距离顶点的距离的正倍数上下界之间。取一个小的 $T\cap B_r$，边界上的正弦函数的正倍数支配 $\sqrt{\lambda}\,\ell\,u$，并满足相同的方程。$T\cap B_r$ 的第一狄利克雷特征值严格大于 λ，因为若相等，则通过零延拓可在 T 上得到一个在开集上为零的基态。用其负部进行测试可证明，u 被某个常数乘以到顶点的距离所控制。

测试　将 u 乘以一个支撑在 B_{2r} 中且在 B_r 上等于一的截断函数的平方进行测试，得到

$$\int_{T\cap B_r} |\nabla u|^2 \le C(r^{-2}+\lambda)\int_{T\cap B_{2r}} u^2 = O(r^2),$$

其中 C 与 r无关。对 r 与 $2r$之间三个具有相同半径的圆弧上 $|\nabla u|^2$ 的积分求和，再取平均。在一个公共序列 $\rho\downarrow 0$上，半径为 ρ 的圆弧上的和为 $O(\rho)$，且穿过这些圆弧的通量趋于零。对去掉三个角部圆盘后的三角形上的散度进行积分，即可证明（A.1）。

若 $t>0$是高度为 y 的水平切片的中点，则当 $0<y<h$时，其水平坐标为 $ty/h>0$。因此，关于 $x=0$ 的反射将 $T\cap\{x<0\}$映射到 T，并将其开斜边映入内部。在 $T\cap\{x<0\}$上，差值 $w(x,y) = u(-x,y) - u(x,y)$满足 $-\Delta w = \lambda w$，其边界值非负，并且在开斜边上严格为正。严格区域单调性和负部检验给出 $w\ge 0$，而强最大值原理给出 $w>0$。在底边上对 w 和 u应用 Hopf 引理，得到$u_y(x,0) > u_y(-x,0) > 0$，其中 $0<x<b$。于是，对于任意固定的、长度为正的$(0,b)$闭子区间，当 ρ充分小时，(A.1)中的矩可由 $x[u_y(x,0)^2 - u_y(-x,0)^2]$ 在该区间上的积分从下方估计。该积分为正，与（A.1）矛盾。反射还排除了$t<0$。因此，对边的相反顶点位于每条边的垂直平分线上，且每个极小化子都是等边三角形。□

附录 B. 两个随机点的卷积恒等式

设 Q 如命题 2.1 中所述，其底角为 πa，πb 和 $q = 1-a-b$。采用该命题中的密度p，p_*，定义在 $\mathcal{C}$ 上，并采用第 2 节中的测度 $d\mu$。在 Q 中选取两个独立均匀点。对每个具有条带坐标 (x,t) 的点，以相同概率将 t 替换为 t 或 $-t$，且对两个点独立进行。由此得到的每个 $\mathcal{C}$ 上的点，其密度为 p。对于 $\mathcal{C}$ 上的任意密度 f，记 $\check{f}(x,t) = f(-x,-t)$。两点之差在角坐标中模 2π 计算，其密度为 $p * \check{p}$。

对于 $v>0$，令 $h(v) = (e^{-av/2} - e^{-bv/2})^2(1-e^{-qv})/[v(1-e^{-v})]$。这是在零点处的 $O(v)$，并且在无穷远处呈指数衰减。设 K_v 为水平平移 $v/2$ 或 $-v/2$（二者概率相等）以及独立角平移所对应的分布。其角密度为泊松核 $(1-\rho^2)/(1-2\rho\cos\theta+\rho^2)$，其中 $d\theta/(2\pi)$，且 $\rho = e^{-v/2}$。傅里叶级数给出$\widehat{K_v}(\xi,\ k) = e^{-|k|v/2}\cos(\xi v/2)$。

设 $M = \int_0^\infty 2h(v)K_v\,dv$。记 M^{*j}为其 j 重卷积，其中 M^{*0}为原点处的点质量。则 $\Pi = e^{-M(\mathcal{C})}\sum_{j\ge 0} M^{*j}/j!$ 是一个概率测度，其变换为 $\exp[-2\int_0^\infty h(v)(1-\widehat{K_v})\,dv]$。设 ν为 (2.3) 中的概率测度，$\check{\nu}$为其在

