激发态 Hohenberg–Kohn定理的一个简单反例

D. Shillingford[1]多伦多大学数学系

（*电子邮箱：d.shillingford@mail.utoronto.ca）

（日期：2026年11月24日）

对于一维单位环面上的偶数个非相互作用费米子，本文给出了一个关于激发态 Hohenberg–Kohn定理的半显式反例。具体而言，对于每个 $n = 2l$，我们证明存在常数 $m \in (0,1)$ 和 $\ell > 0$，使得具有缩放拉梅势 $v_*(x) = 2m\ell^2 \mathrm{sn}^2(\ell x; m)$ 的 n 体系统具有简单的第一激发能，且其第一激发态粒子密度在环面上为常数。通过平移该势，我们构造出一个非平凡的一参数势族，其中每个势对应的第一激发态密度均为常数。因此，在这一设定下，势到密度映射不是单射。在谱非共振假设下，对于奇数 $n \geq 3$，我们也在简单激发能处得到相同的非唯一性。我们还探讨了该问题与平面上弹性曲线分类问题的联系（当 $n = 2$ 时），并概述了一些相关的有趣问题。

arXiv:2611.28296v1 [math-ph] 20 Nov 2026

I. 引言

在量子物理和量子化学中，密度泛函理论是预测多体系统物理性质的一种强大且广泛使用的工具。这一理论的基石是Hohenberg–Kohn定理，该定理的非正式表述是：施加于由相互作用量子粒子组成的多体系统的外势，可以由该系统基态的粒子密度唯一确定（相差一个加性常数）。这一点并不显然，因为通常无法从任意量子系统的粒子密度中恢复有关粒子间关联的细节。然而，对于基态，可以通过从基态密度反向推导外势，并利用该势重新计算基态波函数，来恢复这些关联。

随着Hohenberg–Kohn定理在基态问题中的成功，人们不禁会问，同样的结论是否也适用于激发态。Gaudoin和Burke[1], 对这一问题进行了详细研究，他们给出了有力的数值证据，表明存在两个径向势，能够对组态 $1s^1 2s^2$, 产生相同的激发态密度；还存在两个外势，能够对盒中势阱中的一对费米子产生相同的第一激发态密度。在这两种情况下，粒子之间均不存在相互作用。这有力地表明，Hohenberg–Kohn定理通常不适用于激发态，也不适用于具有固定轨道构型的激发态，以及具有固定激发数的激发态。他们还通过考察与第k个激发态密度相关的易感算符 χ_k，描述了后一种失效的机制。

Li等人[2]进一步考察了非相互作用激发态不满足Hohenberg–Kohn定理这一问题。对于一维固定外势下两个非相互作用费米子的任意能量本征态，他们推导出一个非线性微分方程。该方程满足适当边界条件的非平凡解，会给出额外的外势，其能量本征态具有与原态相同的密度。

Li等人还提供了有力的数值证据，表明存在使该方程具有非平凡解的势。与Gaudoin和Burke的研究不同，通过此方法得到的额外态通常与原态具有不同的激发数或轨道构型。尽管如此，这进一步提供了数值证据，表明一般而言，激发态的Hohenberg–Kohn定理并不成立。

尽管这些数值结果令人几乎确信一般的Hohenberg–Kohn定理不适用于激发态，但这两项研究都未对其反例提供严格的存在性证明。Gaudoin和Burke通过数值方法构造了例子，并描述了非唯一性的机制；Li等人则推导出一个精确的微分方程，但未严格证明满足所需边界条件和归一化条件的非平凡解确实存在。在本文中，对于任意偶数个粒子，我们半显式地构造了单位环面上的一个非常数势，该势产生常数的第一激发态密度。平移此势可得到一参数族的不同势，它们具有相同的第一激发态密度，从而证明对于具有偶数个粒子且满足周期性边界条件的系统，即使在激发数固定时，一般的Hohenberg–Kohn定理也不成立。在谱非共振假设下，我们
在奇数$n \geq 3$时，在简单激发能级上获得相同的非唯一性。

II. 主要结果与证明

之前 为精确陈述结果，我们先引入一些记号。令 $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 表示（单位）环面 s,

$$\mathscr{H} = \bigwedge^n L^2(\mathbb{T}) \tag{1}$$

为环面上 n 个费米子的状态空间，并且对于每个 $v \in C^\infty(\mathbb{T})$，令 $\Lambda_k(v)$ 表示其第 k 个特征值

$$\mathfrak{H}(v) = \mathrm{d}\Gamma\left(-\Delta + v(\hat{x})\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(-\Delta_k + v(\hat{x}_k)\right) \tag{2}$$

按非递减顺序排列，从零开始编号，并计入重数。

设 $\mathscr{V}_k = \{[v] \in \dot{C}^\infty(\mathbb{T})\colon \Lambda_k(v)$ 是简单的；$\}$ 其中 $\dot{C}^\infty(\mathbb{T})$ 是环面上光滑函数模去常数平移后的空间，并注意到根据标准谱扰动理论，$\mathscr{V}_k$ 是一个开集。

每当 $[v] \in \mathscr{V}_k$ 时，令 $\eta_k(v) \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ 表示投影到 $\Lambda_k(v)$ 的（一维）特征空间上的投影，令 $\rho_k(v) \in L^1(\mathbb{T})$ 表示相应的粒子密度，满足

$$\int \mu(x)\rho_k(x;v)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{d}\Gamma(\mu(\hat{x}))\eta_k(v)\right). \tag{3}$$

特别地，如果对某个正交归一的 $,,L(\,)$ 有 $\eta_k \quad = |\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n\rangle\langle\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n|$ $\phi_1 \ \ldots \ \phi_n \in {}^2\,\mathbb{T}$ $\rho_k \quad = |\phi_1 \quad |^2 + \ldots + (v)$，则有 $|\phi_n \quad |^2$ $(x; v)$ (x) (x)。我们的主要结果如下。

定理1. 设 n 为偶数。那么存在 $[v_*] \in \mathscr{V}_1$，使得映射 $[v] \in \mathscr{V}_1 \mapsto \rho_1(v) \in L^1(\mathbb{T})$ 在 $[v_*]$ 的任意开邻域内都不是单射。

特别地，存在一个势 $\tilde{v}_* \in C^\infty(\mathbb{T})$，使得 $\rho_1(v_*) = \rho_1(\tilde{v}_*)$，而 $\tilde{v}_* - v_*$ 是非常数。

注记。 尽管定理1假设 n 为偶数，我们稍后将陈述并证明一个针对奇数$n \geq 3$的互补但有条件的结果，参见定理2。在定理1和定理2中，势都具有如下形式：$v_*(x) = 2m\ell^2\,\mathrm{sn}^2(\ell x; m)$，其中 sn 是椭圆正弦函数，常数 $m \in (0,1)$ 和 $\ell > 0$ 隐式地依赖于 n。定理1将直接由下面的命题推出，其证明表明存在 m 和 ℓ，使得 v_* 具有一个常数密度的激发态。

