arXiv:2611.27980v1 [cond-mat.mes-hall] 20 Nov 2026

二维费米液体中长寿命奇宇称模式的结构与弛豫

Stan Boeve[1] 和 Johannes Hofmann [1, 2, *]
[1] Department of Physics, Gothenburg University, 41296 Gothenburg, Sweden
[2] Nordita, Stockholm University and KTH Royal Institute of Technology, 10691 Stockholm, Sweden（日期：2026年11月23日）

在二维费米液体中，费米面的奇宇称形变以异常缓慢的速率 $\sim T^4$ 弛豫，其中 T 是温度。然而，对于该速率大小的领先对数预测 $\sim m^4 \ln m$（其中 m 是角谐波指标）超过了精确对角化结果，并且未观察到 $\ln m$ 标度。我们通过对一般正则各向同性势的二维费米液体碰撞积分进行 T/T_F 的领先阶计算，解决了这一差异，其中包括 $\ln(T_F/T)$ 项之外的非对数项。我们发现，奇模式的局域温度调制（称为热修饰）会抑制共线散射导致的弛豫，而剩余弛豫则由大角度散射决定。这类大角度过程会产生量级为 $\ln\, m/\ln(T_F/T)$ 的修正，其大小不可忽略，必须进行重求和。我们将结果与常数相互作用下的精确对角化计算进行基准比较，发现在一定范围 $m^2T/T_F \lesssim 0.4$ 内二者一致；此外，我们还给出了自旋极化偶极气体中最慢奇模弛豫率的闭式结果。

I. 引言

二维（2D）散射运动学对低温下费米液体中的准粒子弛豫施加了严格限制。在这里，对于局限于费米面上的散射态，能量和动量守恒仅允许两类二体碰撞：第一类过程在重新标记意义下保持初态不变（这些过程描述直接散射和交换散射）；第二类则是正碰散射过程，其中动量位于费米面上对跖点的两个粒子散射到另一对不同的对跖点。前者不会使准粒子分布发生弛豫，而后者则导致特征性的弛豫率 $\gamma_{\rm fast} \sim T^2/(\hbar T_F)$，其遵循费米液体标准的温度平方形式（$T_F$ 为费米温度，且我们令 $k_B = 1$）。

正如 Gurzhi 等人 [1]，最先指出的那样，这种正碰弛豫对奇偶性敏感：由于正碰散射会影响费米面上相对的两个点，同等地面对，只有准粒子分布的偶宇称集体形变会以这种方式弛豫。相比之下，奇宇称形变通过偏离零温运动学有限温度效应 $O(T/T_F)$ 的过程弛豫，因此弛豫速率要慢得多 $\gamma_{\rm slow} \sim T^4/(\hbar T_F^3)$ [1–4]。这一标度是针对在费米面尺度上变化的形变确立的；Gurzhi等 [3] 指出，对于强各向异性奇宇称形变，需要采用不同的分析方法。

Ledwith等 [5]，在较新的文献中补充了这一分析，他们解析了奇模的角谐波结构，并得到了 $\gamma_{\rm slow} = (4\pi^3/15)T^4/(\hbar T_F^3) W_1 m^4 \ln\, m$，其中 m 是角费米面形变的角谐波指标，以及 W_1 是共线正面散射振幅[参见式（32）]。$\ln m$ 因子来自碰撞矩阵元的领头$\ln(T_F/T)$发散，该发散源于共线小角度正面散射过程，且该结果适用于$\ln m \gg 1$ [5]。后续工作通过超对称映射发现，每个角扇区存在一个长寿命奇模式 [6]。对电子碰撞积分的精确对角化（ED）研究证实，在很宽的温度范围内存在一条长寿命奇宇称模态带 $T \lesssim 0.15 T_F$，直至 $m \lesssim \sqrt{T_F/T}$的每个角谐波扇区各有一个，适用于一系列相互作用势 [7–9]。这些计算显示了 m^4T^4 在低温下的标度，但（i）它们并未显示对数 m标度，且（ii）这些速率

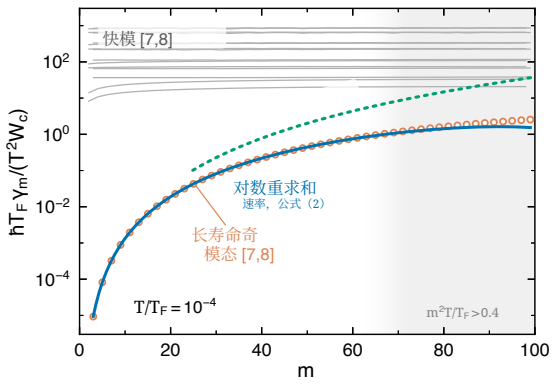


图1. 具有常数相互作用的二维费米液体的弛豫谱 W_c [式（86）] 在 $T/T_F = 10^{-4}$ 处作为角谐波指标的函数所示 m。橙色圆圈：慢奇模分支。灰色线：其余快模。绿色点线：参考文献的渐近预测 [5]。蓝线：本文，式（2）对相[98]对修饰式（ξ）取最小值。阴影灰色区域位于低温展开适用区域之外。$m^2T/T_F \geq 0.4$

* johannes.hofmann@physics.gu.se

远小于文献 [5]中的预测。这在图1中得到说明，该图显示了文献 [7, 8]中通过精确对角化在 $T/T_F = 10^{-4}$ [处得到的常数相互作用势的弛豫谱（灰线）]，并突出显示了最低奇分支（ [橙色圆圈]）。文献 [5] 的渐近预测（绿色虚线）在其适用范围内对所有 m 的数值速率高出多达一个数量级，且不存在 m范围使得 $m^4 \ln m$ 标度形式与数值速率相符。

分歧之所以出现，是因为领头对数结果要求两个极限在实际中并不能同时达到。首先， m 中的共线对数仅在 $\ln m \gg 1$ 时才主导有限项。其次，对领头对数结果的修正，其相对阶为 $\ln\ m/[\ln(T_F/T)/2]$，需要被抑制，即 $\ln\ m \ll \ln(T_F/T)/2$。第二个条件比低温展开有效性的条件$m^2T/T_F \ll 1$ 要强得多。即使每个不等式仅以因子 5 成立，即 $\ln\ m = 5$ 以及 $\ln(T_F/T)/2 = 5\ln\ m$，这也将要求 $T/T_F \lesssim e^{-50}$。

在本工作中，我们针对一般的正则各向同性相互作用势，以闭合解析形式计算了低温碰撞积分，其中同时包含对数与非对数贡献。我们始终考虑有效质量为 m^* 的抛物型单粒子色散，以及各向同性的正则相互作用势（即作为转移动量的光滑函数、并在长波极限下保持有限的势）。寿命最长的奇模式由刚性费米面形变与局域温度变化共同构成，我们的闭合形式结果表明，这种调制使其能够避免共线散射引起的弛豫，否则共线散射将是主导的弛豫通道。从微观上看，第 m个角扇区中的长寿命奇模式是准粒子分布相对于平衡费米-狄拉克分布 f_0 的偏离，其形式为

$$\delta f_m(\mathbf{k}) \sim \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\right)\left(1+\xi\frac{m^2T}{2T_F}\frac{\varepsilon-\mu}{T}\right)e^{im\theta}, \qquad (1)$$

其中， θ 是$\mathbf{k}$的极角， ε 是准粒子能量， μ 是化学势。括号中的第一项是化学势的局域位移（即费米面的刚性平移），第二项则描述温度的局域变化。我们将温度调制称为热修饰，将 ξ 称为相对修饰。数值 $\xi = 0$ 描述刚性形变，而前因子 $m^2T/(2T_F)$的选取使得$\xi = 1$ 描述一个完全修饰的模态，不会受到共线散射的任何弛豫。在这一二矩变分拟设中，我们发现形变以如下速率弛豫

$$\gamma_m(\xi) = \frac{\pi^3}{15}\frac{m^4T^4}{\hbar T_F^3}\Bigg\{\underbrace{2W_1\bar{\Lambda}_T\big(\xi-1\big)^2}_{\text{collinear scattering}} + \underbrace{\int_0^1 \frac{ds}{s}\Big[W_{\rm tot}(s)U_{m-1}^2(\sqrt{s})\big(\xi-\bar{\xi}(s)\big)^2 - 2W_1\big(\xi-1\big)^2\Big]}_{\text{large-angle scattering}}\Bigg\}, \qquad (2)$$

其中， $\bar{\Lambda}_T = \Lambda_T + h$ 满足 $\Lambda_T = \ln(T_F/T)$和 $h = \ln\ 4 - \psi(5) - \zeta'(4)/\zeta(4) = -0.05615$ [第 IV A 节和公式（F17）],并且 U_m 是第二类切比雪夫多项式。积分变量是二体碰撞中的动量转移 q ，碰撞对象为 $s = (q/2k_F)^2$。$W_{\rm tot}(s)$ [公式（45）]是一个有效散射振幅，它结合了迎头碰撞分支和直接/交换分支； $W_1 = W_{\rm tot}(0)/2$则是共线散射振幅。公式（2）将不同微观散射过程对衰减的贡献区分开来：当 $\Lambda_T \to \infty$时，共线项 [公式（2）第一行] 占主导，并促使 $\xi = 1$，在这种情况下，共线散射不会使该模态弛豫。如上所述，这一极限只能以对数级的缓慢速度逼近（例如，对于常数相互作用，即使在 $T/T_F = 10^{-4}$时， $m = 3$ 下仍有$\xi_3 \approx 0.71$ ，参见图 5）。此时，微小的剩余弛豫率由大角度散射决定 [公式（2）第二行]。根据公式（2），大角度项衡量的是围绕

$$\bar{\xi}(s) = \frac{T_m(\sqrt{s})}{m\sqrt{s}U_{m-1}(\sqrt{s})}, \qquad (3)$$

其中 T_m 是第一类切比雪夫多项式。这里， ξ（s）是相对修饰，在这种修饰下，动量转移为 s 的碰撞不会使该模态弛豫。除非是特殊情形 $m = 1$，否则这种修饰不能独立于 s 选择；对于该特殊情形， ξ（s） $\equiv 1$ 且 $\gamma_{m=1} = 0$: 当 $\xi = 1$时，公式（1）描述的是均匀动量推动，因为 $k/k_F = \sqrt{1 + wT/T_F} \simeq 1 + wT/$（$2T_F$），且 $w =$（$\varepsilon - \mu$）$/T$，动量守恒。然而，对于一般的奇数$m \geq 3$，不存在固定的 ξ 选择能够消除所有大角度过程，因此仍会有一个小的非零弛豫率。

随着 m 增大，共线保护逐渐丧失。从形式上看，公式（2）中积分的端点区域会贡献量级为 $\ln$（m^2）的项，这些项与共线项 $2W_1\Lambda_T$ 相竞争（而完全修饰 $\xi \simeq 1$ 要求 $\ln$（m^2） $\ll \bar{\Lambda}_T$）。这些项源自动量转移为 $s \gtrsim 1/m^2$、 的积分区域；在这些区域中， ξ （ s ）不再接近于 1。因此，这些碰撞确实会使修饰模态弛豫。当 m 增大至接近$m \simeq \sqrt{T_F/T}$ 时，最优修饰逐渐减小至 $\xi \approx 0$ （即近乎刚性的费米面形变），其弛豫速度远慢于完全修饰的模态 [（参见图 5(b)）]。在这一大-m 极限下，共线碰撞会使模态弛豫，但不会决定其修饰。将热修饰固定在 $\xi = 1$ ，并对大 $\ln m$ 作展开后，我们得到文献 [5], 的函数形式，但系数不同；该系数除 W_1 外，还包含前向散射振幅 W_0 。

方程（2）中弛豫率的最小值在图1中以蓝色实线表示，并且与

在低温描述的整个 m范围内的精确对角化结果吻合良好。本文得到的碰撞积分解析结果可作为输运计算的输入参数，从而超越简单的弛豫时间模型。特别是，配套论文讨论了如何在热电势 [10]中探测到这种热修饰。

本文结构如下：第二节讨论低温下二体散射的相空间，并确定对碰撞积分有贡献的不同运动学区域。第三节通过对动量转移变量下的碰撞积分进行渐近匹配，计算一般正则各向同性势对应的低温碰撞矩阵（13）的系数。第三节 C 汇总了主导对数项和有限贡献的结果。后续各节仅使用这些结果，因此主要关注本文结果应用的读者可以跳过第三节 A 和第三节 B。第四节推导长寿命奇模的结构以及上文讨论的闭式表达式（2）。第五节针对常数相互作用显式计算碰撞矩阵，并与文献 [7, 8] 的精确对角化结果进行比较。作为本文形式体系的一项应用，第六节给出自旋极化偶极费米子奇本征模的弛豫率结果，这些结果与偶极量子气体实验相关。第七节总结全文并展望未来工作。计算的技术细节汇集于附录 A–D、F 和 G。附录 E 推导偶模的主导非对角碰撞矩阵元 m，该矩阵元定义了与式（1）中相对偶模修饰类似的修饰，并对姊妹快报 [10] 中研究的热电势有所贡献。

II. 两粒子散射运动学

在计算碰撞积分之前，我们先概述二维空间中的二体散射运动学。相关运动学已在包括文献 [1–3, 5, 11, 12], 在内的多篇文献中，从热展宽的散射动量出发进行了描述。在这里，我们从散射粒子的总能量出发，以统一的方式推导出所有约束。

二体散射过程 $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \to \mathbf{k}_{1'} + \mathbf{k}_{2'}$ 由初始动量$\mathbf{k}_1$ 和 $\mathbf{k}_2$ 以及末态动量$\mathbf{k}_{1'}$ 和 $\mathbf{k}_{2'}$描述。相应的单粒子能量均相对于化学势测量，

tial

$$w_\alpha = \beta\Big(\frac{\hbar^2 k_\alpha^2}{2m^*} - \mu\Big) \tag{4}$$

与 $\alpha = 1$、2、$1'$、$2'$ 以及 $\beta = 1/T$。我们将相应的准粒子速度记为 $v_\alpha = \hbar k_\alpha / m^*$。此类散射过程如图 2所示，其中圆圈表示费米面，蓝色（红色）点为初始（末）动量，黑点表示散射动量的质心 $\mathbf{K} = (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)/2$ 。箭头表示从第一个初态到两个末态的动量转移，

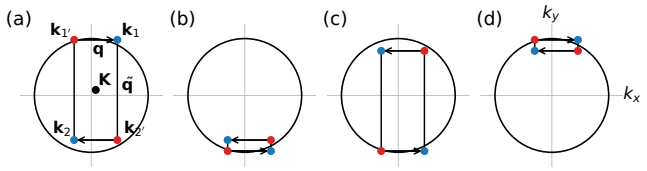


图2. 在固定的 $\mathbf{q}$ 和 ω下允许的动量空间构型。初始动量 $\mathbf{k}_1$ 和 $\mathbf{k}_2$ （末态动量 $\mathbf{k}_{1'}$ 和 $\mathbf{k}_{2'}$）分别以蓝色（红色）表示。我们将 $\mathbf{q}$ 定向于 x 轴方向，并显示费米面以供比较。四个散射动量的端点在所有温度下都围成一个矩形 [式（7）]。能量守恒和动量守恒仅约束沿 $\mathbf{q}$ 方向的大小和投影，因此垂直方向的转移动量 $\tilde{\mathbf{q}}$ [式（8）], 有四种选择，分别对应于将两对 $(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_{1'})$ 和 $(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_{2'})$ 放置在上半平面或下半平面。

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_{1'} = \mathbf{k}_{2'} - \mathbf{k}_2, \qquad x = \frac{q}{2k_F}, \tag{5}$$

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_{2'} = \mathbf{k}_{1'} - \mathbf{k}_2, \qquad \tilde{x} = \frac{\tilde{q}}{2k_F}, \tag{6}$$

其中第二个等式源于动量守恒；我们还将这些矢量的无量纲大小定义为 x和 $\tilde{x}$ 。抛物线能带中的动量守恒和能量守恒意味着以下众所周知的几何关系，该关系与温度无关 [11, 13],

$$\mathbf{q} \cdot \tilde{\mathbf{q}} = 0, \tag{7}$$

也就是说，散射动量的端点构成一个矩形 [参见图 2]。在下文中，散射几何构型均按以下方式绘制：矢量$\mathbf{q}$ 沿 x 轴正向。转移矢量$\mathbf{q}$ 和$\tilde{\mathbf{q}}$ 将散射粒子的相对能量确定为$E_{\rm rel} = (\hbar^2/4m^*)(q^2 + \tilde{q}^2)$。

给定的动量转移 q 和能量转移$\hbar\omega = \varepsilon_1 - \varepsilon_{1'}$ 会约束初态矢量相对于矢量$\mathbf{q}$ 的极角，使其满足

$$\cos\theta_1^\star = +\frac{q}{2k_1} + \frac{\omega}{v_1 q}, \tag{8a}$$

$$\cos\theta_2^\star = -\frac{q}{2k_2} + \frac{\omega}{v_2 q}. \tag{8b}$$

每个方程都有两个解，分别对应 $\sin\theta_1^\star$ 和 $\sin\theta_2^\star$的相反符号。末态矢量平移了$\mathbf{q}$，其极角满足

$$\cos\theta_{1'}^\star = -\frac{q}{2k_{1'}} + \frac{\omega}{v_{1'} q}, \tag{8c}$$

$$\cos\theta_{2'}^\star = +\frac{q}{2k_{2'}} + \frac{\omega}{v_{2'} q}. \tag{8d}$$

