arXiv:2611.27972v1 [math.QA] 20 Nov 2026

编织融合范畴中弱整数对象的局部化

CÉSAR GALINDO

摘要。若编织融合范畴中的对象 X 的 FP 维数 FPdim$(X)^2$ 是整数，则称其为弱整对象。我们证明，每个非零弱整对象都存在局部化，即存在有限维向量空间 W 上的杨–巴克斯特算子 R，使得对于每个 n，从辫群 B_n 的群代数到 End$(W^{\otimes n})$ 和 End$(X^{\otimes n})$ 的代数同态分别由 R 和编织定义，且二者具有相同的核。当编织融合范畴是酉的时，算子 R 可以取为酉算子。这证明了 Rowell 和 Wang 提出的一个猜想的"若"方向。该猜想由拓扑量子计算引发，断言简单对象存在局部化，当且仅当它是弱整对象。对于酉编织融合范畴中的简单弱整数对象，我们构造的算子 R 具有 Turaev 意义下的增强结构，由此得到的纽结不变量是以 X 着色的纽结的 Reshetikhin–Turaev 不变量。

1. 引言

在拓扑量子计算中，信息存储于一组任意子的态空间中，并通过交换它们来处理 [Kit03, FKLW03, NSS+08, RW18]。在代数模型中，任意子的类型是幺正编织融合范畴$\mathcal{C}$中的简单对象。n 个类型为 X 、总荷为 Y 的任意子的态空间是 Hom$_{\mathcal{C}}(Y, X^{\otimes n})$，而位置 i 和 $i+1$ 上的任意子的交换通过编织$c_{X,X}$作用于该空间。这些交换定义了辫群 B_n 在 Hom$_{\mathcal{C}}(Y, X^{\otimes n})$上的一个表示，其矩阵就是计算中的门。

量子电路模型的组织方式有所不同。其态空间是固定有限维希尔伯特空间 W的张量幂 $W^{\otimes n}$，每个基本门作用于数量有界的因子上。这种形式的辫群表示中，每个生成元都通过同一个算子作用于两个相邻因子，它由杨–巴克斯特算子给出。向量空间 W 上的杨–巴克斯特算子 是一个可逆线性算子 R，作用于 $W \otimes W$，满足

$$(R \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes R)(R \otimes \mathrm{id}_W) = (\mathrm{id}_W \otimes R)(R \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes R).$$

它通过以下方式在 $W^{\otimes n}$ 上定义了 ρ_n^R B_n 的表示

$$\rho_n^R(\sigma_i) := \mathrm{id}_W^{\otimes(i-1)} \otimes R \otimes \mathrm{id}_W^{\otimes(n-i-1)}, \qquad 1 \le i \le n-1.$$

我们称该表示是 ρ_n^R局部的，这是因为每个生成元 σ_i 只作用于 $W^{\otimes n}$ 的两个相邻因子上，并且所有生成元都通过同一个算子 R 作用。由任意子产生的表示并没有任何显而易见的局部性，因为这些空间

Hom$_{\mathcal{C}}(Y,\ X^{\otimes n})$ 不是固定向量空间的张量幂。它们的维数 $a_{n,\ Y}$:= dim Hom$_{\mathcal{C}}(Y,\ X^{\otimes n})$ 满足 $\sum_Y a_{n,\ Y}$ FPdim(Y) $= d^n$，其中求和遍历简单对象 Y 和 d :=FPdim(X) 是 X 的 Frobenius–Perron维数，即该任意子的量子维数。数 d 很少是整数。例如，对于斐波那契任意子， d 是黄金比例，而数 $a_{n,\ Y}$ 是斐波那契数。

Rowell 和 Wang 提出，任意子 X 的辫群表示何时仍可由杨–巴克斯特算子 [RW12]实现。表示 ρ_n^R 在 $W^{\otimes n}$ 上的表示，以及

日期：2026年11月。2020 数学主题分类。18M20, 18M15, 20F36, 16T25, 57K16,81P68。关键词和短语。编织融合范畴、辫群表示、杨–巴克斯特算子、局部化、Frobenius–Perron维数、弱整、Turaev 增强、拓扑量子计算。

B_n 在空间 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X^{\otimes n})$上的表示通常并不同构，因为它们的维数不同。要求可以更弱。对于每个 n，表示 ρ_n^R 在 $W^{\otimes n}$ 上必须包含与空间 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X^{\otimes n})$的直和相同的 B_n 的不可约表示；其中 Y遍历简单对象，且这些不可约表示的重数可以不同，并且每个 n都必须使用相同的算子 R 。在这种情况下，凡是在空间 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X^{\otimes n})$中出现的 B_n 的不可约表示，都能在 $W^{\otimes n}$中实现；基本交换通过对两个相邻张量因子 [施加同一个门 R 来实现。RW18，定义 5.2]。关于一般情况下用量子电路模拟拓扑量子场论，参见 [FKW02]。

其精确定义如下。本文中，融合范畴均定义在 $\mathbb{C}$上。设 X是编织融合范畴$\mathcal{C}$中的一个对象，并令

$$\rho_n^X : \mathbb{C}B_n \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X^{\otimes n}), \qquad \sigma_i \longmapsto \mathrm{id}_X^{\otimes(i-1)} \otimes c_{X,X} \otimes \mathrm{id}_X^{\otimes(n-i-1)}$$

为由编织定义的代数同态。 X 的一个局部化是一个二元组 (W, R)，其中W 是一个非零有限维向量空间， R 是作用于 W上的杨–巴克斯特算子，并且对每个 $n \geq 2$ ，都存在一个单射代数同态 ϕ_n ，将 ρ_n^X的像映到 $\mathrm{End}(W^{\otimes n})$，满足 $\phi_n \circ \rho_n^X = \rho_n^R$ [RW12，定义 2.3], [GHR13，定义 1.2]。等价地，对于每个 $n \geq 2$， ρ_n^X 和 ρ_n^R在群代数 $\mathbb{C}B_n$ 中具有相同的核。在酉情形下，由于这些表示完全可约，这意味着 $W^{\otimes n}$ 与空间 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X^{\otimes n})$的直和包含相同的 B_n的不可约表示。当W 是希尔伯特空间且 R 是酉算子时，该局部化称为酉局部化。可局部化的对象称为可局域化对象。

猜想 1.1 (Rowell–Wang)。 设 X 是编织融合范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个简单对象。

(a) 对象 X 可局域化，当且仅当 $\mathrm{FPdim}(X)^2$ 是一个整数 [RW12，猜想 4。1]。(b) 如果$\mathcal{C}$ 是酉的，那么 X 可进行酉局部化，当且仅当 $\mathrm{FPdim}(X)^2$ 是一个整数[RW18，猜想 6。3]。

我们称融合范畴中的对象 X 为 弱整的，如果$\mathrm{FPdim}(X)^2$ 是一个整数。编织融合范畴中的一个简单对象是弱整的，当且仅当它生成的融合子范畴是弱整的，也就是说，其 Frobenius–Perron维数是一个整数（引理 4.1）。用这些术语来说，该猜想表明，可局域化的任意子正是弱整的任意子。

猜想 1.1 的 (a) 部分见于 [RW12] ，适用于不一定是酉的编织融合范畴；我们采用其代数表述，来自 [GHR13，猜想 1.4]。关于猜想 1.1 的 (b) 部分，另见 [GR26，猜想 1.2]。下面两个例子说明了这一陈述。伊辛任意子 σ 的 $d = \sqrt{2}$ 具有维数为 2 [的酉局部化 12]FRW06, RW12]。斐波那契任意子 τ 的 d^2 不是整数，因此不具有局部化。事实上，其辫群像生成代数 $\mathrm{End}(\tau^{\otimes n})$ [DRW16，第 6 节，2], 而该结论由 [RW12，定理 4.5] 得出。

这个猜想是对这样一类任意子的刻画的一部分：仅凭它们的编织门并不能实现通用量子计算。对于琼斯表示，也就是编织融合范畴 $SU(2)_k$ 中生成元简单对象的辫群表示，Rowell 和 Wang 证明，只有在级别 $k = 1$、2 和 4 时才存在酉局部化，而这些也正是仅凭编织无法实现通用量子计算的唯一级别 [RW12]。一般而言，性质 F 猜想预言，简单对象 X 的辫群像 $\rho_n^X(B_n)$ 对每个 $n \geq 2$ 都是有限的，当且仅当 X 是弱整的 [NR11], [RW18，猜想 6.2]。Rowell 和 Wang 还猜想，有限阶酉杨–巴克斯特算子具有有限辫群像（模去标量） [RW12，猜想 3.1], ，并提出猜想 1.1，将这两个陈述联系起来。对于性质 F 猜想，当由 X 生成的融合子范畴是弱群论的情形，有限性已得到证明 [GN21，定理 7.2]。反过来，当编织融合范畴是伪酉的 [LR26，推论 1.2], ，以及当由 X 生成的融合子范畴是非退化且枢轴的，或具有

伪酉伽罗瓦共轭 [ABDC+26，推论 5。6]。这些结果讨论的是有限像。每个可局部化单对象是否都是弱整的，仍是一个未解问题。

已有两个一般性结果。Rowell 和 Wang 证明了“仅当”方向：当辫群的像生成代数 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X^{\otimes n})$ 对每个 $n \geq 2$ [RW12，定理 4。5]；另见 [GHR13，定理 6。3]。另一方面，半单拟三角霍普夫代数的有限维表示可由其编织局部化，其中编织被视为底向量空间张量平方上的算子 [GHR13，命题 4。17]，在这种情况下，对象的 Frobenius–Perron 维数是整数。对于非整数维数的对象，已知的局部化仅存在于特定族中 [FRW06、RW12、GR26]。一般而言，人们只实现了较弱的概念，例如 [GHR13，定义 4.20 和命题 4。21]，中的弱局部化，其中向量空间的张量幂被半单代数上的双模的张量幂所取代。

局部化定理。我们证明猜想 1.1 两部分的“若”方向。充分性结论对任意非零对象都成立。猜想 1.1 的逆命题对简单对象仍未解决，我们不予讨论。对于非简单对象，该条件并非必要。事实上，若 (W, R) 是对象 Y 的局部化，则 $\mathbf{1} \oplus Y$ 可由 $\mathbb{C} \oplus W$ 局部化，所用算子在 $W \otimes W$ 上作用为 R，在 $(\mathbb{C} \oplus W)^{\otimes 2}$ 的其他三个直和项上作用为交换算子；这是一个杨–巴克斯特算子 [GR26，命题 3.8]。其原因是，这两个张量幂都分解为由位置集合 S 标记的直和项，其中这些位置分别被 Y 和 W 占据；在这两种情况下，辫子 b 都会将 S 的直和项映到 S 在 b 的置换下的像所对应的直和项，这由从 b 中删除其他弦后得到的辫子实现。对于伊辛任意子，这给出了 $\mathbf{1} \oplus \sigma$ 的一个酉局部化，其维数为 3，而 FP 维数$(\mathbf{1} \oplus \sigma)^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ 不是整数。 –

定理 1.2。 设 X 是编织融合范畴 $\mathcal{C}$ 中的非零弱整对象。那么 X 存在局部化。若 $\mathcal{C}$ 是酉的，则 X 存在酉局部化。

推论 1.3。 设 $\mathcal{C}$ 是一个编织融合范畴。

(a) 若$\mathcal{C}$ 是酉且弱整的，则 $\mathcal{C}$ 的每个简单对象都存在酉局部化。(b) 若 X 是 $\mathcal{C}$ 中的简单对象，且由 X 生成的融合子范畴是弱群论的 [EGNO15，定义 9.8。1]，那么 X 存在酉局部化。特别地，若 $\mathcal{C}$ 是弱群论的，则 $\mathcal{C}$ 的每个简单对象都存在酉局部化。

推论1.3的 (b) 部分中，编织融合范畴$\mathcal{C}$ 并未假设为酉范畴。更一般地，只要由 X 生成的融合子范畴 $X \otimes X^*$ 与某个酉融合范畴张量等价，非零弱整对象 X 就存在酉局部化（推论 5.6）。

我们构造的算子 R 具有有限阶（注5.7）。因此，对于酉$\mathcal{C}$，Rowell 和 Wang 关于有限阶酉杨–巴克斯特算子的猜想如今将意味着群 $\rho_n^X(B_n)$ 对每个弱整对象 X都是有限群，正如性质 F 猜想所预言的那样。结合 [LR26、推论 1.2]，，便可得出酉编织融合范畴中简单对象的性质 F 猜想。

主要构造。一般而言， ρ_n^X的像是自同态代数 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X^{\otimes n})$的真子代数。我们通过在$W^{\otimes n}$上表示整个自同态代数来证明定理1.2，对每个 n，使两个自同态的张量积映射为相应算子的张量积。定理1.4给出了精确表述。

定理 1.4。 设 X 是编织融合范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个非零对象。令 d: =FP 维数(X) 且E_n : $= \mathrm{End}_{\mathcal{C}}($ $X^{\otimes n})$，并令 A 为由 $X \otimes X^*$生成的 $\mathcal{C}$ 的融合子范畴。假设 d^2是一个整数。那么 m : $= d^2$FP 维数(A) 是一个整数，并且存在一个维数为m 的向量空间 W 以及单射含幺代数同态 Φ_n : $E_n \to \mathrm{End}(W^{\otimes n})$、 $n \geq 1$，满足以下性质。

(a) 对于所有 n、$k \geq 1$、$f \in E_n$ 和 $g \in E_k$,

$$\Phi_{n+k}(f \otimes g) = \Phi_n(f) \otimes \Phi_k(g). \tag{1.1}$$

(b) 通过 Φ_n将 $W^{\otimes n}$ 视为一个 E_n-模。对于 $X^{\otimes n}$的每个简单成分 Y，单模 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X^{\otimes n})$ 以重数 $(m/d)^n \,\mathrm{FPdim}(Y)$出现在 $W^{\otimes n}$ 中。因此,

$$m^{-n}\,\mathrm{tr}(\Phi_n(f)) = d^{-n}\,\mathrm{Tr}(f), \qquad f \in E_n, \tag{1.2}$$

其中 tr 表示线性映射的迹，而Tr 表示由 X (第 2.2节)生成的融合子范畴的典范球面结构的迹。

(c) 如果 $\boldsymbol{C}$ 是酉的，那么 W 具有一个内积，并且可以选择同态 Φ_n，使得对于所有 $n \geq 1$和 $f \in E_n$, $\Phi_n(f^*) = \Phi_n(f)^*$。

定理 1.2 通过取 $R := \Phi_2(c_{X,\,X})$即可得到。由（1.1），我们有

$$\Phi_n(\rho_n^X(\sigma_i)) = \mathrm{id}_W^{\otimes(i-1)} \otimes R \otimes \mathrm{id}_W^{\otimes(n-i-1)} = \rho_n^R(\sigma_i), \qquad 1 \leq i \leq n-1.$$

情形 $n = 3$ 给出 Yang–Baxter 方程，而将单同态 Φ_n 限制在 ρ_n^X的像上，便得到局部化定义中所需的同态（引理2.4）。定理1.4 的 (b) 部分将 $W^{\otimes n}$ 描述为 E_n上的一个模。它是各个空间 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,$ $X^{\otimes n})$ 的直和，其中 Y遍历 $X^{\otimes n}$ 的简单成分；空间 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X^{\otimes n})$ 重复出现 $(m/d)^n\mathrm{FP}$ 维数(Y) 次。沿着 ρ_n^X限制这一分解，得到 $W^{\otimes n}$ 作为 B_n的表示的一个分解。对于两个不同的简单对象 Y 和 $Y\prime$，空间 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X^{\otimes n})$ 与 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y\prime X^{\otimes n})$ 作为 B_n的表示，可能具有公共的不可约成分；此时，它们的重数相加。

如果由 X 生成的融合子范畴具有纤维函子，也就是说，存在一个到向量空间范畴的张量函子，那么该函子将给出同态 Φ_n，满足 维数 $W = d$，如 [GHR13，命题 4 所示。17]。只有当 d是整数时，纤维函子才存在。定理 1.4中的同态仅定义在 X的张量幂的自同态上，并且未必来自张量函子。

该构造包含两个要素。首先，将 X 的每个副本与其对偶的一个副本配对。对象 $X \otimes X^*$ 的维数为 d^2；当 d^2 是整数时，由 $\mathcal{A}$ 生成的融合子范畴 $X \otimes X^*$ 是整的，也就是说，其中每个对象的 Frobenius–Perron维数都是整数。编织使我们能够将 X 在 $(X \otimes X^*)^{\otimes n}$ 中的各个副本移到一起，施加 $f \in E_n$，再将它们放回原位。由此得到同态 $E_n \to \mathrm{End}_{\mathcal{A}}((X \otimes X^*)^{\otimes n})$，它们与张量积相容（第4节）。