命题1的证明关键在于引理1和引理2。引理1表明，与证明相关的势v_* 的 Floquet 特征函数的模平方是$x \mapsto \mathrm{sn}^2(\ell x;m)$的仿射函数；引理2给出了归一化系数随雅可比参数$m$变化时的端点行为。

Prop命题1。设 n 为偶数。则存在一个非常数势 $v_* \in C^\infty(\mathbb{T})$，使得

1. $\Lambda_1(v_*)$，即第一激发态能量，是简单的，并且
2. $\rho_1(v_*)$ 是常数，特别地，$\rho_1(x;v_*) = n$。

证明。令 $v_*(x) = 2m\ell^2\,\mathrm{sn}^2(\ell x; m)$，其中某个$m \in$属于$(0,1)$，且 $\ell > 0$取决于n，稍后将给出具体取值；这里 sn 是椭圆正弦函数。

众所周知，对于 $m \in (0,1)$，椭圆正弦函数的平方以 $\ell_0(m) = 2K(m)$ 为周期。这里，$K(m)$ 是以雅可比参数 m 计算的第一类完全椭圆积分。Lamé 哈密顿算符（一次）$H(m) = -\partial^2_x + 2m\mathrm{sn}^2(\hat{x};m)$ 的能带结构已得到充分研究。

事实上，能带结构由一条有限能带 $[\lambda_0, \lambda_{n-1}]$ 和一条半无限能带 $[\lambda_n, \infty$组成，两者之间由一个带隙隔开。对应于带边的弗洛凯解 ϕ_0, ϕ_{n-1} 和 ϕ_n 分别是周期、反周期和反周期的。这些是一次拉梅多项式[3]，分别与 $\mathrm{dn}(-;m)$、$\mathrm{cn}(-;m)$ 和 $\mathrm{sn}(-;m)$ 成正比，其中 $\lambda_0 = m$、$\lambda_{n-1} = 1$ 和 $\lambda_n = 1 + m$，参见文献 4，第 205 页。这里，cn 和 dn 分别是椭圆余弦函数和椭圆德尔塔振幅函数。

令 $\mathrm{n} = 2\mathrm{l}$。根据弗洛凯理论，对于每个满足 $0 < \mathrm{k} < 1$ 的 $\mathrm{k} \in \mathbb{N}$，都存在与谱点 $\lambda_{2k-1} = \lambda_{2k}$ 相关的其他弗洛凯解 ϕ_{2k-1} 和 ϕ_{2k}，这些谱点位于带 $[\lambda_0, \lambda_{n-1}]$ 内，并满足 $\phi_{2k-1}(\mathrm{x} + \ell_0(\mathrm{m})) = \mathrm{e}^{i\pi k/l}\phi_{2k-1}(\mathrm{x})$ 和 $\phi_{2k}(\mathrm{x} + \ell_0(\mathrm{m})) = \mathrm{e}^{-i\pi k/l}\phi_{2k}(\mathrm{x})$。这些点满足 $\lambda_{2k-2} < \lambda_{2k-1} = \lambda_{2k} < \lambda_{2k+1}$。由此可知，当 $\mathrm{H(m)}$ 作用于周期为$\ell = 2\mathrm{l}\ell_0(\mathrm{m}) = \mathrm{n}\ell_0(\mathrm{m})$ 的环面时，ϕ_0是基态，而 $\phi_1, \ldots, \phi_n$是前 n 个激发态。

利用标准 关于费米子多体态的事实，$\Lambda_0(v_*) = \ell^2 \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k$, $\Lambda_1(v_*) = \ell^2\left(\lambda_n + \sum_{k=0}^{n-2} \lambda_k\right)$ 一个 d

$$\Lambda_2(v_*) = \ell^2 \times \min\left\{\lambda_{n+1} + \sum_{k=0}^{n-2} \lambda_k, \lambda_n + \lambda_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-3} \lambda_k\right\}.$$

于是有：当 $\lambda_n - \lambda_{n-1} > 0$、$\lambda_{n+1} - \lambda_n > 0$ 和 $\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2} > 0$ 时，$\Lambda_1(v_*)$ 是简单的。事实上，第一个不等式成立是由于带隙，而另外两个则依据一般的弗洛凯理论成立。由

$$\phi_{k,\ell}(x) = \sqrt{\frac{\ell}{n}} \times \phi_k(\ell x) = \sqrt{\ell_0(m)} \times \phi_k(\ell x)$$

因此，通过缩放可得 $\eta_0(v_*) = |\phi_{0,\ell} \wedge \ldots \wedge \phi_{n-1,\ell}\rangle\langle\phi_{0,\ell} \wedge \ldots \wedge \phi_{n-1,\ell}|$ 以及

$$\eta_1(v_*) = |\phi_{0,\ell} \wedge \ldots \wedge \phi_{n-2,\ell} \wedge \phi_{n,\ell}\rangle\langle\phi_{0,\ell} \wedge \ldots \wedge \phi_{n-2,\ell} \wedge \phi_{n,\ell}|.$$

现在我们计算 $\rho_1(v_*)$。为此，根据引理1可得 $|\phi_k(x)|^2 = a^{\lambda_k}(m) - mb^{\lambda_k}(m)\mathrm{sn}^2(x;m)$。因此我们计算

$$\rho_1(x;v_*) = \ell_0(m)\left[a_{\lambda_n}(m) - mb_{\lambda_n}(m)\,\mathrm{sn}^2(\ell x;m) + \sum_{k=0}^{n-2}\left(a_{\lambda_k}(m) - mb_{\lambda_k}(m)\,\mathrm{sn}^2(\ell x;m)\right)\right].$$

要得到常数密度，只需找到$m \in (0,1)$，使得

$$f(m) = b_{\lambda_n(m)}(m) + \sum_{k=0}^{n-2} b_{\lambda_k(m)}(m) = 0,$$

其中我们强调 λ_k对m的依赖性。

由于 $\lambda_n(m) = 1+m$，$b_{\lambda_n(m)}(m) = c_1(m)$（其中 $c\zeta(-)$ 如引理2中所定义），因此

$$f(m) = c_1(m) + \sum_{k=0}^{n-2} b_{\lambda_k(m)}(m).$$

事实上，根据 引理2，$\lim_{m\to 1^-} c_1(m) = 0$，而 $\lambda_k(m) \le 1 \Longrightarrow \lim_{m\to 1^-} b_{\lambda_k(m)}(m) = \frac{1}{2^5}$ 由此我们得出at

$$\lim_{m\to 1^-} f(m) \ge \frac{n-1}{2} \ge \frac{1}{2}.$$

另一方面，由于 λ_k $(m) \le \lambda_{n-2}(m) \le 1$ 以及 $b_\lambda(m)$ 是 λ 在固定的m 下的增函数，当 $\lambda \le 1$ 时，我们有

$$f(m) \le c_1(m) + (n-1)\times b_{\lambda_{n-2}(m)}(m).$$

势 $v_*(x) = 2m\ell^2\,\mathrm{sn}^2(\ell x;m)$ 当$m \to 0$时一致收敛于 0，并且根据谱扰动理论，可知$\lambda_{n-2}(-)$ 在充分小的m下是连续的，且 $\lambda_{n-2}(m) = \lambda_{n-2}(0) + o(1)$，其中

$$\lambda_{n-2}(0) = \left(\frac{\pi(n-2)}{\ell}\right)^2 = \left(\frac{\pi(n-2)}{\pi n}\right)^2 = \left(1-\frac{2}{n}\right)^2.$$

