arXiv:2611.28337v1 [math.OA] 20 Nov 2026

态的可计算性与迹的不可计算性

CHRISTOPHER J. EAGLE[1]

Abstract. 我们研究可计算呈现的 C* 代数的状态空间和迹空间的可计算表示。我们证明，状态空间具有一种可计算紧致表示，在此表示下，状态的求值是可计算映射。作为拥有可计算态的应用，我们获得了 GNS 构造的一个可计算版本。

我们证明，迹空间并不具备这些计算性质。具体而言，我们给出一个单 AF 代数的可计算表示示例，其迹空间不存在一种可计算紧致表示，能使求值成为可计算映射。因此，我们表明，可计算表示的可分类 C* 代数的 Elliott 不变量，并非总能以一种使该不变量所有关键特征都可计算的方式表示。

1. Introduction

基于 Fox 的工作 [11], ，近年来，人们对 C* 代数理论中的主要工具在多大程度上具有有效性（即在可计算分析意义下）展开了大量研究。例如，Gelfand 对偶 [2], [16], 函数演算 [9], K 理论 [6], [5], [8], 核性 [7], 强自吸收代数 [14],以及嵌入问题 [1], [15], [12] 都已从这一视角得到研究。

态和迹在 C*-代数理论中具有根本重要性，尤其是在其表示理论和分类理论中。本文从可计算性的角度研究态和迹。

文献 [7] 证明了，每个含幺 C*-代数的可计算表示都有可计算态（定义见下文第2 节）。我们将在第3节证明，状态空间本身具有一种特别强的可计算性形式，而且这一性质实际上刻画了含幺 C*-代数的可计算表示。结合定理 3.5和定理 3.6，可得：

定理 1.1. 设 $\mathbf{A}^{\#}$ 是含幺 *C**-代数 $\mathbf{A}$的一个表示。以下条件等价：

(1) 表示$\mathbf{A}^{\#}$ 是可计算的。(2) 状态空间 $S(\mathbf{A})$ 存在一个可计算紧致表示，使得求值映射 $(\varphi, a) \mapsto \varphi(a)$ 是可计算的。

该证明是统一的：表示 $S(\mathbf{A})$ 的指标以及求值映射，都可以从 $\mathbf{A}^{\#}$ 的含幺指标计算得出，反之亦然。在第4 节中，我们将证明，可以从一个可计算态出发，有效地执行以下操作的一个版本 GNS 表示。

[1] 本研究由加拿大自然科学与工程研究委员会发现基金 RGPIN-2021-02459 资助。

用于分类 C*-代数的 Elliott 计划以 K-理论和迹为基础。具体而言，给定一个含幺 C*- 代数 $\mathbf{A}$，其关联的 *Elliott* 不变量 是

$$\mathrm{Ell}(\mathbf{A}) = (K_0(\mathbf{A}), K_0(\mathbf{A})_+, [1_{\mathbf{A}}]_{K_0}, K_1(\mathbf{A}), T(\mathbf{A}), \langle \cdot, \cdot \rangle).$$

这里 $T(\mathbf{A})$ 是 $\mathbf{A}$ 上的迹空间，且 $\langle \cdot, \cdot \rangle : \ T(\mathbf{A}) \times K_0(\mathbf{A}) \to \mathbb{C}$ 定义为$\langle \tau, x \rangle = \tau(x)$。分类计划的最终成果是：满足通用系数定理的简单可分核含幺 $\mathcal{Z}$-稳定 C*-代数可由其 Elliott 不变量在同构意义下分类（有关分类计划的综述，见 [18] ）。

自然会问 Ell(**A**) 是否可计算。在描述性集合论的背景下，已有结果表明 [10]（在将相关对象适当地编码为标准 Borel 空间中的点之后），映射 $\mathbf{A} \mapsto$Ell(**A**) 是 Borel 的。若要从可计算性理论的角度考察同一问题，我们必须首先明确 Elliott 不变量的可计算表示是什么意思。下面的命题表达了人们对 Ell(**A**) 所期望的强可计算性形式。