第二个组成部分是整融合范畴$\mathcal{A}$的正则对象,

$$R_{\mathcal{A}} := \bigoplus_Y \mathrm{FPdim}(Y)\, Y,$$

其中 Y遍历$\mathcal{A}$ 的简单对象，而 $\mathrm{FPdim}(Y)\,Y$表示 Y的 $\mathrm{FPdim}(Y)$个副本的直和。它满足

$$V \otimes R_{\mathcal{A}} \cong \mathrm{FPdim}(V)\, R_{\mathcal{A}}$$

对每个对象 V（属于 $\mathcal{A}$）而言。 $R_{\mathcal{A}}$在 $V \otimes R_{\mathcal{A}}$中的副本由空间 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(R_{\mathcal{A}}, V)$参数化，其维数为 $\mathrm{FPdim}(V)$，而单个态射 $\delta\colon R_{\mathcal{A}} \to R_{\mathcal{A}} \otimes R_{\mathcal{A}}$即可同时为每个 V提供这种参数化（引理3.1）。这一选择给出了同态

$$\mathrm{End}_{\mathcal{A}}((X \otimes X^*)^{\otimes n}) \longrightarrow \mathrm{End}(W^{\otimes n}), \qquad W := \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(R_{\mathcal{A}}, X \otimes X^* \otimes R_{\mathcal{A}}),$$

再次与张量积相容（第3节）的同态 Φ_n 是复合态射。对于定理1.4的（b）部分，该构造将 $W^{\otimes n}$ 识别为进入 $X^{\otimes n} \otimes (X^*)^{\otimes n} \otimes R_{\mathcal{A}}^{\otimes n}$的态射空间，其中 E_n通过第一个因子作用。将 $X^{\otimes n}$分解为简单对象后，就得到承载每个重数的空间，而其维数是 Frobenius–Perron维数的乘积。

纽结不变量。促使 Rowell 和 Wang 研究局部化的问题之一，是酉杨–巴克斯特算子是否能够通过加权迹产生单位根处的琼斯多项式值，因为这种算子为在量子电路模型中近似这些值提供了直接方法 [RW12]。Turaev 证明，当杨–巴克斯特算子 R 具有增强结构时，即存在算子 μ作用于 W，以及两个标量，使得迹$\mathrm{tr}(\rho_n^R(b)\,\mu^{\otimes n})$经过适当归一化后，在马尔可夫变换 [Tur88]下保持不变时，它就给出一个链环不变量。对于幺正编织融合范畴中的简单弱整数对象 X，由定理 $R=\Phi_2(c_{X,X})$ 1.4得到的算子 具有一个增强结构，其中包含标量算子 μ，所得不变量就是由 X着色的纽结的 Reshetikhin–Turaev 不变量。

对于维数为 m 的希尔伯特空间 W，我们用 $\tau_n := m^{-n}\mathrm{tr}$ 表示 $\mathrm{End}(W^{\otimes n})$ 上的归一化迹，并用 $\mathrm{id}\otimes\tau_1$ 和 $\tau_1\otimes\mathrm{id}$ 表示将 $x\otimes y$ 映射为 $\tau_1(y)\,x$ 以及映射为 $\tau_1(x)\,y$ 的线性映射 $\mathrm{End}(W\otimes W)\to\mathrm{End}(W)$。在这些表达式中，id 是 $\mathrm{End}(W)$ 的恒等映射。

定理 1.5。设 X 是幺正编织融合范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个简单对象，令 $d:=$FP 维数(X)，并假设 d^2 是一个整数。令 θ_X 为由 X (第 2.4节）生成的融合子范畴的典范带状结构中 X 的扭结。令 W 为维数为 m 的希尔伯特空间，Φ_n 为定理 1.4(c) 中的同态，并令 $R:=\Phi_2(c_{X,X})$。

(a) $R^{\pm1}$ 的归一化偏迹是标量算子

$$(\mathrm{id}\otimes\tau_1)(R^{\pm1})=(\tau_1\otimes\mathrm{id})(R^{\pm1})=\theta_X^{\pm1}d^{-1}\mathrm{id}_W.$$

特别是，$\tau_2(R)=\theta_X/d$，而算子 R 决定了 $d=|\tau_2(R)|^{-1}$ 和 $\theta_X=d\,\tau_2(R)$。

(b) 四元组 $(R,(d/m)\mathrm{id}_W,\theta_X,1)$ 是 *Turaev* 意义下的增强杨-巴克斯特算子$\widehat{\ }Turaev$ [Tur88]。若 $b\in B_n$ 是一个闭包 b 为纽结的辫子，那么

$$\mathrm{RT}_X(\widehat{b})=\theta_X^{-w(b)}\Big(\frac{d}{m}\Big)^n\,\mathrm{tr}\big(\rho_n^R(b)\big), \tag{1.3}$$

$\widehat{\ }$其中 $w(b)$ 是 b 的指数和，而 $\mathrm{RT}_X(b)$ 是由 X着色的$\widehat{\ }$零框架纽结 b 的 *Reshetikhin–Turaev* 不变量，其在平凡纽结上的取值为 d。

证明仅用到同态 Φ_n的性质 (1.1)、(1.2) 和 $\Phi_n(f^*)=\Phi_n(f)^*$。纽结公式由迹恒等式 (1.2) 得出。对于定理 1.5 的 (a) 部分，我们利用在辫子的闭包上添加一个扭结会使归一化迹乘以 $\theta_X^{\pm1}/d$ 这一事实（图 12）。这就是表示 ρ_n^R的归一化迹的马尔可夫性质；根据 Lechner 的判据，它意味着 R 在第一个因子上的偏迹是标量算子 $\theta_X d^{-1}\mathrm{id}_W$[Lec26, 命题 2.3]。根据 Conti 和 Lechner 的定理，酉杨–巴克斯特算子的两个偏迹相同 [CL21, 定理 5.10(a)]。

本文结构如下。第2 节回顾我们所使用的概念。第3节包含整融合范畴正则对象的构造，第4节将 X 的每个副本与 X^* 的一个副本配对，并证明定理1.4的（a）和（b）两部分。第5 节处理酉情形，并完成定理1.2与1.4以及推论1.3的证明。第6节证明定理1.5。对于可在arXiv上获得的文章，所引陈述的编号均为参考文献中所标明的arXiv版本中的编号。

2. 预备知识

本节固定记号，并回顾本文所用的关于融合范畴的事实。反复使用的陈述包括正则对象的同构（2.1）、对象的自同态代数的描述（2.3）以及迹公式（引理2.2）。第2.6小节包含局部化的定义以及引理2.4，该引理将定理1.2归结为同态 Φ_n （定理1.4）的构造。

我们在 $\mathbb{C}$ 上工作，并用 Vec 表示有限维复向量空间范畴。我们省略张量积的括号，并利用凝聚同构来认定不同的

括号方式 [EGNO15，定理 2.8.5 和 2.9。2]。在酉融合范畴中，这些识别是酉的。特别地，通过改变括号方式共轭一个自同态会保持伴随。对于每个对象 V 我们置 $V^{\otimes 0} := \mathbf{1}$。

2.1. 融合范畴。设 C 是一个融合范畴，也就是说，它是一个有限半单刚性 $\mathbb{C}$-线性张量范畴，且具有简单单位对象。我们用 O(C) 表示其简单对象同构类的一组代表元。对于 $Y \in$ O(C)，Y在对象 V中的重数为 $[V\colon\ Y] := \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, V)$。当该重数为正时，我们称 Y是 V的一个成分。我们用 V^* 表示 V的左对偶，其余评价为 $\mathrm{coev}_V\colon \mathbf{1} \to V \otimes V^*$，评价为 $V^* \otimes V \to \mathbf{1}$；用 ${}^*V$表示 V的一个右对偶，其评价为 $V \otimes {}^*V \to \mathbf{1}$ [（EGNO15，定义 2.10.1 和 2.10.2]）。

融合子范畴是一个满子范畴，它对同构、直和项、有限直和、张量积和对偶封闭，并且包含单位对象。由一组对象生成的融合子范畴，是包含这些对象的最小融合子范畴。对于单个对象 V，我们将其记作 $\langle V\rangle$。

引理 2.1. 设 V 是融合范畴中的一个非零对象。当且仅当某个简单对象是 $V^{\otimes n}$ 的直和项（其中 $n \geq 1$）时，它属于 $\langle V\rangle$。

证明. 设 K 为由所有简单成分均为幂 $V^{\otimes n}$, $n \geq 1$的直和项的对象组成的满子范畴。它包含 V，并且在同构、直和及直和项下封闭。它在张量积下也封闭。事实上，$A \otimes B$的一个简单成分是 $Y \otimes Y'$的成分，其中 Y是 A的简单成分，Y'是 B的简单成分；若 Y和 Y'分别是 $V^{\otimes a}$ 和 $V^{\otimes b}$的直和项，则 $Y \otimes Y'$是 $V^{\otimes}(a+b)$的直和项。根据 [EGNO15，推论 4.11，4], K 包含 $\mathbf{1}$，且在对偶下封闭。因此 K 是包含 V的融合子范畴，故 $V \subseteq$ K。反之，包含 V的融合子范畴包含幂 $V^{\otimes n}$ 及其直和项，因而也包含 K。因此 K $= V$。□

我们记 $d_V := \mathrm{FPdim}(V)$ 为 Frobenius–Perron维数。它对直和具有可加性，对张量积具有可乘性，并且 $d_{V^*} = d_V$。对于简单对象 Y，数 d_Y是一个正代数整数。若对每个简单对象 都具有整性，即 d_Y 都是整数，则融合范畴称为整的 Y；若是弱整的，则 $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) := \sum_{Y\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} d_Y^2$是整数。融合范畴之间的张量函子保持 Frobenius–Perron维数，因此 d_V 可以在包含 V [EGNO15 的任意融合子范畴中计算，参见第 3.3 节和第 4.5 节以及定义 9.6。1]。

当 $\mathcal{C}$ 是整的时，正则对象 为 $R_{\mathcal{C}} := \bigoplus_{Y\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} d_Y\, Y$，即每个简单对象 d_Y的 Y个副本的直和。其维数为 $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C})$ [EGNO15，定义 6.1.6 和 6.1。7]。在 $\mathcal{C}$ 的 Grothendieck环中，正则对象的类对每个对象 $[V]\,[R_{\mathcal{C}}] = d_V\,[R_{\mathcal{C}}]$ 都满足 V [EGNO15，命题 6.1。11]。在融合范畴中，Grothendieck环中类相同的两个对象同构。因此存在同构

$$V \otimes R_{\mathcal{C}} \cong d_V\, R_{\mathcal{C}} \qquad (V \in \mathcal{C}), \tag{2.1}$$

其中 $d_V\, R_{\mathcal{C}}$ 表示 d_V 个 $R_{\mathcal{C}}$ 的直和；另见 [MT08，命题 3。15]。

若 V是 $\mathcal{C}$ 中的非零对象，则 $\mathbf{1}$ 是 $V \otimes V^*$ 的一个直和项，因为 $\mathrm{coev}_V\colon \mathbf{1} \to V \otimes V^*$ 由刚性可知非零，而 $\mathcal{C}$ 是半单的。取 $p\colon V \otimes V^* \to \mathbf{1}$，使得 $p\,\mathrm{coev}_V = \mathrm{id}_{\mathbf{1}}$。于是，每个态射 $f\colon A \to B$ 都可由 $f \otimes \mathrm{id}_V$通过以下公式恢复

$$f = (\mathrm{id}_B \otimes p)(f \otimes \mathrm{id}_V \otimes \mathrm{id}_{V^*})(\mathrm{id}_A \otimes \mathrm{coev}_V), \tag{2.2}$$

因此函子 $- \otimes V$是忠实的。

最后，我们回顾对象 V 的自同态代数的结构。对于 $f \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(V)$ 和一个简单对象 Y，令 f_Y 为 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, V)$ 上的线性映射 $v \mapsto fv$。由于 $\mathcal{C}$ 是半单的，该映射

$$\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(V) \longrightarrow \bigoplus_Y \mathrm{End}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, V)), \qquad f \longmapsto (f_Y)_Y, \tag{2.3}$$

其中 Y 遍历 V的简单成分，是一个代数同构（参见 [Tur10，引理 II.4.2。2]）。特别地，$\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(V)$ 是半单的，且其简单模是空间$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,V)$。

对于有限维向量空间 L 和对象 Y，我们用 $L\odot Y$ 表示以 Y 为对象、重数空间为 L 的直和。因此，每个 $\ell\in L$ 都给出一个态射 $\iota_\ell\colon Y\to L\odot Y$，该态射关于 ℓ 线性变化；而从 $L\odot Y$ 到对象 Z 的态射，等同于从L 到 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\ Z)$ 的线性映射。对于每个对象 V，态射

$$\bigoplus_{Y\in\mathcal{O}(\mathcal{C})}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,V)\odot Y\longrightarrow V \tag{2.4}$$

对应于空间 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\ V)$ 的恒等映射，是一个关于 V 自然的同构。

2.2. 迹与伪酉融合范畴。枢轴结构是一个幺半自然同构 $\mathfrak{a}\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}}\to(-)^{**}$。我们将由此得到的自同态 f 的左迹记作 $\mathrm{Tr}(f)$，并令 $\dim(V):=\mathrm{Tr}(\mathrm{id}_V)$。若左迹与右迹相等，则该结构称为球面的。若融合范畴 C 的范畴维数 $\dim(\mathsf{C})$ [EGNO15，定义 7.21.3] 等于 $\mathrm{FPdim}(\mathsf{C})$[EGNO15，定义 9.4.4]，则称 C 为伪酉的。此时它具有唯一的球形结构，使得对每个简单对象 Y，$\dim(Y)=d_Y$，该结构称为典范球面结构。每个弱整融合范畴都是伪酉的 [EGNO15，第 4.7 节和第 9.4 节以及命题 9.5.1 和 9.6.5]。

我们将范畴迹 Tr 与线性映射的迹 tr 区分开来。

Lemma 2.2. 在球面融合范畴 $\mathcal{C}$ 中，对于每个对象 V和 $f\in\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(V)$，

$$\mathrm{Tr}(f)=\sum_{Y\in\mathcal{O}(\mathcal{C})}\dim(Y)\,\mathrm{tr}(f_Y).$$

证明。迹是 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(V)$ 上的线性形式，且 $\mathrm{Tr}(gh)=\mathrm{Tr}(hg)$。由 (2.3)，代数 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(V)$ 是矩阵代数 $\mathrm{End}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,V))$ 的乘积，而矩阵代数上具有此性质的线性形式是迹 tr 的标量倍数。因此存在标量 c_Y，使得对每个 f，均有 $\mathrm{Tr}(f)=\sum_Y c_Y\mathrm{tr}(f_Y)$。为计算 c_Y，令 $u\colon Y\to V$为一个非零态射，并令 $p\colon V\to Y$为满足 $pu=\mathrm{id}_Y$ 的态射；这样的态射存在，因为 C 是半单的。对于 $e:=up$，映射 e_Y是一个秩一幂等元，且对于 $Y'\neq Y$，有 $e_{Y'}=0$。因此 $c_Y=\mathrm{Tr}(up)=\mathrm{Tr}(pu)=\dim(Y)$。□

2.3. **编织融合范畴与辫群**。我们用 $c_{A,B}\colon A\otimes B\to B\otimes A$ 表示编织。它关于两个变量都是自然的，并满足六边形恒等式

$$\begin{aligned}c_{A,B\otimes C}&=(\mathrm{id}_B\otimes c_{A,C})(c_{A,B}\otimes\mathrm{id}_C),\\ c_{A\otimes B,C}&=(c_{A,C}\otimes\mathrm{id}_B)(\mathrm{id}_A\otimes c_{B,C}).\end{aligned} \tag{2.5}$$

辫群 B_n由 $\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}$生成，其关系为 $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i=\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$和$\sigma_i\sigma_j=\sigma_j\sigma_i$，其中 $|i-j|\geq 2$。对于编织融合范畴 $\mathcal{C}$ 中的对象 X，我们记 $E_n:=\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X^{\otimes n})$。编织定义了一个代数同态

$$\rho_n^X\colon\mathbb{C}B_n\to E_n,\qquad \rho_n^X(\sigma_i)=\mathrm{id}_X^{\otimes(i-1)}\otimes c_{X,X}\otimes\mathrm{id}_X^{\otimes(n-i-1)}.$$