由于 $\lambda_{n-2}(0)$ 严格小于 1，$\lambda_{n-2}(m)$ 在充分小的m下与 1 保持一致地相距有界。由此可得

$$b_{\lambda_{n-2}(m)}(m) \xrightarrow{m\to 0^+} \frac{1}{\pi}\times\frac{1}{1-\lambda_{n-2}(0)}.$$

该量有界，而 $c_1(m)$ 当 $m \to 0^+$ 时，因此 $\lim_{m\to 0^+} f(m) = -\infty$。

由于根据谱扰动理论，f在 (0,1) 上连续，因此由介值定理可知，存在某个$m \in (0,1)$，使得$f(m) = 0$。对于这个m，我们有 $\rho_1(v_*)$ 为常数，证明完毕。 □

定理1随即作为推论得出。

定理1的证明。令 $\mathrm{v}_*(\mathrm{x}) = 2\mathrm{m}\ell^2\,\mathrm{sn}$函数$^2(\ell\mathrm{x};\mathrm{m})$，其中 $\mathrm{m} \in (0,1)$，且 $\ell > 0$如命题1的证明中所述，并反设 $[\mathrm{v}] \mapsto \rho_1(\mathrm{v})$ 在 $[\mathrm{v}_*]$ 的某个邻域内是单射。令 $\mathrm{v}_s(\mathrm{x}) = \mathrm{v}_*(\mathrm{x}+\mathrm{s})$。由于 v_* 不是常数，映射 $\mathrm{s} \mapsto [\mathrm{v}_s]$ 在 0 的某个邻域内是单射，因此 $\mathrm{s} \mapsto \rho_1(\mathrm{v}_s)$ 在 0 的某个邻域内也是单射。然而，这与 $\rho_1(\mathrm{x};\mathrm{v}_s) = \mathrm{n}$ 对所有 $\mathrm{s} \in \mathbb{T}$ 都成立矛盾。 □

现在我们来陈述并证明引理1和引理2。

引理1. 设 $m \in (0,1)$。假设 ϕ 满足拉梅方程

$$-\phi''(x) + 2m\,\mathrm{sn}^2(x;m)\phi(x) = \lambda\phi(x)$$

使得 ϕ是拟周期的，准周期为 $\phi(x+\ell_0(m)) = \xi\phi(x)$，其中 $|\xi| = 1$，且满足归一化条件

$$\int_0^{\ell_0(m)} |\phi(x)|^2\,\mathrm{d}x = 1.$$

进一步假设，$\mathrm{Im}\,\xi \ne 0$或 $\lambda \in \{m\,1, 1+m\}$。

则 $|\phi(x)|^2 = a_\lambda(m) - mb_\lambda(m)\mathrm{sn}^2(x;m)$，其中

$$a_\lambda(m) = \frac{1+m-\lambda}{(m-\lambda)\ell_0(m) + \tilde{\ell}_0(m)}, \quad b_\lambda(m) = \frac{1}{\tilde{\ell}_0(m) - (\lambda-m)\ell_0(m)},$$

和 $\tilde{\ell}_0(m) = 2E(m)$。

注记。 Thies 的研究中也有类似构造，其中态的密度是 sn函数[2] 的仿射函数[5]。

证明。 我们考虑两种情况： $\lambda \in \{m1,\ 1+m\}$ 以及 $\mathrm{Im}\ \xi \neq 0$。前一种情况涉及 Lamé 哈密顿算符的三个带边，它们是显式已知的。当 $\lambda = m$ 时，存在唯一的解（差一个归一化因子）$\mathrm{dn}(x;\ m)$，满足 $\xi = 1$。当 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = 1+m$ 时，唯一的解分别为 $\mathrm{cn}(x;\ m)$ 和 $\mathrm{sn}(x;\ m)$，且满足 $\xi = -1$。在这些显式情形下，我们分别有

$$|\phi(x)|^2 \propto \mathrm{dn}^2(x;m) = 1 - m\,\mathrm{sn}^2(x;m);\quad |\phi(x)|^2 \propto \mathrm{cn}^2(x;m) = 1 - \mathrm{sn}^2(x;m);\ \text{and}\quad |\phi(x)|^2 \propto \mathrm{sn}^2(x;m)\,.$$

利用

$$\int_0^{\ell_0(m)} \mathrm{sn}^2(x;m)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{m}\left(\ell_0(m) - \tilde{\ell}_0(m)\right),$$

由此我们 conclude that in the three cases above, we have

$$|\phi(x)|^2 = \frac{1 - m\,\mathrm{sn}^2(x;m)}{\tilde{\ell}_0(m)};\quad |\phi(x)|^2 = \frac{m - m\,\mathrm{sn}^2(x;m)}{\tilde{\ell}_0(m) - (1-m)\ell_0(m)};\ \text{and}\quad |\phi(x)|^2 = \frac{m\,\mathrm{sn}^2(x;m)}{\ell_0(m) - \tilde{\ell}_0(m)}\,.$$

接下来考虑 $\mathrm{Im}\,\xi \neq 0$的情形。为此，可以证明，如果 ϕ 和 $\tilde{\phi}$ 是拉梅方程˜的两个具有相同特征值的解，那么它们的乘积 $u = \phi\phi$ 满足三阶方程

$$u'''(x) + 4(\lambda - 2m\,\mathrm{sn}^2(x;m))\,u'(x) - 4m\left[\mathrm{sn}^2(x;m)\right]' u(x) = 0\ ^{4,6}. \tag{4}$$

由于 $\mathrm{Im}\,\xi \neq 0$、 ϕ 和 $\bar{\phi}$ 是拉梅方程的两个线性无关解。因此， ϕ^2、 $\bar{\phi}^2$ 和 $|\phi|^2$ 是方程 (4) 的三个解。此外，根据朗斯基行列式恒等式，这些解是线性无关的

$$\mathrm{W}\left(\phi^2, |\phi|^2, \bar{\phi}^2\right) = 2 \times \mathrm{W}\left(\phi, \bar{\phi}\right)^3\ ^7.$$