定义 1.2. 设**A**是一个含幺 C*-代数，且$\mathbf{A}^{\#}$ 是**A**的一个可计算预表示。Ell(**A**) 的完全可计算表示在$\mathbf{A}^{\#}$ 由以下表示构成：(K_0(**A**) K_0(**A**)+, $[1_{\mathbf{A}}]_{K_0}$) 的一个可计算表示、K_1(**A**) 的一个可计算表示，以及 T(**A**) 的一个可计算紧致表示；并且相对于这些表示：

- 存在一个可计算映射，将 $M_n(\mathbf{A}_{\#})$ 的每个投影映射到其 K_0类。
- 存在一个可计算映射，将每个 K_0 类映射到矩阵代数中$\mathbf{A}$ 上的一对投影，它们在 K_0 中的差即为该类。
- 存在一个可计算映射，将**A**上的矩阵代数中的每个酉元映射到其 K_1 类。
- 存在一个可计算映射，将每个 K_1 类映射到$\mathbf{A}$ 上的矩阵代数中的一个酉元，该酉元表示该类。
- 迹与 K_0 类之间的配对是可计算的。

因此，证明 Elliott 不变量可计算性的一种强形式，是证明存在一个图灵泛函，能够将可分类代数的可计算表示$\mathbf{A}^{\#}\mathbf{A}$ 的完全可计算表示映射到 Ell(**A**) 在 $\mathbf{A}^{\#}$上的表示。第 5 节的主要结果表明，Elliott 不变量的可计算性并不具有这种强形式。

在 [6], 中，作者构造了一个可计算函子，它将含幺 C*-代数 A$^{\#}$ 的可计算枚举表示映射为 (K_0(A) K_0(A)+, $[1]_{K_0}$) 的可计算枚举表示，以及 K_1(A) 的可计算枚举表示；该 K_0-函子给出了满足上述定义中前两点的唯一 K_0 表示（见定理 5.5）。在 [8] 中，给出了一个可计算可表示的 C*-代数 A 的例子，使得 K_0(A) 和 K_1(A) 均完全不存在可计算表示，因此对于该代数的任何可计算表示，Ell(A) 都不可能具有完全可计算表示。然而，那里构造的代数并非单代数，因此不属于 Elliott 分类纲领的范畴。在第 5 节中，我们证明存在一个 C*-代数，它满足分类定理的所有正则性性质，但有一种可计算表示，使得 Elliott 不变量不具有完全可计算表示。首先，我们证明：

定理 1.3。 存在一个单 *AF* 代数$\mathbf{A}^{\#}$ 的可计算表示$\mathbf{A}$ ，使得 $T(\mathbf{A})$ 不具有任何可计算紧致表示，能够使求值配对可计算。

利用实秩零的一种有效形式，我们证明这会导致 Elliott 不变量可计算性的强版本失效。

定理 1.4. 存在一个简单 *AF*（特别是可分类）代数$\mathbf{A}$ 及其一个可计算表示$\mathbf{A}^{\#}$ ，使得$\mathbf{A}$ 的$\mathrm{Ell}(\mathbf{A})$ 没有关于$\mathbf{A}^{\#}$的完全可计算表示。

在与 Joaquin Cisneros 合著的附录中，我们证明，含幺 C*-代数的任意可计算（或实际上可计算可枚举）表示，其单位元总是一个可计算点。

致谢：作者感谢 Joaquin Cisneros、Isaac Goldbring、Timothy McNicholl 和 Russell Miller 就本文主题进行了有益的讨论。

AI 使用声明：使用 ChatGPT 5.6 协助检索文献、探索初步思路及校对。本文所呈现的论证均由作者独立撰写，作者对其内容承担全部责任。

2. Preliminaries

我们采用*中 C [13], 代数的可计算性理论框架，该框架见

为避免在定理陈述中重复说明，本文中$\mathbf{A}$ 均表示可分含幺 *C**代数，而 $\mathbf{A}^{\#}$ 表示 $\mathbf{A}$ 的一个固定表示。除非另有明确说明，我们假设$\mathbf{A}^{\#}$ 是一个可计算表示。每当考虑 $\mathbb{C}^k$ 时，我们都赋予其标准表示，其特殊点为 $\mathbb{Q}(i)^k$。