$(x,t)\mapsto(-x,-t)$。方程 (2.6) 给出 $|\widehat{p}_{a,b}|^2=\widehat{p_**\check{}}\,\widehat{p_*\Pi}$。由 (2.3) 及傅里叶变换的唯一性，

$$p*\check{p}=(p_**\check{p}_*)*(\nu*\check{\nu})*\Pi. \tag{B.1}$$

因此，该差与等腰三角形相应差服从同一分布，并附加了分布分别为 $\nu*\check{\nu}$ 与 Π 的独立平移。第 2 节中的特征值比较对 p 本身使用了傅里叶界。

人工智能工具的使用

本文使用 OpenAI 的 ChatGPT 来发展傅里叶比较与多边形划分论证的部分内容，核验中间估计与等式情形，检索文献并修订文本。作者对本论文的数学结果与文本负全部责任。

参考文献

[1] P. 安图内斯和 P. 弗雷塔斯。《平面区域狄利克雷主特征值的新界》。Exp. Math. **15** 2006 333 342 10 1080 10586458 2006 10128966 ( ), – . doi: . / . .

[2] D. Berghaus、B. Georgiev、H. Monien 和 D. Radchenko。《正多边形的狄利克雷特征值》。J. Math. Anal. Appl. **538** 2024 2, 128460 10 1016 2024 128460 ( ), no. article . doi: . /j.jmaa. .

[3] B. Bogosel 和 D. Bucur。《多边形法布尔 – 克拉恩不等式》。J. Éc. polytech. Math. 11 (2024), 19–105. doi: 10 5802 250 . /jep. B. Bogosel 和 D. Bucur。《多边形法布尔–克拉恩不等式：通过验证计算证明局部极小性》。Commun. Contemp. Math. (2026 2650074 10 1142 0219199726500744), article . doi: . /S

[4] B. Bogosel、D. Bucur 和 I. Fragalà。《证明多边形扭转刚度局部版的 Pólya–Szegő 猜想》。预印本, 2026 2609 23051 。arXiv: .

[5] B. Bogosel、D. Bucur 和 I. Fragalà。《证明 Pólya–Szegő 猜想的多边形圣维南不等式》。预印本, 2026 2611 24573 。arXiv: .

[6] L. Brasco、G. De Philippis 和 B. Velichkov。《尖锐定量形式的法贝尔–克拉恩不等式》。Duke Math. J. **164** 2015 9, 1777 1831 10 1215 00127094 3120167 ( ), no. – . doi: . / - D. Bucur、I. Fragalà、B. Velichkov 和 G. Verzini。《关于一类极小凸划分的蜂窝猜想》。Trans. Amer. Math. Soc. **370** 2018 10, 7149 7179 10 1090 7326 ( ), no. – . doi: . /tran/ D. Bucur、J. Lamboley、M. Nahon 和 R. Prunier。《球附近狄利克雷谱的尖锐定量稳定性》。Comm. Pure Appl. Math. **79** 2026 4, 827 896 10 1002 70021 ( ), no. – . doi: . /cpa. L. A. Caffarelli 和 F.-H. Lin。《特征值的最优划分问题》。J. Sci. Comput. 31 (2007), nos. 1 2, 5 18 10 1007 10915 006 9114 8 – – . doi: . / s - - - L. A. Caffarelli 和 F.-H. Lin。《奇异摄动椭圆系统及具有自由边界的多值调和函数》。J. Amer. Math. Soc. **21** 2008 3, 847 862 10 1090 0894 0347 08 00593 6 ( ), no. – . doi: . /S - - - -

[7] A. Cesaroni 、 I. Fragalà 和 M. Novaga。《关于周期凸镶嵌中的蜂窝最优性》。J. Convex Anal. **33** 2026 1 2, 421 428 10 68381 33026 ( ), nos. – – . doi: . /jca Z. Cheng、C. Gui、Y. 胡和 Q. Li。《多边较多的凸多边形的 Pólya–Szegő 猜想》。预印本, 2026 2609 18500 。arXiv: .