由于 $\mathrm{Im}\,\xi \neq 0$ 中只有 $|\phi|^2$ 是 $\ell_0(m)$-周期的，因此方程 (4) 的任意其他周期解都必须与 $|\phi|^2$ 成比例。通过直接计算可验证

$$\left[\mathrm{sn}^2(x;m)\right]''' = \left[12m\,\mathrm{sn}^2(x;m) - 4(m+1)\right] \times \left[\mathrm{sn}^2(x;m)\right]' \tag{5}$$

因此，通过比较系数，$u(x) = c - \mathrm{sn}$函数$^2(x;m)$ 是方程 (4) 的周期解，当且仅当

$$4(m+1) - 4\lambda - 4mc = 0 \implies c = \frac{m+1-\lambda}{m}\,.$$

根据归一化条件，

$$|\phi(x)|^2 = \frac{c - \mathrm{sn}^2(x;m)}{c\ell_0(m) - \frac{1}{m}\left(\ell_0(m) - \tilde{\ell}_0(m)\right)} = \frac{m+1-\lambda - m\,\mathrm{sn}^2(x;m)}{(m-\lambda)\ell_0(m) + \tilde{\ell}_0(m)}.$$

□

引理2。 令 $b_\lambda :\ (0,1) \to \mathbb{R}$ 如引理*1*中所定义，并令 $c_\zeta :\ (0,1) \to \mathbb{R}$，使得

$$c_\zeta(m) = \frac{1}{\tilde{\ell}_0(m) - \zeta\ell_0(m)} = b_{\zeta+m}(m)\,.$$

则以下结论成立：

1. 极限$_{m\to 0^+} c_1(m) = -\infty$

2. $\lim_{m\to 0^+} b_\lambda(m) = \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{1-\lambda}$关于 λ一致地，其中 λ与 ∞均与 *1* 保持一致的有界距离。

3. $\lim_{m\to 1^-} b_\lambda(m) = \frac{1}{2}$关于 λ对 m $\leq \lambda \leq 1$一致地，即 $\lim_{m\to 1^-}\left(\sup_{m\leq\lambda\leq 1}\left|b_\lambda(m) - \frac{1}{2}\right|\right) = 0$

4. 极限$_{m\to 1^-} c_\zeta(m) = 0$ 在 ζ 上一致地趋于 $\zeta \geq 1$。

证明：首先，我们有

$$c_1(m) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{E(m) - K(m)}.$$

当$E(0) = K(0)$时，$\lim_{m\to 0^+} c_1(m) = -\infty$，而对所有$m \in (0,1)$，$K(m) \geq E(m)$。

接下来，我们证明当$m \to 0^+$时，$b_\lambda(m)$具有所需的一致极限。在这种情况下，$E(m) - (\lambda - m)K(m)$在每个有界集上一致收敛到$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \times \lambda$。由于$\lambda$一致地远离1，$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \times \lambda$一致地远离0，因此得到所需结果。

现在我们来证明$m \leq \lambda \leq 1$时的一致收敛结果。对所有$m \leq \lambda \leq 1$，有

$$E(m) \geq E(m) - (\lambda - m)K(m) \geq E(m) - (1-m)K(m).$$

$E(m) - (1-m)K(m) \geq 0$如

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - m\sin^2(t)\right)^{1/2} \mathrm{d}t - (1-m)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - m\sin^2(t)\right)^{-1/2} \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{m\cos^2(t)}{(1 - m\sin^2(t))^{1/2}} \mathrm{d}t \geq 0$$

因此

$$\frac{1}{E(m)} \leq \frac{1}{E(m) - (\lambda - m)K(m)} = 2b_\lambda(m) \leq \frac{1}{E(m) - (1-m)K(m)}.$$

根据夹逼定理，$2b_\lambda(m) \to E(1)^{-1} = 1$关于$m \leq \lambda \leq 1$一致，当$m \to 1^-$时，从而得到结论。

最后，对于$\zeta \geq 1$，我们有$\zeta K(m) - E(m) \geq K(m) - E(m) > 0$（对于$m \in (0,1)$），因此

$$|2c_\zeta(m)| = \frac{1}{\zeta K(m) - E(m)} \leq \frac{1}{K(m) - E(m)} \xrightarrow{m\to 1^-} 0.$$

□

为了证明奇数个粒子的情形，我们需要一些额外的记号。

引理3。设$H(m) = -\partial^2 x + 2m\,\mathrm{sn}^2(\hat{x}; m)$。则对于每个满足$r \geq 0$的$r \in \mathbb{R}$，存在一个连续函数$\lambda_r\colon (0,1) \to \mathbb{R}$，满足$\lambda_r(m) \to r^2$，当$m \to 0^+$时，使得对于每个$m \in (0,1)$，存在$\psi_{r,m}$，满足以下条件：

1. $\psi_{r,m}$和$\bar{\psi}_{r,m}$是$H(m)$的*Floquet*本征函数，在一个准周期$\ell_0(m)$上具有单位范数，且特征值为$\lambda_r(m)$
2. $\psi_{r,m}(x + \ell_0(m)) = e^{i\pi r}\psi_{r,m}(x)$
3. $\psi_{r,m}$和$\bar{\psi}_{r,m}$在长度为$d\ell_0(m)$的区间上正交，只要$d \in \mathbb{N}$，且$r \notin \mathbb{Z}$，而$dr \in \mathbb{Z}$

此外，若$r < 1$，则$m \leq \lambda_r(m) \leq 1$；而当$r > 1$时，$\lambda_r(m) \geq 1 + m$。

注记。如命题1的证明所示，由于$H(0)$是自由哈密顿算符，因此当小$m \in (0,1)$时，$H(m)$的特征值接近自由哈密顿量的特征值。本引理更进一步表明，固定波数r后，我们可以连续地追踪相应特征值$\lambda_r(m)$如何从$\lambda_r(0) = r^2$演化而来，其中所有$m \in (0,1)$均成立。

证明。为固定一个公共定义域，考虑重标度哈密顿量

$$\tilde{H}(m) = -\partial_y^2 + 2m\ell_0(m)^2\,\mathrm{sn}^2(\ell_0(m)\hat{y}; m)$$

它是一个周期为单位长度的周期哈密顿量。该哈密顿量与$H(m)$酉等价，相差一个因子$\ell_0(m)^2$，并且因此在缩放后具有相同的谱。

令$\tilde{H}(m)$作用于“扭曲的”单位环面上，即作用于$\{\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$的适当扩张空间：$\psi(x+1) = e^{i\pi r}\psi(x)\}$，并在一个准周期上赋予标准内积。