我们将用到这样一个事实： $1_{\mathbf{A}}$ 是$\mathbf{A}^{\#}$的可计算点；其总成立的证明见附录。$\mathbf{A}^{\#}$ 的一个含幺指标是$\langle e_1,\ e_2\rangle$，其中 e_1 是$\mathbf{A}^{\#}$的一个指标， e_2 是 $1_{\mathbf{A}}$的一个$\mathbf{A}^{\#}$-指标，而 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 是从 $\mathbb{N}^2$ 到 $\mathbb{N}$的标准可计算双射。

我们简要回顾一些 C*-代数和可计算分析中的特定概念，它们将在本文中发挥重要作用。

定义 2.1. $\mathbf{A}$ 上的一个态 是一个线性泛函 $\omega:\mathbf{A}\to\mathbb{C}$，满足$\omega(1_{\mathbf{A}})=1$ 且 $\omega(a^*a)\geq 0$ ，对所有 $a\in\mathbf{A}$ 均成立。若态 ω 还满足 $\omega(ab)=\omega(ba)$，对所有 $a,b\in\mathbf{A}$ 均成立，则称其为迹 态。我们用$S(\mathbf{A})$表示 $\mathbf{A}$ 上的态空间，用 $T(\mathbf{A})$表示迹态空间。

存在一些 C*-代数满足 $T(\mathbf{A})=\emptyset$ （例如，这种情况会出现在纯无限 C*-代数中，如 Cuntz 代数 $\mathcal{O}_n$）。相比之下，每个 C*-代数都有许多态（例如，参见 [17, 推论 3.3.6]）。每个态都是有界的，且范数恰为 1，因为对于任意正泛函 ρ ，我们有 $\|\rho\|=\rho(1)$ [17,推论 3.3.4]。由巴拿赫-阿劳格鲁定理可知， $S(\mathbf{A})$ 和$T(\mathbf{A})$ 在 $\mathbf{A}$ 的对偶空间的弱*-拓扑下均为紧致且可度量化的。我们讨论 $S(\mathbf{A})$ 和 $T(\mathbf{A})$ 时，始终采用弱*-拓扑。从定义可直接看出， $S(\mathbf{A})$ 和 $T(\mathbf{A})$ 都是凸集。

以下定义引自 [19]。

定义 2.2. 紧波兰空间 $(X,\ d)$ 的一个可计算表示 $X^{\#}=(X,\ d,\ (p_n)_{n\in\mathbb{N}})$ 称为可计算紧致的，如果存在一个算法，接收$k\in\mathbb{N}$并输出 $n_0,\ \ldots\ldots,\ n_t\in\mathbb{N}$，使得 $X=\bigcup_{j\le t}B(p_{n_j};\ 2^{-k})$。

可计算紧性是一个极其稳健的概念，并已被证明是可计算分析中自然的紧性概念。关于可计算紧性的详细论述，参见 [4]。作为可计算紧性具有自然性的一个例子， [2] 中证明了交换的含幺 C*-代数的可计算表示与紧度量空间的可计算紧表示之间存在 Gelfand 对偶。

定义 2.3。令 $X^{\#}=(X,\ d,\ (p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ 为 Polish 空间 X的一个可计算表示。集合 $A\subseteq X$ 是:

- 可计算可枚举开，若存在一个可计算可枚举集 $I\subseteq\mathbb{N}^2$ 使得 $A=\bigcup_{(i,\ j)\in I}B(p_i;2^{-j})$。
- 补可计算可枚举闭，若 $X\setminus A$ 是可计算可枚举开
- 可计算可枚举闭当 $\{(i,j)\in\mathbb{N}^2\colon\ B(p_i;\ 2^{-j})\cap A\neq\emptyset\}$ 是可计算可枚举的。