按构造，这些矢量分别与$\mathbf{k}_1$ 和$\mathbf{k}_2$，位于同一动量半平面，即 sgn sin $\theta^\star_{1'}$ =sgnsin $\theta^\star_1$以及 sgn sin $\theta^\star_{2'}$ =sgn sin $\theta^\star_2$。方程（8）的四个不同解如图 2所示。从几何上看，1 与 1′ 或 2′ 之间的能量转移 $\hbar\omega$ 和 $\hbar\tilde{\omega} = \varepsilon_1 - \varepsilon_{2'}$与质心动量$\mathbf{K}$ 在转移矢量上的投影成正比：

$$\omega = \frac{\hbar}{m^*}\mathbf{K}\cdot\mathbf{q} \tag{9}$$

$$\tilde{\omega} = \frac{\hbar}{m^*}\mathbf{K}\cdot\tilde{\mathbf{q}} \tag{10}$$

（另见文献 [2], 的第3.6节，其中使用 K_0 和$\mathbf{K}$ 代替 ω 和$\mathbf{q}$）。这对质心动量的大小意味着

$$\frac{K^2}{k_F^2} = \frac{T^2}{16T_F^2}\left(\frac{w^2}{x^2} + \frac{\tilde{w}^2}{\tilde{x}^2}\right), \tag{11}$$

其中我们引入无量纲能量转移 $w = \beta\hbar\omega$ 和 $\tilde{w} = \beta\hbar\tilde{\omega}$, 它们确定质心能量 $E_{\rm com} = \hbar^2K^2/m^*$。总能量 $E_{\rm tot}$ =($\hbar^2/2m^*)(k_1^2 + k_2^2)$现在可以用两种方式表示：根据质心贡献和相对贡献，以及直接由式（4）并利用 $Tw_i/T_F = k_i^2/k_F^2$ $-\mu/E_F$。令二者相等，便得到关于动量转移大小的约束方程 x和 $\tilde{x}$,

$$x^2 + \tilde{x}^2 + \frac{T^2}{16T_F^2}\left(\frac{w^2}{x^2} + \frac{\tilde{w}^2}{\tilde{x}^2}\right) = \frac{\mu}{E_F} + \frac{T}{2T_F}(w_1 + w_2). \tag{12}$$

至此的讨论完全是一般性的，适用于任意温度下的散射过程。现在，在严格零温下，所有散射态都被限制在费米面上，因此 $\varepsilon_\alpha = \mu = E_F$。约束（12）进而意味着 $x^2 + \tilde{x}^2 = 1$。这描述了一个正碰散射过程，其中费米面上动量相反的初态（对应于$\mathbf{K} = 0$）散射到动量发生转动的末态正碰构型。该过程示于图3（g）。如引言中所讨论的，这一散射过程是准粒子弛豫中奇偶效应的起源。

为了描述弛豫率的渐近低温标度，我们需要说明小而非零温度下的散射运动学 $T \ll T_F$。此时散射态被限制在费米能周围宽度为$O(T$的能量环带内，因此在我们的参数化中 $w_\alpha = O(1)$，且 $\mu \simeq E_F$。因此，方程 (12) 右侧在这一阶为 1。图 12所示的图 3展示了满足约束 (x–$\tilde{x}$) 的不同低温散射区间，图中给出了 3平面内可能的散射动量，插图展示了典型的散射构型。下文将讨论这些构型。

迎头分支 [图 3子图 (g) 中的蓝色阴影区域]其中 $x^2 + \tilde{x}^2 = 1$ 且 $K/k_F = O(T/T_F)$ 仍然存在。额外的散射通道会打开，如果 $\tilde{x} = O(T/T_F)$ 或 $x = \mathrm{O}(T/T_F)$，在这种情况下，式 (12) 左侧的质心项为 O(1)，并通过额外的质心贡献来平衡能量方程。第一种情形为 $x = \mathrm{O}(1)$ 且 $\tilde{x} = \mathrm{O}(T/T_F)$[图 3 的 (e) 面板中的红色阴影区域] 描述了一个过程，其中 $\mathbf{k}_{1'} \approx \mathbf{k}_2$ 且 $\mathbf{k}_{2'} \approx \mathbf{k}_1$, , 即近似交换初始动量态的交换散射。第二种情形为 $x = \mathrm{O}(T/T_F)$ 且 $\tilde{x} = \mathrm{O}(1)$ [图 3 的 (b) 面板中的绿色阴影区域] 描述了一个散射动量近似不变的过程，$\mathbf{k}_{1'} \approx \mathbf{k}_1$ 且 $\mathbf{k}_{2'} \approx \mathbf{k}_2$, , 这描述的是直接散射。

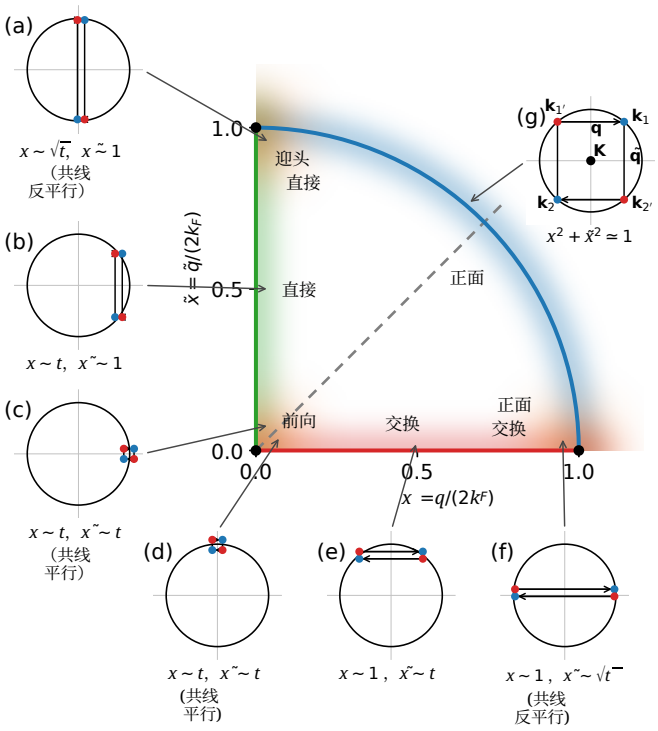


图 3. 允许的低温散射过程随动量转移 x 和 $\tilde{x}$变化的示意图。阴影区域表示允许动量的热展宽。虚线表示末态交换下的 $x \leftrightarrow \tilde{x}$ 对偶。不同插图展示了不同散射区域中的典型散射构型以及动量转移的大小，其中我们采用简写 $t = T/T_F$。

图 3 中的每个分支都有两个端点 [橙色阴影区域], , 在这些端点处散射动量变为共线。迎头分支在点 $(x, \tilde{x})$ = (0, 1) [分图 (a)] 以及 (1, 0) [分图 (f)]附近与直接分支和交换分支汇合。这些区域描述质心动量接近于零的共线反平行过程。根据式 (12)，散射相空间分别按 $x = \mathrm{O}(\sqrt{T/T_F})$ 和 $\tilde{x} = \mathrm{O}(\sqrt{T/T_F})$ 增强，从而有 $K/k_F = \mathrm{O}(\sqrt{T/T_F})$。这两个区域中增强的相空间产生了温度中的对数奇点，而正是这些运动学区域的贡献在文献 [5] 中得到了量化。另一个端点奇点出现于

$x, \tilde{x} = O(T/T_F)$ [分图 (c) 和 (d)]。此处，质心动量位于费米面上，$K/k_F = 1$，该过程描述前向散射，其中所有动量占据费米面上的同一斑块。

重新标记末态后，交换散射和直接散射的定义可以互换 $1'$，$2'$。这种互换在文献 [5], 中称为对偶变换，它会交换矢量$\mathbf{q}$ 和 $\tilde{}\mathbf{q}$ （因此也会交换 x和 $\tilde{x}$）。在图3中，这种变换对应于沿图中运动学区域的对角 [灰色虚线 3] 镜像翻转，并将插图90° 旋转相应的角度。

III. 碰撞积分的渐近匹配

本节计算低温下领先阶的碰撞矩阵元。我们工作的主要技术成果是对线性化碰撞矩阵的计算，即计算所有分量

$$L^{(m)}_{n'n} = \frac{T^2}{\hbar T_F} \begin{pmatrix} \frac{T^2}{T_F^2}\big(a_{00}\Lambda_T + b_{00}\big) & \frac{T}{T_F}\big(\mathbf{a}^T\Lambda_T + \mathbf{b}^T\big) \\ \frac{T}{T_F}\big(\mathbf{a}\Lambda_T + \mathbf{b}\big) & A\Lambda_T + B \end{pmatrix}, \tag{13}$$

这里针对奇数 m 给出。这里，n，$n' \geq 0$ 表示径向基模。第一行和第一列中反常的高阶温度标度（T^4和 T^3，而非 T^2）就是奇偶效应。[相比之下，对于相应的偶数 m 碰撞矩阵，所有领先阶矩阵元随温度的标度均为 $T^2/(\hbar T_F)$ 或 $T^2\Lambda_T/(\hbar T_F)$。] 领先阶对数项 a_{00}、a_n 和 $A_{n'n}$ 由共线散射决定。非对数系数 b_{00}、b_n 和 $B_{n'n}$ 取决于大角度散射，并由相互作用势的角积分确定。我们发现，所有系数都可因式分解为两部分：对径向基函数作费米平均，这部分可独立于相互作用势以闭合解析形式求得；以及角积分，这部分包含相互作用势和角谐波指标 m 的全部信息。

我们分析的出发点是线性化碰撞积分

$$\mathcal{L}[h(\mathbf{k})] = -\frac{\mathcal{J}[\delta f(\mathbf{k})]}{f_0(\mathbf{k})\big(1 - f_0(\mathbf{k})\big)}, \tag{14}$$

其中，偏离平衡的部分写作$\delta f(\mathbf{k}) = f_0(\mathbf{k})(1 - f_0(\mathbf{k}))h(\mathbf{k})$。相对于内积，线性化碰撞积分是一个半正定厄米算符

$$\langle h'|h\rangle = \frac{1}{N_0 T}\int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\, h'^*(\mathbf{k})\, f_0(\mathbf{k})\big(1 - f_0(\mathbf{k})\big)h(\mathbf{k}), \tag{15}$$

其中，$N_0 = m^*/(2\pi\hbar^2)$ 表示每自旋态密度。相关的一般性质和显式形式参见附录 A。我们的目标是描述弛豫模态，即线性化碰撞积分的特征向量，

$$\mathcal{L}[h(\mathbf{k})] = \gamma h(\mathbf{k}), \tag{16}$$

它描述了以特征值 γ所决定的速率指数衰减的非平衡偏离。我们将微扰 $h(\mathbf{k})$ 按照角分量和相对于该内积正交的正交多项式展开。为此，我们计算矩阵元

$$L^{(m)}_{n'n} = \langle u_{n'}e^{im\theta}|\mathcal{L}|u_n e^{im\theta}\rangle, \tag{17}$$

其中，θ 是二维平面内动量的角度，而u_n 是一个取决于动量大小的多项式。径向基函数选取为关于内积正交归一（15）。具体形式和恒等式见附录 B。我们计算的关键表达式以能量和动量转移变量表示积分[参见附录 A]

$$L^{(m)}_{n'n} = \frac{T^2}{\hbar T_F}\big\langle I^{(m)}_{n'n}\big\rangle_F, \tag{18}$$

其中

$$\langle G\rangle_F = \int_{-\beta\mu}^{\infty} dw_1 \int_{-\beta\mu}^{\infty} dw_2 \int_{-\infty}^{\infty} dw\, F_{121'2'} G \tag{19}$$

是对初始能量和能量转移进行的能量平均，并以费米–狄拉克函数加权，

$$F_{121'2'} = f_0(w_1)f_0(w_2)(1 - f_0(w_1 - w))(1 - f_0(w_2 + w)), \tag{20}$$

其核函数为

$$I^{(m)}_{n'n} = \frac{1}{16\pi}\int_0^{\infty} \frac{dx}{x|\sin\theta_1^\star \sin\theta_2^\star|}\, \frac{v_F^2}{v_1 v_2} \times \Big[W(x, \tilde{x}_<)\, K^{(m)+}_{n'n}(x) + W(x, \tilde{x}_>)\, K^{(m)-}_{n'n}(x)\Big] \tag{21}$$

其中包含一个无量纲势

$$W(x, \tilde{x}) = \frac{g_s}{2}\Big[|\tilde{V}(2k_F x)|^2 + |\tilde{V}(2k_F\tilde{x})|^2 - \frac{2}{g_s}\mathrm{Re}\big\{[\tilde{V}(2k_F x)]^*\tilde{V}(2k_F\tilde{x})\big\}\Big] \tag{22}$$

$\tilde{}$，其中 $V(\mathbf{q}) = N_0 V(\mathbf{q})$ 和自旋简并度 g_s。方程（21）方括号中的第一项描述所有散射动量都位于同一（上方）半平面的构型，第二项描述初始散射动量位于相对的半平面中的构型。这里，$\tilde{x}_<$ ($\tilde{x}_>$) 是方程（12）的根

对于同半平面（相对半平面）构型，我们定义

$$K^{(m)+}_{n'n}(x) = 2(C_{n'}C_n + S^{+}_{n'}S^{+}_{n}) \tag{23a}$$
$$K^{(m)-}_{n'n}(x) = 2(C_{n'}C_n + S^{-}_{n'}S^{-}_{n}), \tag{23b}$$

其中省略了 K 对 w_1、w_2 和 w 的额外依赖，且

$$\begin{aligned} C_n(x) &= u_n(w_1)\cos m\theta^\star_1 + u_n(w_2)\cos m\theta^\star_2 \\ &\quad - u_n(w_{1'})\cos m\theta^\star_{1'} - u_n(w_{2'})\cos m\theta^\star_{2'}, \end{aligned} \tag{24a}$$
$$\begin{aligned} S^{\pm}_n(x) &= u_n(w_1)\sin m\theta^\star_1 \pm u_n(w_2)\sin m\theta^\star_2 \\ &\quad - u_n(w_{1'})\sin m\theta^\star_{1'} \mp u_n(w_{2'})\sin m\theta^\star_{2'}. \end{aligned} \tag{24b}$$

这些表达式中的所有角度均选取为使 $\sin\theta^\star_\alpha \geq 0$ （这并不意味着 $\sin\ m\theta^\star_\alpha$ 必须具有特定符号）。

A. 区域分解

碰撞积分（18）的形式不假设任何特定的温度区间。现在我们将讨论 $\beta\mu \to \infty$的低温区间。碰撞积分（21）的奇异性结构编码在因子

$$\frac{dx}{x|\sin\theta^\star_1 \sin\theta^\star_2|}\frac{v_F^2}{v_1 v_2} = \frac{ds}{2\sqrt{(s-l_1)(s-l_2)(r_2-s)}}, \tag{25}$$

我们通过变换为新的积分变量 $s = x^2$ ，并求解右侧的 $s \approx 0$ 附近 $\sin\ \theta^\star_1$ 和 $\sin\theta^\star_2$ 的根

$$l_1 = \Big(\frac{w}{4}\frac{T}{T_F}\Big)^2\Big[1 - \Big(w_1 - \frac{w}{2}\Big)\frac{T}{T_F}\Big] + O\Big(\Big(\frac{T}{T_F}\Big)^4\Big), \tag{26a}$$
$$l_2 = \Big(\frac{w}{4}\frac{T}{T_F}\Big)^2\Big[1 - \Big(w_2 + \frac{w}{2}\Big)\frac{T}{T_F}\Big] + O\Big(\Big(\frac{T}{T_F}\Big)^4\Big), \tag{26b}$$

并且在 $s \approx 1$ 附近

$$r_1 = 1 + \Big(w_1 - \frac{w}{2}\Big)\frac{T}{T_F} + O\Big(\Big(\frac{T}{T_F}\Big)^2\Big), \tag{27a}$$
$$r_2 = 1 + \Big(w_2 + \frac{w}{2}\Big)\frac{T}{T_F} + O\Big(\Big(\frac{T}{T_F}\Big)^2\Big). \tag{27b}$$

这些根由方程（$^2\,\theta^\star_1 = 1$ 和$^2\,\theta^\star_2 = 1$ ）中的 cos8a) 和 (8b) 满足 $\mu = E_F$ 并代入低温形式 $k_\alpha = \sqrt{2m^*(w_\alpha T + \mu)}/\hbar^2 = k_F\sqrt{1 + w_\alpha T/T_F}$得到。由于要求 $\cos^2\theta^\star_1 \leq 1$ 和 $\cos^2\theta^\star_2 \leq 1$， s积分区间为 $l_{\max} \leq s \leq r_{\min}$ ，其中

$$l_{\max} = \max(l_1, l_2) \tag{28}$$
$$r_{\min} = \min(r_1, r_2). \tag{29}$$

积分下边界由根l_1, l_2确定，它们的量级为 $O((T/T_F)^2)$，绝对劈裂为$O((T/T_F)^3)$；积分上边界则由r_1和 r_2确定，它们的量级为 $O(1)$，劈裂为 $O(T/T_F)$。

我们确定了三个积分区域——内区域，其 $s = O((T/T_F)^2)$，中间区域，其$s = O(1)$，以及外区域，其 $1 - s = O(T/T_F)$，参见图 3——在这些区域中，被积函数按温度展开，并分别进行积分。整体结果随后由重叠区域内积分的渐近匹配确定；这些重叠区域由匹配尺度（$T/T_F)^2 \ll \delta \ll 1$和 $T/T_F \ll \delta' \ll 1$定义。超出这一层级后，尺度 δ 和 δ' 是任意的，且必须在最终匹配结果中相互抵消。

由该方程得到的三个独立积分为 (21)

$$I^{\text{inner}}_{n'n}(w_1, w_2, w) = \frac{1}{32\pi}\int_{l_{\max}}^{\delta}\frac{ds}{\sqrt{(s-l_1)(s-l_2)}}\Big[\underbrace{W_0\,K^{(m)+}_{n'n}(s)}_{\text{forward}} + \underbrace{W_{\text{ex}}(\tilde{s}_>)\,K^{(m)-}_{n'n}(s)}_{\text{direct}}\Big] \tag{30a}$$
$$I^{\text{mid}}_{n'n}(w_1, w_2, w) = \frac{1}{32\pi}\int_{\delta}^{1-\delta'}\frac{ds}{s(1-s)}\Big[\underbrace{W_{\text{ex}}(s)\,K^{(m)+}_{n'n}(s)}_{\text{exchange}} + \underbrace{W_{\text{ho}}(s)\,K^{(m)-}_{n'n}(s)}_{\text{head-on}}\Big] \tag{30b}$$
$$I^{\text{outer}}_{n'n}(w_1, w_2, w) = \frac{W_1}{32\pi}\int_{1-\delta'}^{r_{\min}}\frac{ds}{\sqrt{(r_1-s)(r_2-s)}}\Big[\underbrace{K^{(m)+}_{n'n}(s) + K^{(m)-}_{n'n}(s)}_{\text{head-on exchange}}\Big]. \tag{30c}$$