$\pi^2 r^2$是$\tilde{H}(0)$的一个特征值，例如，$\tilde{\psi}_{r,0}(y) \propto e^{i\pi r y}$。由于$m \in [0,1) \mapsto 2m\ell_0(m)^2\,\mathrm{sn}^2(\ell_0(m)\hat{y}; m)$关于$\tilde{}$算子范数是连续的，根据标准谱扰动理论，存在一个连续函数$\lambda_r(m)$，使得$\lambda_r(m)$是$\tilde{H}(m)$的一个特征值，且$\tilde{\lambda}_r(m) \to \pi^2 r^2$当$m \to 0$时。我们声称

$$\lambda_r(m) = \frac{\tilde{\lambda}_r(m)}{\ell_0(m)^2}$$

满足引理的条件。

由于 ℓ_0 在 $(0,1)$ 上连续， λ_r 在 $(0,1)$ 上连续，并且

$$\lim_{m\to 0^+}\lambda_r(m)=\frac{\pi^2 r^2}{\ell_0(0)^2}=r^2.$$

固定 $m\in(0,1)$。经过缩放， $\lambda_r(m)$ 是 $H(m)$ 的一个特征值。令 $\tilde{\psi}_{r,m}$ 为 $\tilde{H}(m)$ 的任意归一化本征函数，其特征值为 $\tilde{\lambda}_r(m)$。由边界条件可知， $\tilde{\psi}_{r,m}(y+1)=e^{i\pi r}\tilde{\psi}_{r,m}(y)$。此外，若 $d\in\mathbb{N}$ 满足 r 不是整数而 dr 是整数，

$$\langle\bar{\tilde{\psi}}_{r,m},\tilde{\psi}_{r,m}\rangle=\int_0^d\tilde{\psi}_{r,m}^2(y)\,\mathrm{d}y=\sum_{k=0}^{d-1}e^{2i\pi kr}\int_0^1\tilde{\psi}_{r,m}^2(y)\,\mathrm{d}y=\frac{1-e^{2i\pi dr}}{1-e^{2i\pi r}}\int_0^1\tilde{\psi}_{r,m}^2(y)\,\mathrm{d}y=0.$$

缩放后， $\psi_{r,m}(x)\propto\tilde{\psi}_{r,m}(x/\ell_0(m))$ 在归一化后具备引理所要求的性质。

最后注意到，根据 Lamé 哈密顿算符的能带理论，对于每个 $m\in(0,1)$，必有 $m\le\lambda_r(m)\le 1$ 或 $\lambda_r(m)\ge 1+m$。固定 $0<r<1$。为了证明对于所有 $m\in(0,1)$ 都有 $0\le\lambda_r(m)\le 1$，因此只需证明对于所有 $m\in(0,1)$ 都有 $\lambda_r(m)<1+m$。我们通过反证法进行证明。假设对于某个 $m_1\in(0,1)$，有 $\lambda_r(m_1)\ge 1+m_1$。由于 λ_r 连续，且当 $m\to 0^+$ 时 $\lambda_r(m)\to r^2<1$，因此存在 $m_0\in(0,1)$，使得对于所有 $0<m\le m_0$，$\lambda_r(m)<1$。由此可得 $m_1>m_0$。

由于 $\lambda_r(m_0)<1$，我们有 $\lambda_r(m_0)-m_0<1$。另一方面， $\lambda_r(m_1)\ge 1+m_1\implies\lambda_r(m_1)-m_1\ge 1>1$。根据介值定理，存在 $m^*\in(m_0,m_1)$，使得

$$\lambda_r(m^*)=1+\frac{m^*}{2}$$

但这与已确立的事实矛盾： $m\le\lambda_r(m)\le 1$ 或者 $\lambda_r(m)\ge 1+m$ 当 $1<1+\frac{m^*}{2}<1+m^*$ 时。因此我们得出结论， $0\le\lambda_r(m)\le 1$。类似的证明表明，当 $r>1$ 时， $\lambda_r(m)\ge 1+m$。 □

引理 4. 设 $l\in\mathbb{N}$ 且 $p_1,\ldots,p_l\in\mathbb{Q}$。假设对于所有 $1\le k\le l$， $p_k>1$，并且

$$\sum_{k=1}^{l}\left(\frac{1}{p_k^2-1}\right)>\frac{1}{2}. \tag{6}$$

那么存在 $m\in(0,1)$，使得

$$b_m(m)+2\sum_{k=1}^{l}b_{\lambda_{p_k}(m)}(m)=0 \tag{7}$$

其中 λ_r 的定义同引理*3*， b_λ 的定义同引理*1*。

证明。 由于 $p_k>1$，由引理3可得 $\lambda_{p_k}(m)\ge 1+m$。令 $\zeta_{p_k}(m)=\lambda_{p_k}(m)-m$，使得 $\zeta_{p_k}(m)\ge 1$。于是可得

$$b_m(m)+2\sum_{k=1}^{l}b_{\lambda_{p_k}(m)}(m)=b_m(m)+2\sum_{k=1}^{l}c_{\zeta_{p_k}(m)}(m).$$

由引理2，当 $m\to 1^-$ 时， $b_m(m)\to\frac{1}{2}$；而由于 $\zeta_{p_k}(m)\ge 1$， $c_{\zeta_{p_k}(m)}(m)\to 0$。因此

$$\lim_{m\to 1^-}\left(b_m(m)+2\sum_{k=1}^{l}c_{\zeta_{p_k}(m)}(m)\right)=\frac{1}{2}.$$

另一方面，对于充分小的 m，每个 $\lambda_{p_k}(m)$ 都与1保持一致的正距离（因为 $p_k>1$ 且 λ_{p_k} 连续），并且由于这样的项只有有限个，因此这一界也可以对 k 统一成立。同样，由引理2，

$$\lim_{m\to 0^+}\left(b_m(m)+2\sum_{k=1}^{l}b_{\lambda_{p_k}(m)}(m)\right)=\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{l}\left(\frac{1}{1-p_k^2}\right). \tag{8}$$

根据（6），（8）式的右侧为负，因此根据介值定理，存在某个 $m\in(0,1)$ 使得 $b_m(m)+2\sum_{k=1}^{l}b_{\lambda_{p_k}(m)}(m)=0$。

□

假设1。 对于每个 $l \geq 1$，存在互不相同的 p_1、…、$p_l \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$，满足引理*4*的假设，使得对于该引理所保证的至少一个满足（7）的根 $m \in (0,1)$，能量

$$m + 2\sum_{k=1}^{l} \lambda_{p_k}(m)$$

可唯一表示为 $H2l+1$ 个 $H(m)$ 的$\mathbb{T}_{2d\ell_0(m)}$特征值之和（允许置换），且任何特征值的使用次数都不超过其谱重数。其中，d 是 p_k 的最小公分母。