我们将两次使用关于幺半群函子的以下事实。设 G 是幺半群范畴之间的一个幺半群函子，其结构同构为 $\gamma_{A,B}\colon G(A)\otimes G(B)\to G(A\otimes B)$[EGNO15，定义 2.4.1]。我们不写出结合约束，此时 γ 的结合律公理为恒等式 $\gamma_{A\otimes B,C}\,(\gamma_{A,B}\otimes\mathrm{id}_{G(C)})=\gamma_{A,B\otimes C}\,(\mathrm{id}_{G(A)}\otimes\gamma_{B,C})$。对于对象 V，令 $\gamma_{n,k}:=\gamma_{V^{\otimes n},V^{\otimes k}}$，并定义迭代结构同构 $\gamma_n\colon G(V)^{\otimes n}\to G(V^{\otimes n})$ 如下：$\gamma_1:=\mathrm{id}_{G(V)}$，且 $\gamma_{n+1}:=\gamma_n,1\,(\gamma_n\otimes\mathrm{id}_{G(V)})$。那么，对于所有 $n,k\geq 1$，

$$\gamma_{n+k}=\gamma_{n,k}\,(\gamma_n\otimes\gamma_k). \tag{2.6}$$

确实，对于 $k=1$ 这是 γ_{n+1} 的定义；若 (2.6) 对 k 成立，则结合律公理给出

$$\gamma_{n+k+1}=\gamma_{n+k,1}\,(\gamma_{n,k}\otimes \mathrm{id})(\gamma_n\otimes\gamma_k\otimes \mathrm{id})=\gamma_{n,k+1}\,(\mathrm{id}\otimes\gamma_{k,1})(\gamma_n\otimes\gamma_k\otimes \mathrm{id})=\gamma_{n,k+1}\,(\gamma_n\otimes\gamma_{k+1}).$$

2.4. **扭结与 Reshetikhin–Turaev 不变量**。 球形结构 $\mathfrak{a}$在编织融- 合范畴上确定了带状扭结 θ，其定义为 $\mathfrak{a}_V=u_V\theta_V$，其中 u 是 Drinfeld 同构[EGNO15，第 8.9 节和第 8.10]节。在伪酉编织融合范畴中，我们取与其典范球面结构相关联的扭结。对于简单对象 X，自同构 θ_X 是 id_X的标量倍数，我们也用 θ_X表示这个标量。它是一个单位根 [EGNO15，推论 8.18.2(i)]。

设 X 是伪酉编织融合范畴中的一个简单对象，设 $b\in B_n$ 是一个辫子，并设 $\widehat{b}$ 是其闭包，方向由该辫子确定。迹 $\mathrm{Tr}(\rho_n^X(b))$ 是链环$\widehat{\ }$的 Reshetikhin–Turaev 不变量 b，采用黑板框架，且所有分量均以 X[RT90], [Tur10，定理 I.2.5 和推论 I.2.7。2]。特别地，它只取决于带框架链环。对一个分量的框架施加正扭结，会使不变量乘以 θ_X；负扭结则使其乘以 θ_X^{-1} [Tur10，定理 I.2.5]。当 $\widehat{b}$ 是纽结时，其黑板框架就是该辫子的指数和 (b)。 因此，零框架纽结的不变量为

$$\mathrm{RT}_X(\widehat{b})=\theta_X^{-w(b)}\,\mathrm{Tr}(\rho_n^X(b)). \tag{2.7}$$

零框架平凡纽结的不变量为 $\dim(X)$，因为平凡纽结是单股平凡辫子的闭包。我们将使用以下推论。在 σ_1 和 σ_1^{-1}中 B_2 的闭包是框架分别为1 和 -1的平凡纽结，因此（2.7）给出

$$\mathrm{Tr}(c_{X,X}^{\pm 1})=\theta_X^{\pm 1}\dim(X). \tag{2.8}$$

对于负号，这是 [EGNO15，习题 8.10。15]。

2.5. **酉融合范畴**。 一个酉融合范畴 是带有 C^*-结构的融合范畴，其中结合律约束和单位约束是酉的，并且对所有态射 f和 g都有$f\otimes g)^*=f^*\otimes g^*$。在对象上，上标 $*$ 表示对偶；在酉融合范畴的态射上，它表示伴随。若一个融合范畴与某个酉融合范畴张量等价，则称其为可酉化的。这两个性质都可传递到融合子范畴。一个幺正编织融合范畴是带有编织的酉融合范畴。此时编织是酉的 [Gal14，定理 3。2]。

对于一个简单对象 Y和一个对象 V， C^*-结构赋予 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,V)$ 以下定义的内积

$$u^*v=\langle u,v\rangle \mathrm{id}_Y, \tag{2.9}$$

关于 v线性。对于希尔伯特空间 L，我们取对象 $L\odot Y$，满足 $\iota_\ell^*\,\iota_{\ell'}=\langle \ell,\ell'\rangle\,\mathrm{id}_Y$对于所有 $\ell,\ell'\in L$。配以内积（2.9），同构（2.4）是酉的。我们称其为 V 到简单对象的正交分解。对于 C^*-张量范畴，这些约定遵循 [LR97，第 2–3] 节，以及 [Müg03，第 2 节。4]。

2.6. **局部化**。设 W 为非零有限维向量空间。回顾引言中的内容， W 上的杨–巴克斯特算子是一个可逆的 $R\in \mathrm{End}(W\otimes W)$，满足在 $W^{\otimes 3}$上$R_{12}R_{23}R_{12}=R_{23}R_{12}R_{23}$，其中 $R_{12}:=R\otimes \mathrm{id}_W$ 且 $R_{23}:=\mathrm{id}_W\otimes R$。相应的表示为

$$\rho_n^R\colon \mathbb{C}B_n\to \mathrm{End}(W^{\otimes n}),\qquad \rho_n^R(\sigma_i)=\mathrm{id}_W^{\otimes(i-1)}\otimes R\otimes \mathrm{id}_W^{\otimes(n-i-1)}.$$

定义 2.3。设 X 是一个编织融合范畴中的对象。 X 的一种局部化是一个偶对（W， R），其中 W 是非零有限维向量空间， R 是作用于 W 上的杨–巴克斯特算子，并且对每个 $n\geq 2$，都存在一个单射代数同态 $\phi_n\colon \rho_n^X(\mathbb{C}B_n)\to \mathrm{End}(W^{\otimes n})$，使得 $\phi_n\circ\rho_n^X=\rho_n^R$。其维数为 $\dim W$。若 W 是希尔伯特空间且 R 是酉算子，则称该局部化为酉局部化。

这一定义见 [GHR13，定义 1。2]。对于酉辫群表示，它还原为 [RW12，定义 2.3 和注 2。5]，，并且酉局部化是 [RW18，定义 52]意义下的局部化。

本文中的所有局部化都由下面的引理 2.4 得到。该引理涉及一族含幺代数同态 $\Phi_n\colon\ E_n \to \mathrm{End}(W^{\otimes n})$，$n \geq 1$，它们与张量积相容，也就是说，满足

$$\Phi_{n+k}(f \otimes g) = \Phi_n(f) \otimes \Phi_k(g) \tag{2.10}$$

对所有 n、$k \geq 1$、$f \in E_n$ 以及 $g \in E_k$均成立。这就是定理 1.4的性质（1.1）。

引理 2.4。设 X 是编织融合范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个对象，设 W 是一个非零有限维向量空间，并设 $\Phi_n\colon E_n \to \mathrm{End}(W^{\otimes n})$、$n \geq 1$ 是一族与张量积相容的含幺代数同态。令 $R\colon = \Phi_2(c_{X,\,X})$。

（a）算子 R 是 W上的杨–巴克斯特算子，并且对每个 $n \geq 2$都有 $\Phi_n \circ \rho_n^X = \rho_n^R$。（b）如果每个 Φ_n 都是单射的，那么（W、R）是 X的局部化。（c）如果 $\mathcal{C}$ 是酉的，W是希尔伯特空间，并且对每个 f都有 $\Phi_2(f^*) = \Phi_2(f)^*$，那么 R是酉的。

证明。对于 $n \geq 2$ 和 $1 \leq i \leq n-1$，态射 $\rho_n^X(\sigma_i)$ 是以下各项的张量积：$\mathrm{id}_X^{\otimes(i-1)}$，$c_{X,\,X}$以及 $\mathrm{id}_X^{\otimes(n-i-1)}$。将 (2.10) 应用于此张量积，并利用每个 Φ_k 都是含幺的，可得

$$\Phi_n\big(\rho_n^X(\sigma_i)\big) = \mathrm{id}_W^{\otimes(i-1)} \otimes R \otimes \mathrm{id}_W^{\otimes(n-i-1)}. \tag{2.11}$$

由于 Φ_2和 $\Phi_3 \circ \rho_3^X$是含幺代数同态，R可逆，而 B_3 中的关系 $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$ 给出了 Yang–Baxter 方程。由 (2.11) 可知，代数同态 $\Phi_n \circ \rho_n^X$和ρ_n^R在 B_n的生成元上相同，因此二者相等。这就证明了 (a)。若 Φ_n 是单射，则其在 ρ_n^X 的像上的限制就是定义 2.3 中所需的同态 ϕ_n，从而证明了 (b)。对于 (c)，编织 $c_{X,X}$ 是酉的 [Gal14，定理 3.2]，，并且保伴随的含幺代数同态会将酉元映为酉算子。□

3. The regular object of an integral fusion category

在本节中，$\mathcal{E}$ 是一个整融合范畴，其正则对象为 $R_{\mathcal{E}}$，并且

$$H(V) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(R_{\mathcal{E}}, V), \qquad H(a)(g) := ag.$$

不需要编织。对于 T 中的一个$\mathcal{E}$非零对象，我们可以在 $\mathrm{End}_{\mathcal{E}}(T^{\otimes n})$ 上实现任意代数 $W^{\otimes n}$，其中 $W := H(T \otimes R_{\mathcal{E}})$ (推论 3.3)。关键是将态射 $R_{\mathcal{E}} \to A \otimes R_{\mathcal{E}}^{\otimes n}$与态射 $R_{\mathcal{E}} \to B \otimes R_{\mathcal{E}}^{\otimes k}$连接起来，同时仍使 $n+k$ 因子 $R_{\mathcal{E}}$ 位于目标中。为此，我们使用一个态射$\delta\colon R_{\mathcal{E}} \to R_{\mathcal{E}} \otimes R_{\mathcal{E}}$。所有图均从下往上阅读，张量因子从左到右排列。

引理3.1。函子 H 和正则对象 $R_{\mathcal{E}}$ 具有以下性质。

(a) 函子 $H\colon \mathcal{E} \to \mathrm{Vec}$ 是忠实的，并且对每个对象 V都有维数 $H(V) = d_V$。(b) 存在一个态射 $\delta\colon R_{\mathcal{E}} \to R_{\mathcal{E}} \otimes R_{\mathcal{E}}$，使得对于 $\mathcal{E}$ 中的所有对象 S 和 V，下述映射是一个同构。

$$\Gamma_{S,V}\colon H(V) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(S, R_{\mathcal{E}}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(S, V \otimes R_{\mathcal{E}}), \qquad g \otimes s \longmapsto (g \otimes \mathrm{id}_{R_{\mathcal{E}}})\,\delta\,s. \tag{3.1}$$

(c) 假设 $\mathcal{E}$ 是酉的，并令 ω 为 $\mathrm{End}_{\mathcal{E}}(R_{\mathcal{E}})$ 上的忠实正线性泛函。那么 $\langle g, g'\rangle := \omega(g^*g')$ 是 $H(V)$ 上的内积，并且对于每个态射 a，都有 $H(a)^* = H(a^*)$。(b) 中的态射 可以选取为使得，对于每个对象 及所有 、(V)，

$$\delta^*\,(g^*g' \otimes \mathrm{id}_{R_{\mathcal{E}}})\,\delta = \langle g, g'\rangle\,\mathrm{id}_{R_{\mathcal{E}}}. \tag{3.2}$$

证明。在此证明中，i 和 j 表示 $\mathcal{O}(\mathcal{E})$ 中的简单对象。

(a) i 在 $R_{\mathcal{E}}$ 中的重数为 d_i。因此 维数 $H(V)=\sum_i d_i[V\colon\ i]=d_V$。特别地，对于 $H(i)\neq 0$中的每个 i，均有 H 是忠实的 [MT08，引理 31]。

(b) 我们首先构造(3.1)两边之间的一个同构，将它们视为关于二元组$(S,\ V)$的函子。它们关于每个变量都是线性的，关于 S 是反变的，关于 V是协变的。对于一对简单对象 $S=j$和 $V=i$，两者的维数均为 d_id_j，因为根据($i\otimes R_{\mathcal{E}}$2.1)，d_i是 $R_{\mathcal{E}}$ 的个直和。为每一对这样的对象选择一个线性同构。根据半单性，这些选择唯一延拓为一个自然同构 Γ 。事实上，分解(2.4)关于 V是自然的，而 S 的相同分解为反变函子给出了对偶重数空间。在 [EGNO15，命题 6.1 的证明14]中也使用了相同的论证。

现在计算 $\Gamma_{R_{\mathcal{E}},\ R_{\mathcal{E}}}$在 $\mathrm{id}_{R_{\mathcal{E}}}\otimes\mathrm{id}_{R_{\mathcal{E}}}$处的值，并将其记为 δ。关于 $g\colon\ R_{\mathcal{E}}\to V$在第二个变量上的自然性，以及关于 $s\colon\ S\to R_{\mathcal{E}}$ 在第一个变量上的自然性，恰好给出（3.1）（图 1）。特别地，单个态射 δ 决定了整个族。

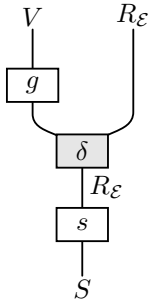


图1。 态射 $\Gamma_{S,\ V}(g\otimes s)=(g\otimes\mathrm{id}_{R_{\mathcal{E}}})\,\delta\,s$，即（3.1），按从下到上的方向读取。态射 g 和 s 附加在 δ上。

(c) 正定性源于 ω的忠实性，而$ag,g'=\omega(g^*a^*g')=g,a^*g'$给出 $H(a)^*=H(a^*)$。在空间 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(j,A)$ 上赋予由 $s^*t=s,t\,\mathrm{id}_j$定义的内积（2.9），并选取酉同构$\Gamma_{j,i}$。对于固定的 j，（3.1）的两边都是关于V的函子，且保持伴随。因此，将 V正交分解为简单对象后，$\Gamma_{j,V}$也为酉映射。在 $g\otimes s$ 和 $g'\otimes t$ 上检验此等距映射可得

$$s^*\,\delta^*(g^*g'\otimes\mathrm{id}_{R_{\mathcal{E}}})\,\delta\,t=\langle g,g'\rangle\,s^*t\qquad(s,t\colon j\to R_{\mathcal{E}}).$$

这些 m 矩阵系数，对于所有 j，确定了 $R_{\mathcal{E}}$的一个自同态。这证明了（3.2 ）. □

引理 3.1（b）中的性质刻画了 $R_{\mathcal{E}}$，且在同构意义下唯一。若非零对象 P 具有此性质，那么对于每个简单对象 i，对象 $i\otimes P$是 $\dim\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(P,\ i)$ 个 P的直和。取维数可得 $d_id_P=[P\colon\ i]\,d_P$，从而 $P\cong R_{\mathcal{E}}$。

我们固定 δ 如引理 3.1（b）中所述。当 $\mathcal{E}$ 为酉时，我们首先在有限维 ω-代数 C^*上选取一个忠实正线性泛函 $\mathrm{End}_{\mathcal{E}}(R_{\mathcal{E}})$，并取 δ如引理 3.1（c）中所述。对于 $g\colon\ R_{\mathcal{E}}\to V$置

$$\widehat{g}:=(g\otimes\mathrm{id}_{R_{\mathcal{E}}})\,\delta\colon R_{\mathcal{E}}\longrightarrow V\otimes R_{\mathcal{E}}.\tag{3.3}$$