在文献中，余可计算可枚举闭集有时被称为有效闭，而可计算可枚举闭集也称为有效过度。

关于可计算可枚举闭集的一个关键事实是，如果 $C\subseteq X$ 在 $X^{\#}$ 中是可计算可枚举闭的，那么 C包含一个可计算稠密序列（见 [4, 引理 3.27]），因此也继承了自身的可计算表示（将该可计算稠密序列用作特殊点，并采用来自 $X^{\#}$的度量限制）。当环境空间 X 是可计算紧致的，可计算可枚举闭集 C 上的诱导表示是可计算紧致的，当且仅当 C 也为余可计算可枚举闭集（见 [4,命题 3.29]）。

在考察 $S(\mathbf{A})$ 或 $T(\mathbf{A})$ 时，人们自然会希望不仅拥有可计算紧致表示，而且还希望它能够让我们计算一个态在$\mathbf{A}$中某个点上的求值。我们给出以下定义，该定义仿照 [16, 定义 3.1]。

定义 2.4。 如果求值映射 $ev\colon\ S(\mathbf{A})\times\mathbf{A}\to\mathbb{C}$ （由 $\mathrm{ev}(\omega,a)=\omega(a)$ 给出）是从由 $S(\mathbf{A})^{\#}$ 和 $\mathbf{A}^{\#}$ 诱导的 $S(\mathbf{A})\times\mathbf{A}$ 的表示到 $T(\mathbf{A})$ 的表示之间的可计算映射，则称表示 $S(\mathbf{A})^{\#}$ 是关于$\mathbf{A}^{\#}$ 的可求值的 。 $S(\mathbf{A})$ 的可求值表示的定义类似。

3. Computability of the state space

为便于阐述，我们先给出一些定义，这些定义在本节中始终适用。设我们有一个固定的含幺 C*-代数 $\mathbf{A}$ 的可计算表示$\mathbf{A}^{\#}$ 。令 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为 $\mathbf{A}^{\#}$ 的生成点的有效枚举。对于每个 $n\in\mathbb{N}$，令 $\mathbb{D}_n=\{z\in\mathbb{C}\colon\ |z|\le\|a_n\|\}$。将 $X=\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{D}_n$ 视为带有乘积拓扑的空间，并定义 $\Phi\colon S(\mathbf{A})\to X$ 为

$$\Phi(\omega)=(\omega(a_n))_{n\in\mathbb{N}}.$$

我们在 $S(\mathbf{A})$上赋予度量

$$d_S(\omega,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n-1}\min\{1,|\omega(a_n)-\varphi(a_n)|\},$$

由于 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在$\mathbf{A}$中稠密，该度量与$S(\mathbf{A})$上的弱*拓扑相容。同样，我们在 X 上赋予度量

$$d_X(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n-1}\min\{1,|x_n-y_n|\},$$

它与乘积拓扑相容。注意，采用这些度量， Φ 是从 $S(\mathbf{A})$到 X的等距嵌入。令 $X^{\#}$ 为(X,d_X)的可计算表示，其特殊点是形如$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$的序列，其中每个$x_n\in\mathbb{Q}(i)$且满足 $x_n=0$ 或 $|x_n|<\|a_n\|$，并且只有有限个坐标非零。

引理 3.1。 Φ的像在 $X^{\#}$中是补可计算可枚举闭的。

证明。我们将把 Φ 的像描述为三个补可计算可枚举闭集的交，它们分别对应态的三个定义性质。

首先，考虑线性。设 $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{Q}(i)$ 的一个有效枚举。由于代数运算在$\mathbf{A}^{\#}$的生成点上是可计算的，因此存在一个可计算函数 $f\colon\mathbb{N}^4\to\mathbb{N}$，使得对所有 $(i,j,k,l)\in\mathbb{N}^4$，都有 $a_{f(i,j,k,l)}=q_ka_i+q_la_j$。对于每个 $(i,j,k,l)\in\mathbb{N}^4$，定义