定理2。 设 n 为奇数，且 $n \geq 3$ 并且假设*1*成立。则存在一个指标 $k \in \mathbb{N}$ 以及 $[v_*] \in \mathscr{V}_k$，使得 th e 映射 $[v] \in \mathscr{V}_k \mapsto \rho_k(v) \in L^1(\mathbb{T})$ 在 $[v_*]$ 的任何开邻域内都不是单射。特别地，对于该指标 k，存在一个势 $\tilde{v}_* \in C^\infty(\mathbb{T})$，使得 $\rho_k(v_*) = \rho_k(\tilde{v}_*)$，而 $\tilde{v}_* - v_*$ 是非常数的。

注记。 在证明下面的命题 2 后，定理2的证明与上文定理1的证明基本相同。因此，感兴趣的读者可参阅上文定理1的证明。

命题 2。 假设 n 为奇数，且 $n \geq 3$，并且假设*1*成立。则存在一个非恒定势 $v_* \in C^\infty(\mathbb{T})$ 以及一个指标 $k \in \mathbb{N}$，使得

1. $\Lambda_k(v_*)$的第k个激发态能量是单重的，并且
2. $\rho_k(v_*)$ 是常数，特别地，$\rho_k(x;v_*) = n$。

证明。 由于n是大于或等于三的奇数，令$n = 2l+1$，其中$l \in \mathbb{N}$。设$p1,\ldots,p_l \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$为一组满足引理4的假设的非整数有理数，且它们是非共振的；根据假设1，保证这样一组数存在。再令$m \in (0,1)$为相应的非共振雅可比参数，使得

$$b_m(m) + 2\sum_{k=1}^{l} b_{\lambda_{p_k}(m)}(m) = 0\,.$$

令 $\ell = 2d\ell_0(m)$，其中 ℓ_0的定义与命题1的证明中相同，而d是 $\{p1,\ldots,p_l\}$的最小公分母。与偶数n情形的证明一样，取$v_*(x) = 2m\ell^2\,\mathrm{sn}$函数$^2(\ell x;m)$。

令 $\phi_0(x) \propto \mathrm{dn}$函数$(\ell x;m)$ 归一化，并且对每个 $1 \leq k \leq l$，令 $\phi_k(x) = \sqrt{\ell_0(m)} \times \psi_{p_k,m}(\ell x)$，其中 $\psi_{r,m}$ 满足以下条件：

1. $\psi_{r,m}$ 和 $\bar{\psi}_{r,m}$ 是$H(m)$的Floquet本征函数，在一个准周期 $\ell_0(m)$ 上具有单位范数，且特征值为 $\lambda_r(m)$
2. $\psi_{r,\,m}(x + \ell_0(m)) = e^{i\pi r}\psi_{r,\,m}(x)$
3. $\psi_{r,m}$ 和 $\bar{\psi}_{r,m}$ 在 ℓ 的一个周期上正交，只要$r \notin \mathbb{Z}$ 而$dr \in \mathbb{Z}$

其中 $\lambda_r(-)$ 如引理3所定义。事实上，根据引理3，这样选择的 $\psi_{r,\,m}$ 确实存在。最后，令

$$\Phi = \phi_0 \wedge \phi_1 \wedge \bar{\phi}_1 \wedge \ldots \wedge \phi_l \wedge \bar{\phi}_l\,.$$

于是可知，Φ 是 $\mathfrak{H}(v_*)$ 的本征函数，其特征值为

$$\Lambda = \ell^2\left(m + 2\sum_{k=1}^{l}\lambda_{p_k}(m)\right).$$

特别地，对于某个 $i \in \mathbb{N}$，根据假设1，$\Lambda = \Lambda_i(v_*)$ 和 $\Lambda_i(v_*)$ 是单本征值，并且 $\eta_i(v_*) = |\Phi\rangle\langle\Phi|$。随后我们计算 $\rho_i(v_*)$。事实上，与命题1中所考虑的粒子数为偶数的情形类似，

$$\rho_i(x;v_*) = \ell_0(m)\left(a_m(m) - mb_m(m)\,\mathrm{sn}^2(\ell x;m) + 2\sum_{k=1}^{l}\left(a_{\lambda_{p_k}(m)}(m) - mb_{\lambda_{p_k}(m)}(m)\,\mathrm{sn}^2(\ell x;m)\right)\right)$$

根据引理1，因此是一个常函数，因为

$$b_m(m) + 2\sum_{k=1}^{l} b_{\lambda_{p_k}(m)}(m) = 0\,.$$

□

III. 方法论及与先前工作的联系

命题1证明中使用的构造最初由大语言模型（LLM）GPT-5 提出。命题 2 中给出的针对奇数个粒子情形的条件性扩展，后来由大语言模型 GPT-6 提出。作者已独立核查证明的所有细节。除由大语言模型进行的少量文字编辑外，这封信完全由作者撰写。虽然大语言模型擅长证明定理，却出了名地不擅长还原其构造背后的数学灵感和先例。尽管如此，我们仍尝试在本节中找出这些构造可能存在的一些数学渊源。

定理 1 和 2 背后的关键思想，是寻找一个非常数势，使其某个激发态多体态在环面上具有常数粒子密度。通过平移该势，我们可以构造出一个一参数族的势，它们产生相同的激发态粒子密度。环面上的薛定谔算子的谱由希尔方程决定，并且可以用弗洛凯理论加以理解。这种方法很自然，也许一位聪明的（人类）数学家本可以发现这一点。另一方面，要找出一个具有常数激发态密度的特定周期势，则需要额外的思想。

A. 与弹性曲线的联系

一种特别通向拉梅方程的可能途径，是考虑$n = 2$ 情形。在这种情形下，我们寻找环面上的两个实值函数u 和w，使它们成为具有共同势的薛定谔算子的本征函数，并满足

$$u^2(x) + w^2(x) = 2\,, \int u(x)w(x)\,\mathrm{d}x = 0\,, \text{ and } \int u^2(x)\,\mathrm{d}x = \int w^2(x)\,\mathrm{d}x = 1\,. \tag{9}$$

集合 $\mathscr{S} = \{(u,w) \in C^\infty(\mathbb{T}) \times C^\infty(\mathbb{T}) : (9) \text{ holds}\}$ 与无限维斯蒂费尔流形密切相关。在这种情况下，自然可以考虑动能的约束变分问题

$$T(u,w) = \int u'(x)^2 + w'(x)^2\,\mathrm{d}x \tag{10}$$

在集合 $\mathscr{S}$ 上，因为这些约束下的驻定性会导出薛定谔方程。

该问题的欧拉–拉格朗日方程为

$$-\begin{pmatrix} u(x) \\ w(x) \end{pmatrix}'' + v(x)\begin{pmatrix} u(x) \\ w(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_u & \zeta \\ \zeta & \lambda_w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(x) \\ w(x) \end{pmatrix}, \tag{11}$$