特别地，$\mathrm{id}_{R_{\mathcal{E}}}=\delta$。对于 $u\colon\ V\to V_{\prime}$根据定义有

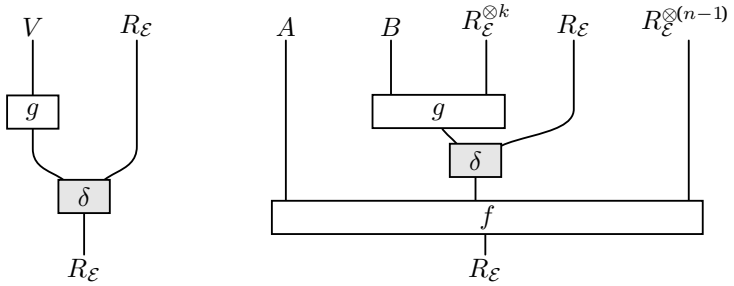
$$\widehat{ug}=(u\otimes\mathrm{id}_{R_{\mathcal{E}}})\,\widehat{g}.\tag{3.4}$$

这是图 2(a)，其中 u 附着在线 V上方。因此，帽只是附着在 s左侧的因子（见3.1）。等价地，随着 S变化，该同构根据米田引理表示 $V\otimes R_{\mathcal{E}}\cong H(V)\odot R_{\mathcal{E}}$。复制映射 $g\odot\mathrm{id}_{R_{\mathcal{E}}}$与此同一化复合后得到 $\widehat{g}$。

两个块的拼接。记 $\mathrm{id}_m := \mathrm{id}_{R^{\otimes m}}\,\varepsilon$，其中 $R_{\mathcal{E}}^{\otimes 0} = \mathbf{1}$。对于 $n \geq 1$，设 $F_n(A) := H(A \otimes R_{\mathcal{E}}^{\otimes n})$，以及 $F_n(a) := H(a \otimes \mathrm{id}_n)$。给定 $f \in F_n(A)$ 和 $g \in F_k(B)$，将 $\widehat{g}$ 附着到离开 f 的第一股 $R_{\mathcal{E}}$ 上。其 $k+1$ 条弦 $R_{\mathcal{E}}$ 取代这条线。由此定义一个线性映射

$$J_{n,k}\colon F_n(A) \otimes F_k(B) \longrightarrow F_{n+k}(A \otimes B), \qquad f \otimes g \longmapsto f \star g := \big(\mathrm{id}_A \otimes \widehat{g} \otimes \mathrm{id}_{n-1}\big) f. \tag{3.5}$$

图 2(b) 展示了态射 $f \star g$。可用于进一步插入的第一股 $R_{\mathcal{E}}$ 位于区块 $R_{\mathcal{E}}^{\otimes k}$ 中，该区块来自 g。



(a) $\widehat{g}$ (b) $f \star g$

图 2。(a) 态射 $\widehat{g} = (g \otimes \mathrm{id}_{R_{\mathcal{E}}})\ \delta$。(b) 对于 $f \in F_n(A)$ 和 $g \in F_k(B)$ 的态射 $f \star g$。标记为张量幂的线表示整个区块；当 $n = 1$ 时，省略最后一股。

定理 3.2。对于 $n, k, l \geq 1$ 和对象 A, B, C 属于 $\mathcal{E}$，映射 $J_{n,k}$ 在 (3.5) 满足以下性质：

(a) 每个 $J_{n,k}$ 都是向量空间之间的同构。(b) 它们关于 A 和 B 是自然的。对于 $a\colon A \to A'$ 和 $b\colon B \to B'$，

$$F_{n+k}(a \otimes b)\, J_{n,k} = J_{n,k}\,\big(F_n(a) \otimes F_k(b)\big).$$

(c) 它们满足结合律。对于 $f \in F_n(A)$、$g \in F_k(B)$ 和 $h \in F_l(C)$，

$$(f \star g) \star h = f \star (g \star h).$$

(d) 若 E 是酉的，则采用引理 3.1(c) 中的选择，每个 $J_{n,k}$ 都是酉的，且 $F_n(a^*) = F_n(a)^*$。

证明。(a) 引理 3.1(b) 中的同构已经给出 $J_{n,k}$。为说明这一点，令 $D := R^{\otimes(n-1)}\ \varepsilon$，$V := B \otimes R_{\mathcal{E}}^{\otimes k}$ 和 $S := A^* \otimes R_{\mathcal{E}} \otimes {}^*D$。如图 3 所示，将两条外侧的线弯曲，可得到一个同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(R_{\mathcal{E}}, A \otimes M \otimes D) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(S, M),$$

在……中自然 M [EGNO15，命题 2.10。8]。我们将一个态射的像称为其伴随态射。图中的帽状部分是评价 $A^* \otimes A \to \mathbf{1}$ 和 $D \otimes {}^*D \to \mathbf{1}$。

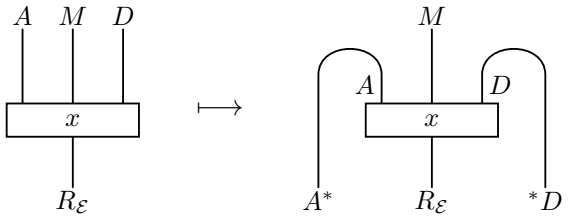


图 3. 态射 $x\colon R_{\mathcal{E}} \to A \otimes M \otimes D$ 的伴随态射，通过弯曲两条外侧线得到。

取 $M = R_{\mathcal{E}}$和 $M = V \otimes R_{\mathcal{E}}$。则 $F_n(A) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(R_{\mathcal{E}}, A \otimes R_{\mathcal{E}} \otimes D)$, $F_k(B) = H(V)$ 且 $F_{n+k}(A \otimes B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(R_{\mathcal{E}}, A \otimes V \otimes R_{\mathcal{E}} \otimes D)$。若 $s\colon S \to R_{\mathcal{E}}$是 f的伴随态射，则 $f \star g = (\mathrm{id}_A \otimes \widehat{g} \otimes \mathrm{id}_D)f$的伴随态射是 $\widehat{g}\, s = \Gamma_{S,V}(g \otimes s)$，根据在 M 中的自然性。因此，在取伴随态射并交换源的两个因子之后，$J_{n,k}$ 是同构 $\Gamma_{S,V}$。这里只涉及对偶和 (3.1)。

(b) 在图2（b）中，态射 a作用于线 A的 f，而且 b作用于线 B 的g。将其与 a 和 b 复合，得到 $F_n(a)(f) \star F_k(b)(g)$ 的图示。根据（3.4）应用于$u = b \otimes \mathrm{id}_k$，这就是所断言的恒等式。

（c）令 $f \circ_1 g := (\mathrm{id}_A \otimes g \otimes \mathrm{id}_{n-1})f$ 为如下态射：其中 g 直接附加到离开 f的第一股 $R_{\mathcal{E}}$上。它是 $F_{n+k-1}(A \otimes B)$ 的一个元素。这个插入是结合的，因此多个因子的乘积不依赖于括号。事实上，由于 $k \geq 1$, $f \circ_1 g$ 的第一股 $R_{\mathcal{E}}$来自 g，所以 $(f \circ_1 g) \circ_1 h$ 和 $f \circ_1 (g \circ_1 h)$ 具有相同的连接。将 δ 视为 $F_2(1)$ 的一个元素，我们有

$$f \star g = f \circ_1 \delta \circ_1 g.$$

因此，对三重乘积中的括号进行两种放置方式都会得到 $f \circ_1 \delta \circ_1 g \circ_1 \delta \circ_1 h$。图4展示了情形 $n = k = l = 1$。

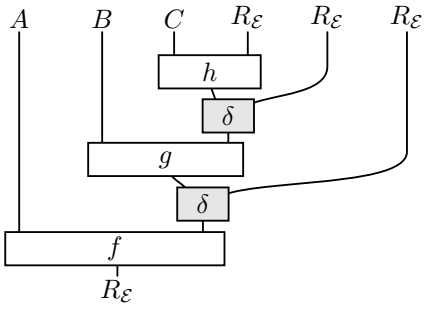


图4。对于 $n = k = l = 1$，态射 $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$。态射$h$ 附着在离开 g 的第一股 $R_{\mathcal{E}}$ 上，而方框 g 将两个方框 δ 分隔开。

(d) 根据（3.2），$\widehat{g}^*\, g' = \langle g,\ g' \rangle \mathrm{id}_{R_{\mathcal{E}}}$对于 $g,\ g' \in F_k(B)$。在图5 中，两个方框 δ和 δ^* 围绕 $a = g^* g'$收缩，而 $\omega(a) = \langle g,\ g' \rangle$。

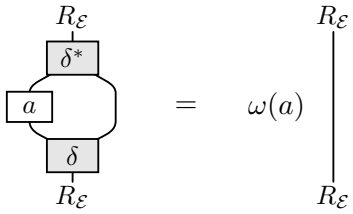


图5。对于 3.2，恒等式（ $a = g^* g'$，其中 $\omega(a) = \langle g,\ g' \rangle$。

在（3.5）中应用此压缩可得

$$\langle f \star g, f' \star g' \rangle = \omega\big(f^*(\mathrm{id}_A \otimes \widehat{g}^*\, \widehat{g'} \otimes \mathrm{id}_{n-1})f'\big) = \langle f, f' \rangle \langle g, g' \rangle.$$

因此$J_{n,\ k}$ 保持内积，并且由 (a) 可知它是满射。最后，$F_n(a)^* = H\big((a \otimes \mathrm{id}_n)^*\big) = F_n(a^*)$由引理 3.1(c)。□

固定对象的张量幂。取 $\mathcal{E}$ 中的一个非零对象 T，令 $W := F_1(T) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(R_{\mathcal{E}},\ T \otimes R_{\mathcal{E}})$，并递归地定义 $J_n\colon W^{\otimes n} \to F_n(T^{\otimes n})$，如下：

$$J_1 := \mathrm{id}_W, \qquad J_{n+1} := J_{n,1}\,(J_n \otimes \mathrm{id}_W).$$

根据定理3.2(a)，这些映射是同构。

推论 3.3. 对于 $n \geq 1$和 $f \in \mathrm{End}_{\mathcal{E}}(T^{\otimes n})$令 $\Phi_n^T(f)\colon = J_n^{-1}\,F_n(f)\,J_n$。

(a) 映射 Φ_n^T*:* $\mathit{End}_{\mathcal{E}}(T^{\otimes n}) \to \mathit{End}(W^{\otimes n})$ 是单射含幺代数同态，且 $\dim W = d_T$ *FP* 维数*(E)*。

(b) 对于 $n, k \geq 1$, $f \in \mathit{End}_{\mathcal{E}}(T^{\otimes n})$ 和 $g \in \mathit{End}_{\mathcal{E}}(T^{\otimes k})$，有 $\Phi_{n+k}^T(f \otimes g) = \Phi_n^T(f) \otimes \Phi_k^T(g)$。*(c)* 若 E 是酉的，则按照引理 *3.1(c)* 中的选择，$\Phi_n^T(f^*) = \Phi_n^T(f)^*$。

证明。(a) 函子 $- \otimes R_{\mathcal{E}}^{\otimes n}$由（2.2）可知是忠实的，而 H 由引理 3.1(a) 可知是忠实的。因此F_n 是忠实的。用 J_n 共轭其在自同态上的作用，得到一个单射含幺代数同态。引理 3.1(a) 给出 维数 $W = d_{T\otimes R_{\mathcal{E}}} = d_T \sum_i d_i^2 = d_T$FP 维数($\mathcal{E}$)。

(b) 对于纯张量，J_n 构成迭代乘积 $J_n(w_1 \otimes \cdots \otimes w_n) = (\cdots(w_1 \star w_2) \star \cdots) \star w_n$。结合律使我们可以将第一个 n 因子和最后一个 k 因子分组，因此

$$J_{n+k} = J_{n,k}\,(J_n \otimes J_k). \tag{3.6}$$

形式上，这是关于 k 的归纳，其中情形 $k = 1$ 是 J_{n+1} 的定义，而归纳步骤是定理 3.2(c)，其中 $l = 1$。利用这一分解，$J_{n,k}$ 的自然性给出

$$\begin{aligned} F_{n+k}(f \otimes g)\,J_{n+k} &= J_{n,k}\,(F_n(f)\,J_n \otimes F_k(g)\,J_k) \\ &= J_{n+k}\,(\Phi_n^T(f) \otimes \Phi_k^T(g)). \end{aligned}$$

在左侧与 J_{n+k}^{-1} 复合即可证明 (b)。

(c) 每个 J_n 都是酉映射的复合，并且 F_n 根据定理3.2(d) 保持伴随。因此，Φ_n^T 也如此。□

注 3.4. 设 δ是余结合的，即 $(\delta \otimes \mathrm{id}^{R_{\mathcal{E}}})\ \delta = (\mathrm{id}_{R_{\mathcal{E}}} \otimes \delta)\ \delta$，并且它具有余单位。则 $R_{\mathcal{E}}$ 是其自身上的右余模，而 $\hat{g}$ 是把 g 提升为从 $R_{\mathcal{E}}$到余自由右 $R_{\mathcal{E}}$-余模 $V \otimes R_{\mathcal{E}}$的余模态射。$\hat{g}$是余模态射这一事实，恰恰是用到余结合性的那一步。映射 J_n、$_k$ 只用到向第一股的插入$R_{\mathcal{E}}$，因此它们并不需要它。事实上，引理 3.1(b) 中的态射 δ 可以取为余结合的，当且仅当 E 容许一个纤维函子。的确，设 δ 是余结合的。则映射 $H(V) \otimes H(V') \to H(V \otimes V')$、$g \otimes g' \mapsto (g \otimes g')\,\delta$是自然的并且结合的，而对$\frown$ $\frown h\colon = (g \otimes g')\,\delta$，余结合性给出 $h = (\mathrm{id}_V \otimes g')\ \hat{g}$。由引理 3.1(b)，映射 $g \mapsto \hat{g}$是单射。$\widehat{}$对于 $x \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(R_{\mathcal{E}}, V \otimes R_{\mathcal{E}})$，映射 $x \otimes g' \mapsto (\mathrm{id}_V \otimes g')\ x$也是单射，因为在同构 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(R_{\mathcal{E}}, V \otimes M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(V^* \otimes R_{\mathcal{E}}, M)$ 之下，它变为 (3.1) 的映射 $\Gamma_{V^*\otimes R_{\mathcal{E}},\ V'}$。因此映射 $g \otimes g' \mapsto (g \otimes g')\,\delta$ 是单射，并且由于两个空间的维数都是 $d_V d_{V'}$，它们是同构。此外，$H(1)$ 的维数为 1，且 H 是正合且忠实的。因此这些映射给出 H [上的张量结构 EGNO15，定义 2.4。1]，并且 H 是一个纤维函子。一维代数 $H(1)$ 的单位ε 在每个空间 $H(V)$ 的两侧都作为恒等元作用，而对 $V = R_{\mathcal{E}}$，这给出 $(\varepsilon \otimes \mathrm{id}^{R_{\mathcal{E}}})\ \delta = \mathrm{id}^{R_{\mathcal{E}}} = (\mathrm{id}_{R_{\mathcal{E}}} \otimes \varepsilon)\ \delta$。因此，具有引理 3.1(b) 之性质的余结合态射 δ总具有余单位。反之，具有纤维函子的融合范畴与半单霍普夫代数上的有限维模范畴张量等价K [EGNO15，定理 5.3。12]。其正则对象为 K，作用是左乘法，而余乘法 Δ: $K \to K \otimes K$ 是具有引理 3.1(b) 之性质的 K-模的余结合态射。的确，对一个 K-模 V，令 V_0 为带有平凡作用的向量空间 V。映射 $v \otimes a \mapsto \Delta(a)(v \otimes 1)$ 是从 $V_0 \otimes K$ 到 $V \otimes K$的 K-模同构，与它复合对每个 S都得到映射 $\Gamma_{S,\ V}$，这是在通过 $g \mapsto g(1)$ 将 $H(V)$ 与 V_0 等同之后。

4. 对偶弦与定理 1.4 的证明

在整个 t 本节中 X 是编织融合范畴$\mathcal{C}$的一个非零对象，并且我们令

$$d := d_X, \qquad \mathcal{D} := \langle X \rangle, \qquad \mathcal{A} := \langle X \otimes X^* \rangle.$$

回顾一下， E_n =End$_{\mathcal{C}}(X^{\otimes n})$。如果 d^2 是一个整数，那么 A 是整的（引理 4.1），第 3 节便适用于 A 中的对象 $X \otimes X^*$ 。为了将其用于 X，我们将 X^* 的一个副本附加到 X 的每个副本上。第 4.2 小节构造了同态 S_n: $E_n \to$ End$_{\mathcal{A}}((X \otimes X^*)^{\otimes n})$，这些同态与张量积相容；第 4.3 小节则将它们与推论 3.3 中的同态复合。