$$L_{i,j,k,l}=\{x\in X:x_{f(i,j,k,l)}=q_kx_i+q_lx_j\}.$$

由于 f 是可计算的，且坐标投影是一致可计算的，$L_{i,j,k,l}$关于 i,j,k,l是一致补可计算可枚举闭的。令

$$L=\bigcap_{(i,j,k,l)\in\mathbb{N}^4}L_{i,j,k,l}.$$

那么 L 是补可计算可枚举闭的。

接下来，考虑正性。与上面相同，存在一个可计算函数 $g\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，使得对每个 $k\in\mathbb{N}$，都有 $a_{g(k)}=a_k^*a_k$。对于每个$k\in\mathbb{N}$，定义

$$P_k=\{x\in X:x_{g(k)}\in[0,\|a_{g(k)}\|]\}.$$

由于 g、$\|a_{g(k)}\|$ 以及坐标投影关于 k 都是一致可计算的，因此集合 P_k 关于 k是一致补可计算可枚举闭的。令

$$P=\bigcap_{k\in\mathbb{N}}P_k.$$

那么 P 是补可计算可枚举闭的。

最后，我们考虑含幺这一性质。由于 $1_{\mathbf{A}}$ 是$\mathbf{A}^{\#}$中的一个可计算点，因此存在一个可计算函数 $h\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，使得 $(a_{h(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $1_{\mathbf{A}}$的一个名称。对于每个 $n\in\mathbb{N}$，令

$$U_n=\{x\in X:\left|x_{h(n)}-1\right|\le 2^{-n}\}.$$

与前面的情况一样，集合 U_n 关于 n是一致补可计算可枚举闭的。令

$$U=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}U_n.$$

我们已经证明 $L\cap P\cap U$是补可计算可枚举闭的。根据定义可立即得出 $L\cap P\cap U\supseteq\Phi(S(\mathbf{A}))$，而另一重包含关系则是因为 $L\cap P$ 中的任意元素都在由生成点构成的稠密$\mathbb{Q}(i)$-*-子代数上定义了一个 $\mathbb{Q}(i)$-线性正映射，该映射可唯一延拓为

连续的 $\mathbf{A}$上的正线性泛函，而 U 中的条件确保该泛函是含幺的。□

接下来我们证明 Φ在 $X^{\#}$中是可计算可枚举闭的。为此，我们将利用 [7] 中关于可计算态的结果，并通过以下引理将其迁移到 $X^{\#}$。

引理 3.2. 设 ω 是$\mathbf{A}^{\#}$上的一个可计算态。那么 $\Phi(\omega)$ 是 $X^{\#}$中的一个可计算点。此外，根据$\mathbf{A}^{\#}$ 的一个指标和 ω 的一个指标，我们可以计算出 $\Phi(\omega)$的一个指标。

证明。给定 k，计算一个足够大的 N，使得 $\sum_{n>N} 2^{-n-1} < 2^{-k-1}$。计算一个有理数 ϵ，使得 $0 < \epsilon < \frac{2^{-k-1}}{\sum_{n=0}^{N} 2^{-n-1}}$。

对于每个 $n \in \{0, \ldots, N\}$，我们按如下方式计算 $\mathbb{D}_n$ 中的一个点，使其与 $\omega(a_n)$的距离小于 ϵ。给定 n，由于 $\|a_n\|$ 是可计算的，我们可以（并行地）搜索满足 $\|a_n\| < q_0 < \epsilon/2$ 的 $q_0 \in \mathbb{Q}$，同时也搜索满足 $0 < q_1$ 和$\|a_n\| - \epsilon/8 < q_1 < \|a_n\|$ 的 $q_1 \in \mathbb{Q}$。这两项搜索至少有一项会成功。如果前一项搜索先成功，或者两项搜索在相同的步骤数内成功，则令$r_n = 0$。在这种情况下，我们有 $r_n \in \mathbb{D}_n$，并且

$$|r_n - \omega(a_n)| = |\omega(a_n)| \leq \|a_n\| < q_0 < \epsilon/2 < \epsilon.$$