其中 λ_u、λ_w、ζ 和 v 均视为拉格朗日乘子。由于约束存在冗余，在 (u,w) 处的驻定性只能将v 确定到一个加法常数。

假设 (u,w) 是 (10) 在 $\mathscr{S}$ 上的一个驻点。右侧的矩阵是对称矩阵，因此可分解为 RDR^{-1}，其中 D 为对角矩阵，且 $R \in$ 属于 SO(2)。因此，经过旋转后，可以找到两个满足 (9) 的函数 $\tilde{}u$ 和 $\tilde{}w$，使得

$$-\begin{pmatrix} \tilde{u}(x) \\ \tilde{w}(x) \end{pmatrix}'' + v(x)\begin{pmatrix} \tilde{u}(x) \\ \tilde{w}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_u & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda}_w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{u}(x) \\ \tilde{w}(x) \end{pmatrix}.$$

因此，(10) 在 $\mathscr{S}$ 上的任何驻点都会导出一个势，其对应的一对正交归一特征函数的振幅平方之和为常数。

这与 C. 诺伊曼系统有着密切的相似性。C. 诺伊曼系统是一种可积系统，描述经典粒子在二次势的作用下受限于球面上的运动

$$q \mapsto \frac{1}{2}\langle q, Aq\rangle\,.$$

根据 Neumann–Hill对应关系，球面半径为 $\sqrt{2}$ 的轨迹 $q = (u,w)$ 会产生一个 H̄ill势 v，使得 (11) 在右侧取 A 时成立[8]。与我们的变分问题一样，v 是强制满足逐点约束 $u^2 + w^2 = 2$ 的拉格朗日乘子。然而，目前尚不清楚如何利用这种对应关系找到 T 的驻点。事实上，我们仍需选择 A，并找到一条其分量满足 (9) 中积分条件的周期轨迹。

相反，要证明驻点的存在性，可以借助复平面中弹性曲线理论的一个优美联系。回顾一下，每个光滑函数 $\gamma \in \mathrm{Imm}(\mathbb{T};\mathbb{C})$ 都参数化了一条光滑的闭合平面曲线。弹性曲线问题是求弯曲能泛函的驻点

$$B(\gamma) = \frac{1}{2}\int_0^1 \kappa_\gamma^2(t)|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t\,,$$

并满足长度约束

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t = 1\,. \tag{12}$$

这里 κ_γ是曲线的曲率，并且如果 γ是单位速度参数化，即 $|\gamma'| = 1$，则有 $\kappa_\gamma(t) = |\gamma''(t)|$。与弹性曲线的关键联系在于，如果 $(u,w) \in \mathscr{S}$，那么

$$\gamma_{u,w}(t) = \frac{1}{2}\int_0^t (u(s) + iw(s))^2\,\mathrm{d}s \tag{13}$$

是从 $\mathbb{T}$ 到 $\mathbb{C}$的单位速度浸入，其中 $\ell(\gamma_{u,w}) = 1$[9]，且$B(\gamma_{u,w}) = T(u,w)$。

此外，映射 $(u,w) \in \mathscr{S} \mapsto \gamma_{u,w} \in \mathrm{Imm}\,(\mathbb{T};\mathbb{C})$ 是光滑的（作为弗雷歇流形之间的映射），因此当B 在$\gamma_{u,w}$ 处为驻点且满足（12）时，T在(u,w)处为驻点。

弹性曲线问题是经典问题，B 的驻点已被完全分类，参见文献10，第XIX章。特别地，在其他解中，欧拉已知，当 γ 参数化八字形弹性曲线[1]时，γ 是一个驻点。将八字形弹性曲线重新缩放为单位长度并按弧长参数化后，其形式为$\gamma_{u,w}$，其中

$$u(t) = \sqrt{2}\,\mathrm{dn}(\ell t;m)\,, \qquad w(t) = \sqrt{2m}\,\mathrm{sn}(\ell t;m)\,,$$

其中，$\ell = 2\ell_0(m)$ 和 $m \in (0,1)$ 是满足 $2E(m) = K(m)$ 的唯一取值，参见文献 12 和 13。通过辨认，可以从文献 13 的定理 2.15（第二种情形）给出的显式形式恢复这一参数化。

$$u(t) + iw(t) = \sqrt{2}\exp\left(\frac{i\theta_w(\ell t)}{2}\right)$$

with

$$\theta_w(s) = 2\arcsin\left(\sqrt{m}\,\mathrm{sn}(s;m)\right)\,.$$

固定 u和 w后，由式（11）可知，$v(t) = 2m\ell^2\,\mathrm{sn}^2(\ell t;m)$，相差一个加法常数。

遗憾的是，与弹性曲线的联系似乎难以推广到 $n = 2$ 以外。对于$n > 2$，式（13）确实存在推广形式。实际上，对于 $q(t) = (q_1(t)\ldots, q_n(t))$，其中

$$|q(x)|^2 = n, \text{ and } \int q(x)q(x)^{\mathsf{T}}\,\mathrm{d}x = \mathbb{1} \tag{14}$$

推广式（9），映射 $q \mapsto \gamma_q \in \mathrm{Imm}\,(\mathbb{T};\mathbb{R}^{n\times n})$，其中 $\gamma_q'(t) \propto q(t)q(t)^{\mathsf{T}} - \mathbb{1}$，给出一条曲线的单位速度参数化，其弯曲能量与式（10）的显然推广成正比。一个障碍是，在 $n = 2$ 中，若允许 (u,w) 为反周期，则映射（13）实际上可以表示任意光滑闭合平面浸入曲线（模去平移和缩放）。因此，八字形弹性曲线具有上述表示形式也就不足为奇，因为唯一可能的障碍只是 (u,w) 可能是反周期的。另一方面，对于 $n > 2$，$\gamma_q'(t)$ 与 $q(t)q(t)^{\mathsf{T}} - \mathbb{1}$ 成正比这一条件施加了很强的限制，而高维弹性曲线未必满足这一条件。

IV. 讨论与展望

定理1证明了，对于偶数个粒子的多体激发态，不存在完全一般的 Hohenberg–Kohn 定理；而定理2则证明了奇数个粒子情形下相应的条件性结论。显而易见的一项改进是无条件地证明定理2，也许可以通过证明假设1成立或采用其他方法来实现。此外，一个值得探讨的问题是，粒子数为奇数和偶数时是否存在根本差异，还是这只是本文所用证明方法造成的假象。