4.1. **由 X 生成的融合子范畴，以及由 $X \otimes X^*$生成的融合子范畴**。我们首先建立融合子范畴 $\mathcal{D}$ （由 X 生成）与融合子范畴 $\mathcal{A}$ （由 $X \otimes X^*$生成）之间的联系。除了 $\mathcal{A}$ 的整性之外，引理 4.1 还表明，当 $\mathcal{D}$ 时，D 具有典范球面结构，其中 d^2 是一个整数。该结构用于迹恒等式。

引理 4.1. 设 X 是编织融合范畴中的一个非零对象，其中 d、*D* 和 *A* 如上所述。

(a) 对 *D* 的每一个简单对象 Y，对象 $Y \otimes Y^*$ 属于 *A*。(b)假设 $d^2 \in \mathbb{Z}$。则 *A* 是整的，对 *D* 的每一个简单对象 Y 有 $d_Y^2 \in \mathbb{Z}$ ，且 *D* 是弱整的。特别地，*D* 是伪酉的，并且具有典范球面结构，对 *D* 的每一个简单对象 Y 有 $\dim(Y) = d_Y$。(c) 若 X 是简单对象，则 $d^2 \in \mathbb{Z}$ 当且仅当 *D* 是弱整的。

证明。(a) 由引理 2.1，对某个 $r \geq 1$， Y是 $X^{\otimes r}$ 的直和项。于是 $Y \otimes Y^*$ 是 $X^{\otimes r} \otimes (X^{\otimes r})^*$ 的直和项，且 $(X^{\otimes r})^* \cong (X^*)^{\otimes r}$，因为张量积的对偶是诸对偶按相反顺序的张量积。借助编织我们可以重新排列各因子，从而得到 $X^{\otimes r} \otimes (X^*)^{\otimes r} \cong (X \otimes X^*)^{\otimes r}$。该对象属于 A，因此它的直和项 $Y \otimes Y^*$ 属于 A。

(b) 设 i 是 A 的一个简单对象。由引理 2.1 应用于对象 $X \otimes X^*$ 可知，它是 $(X \otimes X^*)^{\otimes r}$ 的一个直和项，其中 $r \geq 1$，且该对象的 Frobenius–Perron维数是整数 d^{2r}。如果 $d_A + d_B$ 对两个对象 A 和 B 都是整数，那么 d_A 和 d_B 也是整数 [EGNO15，引理 3.5.6]。因此 d_i 是整数，且 A 是整的。由 (a) 可知，对于 D 的每个简单对象 Y， $d_Y^2 = d_{Y \otimes Y^*}$ 都是整数，因此 FPdim(D) $= \sum_{Y \in \mathrm{O(D)}} d_Y^2$ 是整数。关于典范球面结构的断言已在第 2.2 小节中回顾。

(c) 一个方向的蕴含已包含在 (b) 中。反过来，弱整融合范畴中每个简单对象的 Frobenius–Perron维数的平方都是整数 [EGNO15，命题 9.6.9(i)]。 □

4.2. **对偶弦**。我们定义同构 s_n: $(X \otimes X^*)^{\otimes n} \to X^{\otimes n} \otimes (X^*)^{\otimes n}$ by $s_1 := \mathrm{id}_{X \otimes X^*}$and

$$s_{n+1} := (\mathrm{id}_{X^{\otimes n}} \otimes c_{(X^*)^{\otimes n}, X} \otimes \mathrm{id}_{X^*})(s_n \otimes \mathrm{id}_{X \otimes X^*}). \tag{4.1}$$

因此 s_n 将每个 X^* 副本向右移动，越过其后面的 X 副本，并保持 X 副本的顺序以及 X^* 副本的顺序（图6）。引理4.2 描述了如何连接两组已经按此顺序排列的弦。

引理 4.2. 对于 n， $k \geq 1$ 令

$$b_{n,\ k} := \mathrm{id}_{X^{\otimes n}} \otimes c_{(X^*)^{\otimes n},\ X^{\otimes k}} \otimes \mathrm{id}_{(X^*)^{\otimes k}} : \ X^{\otimes n} \otimes (X^*)^{\otimes n} \otimes X^{\otimes k} \otimes (X^*)^{\otimes k} \longrightarrow X^{\otimes (n+k)} \otimes (X^*)^{\otimes (n+k)}.$$

那么 $s_{n+k} = b_{n,\ k}\,(s_n \otimes s_k)$。

证明。 令$\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ 为$\mathcal{C}$中对象对所构成的范畴，其张量积按分量进行。函子 $M : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$， $M(A, B) := A \otimes B$，是一个幺半群函子，其结构同构为

$$\mathrm{id}_A \otimes c_{B,C} \otimes \mathrm{id}_D : M(A, B) \otimes M(C, D) \longrightarrow M(A \otimes C, B \otimes D).$$

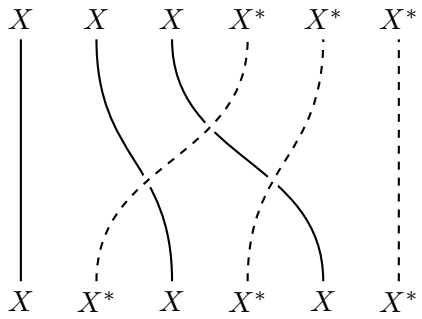


图 6。自下而上读取的同构 $s_3\colon (X\otimes X^*)^{\otimes 3}\to X^{\otimes 3}\otimes (X^*)^{\otimes 3}$。对偶弦以虚线表示，每个交叉都是编织 $c_{X^*,X}$。我们绘制$c_{V,V'}$，其中 V 的线穿过 V 的线之上。

事实上，这些同构是自然的；对于三个对象对 (A,B)、(C,D) 和 (E,F)，结合律公理两边都包含编织$c_{B\otimes D}$、$_E$ 和c_B、$_{C\otimes E}$。将它们按 (2.5) 展开后，每一边都成为 $c_{B,E}$ 与 $c_{B,C}$ 和 $c_{D,E}$ 的复合，而后两个态射可交换，因为它们作用于互不相交的张量因子。根据 (4.1)，M 在对象 (X,X^*) 处的迭代结构同构为 s_n，而其在对象对 $(X^{\otimes n},(X^*)^{\otimes n})$ 和 $(X^{\otimes k},(X^*)^{\otimes k})$ 处的结构同构为 $b_{n,k}$。因此，该断言就是 M 的恒等式 (2.6)。□

我们使用 s_n 使 $X^{\otimes n}$ 的自同态作用于 $(X\otimes X^*)^{\otimes n}$ 中的 X 的副本上。

命题4.3。对于 $n\geq 1$ 和 $f\in E_n$，令

$$S_n(f):=s_n^{-1}\left(f\otimes \mathrm{id}_{(X^*)^{\otimes n}}\right)s_n\in \mathrm{End}_{\mathcal{A}}((X\otimes X^*)^{\otimes n}).$$

(a) 映射 $S_n\colon E_n\to \mathrm{End}_{\mathcal{A}}((X\otimes X^*)^{\otimes n})$ 是单射含幺代数同态。(b) 对于所有 n、$k\geq 1$、$f\in E_n$ 和 $g\in E_k$，有 $S_{n+k}(f\otimes g)=S_n(f)\otimes S_k(g)$。(c) 如果 $\mathcal{C}$ 是酉的，则 $S_n(f^*)=S_n(f)^*$。

证明。(a) 映射 $f\mapsto f\otimes \mathrm{id}_{(X^*)^{\otimes n}}$ 是一个有单位的代数同态，并且根据（2.2）它是单射。由同构 s_n 进行共轭，得到从 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X^{\otimes n}\otimes (X^*)^{\otimes n})$到 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}((X\otimes X^*)^{\otimes n})$的代数同构。后一个代数是 $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}((X\otimes X^*)^{\otimes n})$，因为 $\mathcal{A}$ 是一个满子范畴。

(b) 根据编织 $c_{(X^*)^{\otimes n}}$的自然性，$X^{\otimes k}$ 在其第二个变量中，态射 g 滑过 $b_{n,k}$和 f 的交叉，但不与其相交（图 7）。

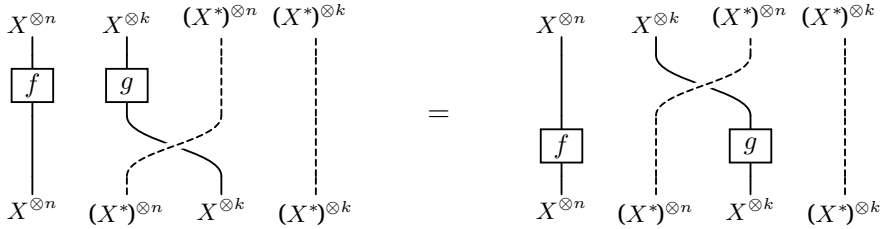


图7. 编织的自然性$c_{(X^*)^{\otimes n},X^{\otimes k}}$。态射 g 滑过$b_{n,k}$的交叉。

在一个公式中，

$$\left(f\otimes g\otimes \mathrm{id}_{(X^*)^{\otimes (n+k)}}\right)b_{n,k}=b_{n,k}\left(f\otimes \mathrm{id}_{(X^*)^{\otimes n}}\otimes g\otimes \mathrm{id}_{(X^*)^{\otimes k}}\right).$$

由引理 4.2及此恒等式,

$$\begin{aligned} S_{n+k}(f\otimes g) &= (s_n\otimes s_k)^{-1}\, b_{n,k}^{-1}\,(f\otimes g\otimes \mathrm{id}_{(X^*)^{\otimes(n+k)}})\, b_{n,k}\,(s_n\otimes s_k)\\ &= (s_n\otimes s_k)^{-1}(f\otimes \mathrm{id}_{(X^*)^{\otimes n}}\otimes g\otimes \mathrm{id}_{(X^*)^{\otimes k}})(s_n\otimes s_k), \end{aligned}$$

右侧为 $S_n(f)\otimes S_k(g)$。

（c）由（4.1）以及对 n的归纳，同构 s_n 是编织和恒等态射的张量积的复合。酉融合范畴中的每个编织都是酉的 [Gal14，定理 3。2],由于酉态射的张量积和复合仍为酉态射，因此 $(f\otimes g)^* = f^*\otimes g^*$。因此 s_n 是酉的，即 $s_n^{-1} = s_n^*$。所以

$$S_n(f)^* = s_n^*\,(f\otimes \mathrm{id}_{(X^*)^{\otimes n}})^*\,(s_n^{-1})^* = s_n^{-1}(f^*\otimes \mathrm{id}_{(X^*)^{\otimes n}})s_n = S_n(f^*). \qquad \square$$

态射 $S_2(c_{X,\,X})$ 穿过 X在 $X\otimes X^*\otimes X\otimes X^*$中的两个副本，并保持 X^*的两个副本的顺序。在一般情况下， $S_2(c_{X,\,X})$ 不一定与编织 $c_{X\otimes X^*\text{相同},\ X\otimes X^*}$尽管其辫子图同样交换了 X^* 的两个副本（图 8）。

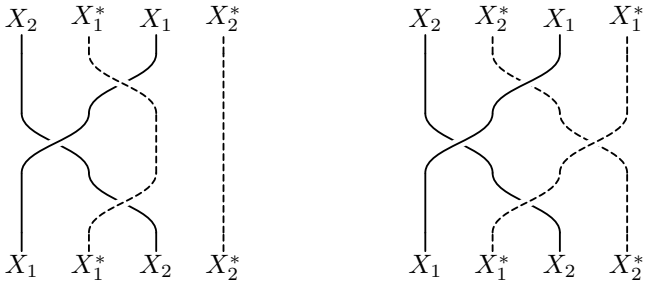


图 8。 态射 $S_2(c_{X,\,X}) = s_2^{-1}(c_{X,\,X}\otimes \mathrm{id}_{X^*\otimes X^*})\, s_2$ 以及$X\otimes X^*$ 与自身的编织，按照图 6中的约定，从下往上读取。下标标识底部的两对弦。左图中，两条实线交换位置，而虚线保持顺序不变。右图中，两对弦都交换位置。

4.3. **同态** Φ_n。 现在我们将同态 S_n 与推论 3.3中的同态复合。

定理 *4.4*。设 $d^2\in\mathbb{Z}$，并令 $m := d^2$*FP 维数(A)*。令 $R_{\mathcal{A}}$ 为 *A* 的正则对象，令 $W:=$*Hom*$_{\mathcal{A}}(R_{\mathcal{A}},\ X\otimes X^*\otimes R_{\mathcal{A}})$，并令 $\Phi_n^{X\otimes X^*}$*: End*$_{\mathcal{A}}((X\otimes X^*)^{\otimes n}) \to$ *End*$(W^{\otimes n})$ 为推论 *3.3* 中 $E = A$ 且 $T = X\otimes X^*$ 时的同态。置

$$\Phi_n := \Phi_n^{X\otimes X^*}\circ S_n\colon E_n \longrightarrow \mathrm{End}(W^{\otimes n}), \qquad n\geq 1.$$

(a) 这些映射 Φ_n 是单射含幺代数同态，并且按照(2.10)的意义与张量积相容，且 维数 $W = m$。

(b) 对于 $n\geq 1$，以及 $X^{\otimes n}$ 的每个单成分 Y，令 $K_{n,Y}$*:= Hom*$_{\mathcal{A}}(R_{\mathcal{A}}, Y\otimes (X^*)^{\otimes n}\otimes R_{\mathcal{A}}^{\otimes n})$。对象 $Y\otimes(X^*)^{\otimes n}$ 属于 *A*，因为它是 $X^{\otimes n}\otimes(X^*)^{\otimes n}\cong(X\otimes X^*)^{\otimes n}$ 的一个直和项。于是 *dim*$^{K_{n,Y}} = (m/d)^n\, d_Y$，并且存在一个 E_n-模同构

$$W^{\otimes n}\cong \bigoplus_Y \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X^{\otimes n})\otimes K_{n,Y}, \tag{4.2}$$

其中 Y 遍历 $X^{\otimes n}$ 的简单成分，且 $f\in E_n$ 在右侧通过 $f_Y\otimes \mathrm{id}^{K_{n,Y}}$ 作用。特别地，简单 E_n-模 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X^{\otimes n})$ 在 $W^{\otimes n}$ 中的重数为 $(m/d)^n\, d_Y$。

(c) 对于每个 $f \in E_n$，都有 $m^{-n}\mathrm{tr}(\Phi_n(f)) = d^{-n}\mathrm{Tr}(f)$，其中 Tr 是 D 的典范球面结构的迹。(d) 具有 $R := \Phi_2(c_{X,X})$ 的对 *{style id='23'>(W, R)* 是 X 的一个维数为 m 的局部化。

证明。由引理 4.1(b)，$\mathcal{A}$ 是一个整融合范畴，因此推论 3.3 适用于 $=\mathcal{A}$和 $T = X \otimes X^*$。与第 3节一样，令 $H := \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(R_{\mathcal{A}}, -)$。

(a) 由推论 $\Phi_n^{X\otimes X^*}$ 和 S_n 是单射含幺代数同态，这由推论3.3(a) 和命题 4.3(a) 得出。对于 $f \in E_n$ 和 $g \in E_k$，命题 4.3(b) 和推论 3.3(b) 给出

$$\Phi_{n+k}(f \otimes g) = \Phi_{n+k}^{X\otimes X^*}(S_n(f) \otimes S_k(g)) = \Phi_n^{X\otimes X^*}(S_n(f)) \otimes \Phi_k^{X\otimes X^*}(S_k(g)) = \Phi_n(f) \otimes \Phi_k(g).$$

最后，$\dim W = d_{X\otimes X^*}$ FP 维数($\mathcal{A}$) 由推论 3.3(a) 得出，且 $d_{X\otimes X^*} = d^2$。