现在假设第二次搜索先成功。利用 ω 是可计算的，计算 $z \in \mathbb{Q}(i)$，使得 $|z - \omega(a_n)| < \epsilon/8$。同时计算 $p \in \mathbb{Q}$ 使得$|z| < p < |z| + \epsilon/8$。定义

$$r_n = \frac{q_1}{\max\{q_1, p\}} z.$$

注意到 $r_n \in \mathbb{Q}(i)$，并且

$$|r_n| = \frac{q_1}{\max\{q_1, p\}} |z| < q_1 < \|a_n\|,$$

因此 $r_n \in \mathbb{D}_n$。如果 $p \leq q_1$，那么 $r_n = z$，所以

$$|r_n - \omega(a_n)| = |z - \omega(a_n)| < \epsilon/8 < \epsilon.$$

如果 $p > q_1$，那么:

$$\begin{aligned}
|r_n - z| &= \left| \frac{q_1}{p} z - z \right| \\
&= \left| 1 - \frac{q_1}{p} \right| |z| \\
&= \left(\frac{p - q_1}{p} \right) |z| \\
&< p - q_1 \\
&= (p - |z|) + (|z| - \|a_n\|) + (\|a_n\| - q_1) \\
&\leq \frac{\epsilon}{8} + (|z - \omega(a_n)| + |\omega(a_n)| - \|a_n\|) + \frac{\epsilon}{8} \\
&\leq \frac{\epsilon}{8} + (\frac{\epsilon}{8} + \|a_n\| - \|a_n\|) + \frac{\epsilon}{8} \\
&< \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}$$

Thus

$$|r_n - \omega(a_n)| \le |r_n - z| + |z - \omega(a_n)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{8} < \epsilon.$$

现在定义 $x_k = (r_0, r_1, \ldots\ldots, r_N, 0, 0, \ldots\ldots) \in X$。于是我们有

$$\begin{aligned} d_X(x_k, \Phi(\omega)) &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} \min\{1, |(x_k)_n - \omega(a_n)|\} \\ &= \sum_{n=0}^{N} 2^{-n-1} \min\{1, |r_n - \omega(a_n)|\} + \sum_{n>N} 2^{-n-1} \min\{1, |\omega(a_n)|\} \\ &\le \epsilon \sum_{n=0}^{N} 2^{-n-1} + \sum_{n>N} 2^{-n-1} \\ &< 2^{-k-1} + 2^{-k-1} \\ &= 2^{-k} \end{aligned}$$

因此，$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $\Phi(\omega)$ 的一个可计算名称。第二个断言由证明的一致性推出。□

接下来我们需要 [7, 推论 2.9(3)] 的一致版本。该一致版本可按照 [7], 中所述版本的相同方式推出，但由于 [7] 中未给出证明，为完整起见，我们在此给出证明。

给定有限元组 $\vec{c} = (c_1, \ldots\ldots, c_k) \in \mathbf{A}^k$，该元组的联合数值域 为

$$W(\vec{c}) = \{(\omega(c_1), \ldots, \omega(c_k)) \in \mathbb{C}^k : \omega \in S(\mathbf{A})\}.$$

生成点元组的联合数值域可以通过可计算态近似，具体如下:

事实 *3.3* （[7, 推论 *2.9(2)*]）。存在一个算法：给定生成点$\vec{c} = (c_1, \ldots\ldots, c_k) \in A^k$、元组 $\vec{b} = (b_1, \ldots\ldots, b_k) \in \mathbb{Q}(i)^k$以及有理数 $\delta > 0$，使得 $d(\vec{b}, W(\vec{c})) < \delta$，该算法返回 $A^{\#}$ 上的一个可计算态的指标，使其满足 $max_{1\le i\le k} |b_i - \omega(c_i)| < \delta$。此处 d 指的是 $\mathbb{C}^k$上的 ℓ_∞ 度量。