当n 为偶数时，我们的无条件结果定理1否定了在固定激发能级下，一维环面上非相互作用激发态的Hohenberg–Kohn定理，也否定了具有固定轨道构型的一维环面上非相互作用激发态的Hohenberg–Kohn定理。尽管如此，仍可能存在某些区域、边界条件或参数范围，使其中一个（或两个）定理成立。Gaudoin和Burke的数值证据强烈表明，在具有狄利克雷边界条件的，区间（0,1）上，固定激发能级下非相互作用激发态的Hohenberg–Kohn定理不成立；而在 $\mathbb{R}^3$ 上，固定轨道构型下该定理也不成立，参见1，图1和图2。对于后一种情况，遵循本文的思路，或许可以通过构造一个势v_*：$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$，来否定 $\mathbb{R}^3$ 上固定激发数和固定轨道构型下非相互作用激发态的Hohenberg–Kohn定理；该势不具有旋转对称性，但其激发态密度具有旋转对称性。

虽然定理1证明了 ρ_1 在v_*处的不可逆性，但理解不可逆性的局部机制也颇有意义。为此，Gaudoin和Burke[1] 研究了 ρ_k的Gâteaux导数，该导数称为（第k激发态的）线性响应率，记作 χ_k。事实上，根据标准谱扰动理论可知，对于固定的v， $\chi_k(v;-)$是一个线性积分算子。Gaudoin和Burke[1] 表明， $\chi_1(v)$的非平凡非负特征值（按重数计）至多有一个。常函数贡献一个平凡的零特征值，按重数计。因此， $\chi_1(v)$的非负特征值总数至多为两个。对于偶数n，定理1意味着$\partial_x v_* \in \ker\ \chi_1(v_*)$，因此$\ker\ \chi_1(v_*) = \mathrm{span}\ \{\mathbf{1}, \partial_x v_*\}$。

精确给出 $\chi_1(v_*)$ 的核后，有两个很自然且值得关注的问题。第一个问题是，性质 $\dim\ker\ \chi_1(v_*) = 2$ 是稳定还是不稳定。沿着这个方向，可以通过考察扰动 $v_* \to v_* + \varepsilon\xi$，继续留在非相互作用情形；也可以引入弱二体相互作用，即，

$$\mathfrak{H}(v) \to \mathfrak{H}(v) + \varepsilon \mathrm{d}\Gamma^{(2)}(w(\hat{x},\hat{y}))\,.$$

第二个问题是，能否在 v_* 处进行 Lyapunov–Schmidt约化，从而证明所有附近具有常数第一激发态密度的势，除相差一个加性常数外，都是 v_* 的平移。当 $\chi_1(\mathrm{v}_*)$ 是 Fredholm算子且 χ_1 在 v_*的某个邻域内连续时，这种约化是可行的。作为拓扑性质，它们对所采用的函数空间及 ρ_1 所处的拓扑的具体选择十分敏感。本文将 ρ_1 视为从 $\dot{\mathrm{C}}^\infty(\mathbb{T})$ 的一个开子集到 $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ 的映射，而 Gaudoin和Burke 则隐含地将 χ_1 视为从 $\mathrm{L}^2(\Omega)$ 到 $\mathrm{L}^2(\Omega)$ 的映射。Garrigue[14] 证明，对于取决于空间维数的某个子集中的 p， ρ_1 可良定义为从 $\mathscr{V} \subseteq \mathrm{L}^p(\Omega) + \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ 的一个开子集到 $\mathrm{W}^{1,1}(\Omega)$ 的映射；他还证明了χ_1 连续，且对所有 $\mathrm{v} \in \mathscr{V}$， $\chi_1(\mathrm{v})$ 都是紧的。在后一种情况下，紧性与 Fredholm性不相容，因此这些空间之间不可能进行 Lyapunov–Schmidt约化。这引出了一个问题：能否在适当的函数空间之间定义 ρ_1 ，使得 χ_1 在 v_* 的某个邻域内连续，并且在 v_*处为 Fredholm算子？沿着这个方向，Corso 和 Laestadius[15] 将逆函数定理应用于 ρ_0 ，把它视为从 $\mathrm{H}^{-1}(0,1)/\mathbb{R}$ 到 $\mathrm{H}^1(0,1)$ 中固定质量仿射子空间的映射，并通过证明 χ_0 可逆（因而是 Fredholm算子）来实现。

[1]R. Gaudoin 和 K. Burke, 《激发态缺乏霍恩伯格-科恩定理》, 《物理评论快报》**93**, 173001（2004）。[2]Y.-Q. Li、X.-Y. Pan、B. Li 和 V. Sahni, 《冈纳森-伦德奎斯特定理的证明以及激发态势的多重性》, 《物理评论A辑》**85**, 032517（2012）。[3]R. S. Maier, 《拉梅多项式、超椭圆约化与拉梅能带结构》, 《伦敦皇家学会哲学汇刊A辑：数学、物理与工程科学》**366**, 1115–1153（2008）。[4]F. M. Arscott, 《周期微分方程：关于 Mathieu、拉梅及相关函数的导论》, 纯数学与应用数学国际专著丛书, 第66卷（麦克米伦公司，纽约，1964）, 第x+284页。[5]M. Thies, 《有限密度下格罗斯-内维尤模型的解析解》, 《物理评论D辑》**69**, 067703（2004）。[6]W. A. Haese-Hill、M. A. Hallnäs 和 A. P. Veselov, 《实拉梅算子与复拉梅算子的谱》, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. **13**, 第049号，23页（2017）。[7]D. E. Seminar, 《常微分方程中的一些初等逆问题》, 《加拿大数学通报》**11**, 703–716（1968）。[8]A. P. Veselov, 《具有二次势的球面上的有限带势与可积系统》, 《泛函分析及其应用》**14**, 48–50（1980）。[9]L. Younes、P. W. Michor、J. Shah 和 D. Mumford, 《具有显式测地线的形状空间度量》, 《林琴国家科学院报告：数学与应用数学》**19**, 25 57 2008–（）。[10]A. E. H. Love, 《弹性数学理论论著》, 第2版（剑桥大学出版社，剑桥，1906）, 第xvii+551页。[11]L. Euler, 《论弹性曲线》, 载于《寻找具有最大或最小性质曲线的方法，或广义意义下等周问题的解》（Marcum-Michaelem Bousquet & Socios，洛桑和日内瓦，1744）, 附录I, 第245–310页。[12]Y. L. Sachkov, 《闭欧拉弹性曲线》, 《斯捷克洛夫数学研究所论文集》**278**, 218–232（2012）。[13]T. Miura, 《弹性曲线与自交》, 载于《2024年MATRIX年刊》第一部分，MATRIX图书系列，第7卷（施普林格，查姆，2026）, 第337–374页。[14]L. Garrigue, 《量子力学中势到基态映射的一些性质》, 《数学物理通讯》**386**, 1803–1844（2021）。[15]T. C. Corso 和 A. Laestadius, 《定量霍恩伯格-科恩定理与一维空间维数中密度泛函理论出人意料的正则性》, （2026）, arXiv:2512.04726v2 [math-ph]。