(b) 步骤 *1*。的作用 E_n 变为复合。在此证明中，不带下标的 id 表示 $(X^*)^{\otimes n} \otimes R_{\mathcal{A}}^{\otimes n}$ 的恒等态射。回忆一下，$\Phi_n^{X\otimes X^*}(g) = J_n^{-1} H(g \otimes \mathrm{id}_{R^{\otimes n}\,\mathcal{A}}) J_n$，其中 J_n 是一个从 $W^{\otimes n}$ 到 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(R_{\mathcal{A}}, (X \otimes X^*)^{\otimes n} \otimes R_{\mathcal{A}}^{\otimes n})$ 的同构。与同构$s_n \otimes \mathrm{id}_{R^{\otimes n}\,\mathcal{A}}$ 复合，给出从该空间到 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(R_{\mathcal{A}}, X^{\otimes n} \otimes (X^*)^{\otimes n} \otimes R_{\mathcal{A}}^{\otimes n})$ 的一个同构。令

$$\Theta_n \colon W^{\otimes n} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(R_{\mathcal{A}}, X^{\otimes n} \otimes (X^*)^{\otimes n} \otimes R_{\mathcal{A}}^{\otimes n}), \qquad \Theta_n(w) := (s_n \otimes \mathrm{id}_{R_{\mathcal{A}}^{\otimes n}})\, J_n(w),$$

是复合同构。由于 $S_n(f) = s_n^{-1}(f \otimes \mathrm{id}_{(X^*)^{\otimes n}})s_n$，根据 Φ_n 的定义可得

$$\Theta_n(\Phi_n(f)w) = (f \otimes \mathrm{id})\,\Theta_n(w) \qquad (f \in E_n,\ w \in W^{\otimes n}). \tag{4.3}$$

因此，Θ_n 是 E_n-模的同构，其中 $f \in E_n$ 通过与 $f \otimes$id 复合而作用于 Θ_n 的目标对象。

步骤 *2*. $X^{\otimes n}$ 的分解。对于 $X^{\otimes n}$ 的一个简单对象成分 Y、一个态射 $u\colon Y \to X^{\otimes n}$ 和一个元素 $k \in K_{n,\,Y}$，复合 $(u \otimes \mathrm{id})\ k$ 是从 $R_{\mathcal{A}}$ 到 $X^{\otimes n} \otimes (X^*)^{\otimes n} \otimes R_{\mathcal{A}}^{\otimes n}$ 的态射。这定义了一个线性映射

$$\bigoplus_Y \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X^{\otimes n}) \otimes K_{n,Y} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(R_{\mathcal{A}}, X^{\otimes n} \otimes (X^*)^{\otimes n} \otimes R_{\mathcal{A}}^{\otimes n}), \qquad u \otimes k \longmapsto (u \otimes \mathrm{id})\, k.$$

这是一个同构。事实上，将相同公式中的 $X^{\otimes n}$ 换成 $X^{\otimes n}$ 的任意直和项，便可定义这样的映射；这些映射与直和相容。对于简单直和项 Y，该映射是 $K_{n,Y}$ 的恒等映射，因为 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Y) = \mathbb{C}\,\mathrm{id}_Y$ 且 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y'Y) = 0$，其中 $Y' \neq Y$。它是 E_n-模同态，因为 $(f \otimes \mathrm{id})(u \otimes \mathrm{id})k = (fu \otimes \mathrm{id})k$ 且 $fu = f_Y(u)$。在图 9 中，f 作用于线 $X^{\otimes n}$，且只与方框 u 相交。结合步骤 1 即得 (4.2)。

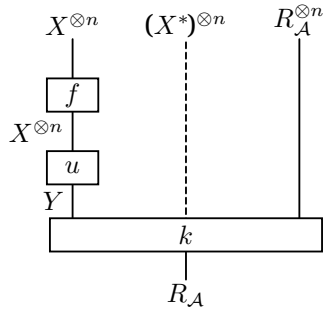


图 9。态射 $(fu \otimes \mathrm{id})\ k$，其中 $k \in K_{n,\,Y}$, $u\colon Y \to X^{\otimes n}$和 $f \in E_n$。

步骤*3*。 K_{n}的维数，Y。 由引理3.1(a),

$$\dim K_{n,Y} = d_{Y\otimes (X^*)^{\otimes n}\otimes R_{\mathcal{A}}^{\otimes n}} = d_Y\, d^n\ \mathrm{FPdim}(\mathcal{A})^n = \left(\frac{m}{d}\right)^n d_Y,$$

由于 $d_{R_{\mathcal{A}}}$ = FP 维数($\mathcal{A}$) 以及 m/d = dFP 维数($\mathcal{A}$)。 (b) 的最后一个断言成立，因为空间$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X^{\otimes n})$ 是简单对象 E_n-模，由（2.3）。

(c)步骤 *1*。其迹 $H(h)$。设 V是 $\mathcal{A}$ 中的一个对象，并设 $h \in \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(V)$。我们断言 at

$$\mathrm{tr}(H(h)) = \mathrm{Tr}(h). \tag{4.4}$$

事实上， $R_{\mathcal{A}}$ 是 A 中每个简单对象 i 的 d_i 个副本的直和。因此， $H(V)$ 是每个空间 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(i, V)$ 的 d_i 个副本的直和，而 $H(h)$ 在这些副本中的每一个上都通过 h_i 作用。因此 $\mathrm{tr}(H(h)) = \sum_i d_i \mathrm{tr}(h_i)$。根据融合范畴 D 及其典范球面结构中的引理 2.2，这个数就是 $\mathrm{Tr}(h)$；对于该结构，根据引理 4.1(b)，$\dim(i) = d_i$。D 中不属于 A 的简单对象不产生贡献，因为它们不是 V 的成分。

步骤 *2*。闭合额外的线。根据（4.3），同构 Θ_n 将算子 Φ_n（f）与 H（$f \otimes \mathrm{id}$）对应起来，而 $X^{\otimes n} \otimes (X^*)^{\otimes n} \otimes R_{\mathcal{A}}^{\otimes n}$是 $\mathcal{A}$中的一个对象。因此（4.4）以及迹的乘法性 [EGNO15，命题 4.7。3] 给出

$$\mathrm{tr}(\Phi_n(f)) = \mathrm{Tr}(f \otimes \mathrm{id}) = \mathrm{Tr}(f)\ \dim((X^*)^{\otimes n})\ \dim(R_{\mathcal{A}}^{\otimes n}) = \mathrm{Tr}(f)\, d^n\ \mathrm{FPdim}(\mathcal{A})^n = \left(\frac{m}{d}\right)^n \mathrm{Tr}(f)$$

（图 10）。这里我们使用了：对于 $\mathcal{D}$ 中的每个对象 V，$\dim(V) = d_V$；还使用了 $d_{X^*} = d$ 以及 $d_{R_{\mathcal{A}}}$ =FP 维数($\mathcal{A}$)。恒等式 (c) 也可由 (b) 和引理 2.2 得出，因为 $\dim^{K_{n,\ Y}} = (m/d)^n d_Y$。

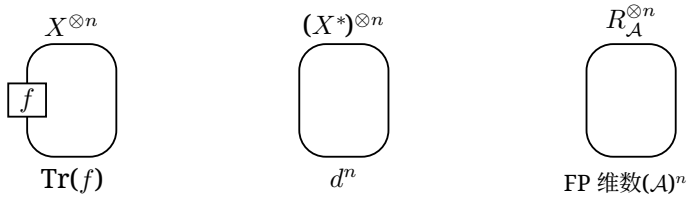


图 10。 $f \otimes$id 的迹，其中 id 是 $(X^*)^{\otimes n} \otimes R_{\mathcal{A}}^{\otimes n}$ 的恒等态射。闭合 $(X^*)^{\otimes n}$ 的弦会得到因子 d^n，闭合 $R_{\mathcal{A}}^{\otimes n}$ 的弦会得到因子 FP 维数($\mathcal{A}$)^n。它们的乘积为 $(m/d)^n$。

(d) 这由 (a) 和引理 2.4(b) 得出。 □

注 4.5. 定理4.4 中的算子 R 可按如下方式计算。我们有 $S_2(c_{X,X}) = s_2^{-1}(c_{X,X} \otimes \mathrm{id}_{X^* \otimes X^*}) s_2$，其中 $s_2 = \mathrm{id}_X \otimes c_{X^*,X} \otimes \mathrm{id}_{X^*}$（图8）。同构 J_2：$W \otimes W \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(R_{\mathcal{A}}, X \otimes X^* \otimes X \otimes X^* \otimes R_{\mathcal{A}} \otimes R_{\mathcal{A}})$由 $J_2(u \otimes v) = (\mathrm{id}_{X \otimes X^*} \otimes \widehat{v})\, u$给出，而 R是在 J_2下对应于与 $S_2(c_{X,X}) \otimes \mathrm{id}_{R_{\mathcal{A}} \otimes R_{\mathcal{A}}}$复合的线性映射。

R 的矩阵可以在不求 J_2的逆的情况下计算。设 λ 是 W上的线性形式，并令 $V := X \otimes X^* \otimes R_{\mathcal{A}}$。则 $W = H(V)$。由米田引理，从$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(S, V \otimes R_{\mathcal{A}})$到$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(S, R_{\mathcal{A}})$的映射$(\lambda \otimes \mathrm{id})\Gamma_{S,V}^{-1}$关于 S是自然的，它们由与唯一态射 p_λ：$V \otimes R_{\mathcal{A}} \to R_{\mathcal{A}}$的复合给出。由于$\widehat{v} = \Gamma_{R_{\mathcal{A}},V}(v \otimes \mathrm{id}_{R_{\mathcal{A}}})$，对每个$v \in W$我们有 $p_\lambda\, \widehat{v} = \lambda(v)\, \mathrm{id}_{R_{\mathcal{A}}}$。于是，对所有 $u, v \in W$，

$$(\mathrm{id}_W \otimes \lambda)(R(u \otimes v)) = (\mathrm{id}_{X \otimes X^*} \otimes p_\lambda)\, (S_2(c_{X,X}) \otimes \mathrm{id}_{R_{\mathcal{A}} \otimes R_{\mathcal{A}}})\, (\mathrm{id}_{X \otimes X^*} \otimes \widehat{v})\, u \tag{4.5}$$

（图1）。事实上，对所有 x、$y \in W$，$_{X \otimes X^*} \otimes p_\lambda\ J_2(x \otimes y) = \lambda(y)\ x$，且 $J_2(R(u \otimes v)) = (S_2(c_{X,X}) \otimes \mathrm{id}_{R_{\mathcal{A}} \otimes R_{\mathcal{A}}}) J_2(u \otimes v)$。若 C 是酉的，采用定理 5.1 中的选择，则对于线性形式 $\lambda = v', -$，由 (3.2) 可得 $p_\lambda = \widehat{v'}^{\,*}$，而 (4.5) 给出了矩阵元

$$\langle u' \otimes v', R(u \otimes v) \rangle = \omega\Big(u'^{*}\, (\mathrm{id}_{X \otimes X^*} \otimes \widehat{v'}^{\,*})\, (S_2(c_{X,X}) \otimes \mathrm{id}_{R_{\mathcal{A}} \otimes R_{\mathcal{A}}})\, (\mathrm{id}_{X \otimes X^*} \otimes \widehat{v})\, u\Big).$$

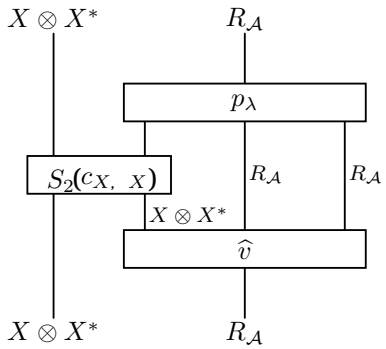


图11。右侧的 $X \otimes X^* \otimes R_{\mathcal{A}}$ （4.5）中的自同态。离开 $\widehat{v}$ 的两条弦 $R_{\mathcal{A}}$ 不相交于 $S_2(c_{X,X})$。将所示自同态与 u复合，得到（4.5）的右侧。

注 4.6。维数 $m = d^2$FPdim(A) 通常并非局部化的最小维数。设 A 存在一个纤维函子 $F\colon \mathrm{A} \to \mathrm{Vec}$。令 $W_0 := F(X \otimes X^*)$，并设$\xi_n\colon W_0^{\otimes n} \to F((X \otimes X^*)^{\otimes n})$ 是 F 的迭代张量结构。映射 $f \mapsto \xi_n^{-1} F(S_n(f))$ ξ_n是单射含幺代数同态 $E_n \to \mathrm{End}(W_0^{\otimes n})$，因为 F 是忠实的，且 S_n 是单射；根据命题 4.3(b) 和下文引理 5.2(a) 的论证，它们与张量积相容。根据引理 2.4，它们给出了 X 在 W_0 上的一个局部化。其维数为 $\dim F(X \otimes X^*) = d_{X\otimes X^*} = d^2$，因为张量函子保持 Frobenius–Perron 维数 [EGNO15，命题 4.5。7]。对于伊辛任意子 σ，我们有 $d^2 = 2$，且 $\mathrm{A} = \psi$，其中 $\mathrm{FPdim(A)} = 2$。定理 4.4 给出了一个维数为 4 的局部化。融合范畴 ψ 与超向量空间的融合范畴 [DGNO10，引理 B.11] 辫子等价。其底层融合范畴是 $\mathbb{Z}/2$-分次向量空间的融合范畴，而遗忘分次就是一个纤维函子。由此得到的局部化维数为 2，也就是 [FRW06，RW12] 的局部化维数。

5. 酉局部化

我们沿用第4节的记号。定理 Φ_n 中的同态4.4 是由同态 S_n（以对偶弦定义）和同态$\Phi_n^{X\otimes X^*}$（以正则对象定义）复合而成。当$\mathcal{C}$ 为酉时，两者都保持伴随，这就给出了定理1.4 的酉情形（定理5.1）。接着我们证明，只需假设$\mathcal{A}$ 可酉化（推论5.6），并证明引言中陈述的结果。

定理 5.1. 设 X 是幺正编织融合范畴 C 中的一个非零对象，假设 $d^2 \in \mathbb{Z}$，并令 A 如定理 *4.4* 中所述。固定 $\mathit{End}_{\mathcal{A}}(R_{\mathcal{A}})$ 上的忠实正线性泛函 ω，以及如引理 *3.1(c)* 中所述的态射 δ，其中 $E = A$。则 $W = \mathit{Hom}_{\mathcal{A}}(R_{\mathcal{A}}, X \otimes X^* \otimes R_{\mathcal{A}})$ 是一个希尔伯特空间，其内积为 $\langle h, h'\rangle = \omega(h^* h')$，且定理 *4.4* 中的同态 Φ_n 满足：对所有 $n \geq 1$ 和 $f \in E_n$，$\Phi_n(f^*) = \Phi_n(f)^*$。特别地，$R = \Phi_2(c_{X,X})$ 是酉的，并且 (W, R) 是 X 的一个维数为 d^2 *FP* 维数*(A)* 的酉局部化。

证明。C 的融合子范畴 A 是酉的，并带有 C 的伴随，且由引理 4.1(b) 可知它是整的。由引理 3.1(c)，W 是一个希尔伯特空间，并且由推论 3.3(c)，对每个 $g \in \mathrm{End}_{\mathcal{A}}((X \otimes X^*)^{\otimes n})$ 有 $\Phi_n^{X\otimes X^*}(g^*) = \Phi_n^{X\otimes X^*}(g)^*$。由命题 4.3(c)，$S_n(f^*) = S_n(f)^*$。因此

$$\Phi_n(f^*) = \Phi_n^{X\otimes X^*}\big(S_n(f)^*\big) = \Phi_n^{X\otimes X^*}\big(S_n(f)\big)^* = \Phi_n(f)^*.$$

算子 R 根据引理2.4（c）是酉的，并且（W，R）是一个维数为 d^2 FP 维数（$\mathcal{A}$）的局部化，见定理 4.4。□

5.1. **沿张量等价传递**。在定理5.1 中，仅使用了融合范畴$\mathcal{D} = \langle X \rangle$ 的酉结构，因为酉融合范畴的每个编织都是酉的。在本小节中，$\mathcal{C}$ 是一个不一定为酉的编织融合范畴。我们证明，当 X 为弱整数对象时，只要$\mathcal{D}$ 可酉化，它就具有酉局部化（命题5.3），并且$\mathcal{D}$ 可酉化当且仅当$\mathcal{A}$ 可酉化（命题5.5）。方法是将$\mathcal{D}$ 的编织传递到酉融合范畴中，并在那里应用定理5.1 。