下方的大括号标示出运动学区域，这些区域 con-

对积分的贡献 [参见图 3]。在撰写此

方程时，我们引入端点值

$$W_0 = W(0,0) \tag{31}$$
$$W_1 = W(0,1) = W(1,0) \tag{32}$$

并将不同分支上的相互作用函数定义为

$$W_{\rm ex}(s) = W(\sqrt{s},0) \tag{33}$$
$$W_{\rm ho}(s) = W(\sqrt{s},\sqrt{1-s}), \tag{34}$$

其端点极限为 $W_{\rm ex}(0) = W_0$， $W_{\rm ho}(0) = W_1$ 以及 $W_{\rm ex}(1) = W_{\rm ho}(1) = W_1$。根据对偶性，我们无需为直接分支引入单独的势。我们将在附录C中更详细地讨论这些区域中的散射构型。在直接、交换和迎头分支上的积分，分别在前向和迎头直接/交换重叠区域包含端点奇异性。渐近核通过将积分核按温度的领先阶展开得到，其显式形式列于附录D中。

在式（30）的积分中，前向 [式（D5）] 和迎头交换贡献 [式（D9）]不涉及依赖于 s的核，可直接利用下列积分求得

$$\int_{l_{\max}}^{\delta} \frac{ds}{\sqrt{(s-l_1)(s-l_2)}} = \ln\frac{4}{|l_2-l_1|} + \ln\delta = 2\ln\frac{4T_F}{|w|T} + \ln\frac{4T_F}{|\tilde{w}|T} + \ln\delta, \tag{35}$$

$$\int_{1-\delta'}^{r_{\min}} \frac{ds}{\sqrt{(r_1-s)(r_2-s)}} = \ln\frac{4\delta'}{|r_1-r_2|} = \ln\frac{4T_F}{|\tilde{w}|T} + \ln\delta', \tag{36}$$

其中我们使用了

$$|l_1-l_2| = \left(\frac{w}{4}\frac{T}{T_F}\right)^2 |\tilde{w}|\,\frac{T}{T_F}, \tag{37}$$
$$|r_1-r_2| = |\tilde{w}|\frac{T}{T_F}. \tag{38}$$

式（35）中的对数温度发散源于以下事实：尽管根 l_1 和 l_2 是$O(T^2/T_F^2)$，但它们的间距为$O(T^3/T_F^3)$。

剩余的直接、交换和正面积分存在对数端点奇异性，必须将其提取出来。对于交换分支和迎头分支，这种分离示意性地通过以下方式完成

$$\int_{\delta}^{1-\delta'} ds\,\frac{G(s)}{s(1-s)} = -G(0)\ln\delta - G(1)\ln\delta' + \int_0^1 ds\left[\frac{G(s)}{s(1-s)} - \frac{G(0)}{s} - \frac{G(1)}{1-s}\right], \tag{39}$$

其中 $G(s)$ 是分子；在第二行中，我们将积分范围扩展至整个区间 $[0,1]$，以求得有限余项。

通过变换到新的积分参数 $\tilde{s} = 1 - (wT/4T_F)^2/s$，直接支的积分可化为相同的形式。近似取$\sqrt{(s-l_1)(s-l_2)} \approx s - (wT/4T_F)^2$，得到

$$\int_{l_{\max}}^{\delta} \frac{ds}{\sqrt{(s-l_1)(s-l_2)}}\,G\left(\frac{wT}{4T_F\sqrt{s}}\right) = \int_{\tilde{s}_-}^{\tilde{s}_+} d\tilde{s}\,\frac{G(\sqrt{1-\tilde{s}})}{\tilde{s}(1-\tilde{s})}, \tag{40}$$

其中积分边界由求解完整方程 (12) 得出，针对 $\tilde{s}$，线性阶近似为 $\tilde{s}(l_{1/2}) = \mp\tilde{w}T/(4T_F)$，因此$\tilde{s}_- =$最大值$\{\tilde{s}(l_1)\ \tilde{s}(l_2)\} = |\tilde{w}|T/(4T_F)$，此外还有$\tilde{s}_+ = \tilde{s}(\delta) = 1 - w^2T^2/(16T_F^2\delta)$，由于 $T^2/T_F^2 \ll \delta$，其值接近 1。

综合这些结果，我们有

$$I_{n'n}(w_1,w_2,w) = \underbrace{\frac{W_0}{8\pi}\Delta_{n'}\Delta_n\left[\ln\frac{4T_F}{|w|T} + \ln\frac{4T_F}{|\tilde{w}|T}\right]}_{\text{forward}} + \frac{W_1}{8\pi}\Bigg[\underbrace{\left\{\begin{matrix}\Delta_{n'}\Delta_n\\ D_{n'}D_n\end{matrix}\right\}\ln\frac{4T_F}{|w|T}}_{\text{head-on direct}} + \underbrace{\left\{\begin{matrix}\Delta_{n'}\Delta_n\\ E_{n'}E_n\end{matrix}\right\}\ln\frac{4T_F}{|\tilde{w}|T}}_{\text{head-on exchange}}\Bigg] + \mathcal{R}^{(m)}_{n'n}, \tag{41}$$

where we define

$$\Delta_n = u_n(w_1) + u_n(w_2) - u_n(w_{1'}) - u_n(w_{2'}), \tag{42a}$$
$$D_n = u_n(w_1) - u_n(w_2) - u_n(w_{1'}) + u_n(w_{2'}), \tag{42b}$$
$$E_n = u_n(w_1) - u_n(w_2) + u_n(w_{1'}) - u_n(w_{2'}), \tag{42c}$$
$$\Sigma_n = u_n(w_1) + u_n(w_2) + u_n(w_{1'}) + u_n(w_{2'}). \tag{42d}$$

在公式（41）的大括号中，上（下）项适用于偶 m （奇 m），我们在下方标注了不同对数端点奇异性的来源。粒子数和能量守恒意味着$\Delta_0 = \Delta_1 = 0$。此外，$D_0 = E_0 = 0$ 由于 $u_0 = 1$为常数，而 $\Sigma_0 = 4$。公式（41）表明，主要的对数温度标度来自前向和正面直接散射及交换散射对应的端点区域。公式（41）中的非对数余项可简洁地写为

$$\mathcal{R}^{(m)}_{n'n} = \Omega^{(m)}_{\Delta}[W]\,\frac{\Delta_{n'}\Delta_n}{4\pi} + \Omega^{(m)}_{DE}[W]\,\frac{D_{n'}D_n + E_{n'}E_n}{8\pi} + \Omega^{(m)}_{\Sigma}[W]\,\frac{\Sigma_{n'}\Sigma_n}{4\pi} \tag{43}$$

with

$$\Omega_{\Delta}^{(m)}[W]=\begin{cases}-\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^1\frac{ds}{s}\,U_{m-1}^2\big(\sqrt{s}\big)\big[2W_{\rm ex}(s)+W_{\rm ho}(s)\big]\\ \qquad+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1\frac{ds}{s}\,\big[(W_{\rm tot}(s)-2W_1)+(W_{\rm ex}(s)-W_0)\big] & m\ \text{even}\\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1\frac{ds}{s}\,U_{m-1}^2\big(\sqrt{s}\big)\big[W_{\rm ex}(s)-W_0\big] & m\ \text{odd}\end{cases}\tag{44a}$$

$$\Omega_{DE}^{(m)}[W]=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1\frac{ds}{s}\,U_{m-1}^2\big(\sqrt{s}\big)\,W_{\rm ex}(s) & m\ \text{even}\\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1\frac{ds}{s}\,U_{m-1}^2\big(\sqrt{s}\big)\big[W_{\rm tot}(s)-2W_1\big] & m\ \text{odd}\end{cases}\tag{44b}$$

$$\Omega_{\Sigma}^{(m)}[W]=\begin{cases}\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^1\frac{ds}{s}\,U_{m-1}^2\big(\sqrt{s}\big)\,W_{\rm ho}(s) & m\ \text{even}\\ 0 & m\ \text{odd},\end{cases}\tag{44c}$$

其中我们定义总有效势

$$W_{\rm tot}(s)=W_{\rm ex}(1-s)+W_{\rm ho}(s),\tag{45}$$

其中包含来自正面和直接交换分支的贡献，并具有端点极限$W_{\rm tot}(0)=2W_1$ 和 $W_{\rm tot}(1)=W_0+W_1$。从一般形式（39）推导这些表达式时，我们使用切比雪夫恒等式 $1-T_m^2(\sqrt{s})=(1-s)U_{m-1}^2(\sqrt{s})$，以及两个对奇数 m，$T_m^2(\sqrt{1-s})=1-T_m^2(\sqrt{s})$ 成立的恒等式，并且

$$\int_0^1\frac{ds}{s}[U_{m-1}^2(\sqrt{s})-1]=0.\tag{46}$$

积分（44）包含了相互作用势的全部信息。为便于后续参考，我们指出，当奇数 m趋于无穷大时，积分（44b）的极限 m，

$$\Omega_{DE}^{(m)}[W]\simeq\frac{1}{2}(W_0-W_1)\ln m,\tag{47}$$

其振幅由端点值 W_0和 W_1确定。通过在方程（ $s=$ 正弦$^2\,y$）中代入，并在被积函数中使用切比雪夫多项式的渐近形式，即可得到这一极限。

B. 长寿命奇矩阵元

对于偶数 m，由于 $\Delta_0=\Delta_1=0$，根据式（41），只有满足 n'，$n\geq 2$ 的矩阵元才会出现对数标度修正。根据式（43），对于 $n=0$，有限修正与 $\Sigma_{n'}\Sigma_n$成正比。该项决定了 T^2 费米液体最低阶径向矩阵元的弛豫率，它源自正碰散射分支，正如引言中所讨论的那样。

同样，对于奇数 m，根据式（41），只有满足n'，$n\geq 1$ 的矩阵元在这一阶分析中才会出现对数发散。根据式（44），满足$n'=0$ 或 $n=0$ 的奇数系数也没有有限余项，因为 $\Omega_{\Sigma}^{(m)}=0$。对于 $n'=0$，我们得到其最低非零阶为

$$I_{00}(w_1,w_2,w)=\mathcal{R}_{00}+\frac{c_m^2W_1}{2}\frac{T^2}{T_F^2}\Bigg[\underbrace{\frac{D_1^2}{4\pi}\ln\frac{4T_F}{|w|T}}_{\text{head-on direct}}+\underbrace{\frac{E_1^2}{4\pi}\ln\frac{4T_F}{|\tilde{w}|T}}_{\text{head-on exchange}}\Bigg],\tag{48}$$

$$I_{0n}(w_1,w_2,w)=\mathcal{R}_{0n}-\frac{c_mW_1}{2}\frac{T}{T_F}\Bigg[\underbrace{\frac{D_1D_n}{4\pi}\ln\frac{4T_F}{|w|T}}_{\text{head-on direct}}+\underbrace{\frac{E_1E_n}{4\pi}\ln\frac{4T_F}{|\tilde{w}|T}}_{\text{head-on exchange}}\Bigg],\tag{49}$$

其中我们用了 $w=\pi D_1/(2\sqrt{3})$ 和 $\tilde{w}=\pi E_1/(2\sqrt{3})$，并定义

$$c_m=\frac{m^2\pi}{2\sqrt{3}}.\tag{50}$$

与式（41）中的一般矩阵元不同，这一阶没有前向散射贡献。领先的对数项完全来自所示的正面对头直接散射和对头交换端点区域。

使用变量替换 $s\leftrightarrow 1-s$ 将直接项与交换项以及正面项的两个端点合并后，有限余项为

$$\mathcal{R}_{00} = \frac{T^2}{T_F^2}\Omega_{00}^{(m)}[W]\,\frac{D_1^2+E_1^2}{8\pi}, \tag{51}$$

$$\mathcal{R}_{0n} = \frac{T}{T_F}\Omega_{01}^{(m)}[W]\,\frac{D_1D_n+E_1E_n}{8\pi} \tag{52}$$

with

$$\Omega_{00}^{(m)}[W] = \frac{\pi^2m^2}{24}\int_0^1 ds\,\frac{T_m^2(\sqrt{s})}{s^2}\left[W_{\rm tot}(s)-2W_1\right] + \frac{\pi^2m^2}{24}2W_1\int_0^1 ds\left[\frac{T_m^2(\sqrt{s})}{s^2}-\frac{m^2}{s}\right], \tag{53}$$

$$\Omega_{01}^{(m)}[W] = -\frac{\pi m}{4\sqrt{3}}\int_0^1 ds\,\frac{T_m(\sqrt{s})U_{m-1}(\sqrt{s})}{s^{3/2}}\left[W_{\rm tot}(s)-2W_1\right] - \frac{\pi m}{4\sqrt{3}}2W_1\int_0^1 ds\left[\frac{T_m(\sqrt{s})U_{m-1}(\sqrt{s})}{s^{3/2}}-\frac{m}{s}\right]. \tag{54}$$

作为进一步参考，在 m 较大时，这些积分的标度关系为

$$\Omega_{00}^{(m)}[W] \simeq -2c_m^2W_1\ln m, \tag{55}$$

$$\Omega_{01}^{(m)}[W] \simeq 2c_mW_1\ln m, \tag{56}$$

分别。

C. 低温碰撞矩阵概述

现在我们汇总碰撞矩阵元的低温形式。系数具有简单的乘积形式，可分解为角向部分和径向部分。径向系数取决于指标 n' 和 n，但既不取决于角谐波指标 m ，也不取决于相互作用势的形式；角向系数则是对相互作用势取平均，并带有一个取决于 m的运动学因子。我们定义径向基函数上的矩阵如下：

$$\bar{\Phi}_{n'n}^{DE} = \frac{1}{4\pi}\left\langle D_{n'}D_n\ln\frac{4}{|w|}\right\rangle_F = \frac{1}{4\pi}\left\langle E_{n'}E_n\ln\frac{4}{|\tilde{w}|}\right\rangle_F, \tag{57a}$$

$$\bar{\Phi}_{n'n}^{\Delta} = \frac{1}{4\pi}\left\langle \Delta_{n'}\Delta_n\ln\frac{4}{|w|}\right\rangle_F = \frac{1}{4\pi}\left\langle \Delta_{n'}\Delta_n\ln\frac{4}{|\tilde{w}|}\right\rangle_F, \tag{57b}$$

其中，费米平均定义于方程（19）中。由于径向基函数的奇偶性，只有当 $n+n'$ 为偶数时，矩阵系数才非零。其计算方法见附录F。同样地，我们定义不含对数的费米平均：

$$\Phi_{n'n}^{DE} = \frac{1}{4\pi}\langle D_{n'}D_n\rangle_F = \frac{1}{4\pi}\langle E_{n'}E_n\rangle_F, \tag{58a}$$

$$\Phi_{n'n}^{\Delta} = \frac{1}{4\pi}\langle \Delta_{n'}\Delta_n\rangle_F, \tag{58b}$$

$$\Phi_{n'n}^{\Sigma} = \frac{1}{4\pi}\langle \Sigma_{n'}\Sigma_n\rangle_F. \tag{58c}$$

这些系数矩阵在附录 G中计算。它们是带状对角矩阵，其矩阵元对应于 $n'=n$、 $n\pm2$。

相比之下，由于因子 $\ln(4/|w|)$ 和 $\ln(4/|\tilde{w}|)$， $\bar{\Phi}_{n'n}^{DE}$ 和 $\bar{\Phi}_{n'n}^{\Delta}$ 并非带状对角的。

对于奇数 m，我们首先列出第一行和第一列各项的渐近形式

$$L_{00}^{(m)} = \frac{T^4}{\hbar T_F^3}\Big[a_{00}\Lambda_T + b_{00}\Big], \tag{59a}$$

$$L_{0n}^{(m)} = \frac{T^3}{\hbar T_F^2}\Big[a_n\Lambda_T + b_n\Big] \tag{59b}$$

with

$$a_{00} = c_m^2W_1\Phi_{11}^{DE} \tag{60a}$$

$$a_n = -c_mW_1\Phi_{1n}^{DE} \tag{60b}$$

and

$$b_{00} = \Omega_{00}^{(m)}[W]\Phi_{11}^{DE} + c_m^2W_1\bar{\Phi}_{11}^{DE} \tag{61a}$$

$$b_n = \Omega_{01}^{(m)}[W]\Phi_{1n}^{DE} - c_mW_1\bar{\Phi}_{1n}^{DE}, \tag{61b}$$

其中，$\Omega_{00}^{(m)}$ 和$\Omega_{01}^{(m)}$ 分别定义于方程（53）和（54）中。

对于其余所有矩阵元，即所有奇 m且 n， $n'\geq1$ 以及所有偶 m，我们得到如下结果（偶m 矩阵元 $L_{01}^{(m)}$ 在这一阶为零，其领先的$O(T^3$项推导见附录E）

$$L_{n'n}^{(m)} = \frac{T^2}{\hbar T_F}\Big[A_{n'n}\Lambda_T + B_{n'n}\Big]. \tag{62}$$