[8] J. Dahne、J. Gómez-Serrano 和 J. Pech-Alberich。《正多边形第一狄利克雷特征值的单调性》。即将发表于 Found. Comput. Math.。arXiv: 2601 16285 2 。

[9] v T. A. Driscoll 和 L. N. Trefethen。《施瓦茨–克里斯托费尔映射》。应用与计算数学剑桥专著，第 8 卷。剑桥大学出版社，2002。数字版，doi: 10.1017/ CBO9780511546808

[10] G. Faber。《证明：在所有面积和张力相同的均匀膜中，圆形膜产生的基音最低》。Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Phys. Kl. (1923), 169–172. https://publikationen.badw.de/de/ 003399311

[11] D. Faifman 和 I. Polterovich。《凸体的法贝尔–克拉恩位置与高斯测度不等式》。预印本, 2026 2607 21539 。arXiv: .

[12] I. Fragalà 和 B. Velichkov。《三角形的塞林型定理》。Proc. Amer. Math. Soc. 147 4, 1615 2019 1626 10 1090 ( ), no. – . doi: . /proc/ 14352

[13] m Z. Geng 和 F. Lin。《狄利克雷特征值极小划分的大尺度渐近行为》。Sci. China Math. **65** 2022 1, 1 8 10 1007 11425 020 1802 6 ( ), no. – . doi: . /s - - -

[14] P. Grinfeld 和 G. Strang。《正多边形上的拉普拉斯特征值：傅里叶空间中的级数》。J. Math. Anal. Appl. **385** 2012 1, 135 149 10 1016 2011 06 035 ( ), no. – . doi: . /j.jmaa. . .

[15] T. C. Hales。《蜂窝猜想》。Discrete Comput. Geom. 25 (2001), no. 1, 1–22. doi: 10.1007/ s004540010071

[16] E. Indrei。《多边形上的拉普拉斯算子第一特征值》。J. Math. Phys. 65 (2024), article 041506. doi: 10.1063/5.0179618

[23] E. Krahn。《关于瑞利提出的圆的极小性质》。Math. Ann. 94 (1925), 97–100. doi: 10 1007 01208645 . /BF
R. S. Laugesen。《共形映射下具有混合边界条件的拉普拉斯算子特征值》。《伊利诺伊数学杂志》[24]
42 1998 1, 19 39 10 1215 1255985611 ( ), no. – . doi: . /ijm/ R. S. Laugesen。《具有可变质
量密度的弦和圆柱的特征值》。《分析与几何通讯》8 (2000 2, 393 443 10 4310 2000 8 2 6), no. – .[25]
doi: . /CAG. .v .n .a R. S. Laugesen 和 C. Morpurgo。《共形映射下拉普拉斯算子特征值的极值函数》。《泛函分析杂志》[26]
155 1998 1, 64 108 10 1006 1997 3222 ( ), no. – . doi: . /jfan. . E. Lenzmann 和 J. Sok。《傅
里叶空间中的尖锐重排原理及任意阶偏微分方程的对称性结果》。《国际数学研究通知》2021 (2021), no. 19, 15040–15081.[27]
doi: 10.1093/imrn/ rnz274[28] R. Ognibene 和 B. Velichkov。《最优分割问题综述》。La Mat. 5 (2026), article 6. doi:
10 1007 44007 025 00176 8 . /s - - - R. Ognibene 和 B. Velichkov。《调和映射和最优划分问题中三重交点奇异性附近
自由界面的结构》。《理性力学与分析文献》250 (2026), no. 5, article 77. doi: 10.1007/ s00205-026-02221-4[29][30] I.
Polterovich。《自由膜的 Pleijel 节点域定理》。Proc. Amer. Math. Soc. 137 (2009), no.
3, 1021 1024 10 1090 0002 9939 08 09596 8 – . doi: . /S - - - - G. Pólya。《扭转刚度、基频、静电容量与对称化》。
《应用数学季刊》 **6** 1948 267 277 10 1090 26817 ( ), – . doi: . /qam/ G. Pólya 和 G. Szegő。《数理物理[31]
中的等周不等式》。[32]《数学年刊研究丛书》，第
27 1951 10 1515 9781400882663 卷。普林斯顿大学出版社，。数字
版，doi: . / A. Yu. Solynin 和 V. A. Zalgaller。《多边形对数容量的等周不等式》。《数学年刊》([33]
2 **159** 2004 1, 277 303 10 4007 2004 159 277) ( ), no. – . doi: . /annals. . . H. Wang。《多边
形的 Pólya–Szegő 不等式》。预印本，。arXiv:2611.22305[34] 2026

数学与统计学院 ，南方学院 ，广州 ，510970 广东 ，中国。
电子邮箱地址： yutianlee@gmail.com