设 $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ 是从 $\mathcal{D}$ 到融合范畴 $\mathcal{D}'$ 的张量等价，其张量结构为$\gamma_{A,\,B}\colon G(A) \otimes G(B) \to G(A \otimes B)$。令 $X' := G(X)$。我们赋予 $\mathcal{D}'$ 沿G 传递而来的编织 c'，它由下式确定

$$c'_{G(A),G(B)} = \gamma_{B,A}^{-1}\, G(c_{A,B})\, \gamma_{A,B}. \tag{5.1}$$

与小节 2.3 中一样，我们将 $\gamma_{n,\,k} := \gamma_{X^{\otimes n},\,X^{\otimes k}}$ 和 $\gamma_n\colon X'^{\otimes n} \to G(X^{\otimes n})$ 记作 G 在对象 X 处的迭代结构同构。由于 G 是一个等价，映射

$$G_n\colon E_n \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{D}'}(X'^{\otimes n}), \qquad G_n(f) := \gamma_n^{-1}\, G(f)\, \gamma_n \tag{5.2}$$

是代数同构。

引理 5.2. 设 $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ 是一个张量等价，并设 G_n 为同构 (5.2)。

(a) 对于 $f \in E_n$ 和 $g \in E_k$，有 $G_{n+k}(f \otimes g) = G_n(f) \otimes G_k(g)$。(b) 对于每个 $n \geq 2$，都有 $G_n \circ \rho_n^X = \rho_n^{X'}$，其中 $\rho_n^{X'}$ 是由编织 c' 定义的。

证明。(a) 由 γ的自然性，我们有 $G(f \otimes g)\,\gamma_{n,k} = \gamma_{n,k}\,(G(f) \otimes G(g))$。由（2.6）对于对象 X 以及该恒等式，

$$G_{n+k}(f \otimes g) = \big(\gamma_n \otimes \gamma_k\big)^{-1}\big(G(f) \otimes G(g)\big)\big(\gamma_n \otimes \gamma_k\big) = G_n(f) \otimes G_k(g).$$

(b) 由（5.1）对于 $A = B = X$，我们有 $G_2(c_{X,X}) = c'_{X',X'}$。由于 $\rho_n^X(\sigma_i)$是$c_{X,X}$ 与恒等态射的张量积，且同态 G_k 是含幺的，故由(a)对每个生成元得到 $G_n(\rho_n^X(\sigma_i)) = \rho_n^{X'}(\sigma_i)$。(b)的两边均为代数同态，因此它们相等。□

命题 *5.3.* 设 X 为编织融合范畴$\mathcal{C}$的一个非零对象，假设 $d^2 \in \mathbb{Z}$，并设 $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ 是映到一个酉融合范畴上的张量等价，带有*(5.2)*中的同构G_n 。则存在一个希尔伯特空间 W，其维数为 d^2*FP* 维数*(A)*，以及与张量积相容的单射含幺代数同态 $\Phi_n\colon E_n \to \mathrm{End}(W^{\otimes n})$，$n \geq 1$，使得同态 $\Phi_n \circ G_n^{-1}\colon \mathrm{End}_{\mathcal{D}'}(X'^{\otimes n}) \to \mathrm{End}(W^{\otimes n})$保持伴随。算子 $R := \Phi_2(c_{X,X})$是酉的，并且(W, R)是 X的酉局部化。

证明。第一步。融合范畴 D′。同构 (5.1) 在 D′ 上定义了一个编织 c'，因为G 是一个张量等价。因此 D′ 是一个幺正编织融合范畴。张量等价保持对偶与 Frobenius–Perron维数。因此 $d_{X'} = d$，并且对每个$n \geq 1$有 $G(X^{\otimes n}) \cong X'^{\otimes n}$。由于 G 是本质满的，D′ 的每个简单对象都同构于 $G(Y)$，其中 Y 是 D 的某个简单对象，并且由引理 2.1，Y 是某个 $X^{\otimes n}$ 的直和项。因此 D′ 的每个简单对象都是某个 $X'^{\otimes n}$的直和项，并且由引理 2.1，D′ = X'。令 A′ := $X' \otimes X'^{*}$。则 $X' \otimes X'^{*} \cong G(X \otimes X^{*})$，并且由引理 2.1（应用于 $X \otimes X^{*}$ 与 $X' \otimes X'^{*}$），函子G将 A 的简单对象映为 A′的简单对象，并且 A′ 的每个简单对象都同构于 A 的某个简单对象的像。由于 G 保持维数，FP 维数(A′) =FP 维数(A)。

步骤 *2.* 同态。定理 5.1，应用于对象 X'（它属于 $\mathcal{D}'$），给出一个希尔伯特空间W，其维数为 d^2 FP 维数($\mathcal{A}$) 以及单射含幺代数同态 $\Phi'_n\colon \mathrm{End}_{\mathcal{D}'}(X'^{\otimes n}) \to \mathrm{End}(W^{\otimes n})$，它们与张量积相容并保持伴随。令 $\Phi_n := \Phi'_n \circ G_n$。这些映射是单射含幺代数同态，并且由引理 5.2(a) 可知，它们与张量积相容。此外，$\Phi_n \circ G_n^{-1} = \Phi'_n$ 保持伴随。

步骤*3*。局部化。根据引理 2.4(b)，(W, R) 是 X的局部化。最后，$R = \Phi'_2(G_2(c_{X,X})) = \Phi'_2(c'_{X',X'})$ 根据引理 5.2(b)，且由定理 5.1可知，该算子是酉的。□

现在我们比较 D 和 A 的可酉化性。回忆一下，D 的伴随子范畴 D_{ad} 是由对象 $Y \otimes Y^*$生成的融合子范畴，其中 Y遍历 D 的简单对象。它是 D 的泛分次的中性分量，该分次是忠实的 [GN08，定理 3.5 和推论 3.7]。根据引理 4.1(a)，$\mathrm{D}_{\mathrm{ad}} \subseteq \mathrm{A}$。若 X 是简单对象，则 $\mathrm{A} = \mathrm{D}_{\mathrm{ad}}$，因为 $X \otimes X^*$ 是 D_{ad}的生成元之一。对于非简单对象，这个包含关系可能是严格的。例如，设 $X = \mathbf{1} \oplus g$ 属于 $\mathbb{Z}/2$分次向量空间范畴，其中 g 是次数为一的简单对象。则 D_{ad} 由 1 的倍数组成，且 A =D。

我们使用 [GHR13，定义 5 中的以下概念。13]融合范畴 $\mathcal{K}$ 是完全酉的，如果它满足以下三个性质。

(i) 融合范畴$\mathcal{K}$ 与某个酉融合范畴张量等价，并且在酉张量等价意义下唯一。(ii) 每个$\mathcal{K}$ 上的模范畴都与某个酉模范畴等价，并且在酉模等价意义下唯一。(iii) 每个$\mathcal{K}$ 上酉模范畴之间的模等价，都同构于一个酉模等价，并且在酉模自然同构意义下唯一。

这里的模范畴都是有限半单的，并且在 (ii) 和 (iii) 中，它们是 (i) 中酉融合范畴上的模范畴。

引理 5.4。 每个可酉化融合范畴都是完全酉的。

证明。 设 $\mathcal{K}$ 是一个可酉化融合范畴。性质 (i) 成立，因为 $\mathcal{K}$ 的酉结构在酉张量等价意义下唯一 [Reu23，定理 1]。对于性质 (ii)，酉融合范畴上的有限半单模范畴是不可分解模范畴的直和。每个直和项都具有酉结构 [CGGH23，推论 3。8], 这些结构的正交直和是该模范畴上的酉结构。这个结构在酉模等价意义下唯一 [Reu23，推论 9]。 [CGGH23]的结果针对右模范畴表述，而通过反转张量积，它也适用于左模范畴。对于性质 (iii)，根据极分解，每个酉模范畴之间的模等价都同构于一个酉模等价，且任意两个这样的选择之间相差一个酉同构 [Reu23，定理 8 及备注 10]。 □

命题 5.5. 对于编织融合范畴中的每个非零对象 X，融合范畴 $\langle X \rangle$ 可酉化，当且仅当 $\langle X \otimes X^* \rangle$ 可酉化。

证明。 酉融合范畴的融合子范畴可酉化，并且 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{D}$ 的融合子范畴。因此，只需证明：若 $\mathcal{A}$ 可酉化，则$\mathcal{D}$ 可酉化。设 $\mathcal{A}$ 可酉化。

步骤 *1.* 融合范畴 $\mathcal{D}_{\mathrm{ad}} \boxtimes \mathcal{D}_{\mathrm{ad}}^{\mathrm{rev}}$ 可酉化。 $\mathcal{A}$ 的融合子范畴$\mathcal{D}_{\mathrm{ad}}$ 可酉化。令$\mathcal{D}_{\mathrm{ad}}^{\mathrm{rev}}$ 表示采用反向张量积的$\mathcal{D}_{\mathrm{ad}}$ 。若$\mathcal{K}'$ 是一个与$\mathcal{D}_{\mathrm{ad}}$张量等价的酉融合范畴，则$\mathcal{K}' \boxtimes (\mathcal{K}')^{\mathrm{rev}}$ 是一个与$\mathcal{D}_{\mathrm{ad}} \boxtimes \mathcal{D}_{\mathrm{ad}}^{\mathrm{rev}}$张量等价的酉融合范畴。因此$\mathcal{D}_{\mathrm{ad}} \boxtimes \mathcal{D}_{\mathrm{ad}}^{\mathrm{rev}}$可酉化。

步骤 *2*。完全酉性。 根据引理 5.4，融合范畴 $\mathcal{D}_{\mathrm{ad}}$ 和 $\mathcal{D}_{\mathrm{ad}} \boxtimes \mathcal{D}_{\mathrm{ad}}^{\mathrm{rev}}$ 是完全酉的。

步骤*3*。扩张定理。 泛分次是忠实的，并且它将 $\mathcal{D}$ 表示为一个忠实分次融合范畴，其中性分量为 $\mathcal{D}_{\mathrm{ad}}$。根据扩张定理 [GHR13，定理 5。17], 当其中性分量 $\mathcal{K}$ 以及融合范畴 $\mathcal{K} \boxtimes \mathcal{K}^{\mathrm{rev}}$ 完全酉时，一个忠实分次融合范畴是完全酉的。根据步骤 2，$\mathcal{D}$ 是完全酉的，因而特别是可酉化的。 □

推论 5.6. 设 X 是编织融合范畴中的非零弱整数对象，且 $A = \langle X \otimes X^* \rangle$ 可酉化。那么 X 存在一个维数为 d^2FP 维数(A) 的酉局部化。

证明。 根据命题 5.5，融合范畴 $\mathcal{D} = \langle X \rangle$ 可酉化。设 $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ 是一个到酉融合范畴上的张量等价。将命题 5.3应用于 G，可得 X 存在一个维数为 d^2FP 维数($\mathcal{A}$) 的酉局部化。 □

5.2. **引言中所述结果的证明。**

定理 1.4 的证明。 数 $m = d^2$FP 维数($\mathcal{A}$) 是一个整数，因为 $\mathcal{A}$ 是整的（引理 4.1(b)）。定理 1.4 的 (a) 与 (b) 部分即为定理 4.4(a)–(c)，而定理 1.4 的 (c) 部分即为定理 5.1。 □

定理 1.2 的证明。 对 (W, R) （定理 4.4(d)）是 X 的一个局部化。若 $\mathcal{C}$ 是酉的，则对于定理 5.1 的选取，它是一个酉局部化。 □

推论 1.3 的证明。 (a) 弱整融合范畴的每个简单对象都是弱整的 [EGNO15，命题 9.6.9(i)]，并且定理 1.2 适用。

(b) 设 X 是一个简单对象，使得 $\mathcal{D} = \langle X \rangle$ 是弱群论的。那么 $\mathcal{D}$ 是弱整的 [EGNO15，注 9.8。2], 因此 d^2 根据引理4.1(c)，是一个整数。此外，$\mathcal{D}$ 是完全酉的 [GHR13，定理 5。20], 特别是，它与某个酉融合范畴张量等价。将命题 5.3应用于这种等价，可得到X的酉局部化。对于最后一个断言，注意弱群论融合范畴的每个融合子范畴都是弱群论的 [EGNO15，命题 9.8。4]。 □

注 5.7。设 X 是编织融合范畴中的一个非零弱整对象，并设$R = \Phi_2(c_{X,\,X})$ 是定理 4.4中的算子。那么 R 具有有限阶。事实上，根据引理 4.1(b)，$\mathcal{D}$ 是伪酉的，我们考虑其扭结 θ，如第 2.4 小节所述。$\mathcal{D}$ 中简单对象的扭结是单位根 [EGNO15，推论 8.18.2(i)], ，因此存在一个整数 $h \geq 1$，使得对 $\mathcal{D}$ 的每个对象 A，都有 $\theta_A^h = \mathrm{id}_A$。根据扭结的定义恒等式 [EGNO15，（8.32）]，有 $c^2_{X,\,X} = \theta_{X\otimes X}(\theta_X^{-1} \otimes \theta_X^{-1})$，并且这两个因子可交换，因为 θ 是自然的。因此$c^{2h}_{X,\,X} = \mathrm{id}_{X\otimes X}$，从而 $R^{2h} = \mathrm{id}_{W\otimes W}$。

由于 $\rho_n^R = \Phi_n \circ \rho_n^X$ 且 Φ_n 是单射，群 $\rho_n^X(B_n)$ 与 $\rho_n^R(B_n)$ 同构。因此，对于定理 5.1 的酉局部化，Rowell 和 Wang 的如下猜想——有限阶的酉杨–巴克斯特算子模标量后具有有限的辫群像 [RW12，猜想 3.1]——将蕴含群 $\Gamma := \rho_n^R(B_n)$ 模标量后是有限的。对该群而言，模标量有限等价于有限。事实上，设 q 为 R 的阶，并令 $N := m^n = \dim W^{\otimes n}$。每个生成元 $\rho_n^R(\sigma_i)$ 的行列式是 q 次单位根，因而 Γ 中每个元素的行列式也是 q 次单位根。Γ 中的标量算子 $\zeta\mathrm{id}_{W^{\otimes n}}$ 的行列式为 ζ^N，因此 $\zeta^{Nq} = 1$。于是 Γ 只含有限多个标量算子，并且若它模标量后有限，则它本身有限。因此，Rowell 和 Wang 的猜想将蕴含群 $\rho_n^X(B_n)$ 是有限的，这正是性质 F 猜想对弱整对象所预言的陈述[NR11], [RW18，猜想 6.2]。当 D 为弱群论时，已知这些群是有限的 [GN21，定理 7.2]。反方向上，伪酉编织融合范畴中辫群像有限的简单对象是弱整的 [LR26，推论 1.2]。

备注 5.8. 对于一个整数维数的非零对象 d，在具有纤维函子的弱群论编织融合范畴中，构造了维数为 d 的酉局部化，见 [GHR13，推论 5.25]. 命题5.3与 [GHR13，定理 5.20], 共同给出了维数为 $d^2\mathrm{FPdim}(\mathcal{A})$ 的酉局部化，适用于每个非零弱整对象 X，只要 $\langle X \rangle$ 是弱群论的，不论 X 是否为简单对象。此结论既不要求存在纤维函子，也不要求 d为整数。推论 1.3(b) 是对象为简单对象时的情形。

6. 偏迹与 Turaev 增强结构

在本节中，我们证明定理1.5。该证明仅使用定理1.4中同态的三个性质，并据此陈述假设。设 X 为一个简单对象，属于酉

编织融合范畴 $\mathcal{C}$，令 $d := d_X$，并假设 $d^2 \in \mathbb{Z}$。设 W 为一个非零有限维希尔伯特空间，令 $m := \dim W$ 且 $\tau_n := m^{-n}\,\mathrm{tr}$，并设 $\Phi_n\colon E_n \to \mathrm{End}(W^{\otimes n})$，$n \geq 1$ 为代数 $E_n = \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X^{\otimes n})$ 的含幺代数同态，它们在 (2.10) 的意义下与张量积相容，保持伴随，并满足迹恒等式

$$\tau_n\big(\Phi_n(f)\big) = d^{-n}\,\mathrm{Tr}(f), \qquad f \in E_n, \tag{6.1}$$

其中 Tr 是X的典范球面结构的迹。对于该结构，$\dim(X) = d$。定理 1.4(c) 的同态具有这些性质，其中 $m = d^2$FP 维数(A)，且 A $= X\otimes X^*$。置 $R := \Phi_2(c_{X,X})$。根据引理 2.4，R 是酉杨–巴克斯特算子，并且对于$n \geq 2$，$\rho_n^R = \Phi_n \circ \rho_n^X$。群 B_1 是平凡的，我们令 ρ_1^X和 ρ_1^R为取值分别为 id_X 和 id_W的平凡同态。因此，迹恒等式给出

$$\tau_n\big(\rho_n^R(b)\big) = d^{-n}\,\mathrm{Tr}\big(\rho_n^X(b)\big), \qquad b \in B_n,\ n \geq 1. \tag{6.2}$$