该表达式的系数由费米平均确定

$$A_{n'n} = \begin{cases}(W_0+W_1)\Phi_{n'n}^{\Delta} & m\text{ even}\\ W_0\Phi_{n'n}^{\Delta}+W_1\Phi_{n'n}^{DE} & m\text{ odd}\end{cases} \tag{63}$$

and

$$B_{n'n} = \begin{cases}(W_0+W_1)\bar{\Phi}_{n'n}^{\Delta}+\Omega_{\Delta}^{(m)}[W]\Phi_{n'n}^{\Delta} \\ \quad +\Omega_{DE}^{(m)}[W]\Phi_{n'n}^{DE}+\Omega_{\Sigma}^{(m)}[W]\Phi_{n'n}^{\Sigma} & m\text{ even}\\ W_0\bar{\Phi}_{n'n}^{\Delta}+W_1\bar{\Phi}_{n'n}^{DE} \\ \quad +\Omega_{\Delta}^{(m)}[W]\Phi_{n'n}^{\Delta}+\Omega_{DE}^{(m)}[W]\Phi_{n'n}^{DE} & m\text{ odd},\end{cases} \tag{64}$$

其中，角向系数 Ω 的表达式$_{\Delta}^{(m)}$，DE，Σ列于式（44）。

IV. 长寿命奇本征模

本节中，我们推导长寿命奇模的弛豫率，包括引言中的式（2）。奇模碰撞矩阵（13）的结构直接表明，对于任意相互作用势，谱都分裂为一个 $O(T^4)$ 阶的慢特征值，以及一组无穷多个 $O(T^2)$ 阶的快特征值。慢本征模可由下块 $n, n' \geq 1$ 的 Schur 补得到，其阶为 $O(T^4)$；其余模态则可通过对角化下块$A\Lambda_T + B$得到，其阶为 $O(T^2)$ [14]。只考虑前两个径向模，便已能看清本征模的结构。我们首先在第 IVA 节讨论这一结构，随后在第 IVB 节全面讨论包含所有径向模的情形，证明径向模数量增加时解能迅速收敛。

A. 双矩变分解

考虑碰撞矩阵的第一个 2×2 分块（13）

$$L^{(m)} = \frac{T^2}{\hbar T_F} \begin{pmatrix} \frac{T_F^2}{T_F^2}\left(a_{00}\Lambda_T + b_{00}\right) & \frac{T}{T_F}\left(a_1\Lambda_T + b_1\right) \\ \frac{T}{T_F}\left(a_1\Lambda_T + b_1\right) & A_{11}\Lambda_T + B_{11} \end{pmatrix}, \tag{65}$$

其中系数 a_{00}、b_{00}、a_1和 b_1 定义于方程（60）和（61）中。我们注意到以下恒等式

$$a_{00} = c_m^2 A_{11} \tag{66a}$$
$$a_n = -c_m A_{1n}, \tag{66b}$$

这些恒等式由能量守恒推出：由于 $\Delta_1 = 0$，可得 $\Phi_{1n}^{\Delta} = 0$ 对所有 n均成立，从而保证了 $A_{1n} = W_1 \Phi_{1n}^{DE}$[方程（63）]，而方程（66）则直接由方程（60a）和（60b）推出。

方程（1）中的形变在矢量表示下写为

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ c_m \xi \frac{T}{T_F} \end{pmatrix}, \tag{67}$$

其中我们利用了 $c_m u_1(w) = m^2 w/2$。该状态的弛豫率的变分估计为

$$\gamma_m(\xi) = \mathbf{v}^T L^{(m)} \mathbf{v} = \frac{T^4}{\hbar T_F^3}\Big[c_m^2(A_{11}\Lambda_T + B_{11})\xi^2 + 2c_m(a_1\Lambda_T + b_1)\xi + a_{00}\Lambda_T + b_{00}\Big], \tag{68}$$

其中我们不计入$\mathbf{v}$ 的模，因为它仅在更高温度阶才发生变化，$\mathbf{v}^T\mathbf{v} = 1 + O(T^2/T_F^2)$。将式（68）中的系数用角积分 $\Omega_{00}^{(m)}$、$\Omega_{01}^{(m)}$ 和 $\Omega_{DE}^{(m)}$ 表示，即得式（2）。这里，对数系数直接合并（$c_m^2 A_{11}\xi^2 + 2c_m a_1 \xi + a_{00}$）$\Lambda_T = c_m^2 A_{11}(\xi - 1)^2 \Lambda_T = c_m^2 \Phi_{11}^{DE}(\xi-1)^2 W_1 \Lambda_T$。有限系数中涉及 $\bar{\Phi}_{11}^{DE}$ 的项以同样方式合并，得到 $c_m^2 \Phi_{11}^{DE}(\xi-1)^2 W_1 h$，其中 $h = \bar{\Phi}_{11}^{DE}/\Phi_{11}^{DE}$。其余各项计算结果为

$$\begin{aligned} &c_m^2 \xi^2 \Omega_{DE}^{(m)} + 2c_m \xi \Omega_{01}^{(m)} + \Omega_{00}^{(m)} \\ &= \frac{c_m^2}{2}\int_0^1 \frac{ds}{s}\Big[W_{\rm tot}(s) U_{m-1}^2(\sqrt{s})\big(\xi - \bar{\xi}(s)\big)^2 \\ &\quad - 2W_1\big(\xi - 1\big)^2\Big], \end{aligned} \tag{69}$$

将其与 $c_m^2 \Phi_{11}^{DE}/2 = \pi^3 m^4/15$结合，得到方程（2）。

最小化方程（68）[或等价地，方程（2）]得到

$$\xi_m = -\frac{a_1\Lambda_T + b_1}{c_m(A_{11}\Lambda_T + B_{11})} = 1 - \frac{2\mathcal{K}_m}{\mathcal{S}_m}, \tag{70}$$

其中我们引入简写记号

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_m &= \frac{b_1 + c_m B_{11}}{c_m \Phi_{11}^{DE}} \\ &= \int_0^1 ds\, W_{\rm tot}(s) U_{m-1}(\sqrt{s})\Big[\frac{d}{ds}\frac{T_m(\sqrt{s})}{m\sqrt{s}}\Big] \end{aligned} \tag{71}$$

and

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_m &= 2\frac{A_{11}\Lambda_T + B_{11}}{\Phi_{11}^{DE}} \\ &= 2W_1\bar{\Lambda}_T + \int_0^1 \frac{ds}{s}\, U_{m-1}^2(\sqrt{s})\big[W_{\rm tot}(s) - 2W_1\big]. \end{aligned} \tag{72}$$

对于渐近低温 $\xi_m \to 1$，方程（70）中的第二项描述了该结果的逆对数修正，其形式上受到因子 $\mathcal{K}_m/[W_1\Lambda_T]$ 的抑制。根据系数 $b_1 \sim \Omega_{01}^{(m)}$ [（参见方程（56））的标度]，，在 m 较大时，$\mathcal{K}_m$ 的渐近形式为 $O(\ln m)$。因此，与主导项相比，次主导逆对数修正的大小由 $\ln m/\Lambda_T$ 控制。正如引言中所述，在低温展开的适用范围 $m \lesssim \sqrt{T_F/T}$ 内，该修正最大可达到 $\ln m/\Lambda_T = 1/2$。长寿命奇模在较小的 m 下具有最大的相对修饰，随后随着 m 增大，与具有 $\xi_m \simeq 0$ 的刚性费米面形变发生交叉。一个特殊情形是 $m = 1$，此时方程（71）的被积函数中的导数为零，并且$\mathcal{K}_{m=1}$ 对于所有相互作用势都消失。这意味着$\xi_{m=1} = 1$，正如动量守恒所要求的那样。

利用表达式（70），方程（68）或方程（2）变为

form

$$\gamma_m(\xi) = 2c_m^2\Phi_{11}^{DE}\frac{T^4}{\hbar T_F^3}\left[\mathcal{I}_m - \frac{1}{2}(1-\xi_m)\mathcal{K}_m + \frac{\mathcal{S}_m}{4}(\xi-\xi_m)^2\right] \tag{73}$$

with

$$\mathcal{I}_m = \frac{b_{00}+2c_m b_1 + c_m^2 B_{11}}{2c_m^2\Phi_{11}^{DE}} = \int_0^1 ds\, s\, W_{\rm tot}(s)\Big[\frac{d}{ds}\frac{T_m(\sqrt{s})}{m\sqrt{s}}\Big]^2. \tag{74}$$

B. 一般表达式

超出 $n=0$，1变分处理后慢模特征值的一般表达式可由下块 n， $n'\geq 1$的Schur补得到，即

$$\begin{aligned}\gamma_m &= \frac{T^4}{\hbar T_F^3}\Big[a_{00}\Lambda_T + b_{00} \\ &\quad - \big(\mathbf{a}\Lambda_T+\mathbf{b}\big)^T\Big(A\Lambda_T+B\Big)^{-1}\big(\mathbf{a}\Lambda_T+\mathbf{b}\big)\Big] \\ &= \frac{T^4}{\hbar T_F^3}\Big[\big(a_{00}-c_m^2A_{11}\big)\Lambda_T + 2c_m^2\mathcal{I}_m\Phi_{11}^{DE} \\ &\quad - \mathbf{r}^T\big(A\Lambda_T+B\big)^{-1}\mathbf{r}\Big].\end{aligned} \tag{75}$$

在第二行中，我们利用恒等式（66）来分离对数项，其定义为 $\mathbf{a}\Lambda_T+\mathbf{b} = -c_m\,(A\Lambda_T+B)\,\mathbf{e}_1+\mathbf{r}$ 并引入辅助向量

$$\mathbf{r} = c_m B\mathbf{e}_1 + \mathbf{b}, \tag{76}$$

其中我们记 $\mathbf{e}_1=(1,\ 0,\ 0,\ \ldots\ldots)$，使得 $(A\mathbf{e}_1)_n = A_{n1}$且 $(B\mathbf{e}_1)_n = B_{n1}$。

表面上，表达式（75）具有对数温度发散 $O(\Lambda_T)$。然而，根据式（66），其系数 $a_{00}-c_m^2A_{11} = a_{00}-\mathbf{a}^TA^{-1}\mathbf{a}$ 对任意相互作用势都恒为零。式（75）第一行中的剩余项给出了慢模弛豫率的主导贡献，即 $1/\Lambda_T\to 0$。式（75）第二行中的修正项涉及逆径向碰撞矩阵。需要注意的是，与三维费米液体不同——在三维费米液体中，矩阵 $L_{n'n}$ 仅沿对角线 $n=n'$ 以及带 $n=n'\pm 2$ [15–19],非零——二维碰撞矩阵由于对数能量平均 $\bar{\Phi}_{n'n}^{DE}$ 和 $\bar{\Phi}_{n'n}^{\triangle}$的贡献而并不稀疏，参见式（57a）和（57b）。因此，完整的逆矩阵无法以闭合形式得到，例如无法通过连分数展开得到。若截断到前两个径向模，式（75）便再现了式（73）在其最小值 $\xi=\xi_m$处的结果，这可由 $\mathbf{e}_1^T\mathbf{r} = c_m\Phi_{11}^{DE}\mathcal{K}_m$ 以及 $\mathcal{S}_m$的定义看出。

奇慢模的结构由特征值方程 $L_{n'n}^{(m)}\psi_n = \gamma_m\psi_{n'}$ 得出。令 $\psi=$ $(1,\ \psi^{(m)})$，我们有 $(A\Lambda_T+B)\psi^{(m)} = -(\mathbf{a}\Lambda_T+\mathbf{b})T/T_F$，在低温下，其解为

$$\psi_n^{(m)} = \frac{T}{T_F}\Big(c_m\delta_{n1} - \big[(A\Lambda_T+B)^{-1}\mathbf{r}\big]_n\Big). \tag{77}$$

第一项描述完全重整化的共线保护模，第二项则量化非共线过程（对于 $n=1$）以及高阶径向模的混入（对于 $n\geq 2$）在多大程度上削弱了这种保护。方程（77）要求 $c_mT/T_F \sim m^2T/T_F \ll 1$ 是一个小修正，这为匹配展开所导出的温度约束$m\lesssim\sqrt{T_F/T}$ 提供了另一种推导。

对方程（75）按逆幂 $1/\Lambda_T$展开的前两项，可以取得进一步进展。$\bar{\Phi}_{1n}^{DE}$对矢量$\mathbf{r}$ 的贡献相消，这意味着$\mathbf{r} = (\Omega_{01}^{(m)}+c_m\Omega_{DE}^{(m)})\Phi^{DE}\mathbf{e}_1,$，因此

$$A^{-1}\mathbf{r} = \frac{1}{W_1}(\Omega_{01}^{(m)}+c_m\Omega_{DE}^{(m)})\,\mathbf{e}_1, \tag{78}$$

使得

$$\begin{aligned}(A\Lambda_T+B)^{-1}\mathbf{r} &= \frac{1}{\Lambda_T}A^{-1}\mathbf{r} - \frac{1}{\Lambda_T^2}A^{-1}BA^{-1}\mathbf{r} + \ldots \\ &= \frac{\Omega_{01}^{(m)}+c_m\Omega_{DE}^{(m)}}{W_1\Lambda_T}\Big[\mathbf{e}_1 - \frac{1}{\Lambda_T}A^{-1}B\mathbf{e}_1 + O\big(1/\Lambda_T^2\big)\Big].\end{aligned} \tag{79}$$

在按逆对数温度 $1/\Lambda_T$的幂次展开中，直至$O(1/\Lambda_T^2)$，弛豫率只包含$n=1$ 分量，它使该模态从完全重整化极限 $\xi=1$发生弛豫。仅在$O(1/\Lambda_T^3)$时，高阶径向模 $n\geq 2$ 才有贡献。我们发现此类修正在数值上很小，且拟设（1）在百分之几的精度内是正确的 [图5(c)]。对 $n=1$ 项进行重求和，等价于对 ξ 在方程（2）中求极小。

C. 大-m 极限及与 Ledwith等人 [5]的比较

现在，我们将奇模态弛豫率的结果与 Ledwith 等人 [5]得到的速率进行比较。他们的推导基于按首阶对数精度计算的 2×2 碰撞矩阵（参见参考文献 [5]中的式（63）和（95））。用我们的记号表示，他们对奇碰撞矩阵的计算对应于

$$L^{(m)} = \frac{T^2}{\hbar T_F}\begin{pmatrix}\frac{T^2}{T_F^2}a_{00}(\Lambda_T-\ln m^2) & \frac{T}{T_F}a_1(\Lambda_T-\ln m^2) \\ \frac{T}{T_F}a_1(\Lambda_T-\ln m^2) & A_{11}\Lambda_T\end{pmatrix}. \tag{80}$$

式（80）的00和01矩阵元包含角谐指标 m的对数，该对数源于对产生对数温度项的积分区域进行截断。

为与这些结果进行比较，我们在$\ln m \gg 1$较大时将矩阵元展开至领先阶，从而得到

$$\frac{\hbar T_F^3}{T^4} L_{00} = \quad c_m^2 \Phi_{11}^{DE} W_1 \big[\Lambda_T - 2\ln m\big] \tag{81a}$$

$$\frac{\hbar T_F^2}{T^3} L_{01} = -c_m \Phi_{11}^{DE} W_1 \big[\Lambda_T - 2\ln m\big] \tag{81b}$$

$$\frac{\hbar T_F}{T^2} L_{11} = \quad \Phi_{11}^{DE} W_1 \Big[\Lambda_T + \frac{1}{2}\frac{W_0 - W_1}{W_1} \ln m\Big]. \tag{81c}$$

每个表达式中的最后一项直接来自$^{(m)}_{00}$ 、$^{(m)}_{01}$ 和$^{(m)}_{DE}$ 在方程（55）、（56）和（47）中的渐近形式。前两个矩阵元与文献 [5], 一致，而最后一个矩阵元除了一项外也一致；该项与共线散射振幅 W_1和前向散射振幅 W_0之差成正比，只有当二者相等时（例如，对于常数相互作用）该项才会消失。展开 $\Lambda_T \gg \ln m$的特征值方程后，我们发现奇模特征值的对数温度标度相互抵消，但仍存在一个对数 m发散，结果为

$$\gamma^{(0)}_{m\gg 1} = \frac{\pi^3}{15}\frac{T^4}{\hbar T_F^3}(W_0 + 3W_1) m^4 \ln m + O(m^4), \tag{82}$$

其中，上标 (0) 表示该速率是在完全热修饰 $\xi = 1$下求得的。方程（82）的函数形式与 Ledwith等人 [5],的结果一致，但其前因子 $W_0 + 3W_1$ 不同于文献$4W_1$ 中的系数 [5] （参见文献 [5]中的方程（96））。他们的结果与共线正碰振幅 $|V_\star|^2$成正比（参见该文中的方程（15），其中给出了 $W_1 = N_0^2|V_\star|^2/2$及其所述的自旋平均], ）；而我们发现结果是共线正碰振幅 W_1 和前向散射振幅 W_0 的混合。对于常数相互作用，这些结果一致，如图1中的绿色虚线所示。

相较于完全重整化，较大 m 时重整化程度的降低会延长奇模的寿命，这一点也可以从渐近展开出发进行讨论。为此，考虑方程（73）在

$$\mathcal{I}_m = \frac{1}{4}(W_0 + 3W_1)\ln m \tag{83a}$$

$$\mathcal{K}_m = \frac{1}{2}(W_0 + 3W_1)\ln m \tag{83b}$$

$$\mathcal{S}_m = \quad (W_0 - \ W_1)\ln m + 2W_1 \bar{\Lambda}_T, \tag{83c}$$

使得

$$\gamma_{m\gg 1} = \frac{\pi^3}{15}\frac{T^4}{\hbar T_F^3}\xi_m (W_0 + 3W_1) m^4 \ln m + O(m^4) \tag{84}$$

与 [式（70）并代入式（83）后]

$$\xi_m = 1 - \frac{2\mathcal{K}_m}{2W_1(\bar{\Lambda}_T - 2\ln m) + 2\mathcal{K}_m}. \tag{85}$$

与渐近形式（82）相比，差别在于因子 $\xi_m < 1$：对于 $W_0 = W_1$，该表达式的取值为 $\xi_m \simeq 1 - \ln(m^2)/\Lambda_T$，这仅当$\ln(m^2) \ll \Lambda_T$时才对应于完全重整化。然而，在低温展开的有效范围内，我们有 $\Lambda_T - \ln(m^2) = \ln[T_F/(m^2 T)] = O(1)$，除非 T/T_F 指数地小，因此满足$\ln(m^2) \gg 1$ 的模态几乎是刚性的。于是，它们的弛豫可由刚性模态元 $L_{00}^{(m)}$ 很好地描述。