因此 $d^n\,\tau_n(\rho_n^R(b))$ 是带黑板框架的 b 的闭包的 Reshetikhin–Turaev 不变量，其中每个分量都标记为 X （小节 2.4）。

我们采用以下偏迹记号。将 End($W \otimes W$) 与 End(W) $\otimes$End(W) 视为相同，并将满足以下条件的线性映射 End($W \otimes W$) $\to$End(W) 分别记为 $\tau_1 \otimes \mathrm{id}$ 和 $\mathrm{id} \otimes \tau_1$

$$(\tau_1 \otimes \mathrm{id})(x \otimes y) = \tau_1(x)\,y, \qquad (\mathrm{id} \otimes \tau_1)(x \otimes y) = \tau_1(y)\,x \qquad (x, y \in \mathrm{End}(W)).$$

这些分别是对第一因子和第二因子取的归一化偏迹。在这些表达式中，id 是 End(W) 的恒等映射，而 id_W 是 W 的恒等算子。

定理 1.5 的证明。步骤 *1*。添加一个扭结。设 $s\colon\ B_n \to B_{n+1}$ 是满足以下条件的同态$s(\sigma_i) = \sigma_{i+1}$，它在左侧添加一条线。我们证明，对于任意 $n \geq 1$、任意 $b \in B_n$ 以及任意符号，

$$\tau_{n+1}\big(\rho_{n+1}^R(\sigma_1^{\pm 1}\, s(b))\big) = \frac{\theta_X^{\pm 1}}{d}\,\tau_n\big(\rho_n^R(b)\big). \tag{6.3}$$

的闭包b（b）由 b 的闭包得到：在包含 b 的第一股的分支上添加一个扭结（图 12）。因此，这两个闭包作为有向链环是同痕的，并且该分支的黑板框架改变了 ± 1。根据小节 2.4，

$$\mathrm{Tr}\big(\rho_{n+1}^X(\sigma_1^{\pm 1}\, s(b))\big) = \theta_X^{\pm 1}\ \mathrm{Tr}\big(\rho_n^X(b)\big),$$

以及（6.2），对于 $n+1$ 以及对于 n，给出（6.3）。图 12 用态射展示了同一计算。扭结是 X 的自同态，由 $c_{X,\,X}^{\pm 1}$ 通过闭合其第一股得到。它是一个标量，因为 X 是简单对象，且该标量为 $\theta_X^{\pm 1}$，因为闭合第二线给出$\mathrm{Tr}(c_{X,\,X}^{\pm 1}) = \theta_X^{\pm 1}\dim(X)$，由（2.8）。

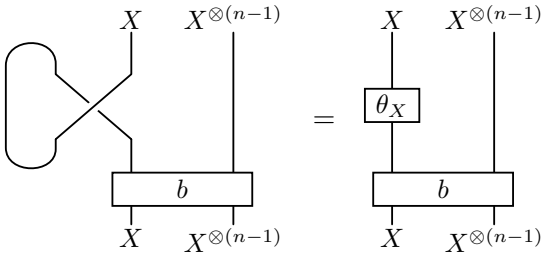


图 12。从下到上读取的辫子 $\sigma_1\, s(b)$，其第一股已闭合。方框 b 表示 $\rho_n^X(b)$。闭合添加的线后，会在 b 的第一股上留下一个扭结，即乘以 θ_X。闭合其余股后得到 $\mathrm{Tr}\big(\rho_{n+1}^X(\sigma_1 s(b))\big) = \theta_X \mathrm{Tr}\big(\rho_n^X(b)\big)$。

步骤 2。 这一部分*ial*迹，关于 R。 对于 $n=1$ 以及平凡辫子， （6.3）取正号给出 s

$$z := \tau_2(R) = \frac{\theta_X}{d}.$$

令 $B_n \subset B_{n+1}$ 为在右侧添加一条线的包含映射。对于 $b \in B_n$ ，我们有 $\rho^R_{n+1}(b) = \rho^R_n(b) \otimes \mathrm{id}_W$，因此 $\tau_{n+1}(\rho^R_{n+1}(b)) = \tau_n(\rho^R_n(b))$。因此，归一化迹在群 B_n的并集 B_∞ 上定义了一个函数。我们将其在群代数上的线性延拓记为 $\tau_R\colon \mathbb{C}B_\infty \to \mathbb{C}$ ，它满足 $\tau_R(xy) = \tau_R(yx)$。同态 s 与这些包含映射相容，并定义了一个同态 $s\colon B_\infty \to B_\infty$，我们将其线性延拓到 $\mathbb{C}B_\infty$。由于 $\tau_R(\sigma_1) = z$，带正号的恒等式 (6.3) 表明

$$\tau_R\big(\sigma_1\, s(b)\big) = \tau_R(\sigma_1)\,\tau_R(b)$$

对每个 $b \in B_\infty$成立，并由线性性可知对每个 $b \in \mathbb{C}B_\infty$成立。因此 τ_R 按照[Lec26定义 22]的意义是马尔可夫迹。根据 Lechner 的一个命题 [Lec26命题 23], ，对于酉杨–巴克斯特算子 R，迹 τ_R是马尔可夫迹，当且仅当 $(\tau_1 \otimes \mathrm{id})(R) = \tau_2(R)\,\mathrm{id}_W$。因此

$$(\tau_1 \otimes \mathrm{id})(R) = z\,\mathrm{id}_W.$$

根据 Conti 和 Lechner 的定理 [CL21定理5.10(a)]，酉杨–巴克斯特算子的两个归一化偏迹相等。因此 $(\mathrm{id} \otimes \tau_1)(R) = z\mathrm{id}_W$ 也成立。

还需考虑 R^{-1}。两个偏迹都与伴随运算可交换，也就是说，对于每个 $a \in \mathrm{End}(W \otimes W)$，$(\tau_1 \otimes \mathrm{id})(a^*) = \big((\tau_1 \otimes \mathrm{id})(a)\big)^*$，且 $(\mathrm{id} \otimes \tau_1)(a^*) = \big((\mathrm{id} \otimes \tau_1)(a)\big)^*$。事实上，两边关于 a都是共轭线性的；当 $a = x \otimes y$时，它们分别等于 $\tau_1(x)\,y^*$和 $\tau_1(y)\,x^*$。由于 $R^{-1} = R^*$， R^{-1} 的两个偏迹都等于 $z\,\mathrm{id}_W = \overline{\theta_X^{-1} d^{-1}}\mathrm{id}_W$，因为 θ_X 是单位根。最后， $|\theta_X| = 1$ 给出 $d = |\tau_2(R)|^{-1}$ 和 $\theta_X = d\,\overline{\tau_2(R)}$。这就证明了 (a)。

步骤*3.* 增强结构。 按 Turaev 的约定 [Tur88，第 2 节。3], 对 R的增强结构由算子 $\mu \in \mathrm{End}(W)$ 以及标量 α、$\beta \in \mathbb{C}^\times$ 构成，使得 $\mu \otimes \mu$与 R交换，并且

$$(\mathrm{id} \otimes \mathrm{tr})\big(R^{\pm 1}(\mu \otimes \mu)\big) = \alpha^{\pm 1}\beta\,\mu,$$

其中 $\mathrm{id} \otimes \mathrm{tr}$ 是对第二个因子取的偏迹，未经归一化。我们取 $\mu := (d/m)\mathrm{id}_W$。于是 $\mu \otimes \mu$是标量算子，并且与 R交换。由于 $\mathrm{id} \otimes \mathrm{tr} = m\,(\mathrm{id} \otimes \tau_1)$，定理 1.5 的 (a) 部分给出

$$(\mathrm{id} \otimes \mathrm{tr})\big(R^{\pm 1}(\mu \otimes \mu)\big) = \Big(\frac{d}{m}\Big)^2 m\,\frac{\theta_X^{\pm 1}}{d}\,\mathrm{id}_W = \theta_X^{\pm 1}\mu.$$

因此 $(R,\ \mu,\ \alpha,\ \beta) = (R,\ (d/m)\mathrm{id}_W,\ \theta_X,\ 1)$ 是增强杨-巴克斯特算子 .

步骤*4.* 纽结不变量。 对于辫子 $b \in B_n$ ，其中 $n \geq 2$，与此增强结构相关联的图拉耶夫不变量为 $\alpha^{-w(b)}\beta^{-n}\,\mathrm{tr}(\rho^R_n(b)\mu^{\otimes n})$ [Tur88，定理 3.1.2 与第 3 节。2]。对于我们的增强结构，它等于

$$\theta_X^{-w(b)}\Big(\frac{d}{m}\Big)^n \mathrm{tr}\big(\rho^R_n(b)\big) = \theta_X^{-w(b)} d^n\,\tau_n\big(\rho^R_n(b)\big) = \theta_X^{-w(b)}\,\mathrm{Tr}\big(\rho^X_n(b)\big),$$

^由（6.2）。当 b 的闭包是一个纽结时，右侧为 RT_X（b）由（2.7）。这就证明了 1.3）对 $n \geq 2$成立。对于 $n = 1$ ，辫子是平凡的，它通过恒等映射作用于 W，其闭包是平凡纽结。（1.3）的两侧于是都等于 d，因为 $\mathrm{tr}(\mathrm{id}_W) = m$。□

致谢

作者部分获得了安第斯大学理学院资助项目INV-2025-213-3452的支持。作者在本文的研究和撰写过程中使用了 Claude Fable 5.2 和 Gemini 4 Carbon，以探索并实施若干证明策略。作者核查了所有陈述和证明，并对其负责。作者感谢 Anthropic 通过面向科学家的 Claude Team计划提供 Claude 的使用权限，也感谢谷歌通过其面向科学家的计划提供 Google Antigravity 的使用权限。

参考文献

[ABDC+26] Justin Asher、Jonah Berean-Dutcher、Clay Córdova、Julio Parra-Martinez 和 Richard Tuddenham，《性质 F 蕴含非退化柱状编织融合范畴的弱整性》，2026，预印本，arXiv:2611.12836。编号参照 arXiv:2611.12836v1。[CGGH23] Sebastiano Carpi、Tiziano Gaudio、Luca Giorgetti 和 Robin Hillier，《 C^*-张量范畴中的单生代数与 Schellekens列表》，《数学物理通讯》402（2023），第1期，169–212，arXiv:2211.12790。编号参照 arXiv:2211.12790v3。[CL21] Roberto Conti 和 Gandalf Lechner，《Yang–Baxter端同态》，J. Lond. Math. Soc. (2) 103（2021），第2期，633–671，arXiv:1909.04127。编号参照 arXiv:1909.04127v1。[DGNO10] Vladimir Drinfeld、Shlomo Gelaki、Dmitri Nikshych 和 Victor Ostrik，《编织融合范畴 I》，Selecta Math. (N.S.) 16（2010），第1期，1–119，arXiv:0906.0620。编号参照 arXiv:0906.0620v3。[DRW16] Colleen Delaney、Eric C. Rowell 和 Zhenghan Wang，《辫群的局部酉表示及其在量子计算中的应用》，Rev. Colombiana Mat. 50（2016），第2期，211–276，arXiv:1604.06429。编号参照 arXiv:1604.06429v1。[EGNO15] Pavel Etingof、Shlomo Gelaki、Dmitri Nikshych 和 Victor Ostrik，《张量范畴》，数学调查与专著，第205卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛，2015。[FKLW03] Michael H. Freedman、Alexei Kitaev、Michael J. Larsen 和 Zhenghan Wang，《拓扑量子计算》，《美国数学会通报》(N.S.) 40（2003），第1期，31–38，arXiv:quant-ph/0101025。[FKW02] Michael H. Freedman、Alexei Kitaev 和 Zhenghan Wang，《用量子计算机模拟拓扑场论》，《数学物理通讯》227（2002），第3期，587–603，arXiv:quant-ph/0001071。[FRW06] Jennifer M. Franko、Eric C. Rowell 和 Zhenghan Wang，《特殊2-群与辫群表示的像》，J. Knot Theory Ramifications 15（2006），第4期，413–427，arXiv:math/0503435。编号参照 arXiv:math/0503435v2。[Gal14] César Galindo，《关于编织带状酉融合范畴》，Canad. Math. Bull. 57 3, 506 2014 510, 1209 2022 1209 2022 3 ( ), no. – arXiv: . . 编号和证明参照 arXiv: . v 。[GHR13] César Galindo、Seung-Moon Hong 和 Eric C. Rowell，《辫群表示的广义局部化与拟局部化》，Int. Math. Res. Not. IMRN（2013），第3期，693–731，arXiv:1105.5048。编号参照 arXiv:1105.5048v1。[GN08] Shlomo Gelaki 和 Dmitri Nikshych，《幂零融合范畴》，Adv. Math. 217（2008），第3期，1053–1071，arXiv:math/0610726。编号参照 arXiv:math/0610726v2。[GN21] Jason Green 和 Dmitri Nikshych，《关于来自弱群论融合范畴的辫群表示》，J. Algebra Appl. 20（2021），第1期，论文编号2150210，arXiv:1911.02633。编号参照 arXiv:1911.02633v1。[GR26] César Galindo 和 Eric C. Rowell，《酉杨 – 巴克斯特算子：迈向分类》，2026，预印本，arXiv:2608.16865。编号参照 arXiv:2608.16865v1。[Kit03] A. Yu. Kitaev，《任意子实现的容错量子计算》，Ann. Physics 303（2003），第1期，2–30，arXiv:quant-ph/9707021。[Lec26] Gandalf Lechner，《具有两个特征值的酉R矩阵的分类问题》，2026，预印本，arXiv:2603.20158。编号参照 arXiv:2603.20158v1。[LR97] Roberto Longo 和 John E. Roberts，《维数理论》，K-Theory 11（1997），第2期，103–159，arXiv:funct-an/9604008。编号参照 arXiv:funct-an/9604008v1。[LR26] Enyu Li 和 Yuze Ruan，《编织融合范畴的性质 F 与弱整性》，2026，预印本，arXiv:2611.06505。编号参照 arXiv:2611.06505v1。[MT08] Michael Müger 和 Lars Tuset，《幺半群、嵌入函子与量子群》，Internat. J. Math. 19（2008），第1期，93–123，arXiv:math/0604065。编号参照 arXiv:math/0604065v2。[Müg03] Michael Müger，《从子因子到范畴与拓扑。I. 张量范畴中的 Frobenius代数及其 Morita 等价》，J. Pure Appl. Algebra 180（2003），第1–2期，81–157，arXiv:math/0111204。编号参照 arXiv:math/0111204v2。[NR11] Deepak Naidu 和 Eric C. Rowell，《编织融合范畴的一种有限性》，Algebr. Represent. Theory 14（2011），第5期，837–855，arXiv:0903.4157。[NSS+08] Chetan Nayak、Steven H. Simon、Ady Stern、Michael Freedman 和 Sankar Das Sarma，《非阿贝尔任意子与拓扑量子计算》，Rev. Modern Phys. 80（2008），第3期，1083–1159，arXiv:0707.1889。[Reu23] David Reutter，《可酉化融合范畴的酉结构唯一性》，《数学物理通讯》397（2023），第1期，37–52，arXiv:1906.09710。编号参照 arXiv:1906.09710v2。[RT90] N. Yu. Reshetikhin 和 V. G. Turaev，《带状图及其由量子群导出的不变量》，《数学物理通讯》127（1990），第1期，1–26。

[RW12] Eric C. Rowell 与 Zhenghan Wang，酉辫群表示的局部化，《数学物理通讯》**311**（2012），第 3 期，595–615，arXiv:1009.0241。编号同 arXiv:1009.0241v2。
[RW18] Eric Rowell 与 Zhenghan Wang，拓扑量子计算数学，《美国数学会通报》（新辑）**55**（2018），第 2 期，183–238，arXiv:1705.06206。编号同 arXiv:1705.06206v2。
[Tur88] V. G. Turaev，*Yang–Baxter* 方程与链环不变量，《数学发明》**92**（1988），第 3 期，527–553。
[Tur10] Vladimir G. Turaev，纽结与三维流形的量子不变量，第二修订版，de Gruyter 数学研究丛书，第 18 卷，Walter de Gruyter，柏林，2010。

哥伦比亚波哥大安第斯大学数学系电子邮箱地址： cn.galindo1116@uniandes.edu.co