V. 常数相互作用与数值基准

引言中的图1 已将常数相互作用下最慢奇模的弛豫率与精确对角化结果进行了比较。本节将对奇模以及包含快速费米液体模在内的完整谱进行更详细的基准测试。

对于常数相互作用，我们有

$$W(x, \tilde{x}) = W_c = (g_s - 1)|V_0|^2. \tag{86}$$

角积分（44）随后可计算为 $\Omega_\Delta^{(m)}[W] = \Omega_{DE}^{(m)}[W] = \Omega_\Sigma^{(m)}[W] = 0$ 对于奇数 m 以及

$$\Omega_\Delta^{(m)}[W] = -3W_c\, o_m \tag{87}$$

$$\Omega_{DE}^{(m)}[W] = 2W_c\, o_m \tag{88}$$

$$\Omega_\Sigma^{(m)}[W] = W_c\, o_m \tag{89}$$

对于偶数 m，其中我们计算

$$\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{ds}{s}\, U_{m-1}^2(\sqrt{s}) = o_m \tag{90}$$

用函数表示

$$o_m = \sum_{\text{odd } j \le m} \frac{1}{j} = H_m - \frac{1}{2}H_{\lfloor m/2 \rfloor} \tag{91}$$

其中 $H_m = \sum_{j=1}^m 1/j$ 为调和数。当 m较大时，我们有 $o_m = (\ln 2m)/2 + \gamma_E/2 + O(1/m)$，其中 γ_E 为欧拉常数。注意，这里对偶数 m计算了 o_m ，但我们稍后也将使用奇数 m 的定义。同样，我们有

$$\begin{aligned}\Omega_{00}^{(m)}[W] &= \frac{\pi^2 m^2}{24} 2W_c \int_0^1 ds \left[\frac{T_m^2(\sqrt{s})}{s^2} - \frac{m^2}{s}\right] \\ &= -\frac{\pi^2 m^4}{3} W_c \Big(o_m - p + \frac{p^2}{4}\Big)\end{aligned} \tag{92}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{01}^{(m)}[W] &= -\frac{\pi m}{4\sqrt{3}} 2W_c \int_0^1 ds \left[\frac{T_m(\sqrt{s}) U_{m-1}(\sqrt{s})}{s^{3/2}} - \frac{m}{s}\right] \\ &= \frac{\pi m^2}{\sqrt{3}} W_c (2o_m - p),\end{aligned} \tag{93}$$

其中 $p = 1 + 1/m$。

A. 完整谱

碰撞矩阵的各项为 $0 \le n,\ n' \le 2$，读作

$$\frac{\hbar T_F}{T^2 W_c} L^{(m\,\mathrm{even})}_{n'n} = \begin{pmatrix} \frac{8\pi}{3} o_m & \frac{4\pi^2 m^2}{5\sqrt{3}} \frac{T}{T_F}\left[\bar{\Lambda}_T - 2\tilde{a}_m + 2\right] & \frac{8\pi}{3\sqrt{5}} o_m & \\ \frac{4\pi^2 m^2}{5\sqrt{3}} \frac{T}{T_F}\left[\bar{\Lambda}_T - 2\tilde{a}_m + 2\right] & \frac{24\pi}{5} o_m & 0 & \ddots \\ \frac{8\pi}{3\sqrt{5}} o_m & 0 & \frac{2\pi}{7}\left[12\bar{\Lambda}_T + 5(h_3 - h)\right] + \frac{40\pi}{21} o_m & \\ & \ddots & & \ddots \end{pmatrix}, \tag{94}$$

$$\frac{\hbar T_F}{T^2 W_c} L^{(m\,\mathrm{odd})}_{n'n} = \begin{pmatrix} \frac{2\pi^3 m^4}{15} \frac{T^2}{T_F^2}\left[\bar{\Lambda}_T - 4\left(o_m - p + \frac{p^2}{4}\right)\right] & -\frac{4\pi^2 m^2}{5\sqrt{3}} \frac{T}{T_F}\left[\bar{\Lambda}_T - 4o_m + 2p\right] & 0 & \\ -\frac{4\pi^2 m^2}{5\sqrt{3}} \frac{T}{T_F}\left[\bar{\Lambda}_T - 4o_m + 2p\right] & \frac{8\pi}{5}\bar{\Lambda}_T & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & \frac{2\pi}{7}\left[12\bar{\Lambda}_T + 5(h_3 - h)\right] & \\ & \ddots & & \ddots \end{pmatrix}, \tag{95}$$

其中 $h_3 = M_6/M_6 = \ln 4 - \psi(7) - \zeta'(6)/\zeta(6) \approx -0.47$[参见附录 F]。该形式具有第 III 节所讨论的碰撞矩阵的结构：由于粒子数守恒和能量守恒，偶数模在 $n = 0$和 $n = 1$ 行或列中没有对数型 $O(T^2 \ln(T_F/T))$ 项，但它们确实有一个有限的 $O(T^2)$ 修正。在式 (94) 中，我们还纳入了领头的非对角 01 系数，其量级为 $O(T^3)$，与奇m的情形相同。这需要对积分核进行展开，该展开在附录 E 中完成。对于奇模，$n = 0$行没有 $O(T^2 \ln(T_F/T))$ 和 $O(T^2)$ 项，因为$\Delta_0 = E_0 = D_0 = 0$，其标度由高阶项决定。更高的奇矩阵元不依赖于 m，因为式 (44) 中的角积分对奇数 m 为零；这一结果是常数相互作用势所特有的，一般并不成立。

现在，我们更详细地将渐近结果与精确弛豫率进行基准比较。图 4(a) 显示了 $m = 2$ 下最低的奇（橙色）和偶（灰色）弛豫率，其中 10（偶）和 $m = 3$、5、9、15（奇）弛豫率随温度的变化；渐近结果（通过对本文推导的渐近碰撞矩阵进行对角化得到）以蓝色表示。渐近弛豫率绘制至 $m^2 T/T_F = 0.4$，我们将其视为低温展开适用范围的边界。这一选择基于图 4(b)，其中显示了相对偏差 $|\gamma_m/\gamma_m^{\mathrm{ED}} - 1|$，即渐近特征值 γ_m 与精确对角化结果γ_m^{ED}之间的偏差。正如两个面板所清楚显示的，低温碰撞矩阵的渐近结果在低温展开适用范围内能够准确描述这些弛豫率。

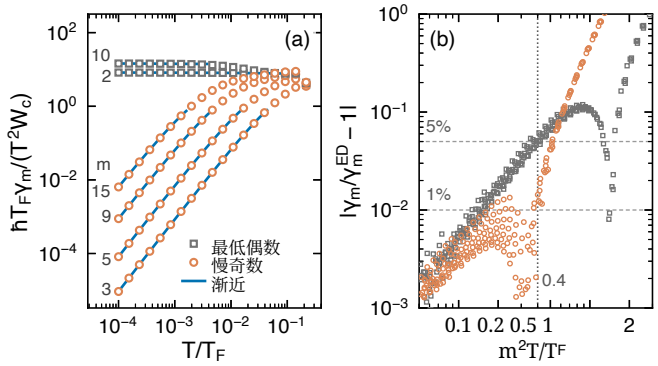


图 4。（a）角谐波 $m = 2$、3、5、9、10 和 15 的最低弛豫率随温度的变化，这些结果通过对具有常数相互作用 W_c [7, 8] 且包含 8 个径向基模的系统进行精确对角化得到。蓝线表示本文渐近碰撞矩阵截断至 8 个径向模时的最低特征值。（b）$2 \le m \le 20$的最低特征值 $|\gamma_m/\gamma_m^{\mathrm{ED}} - 1|$ 的相对偏差。至 $m^2 T/T_F = 0.4$（点线）为止，渐近结果对最低奇模弛豫率的描述误差在 1% 以内，对偶模弛豫率的描述误差在 5% 以内（虚线）。

散射矩阵准确描述了长寿命奇模弛豫率和较快的偶宇称速率，其中边界 $m^2 T/T_F = 0.4$（垂直虚线）分别将奇模弛豫率的误差控制在 1% 以内，将偶宇称速率的误差控制在 5% 以内（水平线）。

B. 长寿命奇模

对于常数势，公式（71）、（72）和（74）计算得

$$\mathcal{K}_m = 2W_c\big(2o_m - p\big), \tag{96a}$$
$$\mathcal{S}_m = 2W_c\bar{\Lambda}_T, \tag{96b}$$
$$\mathcal{I}_m = 2W_c\Big(o_m - \frac{p^2}{4}\Big), \tag{96c}$$

其中 o_m 定义于公式（91）中，而 p 定义于公式（93）之后。这给出了相对修饰

$$\xi_m = 1 - \frac{2(2o_m - p)}{\bar{\Lambda}_T} \tag{97}$$

以及奇特征值

$$\gamma_m = \frac{8\pi^3}{15}W_c m^4 \frac{T^4}{\hbar T_F^3}\left[o_m - \frac{p^2}{4} - \frac{(2o_m - p)^2}{\bar{\Lambda}_T}\right]. \tag{98}$$

的表达式对应于在常数势下，使公式（ γ_m（ξ）中的 2）一般形式最小的修饰。弛豫率 γ_m 是其在$\xi = \xi_m$ [图 1] 处的取值。表达式（98）对于所有 m均可写成闭合解析形式。特别地，对于 $m = 3$，我们得到相对修饰

$$\xi_{m=3} = 1 - \frac{8}{3\bar{\Lambda}_T} \tag{99}$$

以及弛豫率

$$\gamma_{m=3} = \frac{192\pi^3}{5}W_c\frac{T^4}{\hbar T_F^3}\left(1 - \frac{2}{\bar{\Lambda}_T}\right). \tag{100}$$

图 5(a)显示了三个不同温度 $T/T_F = 10^{-4}$、10^{-3} 和10^{-2} （蓝线）下，相对修饰 ξ_m [公式（97）]随对数尺度上的角指标 m变化的关系。作为比较，我们还给出了这些温度下通过精确对角化得到的结果（橙色标记）[7, 8]。在较小的m处，两者符合良好，其 m 依赖性几乎遵循 o_m的渐近 ln(2m)标度。在较大的m处，两者出现差异：完整解趋近于零，而渐近预测穿过零点并取负值。渐近描述失效的点可通过$\xi_m = 0$ 结合 o_m的大-m 渐近式进行估计，从而得到$m^2T/T_F \lesssim e^{2(1-\gamma_E)}$ $^{+h}/4 \approx 0.55$。这与图 4]中奇模弛豫率 [更严格的 1% 界限一致。我们发现，在渐近低温区之外， ξ_m 的完整结果可由插值公式 [准确描述，即图 5(a)中的蓝色虚线]

$$\xi_m^{\rm int} = \frac{1}{\zeta\bar{\Lambda}_T}\ln\big(1 + e^{\zeta\bar{\Lambda}_T\xi_m}\big), \tag{101}$$

其中 $\zeta = 2$ 是一个拟合参数，而 ξ_m 由方程（97）给出。该插值函数使 ξ_m 在正值且数值较大时基本保持不变，但在负值时会使其呈指数级变小 ξ_m。

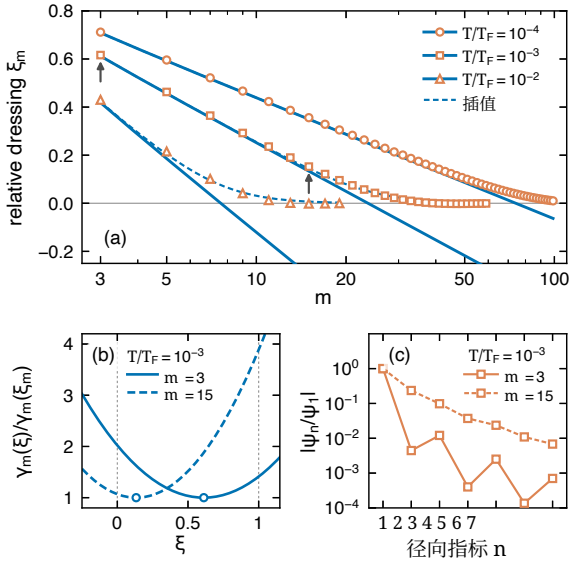


FIG. 5. 长寿命奇模相对修饰 ξ_m 随 m的变化，针对三种不同温度$T/T_F = 10^{-4}$、10^{-3}和 10^{-2}。蓝色实线：低温解析结果 [公式（97）]。橙色标记：参考文献 [7, 8]的精确对角化结果。黑色箭头指示了(b)和(c)图中所示的模态。蓝色虚线：插值公式（101）。(b) 变分速率 γ_m（ξ） [公式（2）]随 ξ 的变化，在$T/T_F = 10^{-3}$时对应 $m = 3$ （实线）和 $m = 15$ （虚线）。空心圆标记极小值 ξ_m。(c) 相应精确对角化本征矢的径向分量 $|\psi_n/\psi_1|$ 。具有 $n \geq 2$ 的分量被抑制，该模态可由公式（1）很好地描述，其中包括费米面的刚性位移和局域温度变化。

图 5(b) 展示了带有系数（73）和（96的弛豫率的完整变分形式 [，等价地说，即在常数相互作用下计算的方程（2）]，对应于 $m = 3$(实线) 和 $m = 15$ (虚线)，其中 $T/T_F = 10^{-3}$。两种情况下，模态都经过了部分重整化，其最小值[见图 5(b) 中的空心圆和图 5(a) 中的黑色箭头]，对应于 $0 < \xi_m < 1$。特别是，假设模态在 $m = 15$ 处完全重整化，会使弛豫率高估 4 倍。因此，与完全重整化的情况相比，部分热修饰延长了模态的寿命。

最后，在图 5（c）中，我们展示了在 $m = 3$ （实线）和 $m = 15$ （虚线）处通过 $T/T_F = 10^{-3}$ 精确对角化得到的完整本征矢在径向基中的权重。高阶径向模 $n \geq 2$ 的抑制与第 IVB 节中的一般论证一致，该论证说明可以使用 $n = 0$和 $n = 1$ 分量对低温结构进行有效描述，即将其表示为刚性形变和热修饰。

VI. 偶极费米子

为说明我们对一般相互作用势的结果，本节讨论自旋极化（$g_s = 1$）二维偶极费米子的奇模弛豫率。这种设置描述了一种具有紧横向限制 [20, 21] 的偶极费米量子气体，其中偶极子沿面外方向排列，并通过偶极势中排斥性的并排散射分量发生相互作用。简并偶极费米气体可通过超冷量子气体实验中的 Dy [22, 23] 或 Er [24]，制备，它们具有较大的磁偶极矩；也可通过 NaK [25] 或 KRb [26–28]等费米分子制备。目前的实验局限于费米温度的某个分数处的准二维情形，但严格二维极限或许能够在未来的研究中实现。

二维偶极相互作用势由短程部分和随 d^2/r^3 距离衰减的排斥分量组成，其中 d 是偶极矩。在傅里叶空间中，该势的形式为 $V(\mathbf{q}) = const. - 2\pi d^2|\mathbf{q}|$ 适用于动量 $q\ell_z \ll 1$，其中 ℓ_z是决定偶极子横向限制的长度尺度 [29, 30]。这对应于无量纲势 $V(x) = const. - 2\lambda_d x$，其中 $\lambda_d = k_F\ell_d$，其中$\ell_d = m^* d^2/\hbar^2$ 是偶极长度。完整的势（22）随后可写成一种简单形式，其中常数项相互抵消，

$$W(x,\tilde{x}) = 2\lambda_d^2(x-\tilde{x})^2. \tag{102}$$

这种散射势完全抑制了共线平行过程，$W_0 = 0$ [对于这类过程，$x \approx \tilde{x} \approx 0$，图3(c)–(d)] 并增强了共线反平行散射，[对于这类散射（x，$\tilde{x}$）$\approx (0, 1)$ 或 $(1, 0)$，图3(a) 和 (f)],$W_1 = 2\lambda_d^2$。式（2）中的有效势形式为

$$\begin{aligned} W_{\rm tot}(s) &= W_{\rm ex}(1-s) + W_{\rm ho}(s) \\ &= 2\lambda_d^2\Big[2 - s - 2\sqrt{s(1-s)}\Big]. \end{aligned} \tag{103}$$

奇模修饰和弛豫率可由方程（72）、（71）和（74）以闭式求得。对于最慢的非守恒奇模（即 $m = 3$，因为 $m = 1$ 描述的是守恒动量模），其相对修饰为

$$\xi_{m=3} = 1 - \frac{1}{9}\frac{14-3\pi}{\bar{\Lambda}_T - (7+3\pi)/6} \tag{104}$$

而弛豫率为

$$\gamma_{m=3} = \frac{4\pi^3}{5}\lambda_d^2\frac{T^4}{\hbar T_F^3}\Big[22 - 3\pi + 3(14-3\pi)\xi_3\Big]. \tag{105}$$

与具有相同W_1 [的常数相互作用相比，式（99）和（100）]，，相对修饰（104）仍更接近完全重整化 $\xi = 1$，且弛豫率更小。例如，在温度 $T/T_F = 10^{-4}$、10^{-3}和 10^{-2}，相对修饰分别为$\xi_3 = 0.92$、0.88和0.72，相比于 ξ_3 =0.71、0.61和0.41（图5(a)所示常数势）；常数弛豫率与偶极弛豫率之比为 $\gamma_{m=3}^{\rm const}/\gamma_{m=3}^{\rm dip} = 2.98$、2.76和2.40。直观上，这两种效应均在预期之中，因为与共线端点振幅相比，偶极相互作用抑制了大角度散射。

VII. 结论

总之，我们对一般正则各向同性势下的二维费米液体碰撞积分进行了完整的领先阶计算，其中包括温度对数项以外的非对数项，并将结果与常数相互作用情形下的精确对角化结果进行了比较。我们发现，长寿命奇宇称模由刚性的费米面形变以及伴随的局域温度调制构成，后者会减弱共线散射引起的弛豫。然而，共线散射仅受到对数增强，并与大角度散射竞争，因此，相对修饰 ξ 仅为部分修饰，并且随着角谐波指标 m 的增大而减小，直到这些模态在 $m \simeq \sqrt{T_F/T}$ 附近变得近乎刚性。这一结果消除了精确对角化与领先对数近似预测 $m^4 \ln m$ 之间的差异；后者对应的是完全修饰。偶极相互作用就是一种大角度散射较弱的势，其修饰程度高于常数相互作用。

碰撞积分通常在领先对数阶进行计算，这不仅适用于费米液体 [11, 12, 31–35], ，也适用于石墨烯输运 [36, 37], ；后者的展开参数为 $1/\ln(1/\alpha(T))$，其中有效精细结构常数 $\alpha(T)$ 依赖于温度。我们的工作给出了一个例子：在这一阶上，相应的输运寿命无法得到准确描述，因为领先对数项发生了抵消（在完全重整化 $\xi = 1$ 的情况下），且存在较大的次领先对数修正（其作用是减弱重整化）。我们指出，高温规范理论的输运计算中也发现了类似效应；这类计算需要对由规范耦合的逆对数 $1/\ln(1/g)$ [38, 39] 控制的项进行重求和。

费米液体动理学方程的直接求解通常会截断径向基，并为每个角扇区指定单一弛豫率 [40–54]。闭合形式的碰撞矩阵见 IIIC 节，连同较高温度下的插值（101），可为超出该近似的计算同时提供弛豫率与模态结构。特别是，配套快报表明，热修饰应能在热电势中被探测到 [10]。一个自然的下一步，是以同样的非对数精度计算黏度或热导率等输运系数。这与三维费米液体不同 [15–19], ，后者的修正并未受到对数抑制，并且可以

凭借径向修正的带状结构以闭合形式求值；而这需要第 IIIC 节的完整径向矩阵，该矩阵并非带状。文献中讨论了若干不同的对数效应——例如，源于库珀道奇异性 [55] 或前向散射库仑奇异性 [12, 56]——迄今似乎仍缺乏统一的处理。

致谢

我们感谢 Nitay Ben-Shachar、Ulf Gran、Hadrien Kurkjian 和 Carl L¨ov 的讨论。本研究获得了 Vetenskapsr˚adet（资助编号：2024-04485）、Olle Engkvist基金会（资助编号：233-0339）、Knut and Alice Wallenberg Foundation（资助编号：KAW 2024.0129）以及 Nordita 的支持。附录 F 和 G中的积分符号求值借助 ChatGPT（OpenAI，GPT-5.6）完成；所有结果均通过 Mathemat- ica 15.0 进行解析验证并由人工独立复核。我们使用 Claude（Anthropic，Opus 5.5）协助编写 Mathematica 代码，以数值计算碰撞矩阵元。作者对所有结果承担全部责任。

附录 A：线性化碰撞积分

在本附录中，我们汇总线性化碰撞积分的基本恒等式，并推导式 (18)，这是渐近匹配计算的起点。将 $\delta f(\mathbf{k}) = f_0(\mathbf{k})(1 - f_0(\mathbf{k}))h(\mathbf{k})$ 写出，并按 h的一阶展开，我们得到碰撞积分

$$\mathcal{J}[\delta f(\mathbf{k}_1)] = -\frac{2\pi}{\hbar}\int \frac{d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^2}\int \frac{d\mathbf{k}_{1'}}{(2\pi)^2}\int \frac{d\mathbf{k}_{2'}}{(2\pi)^2}\,\frac{W(x,\tilde{x})}{N_0^2} f_0(\mathbf{k}_1) f_0(\mathbf{k}_2)\big(1 - f_0(\mathbf{k}_{1'})\big)\big(1 - f_0(\mathbf{k}_{2'})\big) \times \delta\big(\varepsilon(\mathbf{k}_1) + \varepsilon(\mathbf{k}_2) - \varepsilon(\mathbf{k}_{1'}) - \varepsilon(\mathbf{k}_{2'})\big)(2\pi)^2\delta\big(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_{1'} - \mathbf{k}_{2'}\big) \times \Big[h(\mathbf{k}_1) + h(\mathbf{k}_2) - h(\mathbf{k}_{1'}) - h(\mathbf{k}_{2'})\Big]. \tag{A1}$$

这里，W 在式 (22) 中针对一般散射势 $V(\mathbf{q})$ 定义。被积函数在同时交换 $\mathbf{k}_1$ 和 $\mathbf{k}_2$ 以及 $\mathbf{k}_{1'}$ 和$\mathbf{k}_{2'}$ 时保持对称（这种对称性对应于交换粒子标签，对每个费米因子分别成立，但对相互作用矩阵元仅在整体交换时成立），并且在同时交换 $(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)$ 和 $(\mathbf{k}_{1'},\ \mathbf{k}_{2'})$ 时反对称（交换初态和末态要求相互作用具有时间反演对称性）。

线性化碰撞积分 (A1) 关于内积 (15) 的矩阵元定义为

$$\begin{aligned}\langle h'|\mathcal{L}|h\rangle = \frac{2\pi}{\hbar N_0 T}&\int \frac{d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^2}\int \frac{d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^2}\int \frac{d\mathbf{k}_{1'}}{(2\pi)^2}\int \frac{d\mathbf{k}_{2'}}{(2\pi)^2}\,\frac{W(x,\tilde{x})}{N_0^2} f_0(\mathbf{k}_1) f_0(\mathbf{k}_2)\big(1 - f_0(\mathbf{k}_{1'})\big)\big(1 - f_0(\mathbf{k}_{2'})\big)\\ &\times \delta\big(\varepsilon(\mathbf{k}_1) + \varepsilon(\mathbf{k}_2) - \varepsilon(\mathbf{k}_{1'}) - \varepsilon(\mathbf{k}_{2'})\big)(2\pi)^2\delta\big(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_{1'} - \mathbf{k}_{2'}\big)\\ &\times \frac{1}{4}\Big[h'^*(\mathbf{k}_1) + h'^*(\mathbf{k}_2) - h'^*(\mathbf{k}_{1'}) - h'^*(\mathbf{k}_{2'})\Big]\Big[h(\mathbf{k}_1) + h(\mathbf{k}_2) - h(\mathbf{k}_{1'}) - h(\mathbf{k}_{2'})\Big].\end{aligned} \tag{A2}$$

为了得到第三行第一个方括号中的反对称性，我们利用了上文列出的被积函数的对称性。

我们按照标准方式，利用动量转移将动量狄拉克δ函数改写为

$$\begin{aligned}&\delta\big(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_{1'} - \mathbf{k}_{2'}\big)\\ &= \int d\mathbf{q}\,\delta\big(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_{1'} - \mathbf{q}\big)\,\delta\big(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_{2'} + \mathbf{q}\big),\end{aligned} \tag{A3}$$

这使我们能够计算式（$\mathbf{k}_{1'}$ 和$\mathbf{k}_{2'}$ ）中的积分，其中式号为 A2。同样，能量狄拉克δ函数可改写为

$$\begin{aligned}&\delta\big(\varepsilon(\mathbf{k}_1) + \varepsilon(\mathbf{k}_2) - \varepsilon(\mathbf{k}_{1'}) - \varepsilon(\mathbf{k}_{2'})\big)\\ &= \hbar\int d\omega\,\delta\big(\varepsilon(\mathbf{k}_1) - \varepsilon(\mathbf{k}_{1'}) - \hbar\omega\big)\,\delta\big(\varepsilon(\mathbf{k}_2) - \varepsilon(\mathbf{k}_{2'}) + \hbar\omega\big)\\ &= \frac{1}{\hbar v_1 v_2 q^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\,\delta\Big(\cos(\theta_1 - \theta_q) - \frac{q}{2k_1} - \frac{\omega}{v_1 q}\Big)\\ &\qquad\times \delta\Big(\cos(\theta_2 - \theta_q) + \frac{q}{2k_2} - \frac{\omega}{v_2 q}\Big).\end{aligned} \tag{A4}$$

此外，我们将剩余的$\mathbf{k}_1$ 和$\mathbf{k}_2$参数化

使用极坐标进行积分，

$$\int d\mathbf{k} = \frac{m^*}{\hbar^2\beta}\int_{-\beta\mu}^{\infty} dw_k \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_k. \tag{A5}$$

能量分裂δ函数（A4）将角度θ_1 和 θ_2 限制为式（8）中的散射角。据此

参数化后，费米因子为

$$F_{121'2'} = \frac{1}{16\cosh\frac{w_1}{2}\cosh\frac{w_2}{2}\cosh\frac{w_{1'}}{2}\cosh\frac{w_{2'}}{2}}. \tag{A6}$$

根据能量守恒，费米因子在四个态的置换下保持对称，并且只取决于三个独立的能量参数，例如 w_1和 w_2 ，以及转移能量 w。

矩阵元（A2）变为

$$L^{(m)}_{n'n} = \frac{T^2}{\hbar T_F}\left\langle \frac{1}{32\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta_q \sum_{\theta_1^\star,\theta_2^\star}\int_0^\infty \frac{dx}{x}\frac{v_F^2}{v_1v_2}\frac{W(x,\tilde{x})}{|\sin\theta_1^\star \sin\theta_2^\star|}\left(\sum_i{}' u_{n'}(\mathbf{k}_i)e^{-im\theta_i}\right)\left(\sum_j{}' u_n(\mathbf{k}_j)e^{im\theta_j}\right)\right\rangle_F, \tag{A7}$$

其中 $\langle\ldots\rangle_F$ 定义于式（19）中，而 $\theta_1^\star$ 和 $\theta_2^\star$ 分别遍历式（8a）和（8b）的每个零点（另见图 2），并定义简写

$$\sum_j{}' u_n(\mathbf{k}_j)e^{im\theta_j} = u_n(\mathbf{k}_1)e^{im\theta_1} + u_n(\mathbf{k}_2)e^{im\theta_2} - u_n(\mathbf{k}_{1'})e^{im\theta_{1'}} - u_n(\mathbf{k}_{2'})e^{im\theta_{2'}}. \tag{A8}$$

根据旋转不变性，式（A7）中对 θ_q 的积分可以直接完成：如果基函数具有相同的角谐波指标 m，则积分贡献一个因子 2π；否则积分为零。注意，对于积分变量 w_1、w_2、w和 x，参数 $\tilde{x}$在 W 中并非独立变量，而是由约束式（12）确定。

附录 B：径向基函数

在本附录中，我们汇总用于对线性化碰撞积分 [8]进行对角化的低温径向基函数 $u_n(w)$ 的恒等式。这些径向函数关于内积构成一组正交归一集

$$\langle u_{n'}|u_n\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dw\,\frac{u_{n'}(w)u_n(w)}{4\cosh^2(w/2)}. \tag{B1}$$

初始基函数为 $u_0(w) \sim 1$ 和 $u_1(w) \sim w$，由此利用格拉姆-施密特过程生成更高阶多项式。第一组基函数为 [7, 8]

$$u_0(w) = 1 \tag{B2}$$

$$u_1(w) = \frac{\sqrt{3}}{\pi}w \tag{B3}$$

$$u_2(w) = \frac{3\sqrt{5}}{4\pi^2}w^2 - \frac{\sqrt{5}}{4} \tag{B4}$$

$$u_3(w) = \frac{5\sqrt{7}}{12\pi^3}w^3 - \frac{7\sqrt{7}}{12\pi}w \tag{B5}$$

依此类推。我们注意到不同阶的低温基函数之间存在递推关系：

$$w\,u_n(w) = \rho_{n+1}\,u_{n+1}(w) + \rho_n\,u_{n-1}(w) \tag{B6}$$

with

$$\rho_n = \frac{\pi n^2}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}. \tag{B7}$$

由此，我们推导出正交多项式 u_n的首项单项式系数。为此，写成

$$u_n(w) = \kappa_n(w^n + \nu_n w^{n-2} + \ldots) \tag{B8}$$

并将式（B6）两边的各项进行匹配，可得 $\kappa_{n+1} = \kappa_n/\rho_{n+1}$ 以及 $\kappa_n\nu_n = \kappa_{n-1}\rho_n + \kappa_{n+1}\rho_{n+1}\nu_{n+1}$。后一个恒等式改写为 $\nu_{n+1} = \nu_n - \kappa_{n-1}\rho_n/\kappa_n = \nu_n - \rho_n^2$，初始条件为 $\nu_1 = 0$，迭代可得

$$\nu_n = -\sum_{j=1}^{n-1}\rho_j^2 = -\frac{\pi^2}{6}\frac{n(n-1)[n(n-1)+1]}{2n-1}. \tag{B9}$$

附录 C：渐近散射构型

在本附录中，我们讨论渐近积分区域中参与三个积分（30）的不同散射构型。我们在图 6 中展示了各个过程，其中各列描述内、 中间和外积分区域，各行描述相反（上）和相同（下）半平面的散射。

在内区域中，动量转移的量级为积分下边界的量级 $l_{\max}$ [式（26）],即， $s = x^2 = O\left((T/T_F)^2\right)$。等价地，过程由标度变量 $s = S(T/T_F)^2$描述，其中

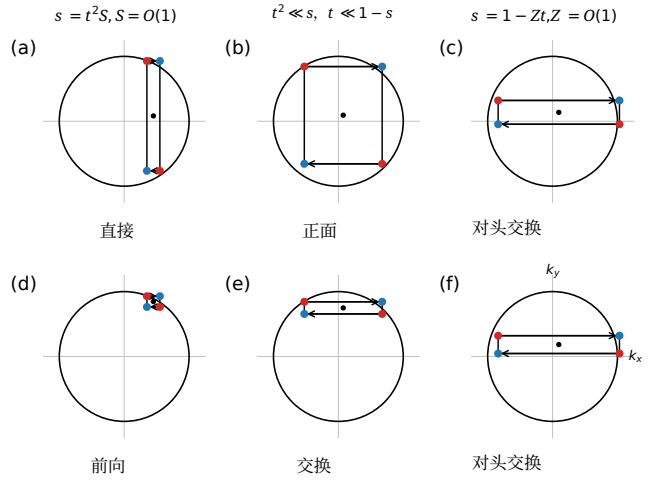


图 6. 示意了低温下对碰撞积分的匹配渐近展开有贡献的不同散射构型，其中我们将 $t = T/T_F$ 简写为 $t = T/T_F$。不同的列描述了在中间重叠尺度处相匹配的三个不同积分区域。顶部和底部两行描述了在固定动量转移下，散射构型分别位于相反和相同动量半平面内的过程。

S =O(1)。相反半平面散射描述直接过程 [图 6(a)]，，相同半平面散射描述前向过程 [图 6(d)]。在中间区域，我们有 $s = \mathrm{O}(T^0)$，其限制条件为（T/T_F）$^2 \ll s$ 和 $1 - s \gg T/T_F$。在这里，相反半平面散射描述正面过程 [图 6(b)]，相同半平面散射描述交换过程 [图 6(e)]。外区域由两个上根（27）之差确定，其范围覆盖的 s-范围为 O(T/T_F)，大于内区域。在这个外区域中，我们将 $s = 1 -$（T/T_F）Z 参数化，其中 Z =O(1)。相同半平面和相反半平面中的散射均描述正面交换过程 [图 6(c) 和 (f)]。

定量而言，这些区域中的角因子（8）的低温展开为

	$s = S(T/T_F)^2,\quad S = O(1)$	$(T/T_F)^2 \ll s,\quad 1 - s \gg T/T_F$	$s = 1 - Z(T/T_F)\quad Z = O(1)$
$\cos\ \theta_1^\star$	$\frac{w}{4\sqrt{S}} + \left(+\sqrt{S} - \frac{ww_1}{8\sqrt{S}}\right)\frac{T}{T_F}$	$+\sqrt{s} + \left(\frac{w}{4\sqrt{s}} - \frac{w_1\sqrt{s}}{2}\right)\frac{T}{T_F}$	$+1 + \left(\frac{w}{4} - \frac{Z}{2} - \frac{w_1}{2}\right)\frac{T}{T_F}$
$\cos\ \theta_2^\star$	$\frac{w}{4\sqrt{S}} + \left(-\sqrt{S} - \frac{ww_2}{8\sqrt{S}}\right)\frac{T}{T_F}$	$-\sqrt{s} + \left(\frac{w}{4\sqrt{s}} + \frac{w_2\sqrt{s}}{2}\right)\frac{T}{T_F}$	$-1 + \left(\frac{w}{4} + \frac{Z}{2} + \frac{w_2}{2}\right)\frac{T}{T_F}$
$\cos\ \theta_{1'}^\star$	$\frac{w}{4\sqrt{S}} + \left(-\sqrt{S} - \frac{ww_{1'}}{8\sqrt{S}}\right)\frac{T}{T_F}$	$-\sqrt{s} + \left(\frac{w}{4\sqrt{s}} + \frac{w_{1'}\sqrt{s}}{2}\right)\frac{T}{T_F}$	$-1 + \left(\frac{w}{4} + \frac{Z}{2} + \frac{w_{1'}}{2}\right)\frac{T}{T_F}$
$\cos\ \theta_{2'}^\star$	$\frac{w}{4\sqrt{S}} + \left(+\sqrt{S} - \frac{ww_{2'}}{8\sqrt{S}}\right)\frac{T}{T_F}$	$+\sqrt{s} + \left(\frac{w}{4\sqrt{s}} - \frac{w_{2'}\sqrt{s}}{2}\right)\frac{T}{T_F}$	$+1 + \left(\frac{w}{4} - \frac{Z}{2} - \frac{w_{2'}}{2}\right)\frac{T}{T_F}$

注意到括号中的最后几项可通过展开速度比 $v_\alpha/v_F = \sqrt{1 + w_\alpha T/T_F} = 1 + w_\alpha T/(2T_F) + \ldots$ 在此阶得到，它们是简单的表达式：所有过程都描述了具有质心分量 $K_x/k_F = wT/(4xT_F)$ [，参见式（11）] 以及动量转移 $q = 2k_F\sqrt{s}$的散射。散射构型在重叠区域（T/T_F）$^2 \ll \delta \ll 1$和 $T/T_F \ll \delta' \ll 1$中合并。

对于给定的 $\cos\theta^\star = v + \delta v$ 且满足 $|v| < 1$（这适用于内区域和中间区域），首先有：

$$\cos m\theta^\star = T_m(v) + mU_{m-1}(v)\delta v + O(\delta v^2) \tag{D1}$$

$$\sin m\theta^\star = \sqrt{1-v^2}\,U_{m-1}(v) - \frac{mT_m(v)}{\sqrt{1-v^2}}\delta v + O(\delta v^2), \tag{D2}$$

其中 $T_m(-v)$ =$(-1)^m T_m(v)$，以及 $U_{m-1}(-v)$ =$(-1)^{m-1}U_{m-1}(v)$，也就是说，对于奇数 m，T_m 会变号，而 U_{m-1} 不会变号，反之亦然。由于公式 (D1) 的次领先阶项中含有因子m ，且δv =O(T/T_F)，该展开要求 $mT/T_F \ll 1$，这意味着该展开所描述的角扇区必须满足约束 $m \ll T_F/T$。其次，在

附录 D：渐近核

本附录汇集了进入方程（30）的渐近核函数。这些核函数通过将方程（$m\theta$和$m\theta$方程（24）中的 sin 展开至 T/T_F的领先阶得到。为进行这一展开，我们遵循参考文献 [5] ，并利用以下切比雪夫恒等式将方程（8）展开至温度的领先阶：

$\cos\theta = \pm(1-\delta v)$ 的外区域中，我们使用

$$\cos m\theta = (\pm 1)^m (1 - m^2 \delta v) + O(\delta v^2) \tag{D3}$$

$$\sin m\theta = (\pm 1)^{m+1} m\sqrt{2\delta v} + O(\delta v^{3/2}). \tag{D4}$$

该端点展开现在给出了更强的约束 $m^2 T/T_F \ll 1$ 或 $m \ll \sqrt{T_F/T}$。该约束确定了低温展开的适用范围，并蕴含了上文对内区域展开所提出的较弱约束。我们得到核函数在 E 中的表达式。30：

(i) for $s = S(T/T_F)^2,\ S = O(1)$,

$$K_{n'n}^{(m)+}(s) = 2\Delta_{n'}\Delta_n \tag{D5}$$

and

$$K_{n'n}^{(m)-}(s) = 2D_{n'}D_n + 2\left(\Delta_{n'}\Delta_n - D_{n'}D_n\right) T_m^2\left(\frac{w}{4\sqrt{S}}\right). \tag{D6}$$

在此区域，切比雪夫多项式的自变量为 $w/(4\sqrt{S}) = K/k_F$，或为 $\sqrt{1-\tilde{x}^2} = \sqrt{1-\tilde{s}}$。

(ii) for $(T/T_F)^2 \ll s,\ 1-s \gg T/T_F$,

$$K_{n'n}^{(m)+}(s) = \begin{cases} 2E_{n'}E_n + 2\left(\Delta_{n'}\Delta_n - E_{n'}E_n\right) T_m^2(\sqrt{s}) & m \text{ even} \\ 2\Delta_{n'}\Delta_n + 2\left(E_{n'}E_n - \Delta_{n'}\Delta_n\right) T_m^2(\sqrt{s}) & m \text{ odd}, \end{cases} \tag{D7}$$

and

$$K_{n'n}^{(m)-}(s) = \begin{cases} 2\Sigma_{n'}\Sigma_n + 2\left(\Delta_{n'}\Delta_n - \Sigma_{n'}\Sigma_n\right) T_m^2(\sqrt{s}) & m \text{ even} \\ 2D_{n'}D_n + 2\left(E_{n'}E_n - D_{n'}D_n\right) T_m^2(\sqrt{s}) & m \text{ odd} \end{cases} \tag{D8}$$

(iii) 对于 $s = 1 - Z(T/T_F)\ \ Z = O(1)$,

$$K_{n'n}^{(m)\sigma}(s) = \begin{cases} 2\,\Delta_{n'}\Delta_n & m \text{ even} \\ 2\,E_{n'}E_n & m \text{ odd} \end{cases} \tag{D9}$$

对于两个分支 $\sigma = \pm$ 均成立。

由于 $\Delta_0 = E_0 = D_0 = 0$ 但 $\Sigma_0 = 4$，对于奇数 m，当 $n' = 0$ 或 $n = 0$时，这些主阶核恒为零，因此我们需要考虑更高温度修正的下一阶。对于奇数 m 和 $n' = 0$，在切比雪夫展开中保留下一个非零阶，得到：

(i) for $s = S(T/T_F)^2,\ S = O(1)$

$$K_{00}^{(m)+}(s) = 0 \tag{D10}$$

$$K_{0n}^{(m)+}(s) = 0, \tag{D11}$$

and

$$K_{00}^{(m)-}(s) = 32m^2\left(\frac{T}{T_F}\right)^2 S\left[1 - \left(\frac{w}{4\sqrt{S}}\right)^2\right] T_m^2\left(\frac{w}{4\sqrt{S}}\right), \tag{D12}$$

$$K_{0n}^{(m)-}(s) = -8m\frac{T}{T_F}\sqrt{S}\,D_n\left[1 - \left(\frac{w}{4\sqrt{S}}\right)^2\right] \times T_m\left(\frac{w}{4\sqrt{S}}\right) U_{m-1}\left(\frac{w}{4\sqrt{S}}\right), \tag{D13}$$

(ii) 对于 $(T/T_F)^2 \ll s,\quad 1-s \gg T/T_F$,

$$K_{00}^{(m)+}(s) = 2m^4\tilde{w}^2\frac{T^2}{T_F^2}s\frac{U_{m-1}^2(\sqrt{s})}{m^2}, \tag{D14}$$

$$K_{0n}^{(m)+}(s) = -2m^2\frac{T}{T_F}\tilde{w}\sqrt{s}E_n\,T_m(\sqrt{s})\frac{U_{m-1}(\sqrt{s})}{m} \tag{D15}$$

and

$$K_{00}^{(m)-}(s) = 2m^4\tilde{w}^2\frac{T^2}{T_F^2}s\,\frac{U_{m-1}^2(\sqrt{s})}{m^2} + 2m^2w^2\frac{T^2}{T_F^2}\frac{1-s}{s}\,T_m^2(\sqrt{s}), \tag{D16}$$

$$K_{0n}^{(m)-}(s) = -2m^2\frac{T}{T_F}\left[\tilde{w}\sqrt{s}E_n + w\frac{1-s}{\sqrt{s}}D_n\right] \times T_m(\sqrt{s})\frac{U_{m-1}(\sqrt{s})}{m}. \tag{D17}$$

(iii) 对于 $s = 1 - Z(T/T_F)\ \ Z = O(1)$

$$K_{00}^{(m)\pm}(s) = 2m^4\frac{T^2}{T_F^2}\tilde{w}^2, \tag{D18}$$

$$K_{0n}^{(m)\pm}(s) = -2m^2\frac{T}{T_F}\tilde{w}E_n. \tag{D19}$$

附录 E：偶数 m 非对角碰撞矩阵元 $L_{01}^{(m)}$

在本附录中，我们计算偶数 m的碰撞矩阵元 $L_{01}^{(m)}$。这需要超出正文所述阶的展开，并且是描述偶数模的热修饰所必需的。

根据式（62）–（64），T^2 项及其对数修正在进行费米平均后消失。在平均之前，此阶唯一的非零贡献来自式（D8），因为只有 $\Sigma_0 \neq 0$:

$$K_{01}^{(m)-}(s) = 2\Sigma_0\Sigma_1\big(1 - T_m^2(\sqrt{s})\big) = \frac{16\sqrt{3}}{\pi}(w_1 + w_2)\big(1 - T_m^2(\sqrt{s})\big), \tag{E1}$$

它关于能量为奇函数，取平均后为零（19）。将温度展开推进到下一阶，会得到两项贡献：首先，核函数需要按照对奇宇称m 元素 L_{00} 和 L_{01} 附录D中所述的方法进行同样的展开。其次，对上根式（27）[进行展开后，会得到一个额外的线性温度修正；下根在温度上的阶数更高，因此不会影响

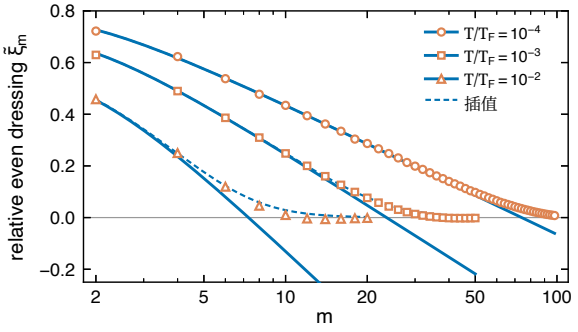


图 7. 相对偶模修饰 $\tilde{\xi}_m$ 在三个不同温度下 $T/T_F = 10^{-4}$, 10^{-3}和 10^{-2} 作为角谐波指标的函数 m。蓝线表示解析低温展开（E5）的结果，橙色标记取自文献中精确对角化的结果 [7, 8]。虚线：插值（101），其中 $\xi_m \to \tilde{\xi}_m$。

这一阶的结果]。按照处理其他系数的相同方法汇总这一展开中的各项，可得结果

$$L_{01}^{(m)} = c_m \Phi_{11}^{DE} \frac{T^3}{\hbar T_F^2} \Big(W_1 \bar{\Lambda}_T - 2\tilde{A}_m \Big) \tag{E2}$$

with

$$\begin{aligned} \tilde{A}_m[W] = {} & W_1(\tilde{a}_m - 1) \\ & + \frac{1}{4} \int_0^1 ds\, U_{m-1}^2(\sqrt{s}) \Big\{ \bar{\xi}(s) \frac{W_{\rm tot}(s) - 2W_1}{s} \\ & + \Big(\frac{1}{m^2 s} - \bar{\xi}(s) \Big) \frac{W_{\rm ho}(s) - W_1}{1-s} - \frac{1}{m^2 s} \partial_1 W_{\rm ho}(s) \Big\}, \end{aligned} \tag{E3}$$

其中 $\partial_1 W(x,\ \tilde{x}) = \partial W/\partial(x^2)|_{\tilde{x}}$ 和

$$\tilde{a}_m = \Big(2 + \frac{1}{m^2} \Big) o_m. \tag{E4}$$

式（E3）的第一行是常数相互作用的完整结果。我们将相对偶模修饰 ξ_m 写为

$$L_{01}^{(m)} = c_m \Phi_{11}^{DE} \frac{T^3}{\hbar T_F^2} W_1 \bar{\Lambda}_T\, \tilde{\xi}_m. \tag{E5}$$

对于常数相互作用，$\tilde{\xi}_m = 1 - 2(\tilde{a}_m - 1)/\Lambda_T$。图7 将常数相互作用的结果与文献中的精确对角化数据进行了比较。 [7, 8], ，其中 ξ_m按照方程（E5）提取。我们发现，在与奇模相同的参数范围内，结果与解析低温形式一致 [图 5], ，而同一个插值公式（101）（其中 ξ_m 替换为 ξ_m）能够描述低温区以外的数据。

附录 F：费米因子积分的生成函数

在本附录中，我们计算方程（57）中的费米能积分。受 Ledwith 等人的讨论启发， [5], 我们考虑一个生成函数，并将其扩展以纳入对数频率积分：

$$\begin{aligned} G_\sigma(\lambda,\rho) = {} & \int_{-\infty}^{\infty} dw \left\{ \begin{matrix} 1 \\ \ln \dfrac{4}{|w|} \end{matrix} \right\} \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} dw_1\, f_0(w_1)[1 - f_0(w_1 - w)] \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} dw_2\, f_0(w_2)[1 - f_0(w_2 + w)] \\ & \times \big(P(\lambda) + \sigma Q(\lambda) \big) \big(P(\rho) + \sigma Q(\rho) \big), \end{aligned} \tag{F1}$$

其中 $P(\lambda) = e^{\lambda w_1} - e^{\lambda(w_1 - w)}$ 和 $Q(\lambda) = e^{\lambda w_2} - e^{\lambda(w_2 + w)}$。利用

$$\int_{-\infty}^{\infty} dw_1 f_0(w_1)[1 - f_0(w_1 - w)] e^{\lambda w_1} = \frac{\pi}{\sin \pi\lambda} \frac{e^{\lambda w} - 1}{e^w - 1}, \tag{F2}$$

其计算结果为

$$G_\sigma(\lambda,\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} dw \left\{ \begin{matrix} 1 \\ \ln \dfrac{4}{|w|} \end{matrix} \right\} \times \frac{w^2}{4 \sinh^2 w/2} R_\sigma(\lambda,\rho,w) \tag{F3}$$

with

$$\begin{aligned} R_\sigma = {} & \frac{16}{w^2} \Big[\frac{\pi w}{\sin \pi(\lambda+\rho)} \sinh \frac{\lambda w}{2} \sinh \frac{\rho w}{2} \sinh \frac{(\lambda+\rho)w}{2} \\ & - \frac{2\sigma\pi^2}{\sin \pi\lambda \sin \pi\rho} \sinh^2 \frac{\lambda w}{2} \sinh^2 \frac{\rho w}{2} \Big]. \end{aligned} \tag{F4}$$

现在我们定义系数

$$R_{n'n}^\sigma(w) = u_{n'}(\partial_\lambda) u_n(\partial_\rho) R_\sigma(\lambda,\rho,w)\Big|_{\lambda=\rho=0}, \tag{F5}$$

使得

$$\bar{\Phi}_{n'n}^\Delta = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dw \frac{w^2}{4 \sinh^2 w/2} R_{n'n}^+(w) \ln \frac{4}{|w|} \tag{F6}$$

$$\Phi_{n'n}^\Delta = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dw \frac{w^2}{4 \sinh^2 w/2} R_{n'n}^+(w) \tag{F7}$$

$$\bar{\Phi}_{n'n}^{DE} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dw \frac{w^2}{4 \sinh^2 w/2} R_{n'n}^-(w) \ln \frac{4}{|w|} \tag{F8}$$

$$\Phi_{n'n}^{DE} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dw \frac{w^2}{4 \sinh^2 w/2} R_{n'n}^-(w). \tag{F9}$$

被积函数的宇称对称性意味着， $\bar{\Phi}_{n'n}^\Delta$ 和 $\bar{\Phi}_{n'n}^{DE}$ 以及 $\Phi_{n'n}^\Delta$ 和 $\Phi_{n'n}^{DE}$ 仅在

$n+n'$ 为偶数时非零。形式上，我们将 $R^{\sigma}_{n'n}$ 展开为关于 w的偶多项式

$$R^{\sigma}_{n'n} = \sum_{k=1}^{(n+n')/2} p^{\sigma}_{n'n,k} w^{2k}, \tag{F10}$$

使得

$$\bar{\Phi}^{\Delta}_{n'n} = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{(n+n')/2} p^{+}_{n'n,k} \bar{M}_{2k+2} \tag{F11}$$

$$\Phi^{\Delta}_{n'n} = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{(n+n')/2} p^{+}_{n'n,k} M_{2k+2}, \tag{F12}$$

$$\bar{\Phi}^{DE}_{n'n} = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{(n+n')/2} p^{-}_{n'n,k} \bar{M}_{2k+2} \tag{F13}$$

$$\Phi^{DE}_{n'n} = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{(n+n')/2} p^{-}_{n'n,k} M_{2k+2}, \tag{F14}$$

其中

$$\begin{aligned} M_{2r} &= \int_{-\infty}^{\infty} dw \, \frac{w^{2r}}{4\sinh^2 w/2} = 2\sum_{k=1}^{\infty} k \int_0^{\infty} dw \, w^{2r} e^{-kw} \\ &= 2\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\Gamma(2r+1)}{k^{2r+1}} = 2\Gamma(2r+1)\zeta(2r) \end{aligned} \tag{F15}$$

and

$$\begin{aligned} \bar{M}_{2r} &= \int_{-\infty}^{\infty} dw \, \frac{w^{2r}}{4\sinh^2 w/2} \ln\frac{4}{|w|} \\ &= M_{2r} h_r \end{aligned} \tag{F16}$$

with

$$h_r = \ln 4 - \psi(2r+1) - \frac{\zeta'(2r)}{\zeta(2r)}. \tag{F17}$$

注意 $h \equiv h_2$ 在正文中。方程（F16）可由以下推导得到

$$\begin{aligned} \bar{M}_{2r} &= \lim_{\alpha\to 0} \frac{\partial}{\partial\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} dw \, \frac{w^{2r}}{4\sinh^2 w/2} \left(\frac{4}{|w|}\right)^{\alpha} \\ &= M_{2r} \, \ln 4 + \lim_{\alpha\to 0} \frac{\partial}{\partial\alpha} M_{2r-\alpha}. \end{aligned} \tag{F18}$$

附录 G：带状费米积分

对数项的系数矩阵 $\Phi^{\Delta}_{n'n}$ 和 $\Phi^{DE}_{n'n}$ 也可以在不使用附录 F中的生成函数的情况下以闭式求值。结果为

$$\Phi^{\Delta}_{n,n-2} = \frac{\alpha^{+}_{n-2}}{\pi} \qquad \Phi^{\Delta}_{nn} = \frac{\beta^{+}_{n}}{\pi} \qquad \Phi^{\Delta}_{n,n+2} = \frac{\alpha^{+}_{n}}{\pi}, \tag{G1a}$$

$$\Phi^{DE}_{n,n-2} = \frac{\alpha^{-}_{n-2}}{\pi} \qquad \Phi^{DE}_{nn} = \frac{\beta^{-}_{n}}{\pi} \qquad \Phi^{DE}_{n,n+2} = \frac{\alpha^{-}_{n}}{\pi}, \tag{G1b}$$

with

$$\alpha^{\pm}_n = \frac{\pi^2(n+1)(n+2)[n(n+3) \pm 2[(-1)^n - 1]]}{2(2n+3)\sqrt{(2n+1)(2n+5)}} \tag{G2}$$

$$\beta^{\pm}_n = \frac{\pi^2 n^2 (n+1)^2}{(2n-1)(2n+3)} \pm [(-1)^n - 1] \frac{2\pi^2[n(n+1)-1]}{(2n-1)(2n+3)}. \tag{G3}$$

推导该结果的出发点是如下形式

$$\Phi^{\Delta}_{n'n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dw_1 \, \frac{u_{n'}(w_1)}{4\cosh^2 w_1/2} \mathcal{T}_{+}[u_n] = \frac{1}{\pi} \langle u_{n'} | \mathcal{T}_{+}[u_n] \rangle \tag{G4}$$

$$\Phi^{DE}_{n'n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dw_1 \, \frac{u_{n'}(w_1)}{4\cosh^2 w_1/2} \mathcal{T}_{-}[u_n] = \frac{1}{\pi} \langle u_{n'} | \mathcal{T}_{-}[u_n] \rangle \tag{G5}$$

with

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\pm}[u] = \int_{-\infty}^{\infty} dw_2 \int_{-\infty}^{\infty} dw \, & \frac{\cosh^2 \frac{w_1}{2}}{\left(\cosh\frac{w_1+w_2}{2} + \cosh\frac{w_1-w_2}{2}\right)} \\ & \times \frac{u(w_1) \pm u(w_2) - u(w_{1'}) \mp u(w_{2'})}{\left(\cosh\frac{w_1+w_2}{2} + \cosh(\frac{w_1-w_2}{2} - w)\right)}. \end{aligned} \tag{G6}$$

我们将积分变量换为 $U = e^{w_{1'}} = e^{w_1 - w}$和$V = e^{w_{2'}} = e^{w_2 + w}$，雅可比行列式为$dw_2 dw = dU dV/(UV)$。定义 $X = e^{w_1}$可得

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\pm}[u] = \int_0^{\infty} dU \int_0^{\infty} dV \, & \frac{(1+X)}{(1+U)(1+V)(X+UV)} \\ & \times \Big(u(\ln X) \pm u(\ln\tfrac{UV}{X}) - u(\ln U) \mp u(\ln V) \Big). \end{aligned} \tag{G7}$$

考虑生成函数 $u(w) = e^{\lambda w}$。由此可得

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\pm}[e^{\lambda w}] &= \int_0^{\infty} dU \int_0^{\infty} dV \, \frac{(1+X)}{(1+U)(1+V)(X+UV)} \\ &\quad \times \left(X^{\lambda} \pm \frac{U^{\lambda} V^{\lambda}}{X^{\lambda}} - U^{\lambda} \mp V^{\lambda} \right) \\ &= \frac{\pi^2 + w^2}{2} e^{\lambda w} + (1 \pm 2) \frac{\pi w}{\sin \pi\lambda} \\ &\quad + \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi\lambda} \Big[\pm e^{-\lambda w} - (1 \pm 1) e^{\lambda w} + \cos \pi\lambda \Big]. \end{aligned} \tag{G8}$$

由此形式可推知，$\mathcal{T}_{\pm}[w^n]$ 生成的多项式次数至多为 $n+2$（右侧次数为 λ^n 的项至多包含单项式 w^{n+2}），并且保持多项式的奇偶性。结合厄米性质 $\langle \mathcal{T}_{\pm} p | q \rangle = \langle p | \mathcal{T}_{\pm} q \rangle$，这意味着矩阵 $\Phi^{\Delta}_{n'n}$ 和 $\Phi^{DE}_{n'n}$ 是带状矩阵，非零元素仅出现在 $n' = n$，$n \pm 2$。利用

$$\frac{\pi}{\sin \pi\lambda} = \frac{1}{\lambda} + \frac{\pi^2}{6}\lambda + \dots \tag{G9}$$

$$\frac{\pi^2}{\sin^2\pi\lambda} = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{\pi^2}{3} + \dots \tag{G10}$$

我们明确写出

$$\mathcal{T}_\pm[w^n] = t_n^\pm w^{n+2} + r_n^\pm w^n + \dots \tag{G11}$$

with

$$t_n^\pm = \frac{1}{2} + \frac{\pm[(-1)^n - 1] - 1}{(n+1)(n+2)}, \tag{G12}$$

$$\begin{aligned} r_n^\pm &= \pi^2\left(\frac{1}{6} \pm \frac{1}{3}[(-1)^n - 1] + \frac{1 \pm 2}{6}\delta_{n1} - \frac{1}{6}\delta_{n0}\right) \\ &= \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \dfrac{\pi^2}{3}(1 \mp 1) & n = 1 \\ \pi^2\left(\dfrac{1}{6} \pm \dfrac{1}{3}[(-1)^n - 1]\right) & n \geq 2, \end{cases} \end{aligned} \tag{G13}$$

这由生成函数中指数函数的泰勒展开得出。然后我们写出

$$\mathcal{T}_\pm[u_n] = \alpha_n^\pm u_{n+2} + \beta_n^\pm u_n + \alpha_{n-2}^\pm u_{n-2}, \tag{G14}$$

其中最高指标 $n+2$ 可由以下事实推出：在 u_n 中的最高次单项式为 w^n，它只能改变至最大 w^{n+2}阶；步长为 2 是由 $\mathcal{T}_\pm$的保宇称性质所致；而不存在低阶项 u_{n-4} 等，则是由厄米性质以及 u_n 是正交多项式这一事实得出的（这意味着 $\langle u_{n'}|\mathcal{T}_\pm[u_n]\rangle = \langle\mathcal{T}_\pm[u_{n'}]|u_n\rangle = 0$若 $n'+2 < n$）。现在，使用式（B8）、 $u_n(w) = \kappa_n(w^n + \nu_n w^{n-2} + \dots)$，并定义

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\pm[u_n] &= \kappa_n(t_n^\pm w^{n+2} + [r_n^\pm + \nu_n t_{n-2}^\pm]w^n) + \dots \\ &= \alpha_n^\pm\kappa_{n+2}w^{n+2} + [\alpha_n^\pm\kappa_{n+2}\nu_{n+2} + \beta_n^\pm\kappa_n]w^n + \dots \end{aligned} \tag{G15}$$

这意味着

$$\alpha_n^\pm = \frac{\kappa_n}{\kappa_{n+2}}t_n^\pm = \rho_{n+1}\rho_{n+2}t_n^\pm \tag{G16}$$

$$\beta_n^\pm = r_n^\pm + t_{n-2}^\pm\nu_n - t_n^\pm\nu_{n+2}, \tag{G17}$$

代入系数后即得到式（G2）和（G3）。定义（G4）和（G5）进而给出结果（G1）。

最后，平均值 $\langle\Sigma_{n'}\Sigma_n\rangle_F$ 无需单独计算，而是由

$$\begin{aligned} &\Delta_{n'}\Delta_n + D_{n'}D_n + E_{n'}E_n + \Sigma_{n'}\Sigma_n \\ &= 4\Big(u_{n'}(w_1)u_n(w_1) + u_{n'}(w_2)u_n(w_2) \\ &\quad + u_{n'}(w_{1'})u_n(w_{1'}) + u_{n'}(w_{2'})u_n(w_{2'})\Big). \end{aligned} \tag{G18}$$

因此

$$\Phi_{n'n}^\Delta + 2\Phi_{n'n}^{DE} + \Phi_{n'n}^\Sigma = 4J_{n'n} \tag{G19}$$

with

$$\begin{aligned} J_{n'n} &= \frac{1}{\pi}\left\langle u_{n'}(w_1)\middle|\frac{\pi^2 + w_1^2}{2}u_n(w_1)\right\rangle = \frac{\rho_n\rho_{n-1}}{2\pi}\delta_{n',n-2} \\ &\quad + \frac{\pi^2 + \rho_n^2 + \rho_{n+1}^2}{2\pi}\delta_{n',n} + \frac{\rho_{n+1}\rho_{n+2}}{2\pi}\delta_{n',n+2}. \end{aligned} \tag{G20}$$

该矩阵实际上（至多相差归一化）等同于矩阵 $\Gamma_{nn'}$（三维费米液体）[16–19]。这也消除了平均值 $\Phi_{n'n}^\Sigma$，后者进入偶-m 有限部分，见式（64），因为

$$2\Phi_{n'n}^{DE} + \Phi_{n'n}^\Sigma - 3\Phi_{n'n}^\Delta = 4J_{n'n} - 4\Phi_{n'n}^\Delta. \tag{G21}$$

[1]R. N. Gurzhi、A. I. Kopeliovich 和 S. B. Rutkevich，二维金属系统的电导率，Zh. Eksp. Teor. Fiz. 83, 290 (1982)， [Sov. Phys. JETP 56, 159 (1982)]。[2] R. Gurzhi、A. Kopeliovich 和 S. Rutkevich，二维金属系统的动力学性质，Advances in Physics 36, 221 (1987)。[3] R. N. Gurzhi、A. N. Kalinenko 和 A. I. Kopeliovich，二维导电系统中电子碰撞期间的动量弛豫过程，Low Temp. Phys. 19, 744 (1993)， [Fiz. Nizk. Temp. 19, 1046 (1993)]。[4] R. N. Gurzhi、A. N. Kalinenko 和 A. I. Kopeliovich，二维电子气中的电子-电子碰撞与一种新的流体动力学效应，Physical Review Letters 74, 3872 1995( )。[5] P. J. Ledwith、H. Guo 和 L. Levitov，二维费米气体中激发寿命的层级结构，Ann. Phys. 411, 167913 (2019)。[6] S. Kryhin 和 L. Levitov，共线散射与二维电子流体中的长寿命激发，Phys. 《物理评论B》**107**，L201404（2023）。

[7] J. Gran、Hofmann、二维费米液体中的反常长寿命》，物理评论B **108**，L121401（2023）。[8] E. Nilsson、U. Gran 和 J. Hofmann，《有限温电子气中的非平衡弛豫与奇偶效应》，Physical Review X**15**，041007（2025）。[9] J. Maki、U. Gran 和 J. Hofmann，《原子量子气体中的奇宇称效应与尺度依赖黏度》，《通信物理》**8**，319（2025）。[10] J. Hofmann，《二维费米液体中共线散射导致的热电势过冲》（2026），姊妹论文。[11] B. Laikhtman，《二维电子气中的电子-电子角弛豫》，物理评论B **45**，1259（1992）。[12] D. Menashe 和 B. Laikhtman，《低温和低激发能极限下二维电子系统中的准粒子寿命》，物理评论B **54**，11561（1996）。

[13] S. Musser、S. Das Sarma 和 J. Hofmann，《三维费米液体中的奇弛豫》，物理评论研究 8，013176（2026年）。[14] K. B. Petersen 和 M. S. Pedersen，《矩阵手册》（2012），版本：2012年11月15日。[15] G. A. Brooker 和 J. Sykes，《费米液体的输运性质》，Physical Review Letters 21，279（1968）。[16] T. Repplinger、S. Huang、Y. Ji、N. Navon 和 H. Kurkjian，《弱相互作用超冷费米液体中第一声的色散》，Annalen der Physik（柏林）537，e00181（2025）。[17] P.-L. Taillat 和 H. Kurkjian，《具有接触相互作用的正常低温费米气体输运系数的精确微扰展开》，Physical Review Letters 135，183402（2025）。[18] P.-L. Taillat 和 H. Kurkjian，《朗道准粒子的低能有效哈密顿量：I. 费米液体中输运与超流性统一理论》（2025），arXiv:2511.15938。[19]H. Kurkjian，《弱相互作用费米气体中从经典输运到量子输运的交叉》（2025），arXiv:2512.17379。[20] Z.-K. Lu 和 G. V. Shlyapnikov，《二维极性分子的费米液体》，Phys. Rev. A 85，023614（2012）。[21] M. Babadi 和 E. Demler，《准二维囚禁偶极费米子的集体激发：从无碰撞区到流体动力学区的转变》，Phys. Rev. A 86，063638（2012）。[22] M. Lu、S. H. Youn 和 B. L. Lev，《囚禁超冷镝原子：用于偶极物理的强磁性气体》，Physical Review Letters 104，063001（2010）。[23] M. Lu、N. Q. Burdick 和 B. L. Lev，《量子简并偶极费米气体》，Physical Review Letters 108，215301（2012）。[24] K. Aikawa、A. Frisch、M. Mark、S. Baier、R. Grimm 和 F. Ferlaino，《通过普适偶极散射实现费米简并》，Physical Review Letters 112，010404（2014）。[25] A. Schindewolf、R. Bause、X.-Y. Chen、M. Duda、T. Karman、I. Bloch 和 X.-Y. Luo，《将微波屏蔽的极性分子蒸发至量子简并》，《自然》607，677（2022）。[26] L. De Marco、G. Valtolina、K. Matsuda、W. G. Tobias、J. P. Covey 和 J. Ye，《极性分子的简并费米气体》，《科学》363，853（2019）。[27] G. Valtolina、K. Matsuda、W. G. Tobias、J.-R. Li、L. De Marco 和 J. Ye，《将反应性分子偶极蒸发至低于费米温度》，《自然》588，239（2020）。[28] J. Lin、A. N. Carroll、P. Martin、C. Miller、R. R. W. Wang、K. Xu、J. L. Bohn、T. de Jongh 和 J. Ye，《泡利阻塞区中的极性分子费米气体》（2026），arXiv:2606.14135。[29] U. R. Fischer，《偶极-偶极相互作用占主导时准二维玻色-爱因斯坦凝聚体的稳定性》，Phys. Rev. A 73，031602(R)（2006）。[30] S. Komineas 和 N. R. Cooper，《弱相互作用极限之外具有偶极相互作用的玻色-爱因斯坦凝聚体中的涡旋晶格》，Phys. Rev. A 75，023623（2007）。[31] C. Hodges、H. Smith 和 J. W. Wilkins，《费米面几何对电子-电子散射的影响》，物理评论B 4，302（1971）。[32] P. Bloom，《二维费米气体》，物理评论B 12，125（1975）。[33] G. F. Giuliani 和 J. J. Quinn，《二维电子气中准粒子的寿命》，物理评论B 26，4421（1982）。[34] L. Zheng 和 S. Das Sarma，《二维电子气的库仑散射寿命》，物理评论B 53，9964（1996）。[35] S. Das Sarma 和 Y. Liao，《知己知彼：二维费米液体》，物理年鉴 435，168495（2021），Philip W. Anderson 专刊。[36] L. Fritz、J. Schmalian、M. M¨uller 和 S. Sachdev，《洁净石墨烯中的量子临界输运》，物理评论B 78，085416（2008）。[37] A. B. Kashuba，《无缺陷石墨烯的电导率》，物理评论B 78，085415（2008）。[38] P. Arnold、G. D. Moore 和 L. G. Yaffe，《高温规范理论中的输运系数（I）：领先对数结果》，高能物理学杂志 2000，001（2000）。[39] P. Arnold、G. D. Moore 和 L. G. Yaffe，《高温规范理论中的输运系数，2. 超越领先对数》，高能物理学杂志 2003，051（2003）。[40] P. Ledwith、H. Guo、A. Shytov 和 L. Levitov，《二维电子系统中的层析动力学与尺度依赖黏度》，Physical Review Letters 123，116601（2019）。[41] S. Kryhin、Q. Hong 和 L. Levitov，《二维电子流体中线性随温度变化的电导》，物理评论B 111，L081403（2025）。[42] J. Estrada-´Alvarez、E. D´ıaz 和 F. Dom´ınguez-Adame，《电子流体中的超弹道悖论：层析输运的相关性》，Physical Review Letters 135，206301（2025）。[43] G. A. Starkov 和 B. Trauzettel，《二维电子气中预示长寿命模的反常克努森效应》，物理评论B 113，L041406（2026年）。[44] J. H. Farrell 和 A. Lucas，《利用多端器件中的输运表征电子散射率》，物理评论B 114，295113（2026年）。[45] N. Ben-Shachar 和 J. Hofmann，《通道中层析电子的磁输运》，《通信物理》10.1038/s42005-026-02786-2（2026年）。[46] H. Rostami、N. Ben-Shachar、S. Moroz 和 J. Hofmann，《磁场对层析电子输运的抑制》，物理评论B 111，155434（2025）。[47] N. Ben-Shachar、J. T. Johnson、M. Madadi、D. R. Brum-ley、J. Nassios 和 J. E. Sader，《近流体动力学电子流中的霍尔场与奇黏度》，物理评论B 111，L121107（2025）。[48] N. Ben-Shachar、J. T. Johnson、M. Madadi、D. R. Brum-ley、J. Nassios 和 J. E. Sader，《根据线性化玻尔兹曼方程描述的近流体动力学电子流》，物理评论B 111，125145（2025）。[49] J. Maki 和 J. Hofmann，《磁场中的层析集体模》，物理评论B 113，245122（2026年）。[50] G. A. Starkov，《科尔比诺几何中的层析流动区制与偶奇效应之比较》，arXiv:2607.14929 10.48550/arXiv.2607.14929（2026年）。[51] N. Ben-Shachar 和 J. Hofmann，《科尔比诺圆盘中的层析电子磁输运》（2026年），arXiv:2607.05540。[52]N. Ben-Shachar 和 J. Hofmann，《受限几何中的层析电子流：超越二元——

弛豫时间近似，Physical Review X **16**，041044 2026年( )。[53] I. Moiseenko 、 E. M¨onch 、 K. Kapralov 、 D. Bandurin、S. Ganichev 和 D. Svintsov，《利用高阶回旋共振检验层析费米液体假说》，Physical Review Letters **134**，226902（2025）。[54] D. Thuillier 和 T. Scaffidi，二维电子系的交流指纹——

电子流体动力学：超扩散与德鲁德权重抑制，Physical Review Letters **137**，196303（2026年）。[55] D. S. Novikov，二维费米液体的黏度（2006年），arXiv:cond-mat/0603184。[56] A. O. Lyakhov 和 E. G. Mishchenko，具有库仑相互作用的二维电子气的热导率，物理评论B **67**，041304(R)（2003年）。