引理 3.4。存在一个有理数集态的可计算序列，在 $\mathbf{A}^{\#}$ 上弱*稠密于 $S(\mathbf{A})$。此外，可以根据$\mathbf{A}^{\#}$ 的含幺指标计算出该序列的一个指标。

证明。我们描述一种生成此类序列的算法。

令 $(\vec{c}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为 $\mathbf{A}^{\#}$ 的所有有限个生成点元组的有效枚举，令 $(\vec{b}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为 $\mathbb{Q}(i)$ 中所有有限元组的有效枚举，并令 $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为所有正有理数的有效枚举。将事实 3.3 应用于生成点 1、有理数 1 和误差 $\delta = 1$，以获得一个可计算态 φ的指标。

给定 n，将 $n = \langle m、t、r、s\rangle$ 表示为，其中 $\langle\rangle$ 是 $\mathbb{N}^4$ 与 $\mathbb{N}$ 之间的标准可计算双射。如果元组 $\vec{c}_m$ 的长度与元组 b_t的长度不同，则令 $\omega_n = \varphi$。

现在，假设 $\vec{c}_m$ 和 b_t 长度相同，根据 [7, 推论 2.9(1)]集合 $W(\vec{c}_m)$ 是 $\mathbb{C}^{k_m}$ (其中 k_m 是$\vec{c}_m$的长度 $W\vec{c}_m$的可计算紧子集，并且我们可以计算出 $W(\vec{c}_m)$ 的一个指标。由该指标，利用可计算紧性可知，$d(\vec{b}_t, W(\vec{c}_m))$ 是可计算的（关于 t和 m一致）。我们

因此可以计算出一个有理数 $q_{m,t,s}$，使得 $q_{m,t,s} \leq d(b_t, W(\vec{c}_m)) < q_{m,t,s} + 2^{-s}$。现在我们可以检验 $q_{m,t,s} + 2^{-s} < \delta_r$ 是否成立。若不成立，令 $\omega_n = \varphi$。若成立，令 ω_n 为根据事实 3.3 由 $\vec{c}_m$, b_t 和 δ_r 计算得到的态。

最后，为了证明 $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是弱*-稠密的，假设有一个态 $\omega \in S(\mathbf{A})$ 和 ω 的一个基本弱*-邻域 U。那么，根据稠密性，存在 $\mathbf{A}^{\#}$ 的生成点 $\vec{c} = (c_1, \ldots, c_k)$ 和一个有理数 $\epsilon > 0$，使得

$$\{\psi \in S(\mathbf{A}) : \max_{1\leq i\leq k} |\psi(c_i) - \omega(c_i)| < \epsilon\} \subseteq U.$$

选择 $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_k) \in \mathbb{Q}(i)^k$，使得

$$\max_{1\leq i\leq k} |b_i - \omega(c_i)| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Then

$$d(\vec{b}, W(\vec{c})) \leq d(\vec{b}, (\omega(c_1), \ldots, \omega(c_k))) = \max_{1\leq i\leq k} |b_i - \omega(c_i)| < \frac{\epsilon}{4}.$$

对于某些 m, t, r, s，我们有 $\vec{c} = \vec{c}_m$、$b = b_t$、$\epsilon/2 = \delta_r$ 和 $2^{-s} < \epsilon/4$。令 $n = \langle m, t, r, s\rangle$。取这些参数，我们有

$$q_{m,t,s} + 2^{-s} \leq d(\vec{b}_t, W(\vec{c}_m)) + 2^{-s} < \epsilon/4 + \epsilon/4 = \epsilon/2 = \delta_r.$$

因此，根据上述构造，我们有

$$\max_{1\leq i\leq k} |b_i - \omega_n(c_i)| < \epsilon/2.$$

于是

$$\begin{aligned}\max_{1\leq i\leq k} |\omega_n(c_i) - \omega(c_i)| &\leq \max_{1\leq i\leq k} |\omega_n(c_i) - b_i| + \max_{1\leq i\leq k} |\omega(c_i) - b_i| \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/4 \\ &< \epsilon.\end{aligned}$$

因此 $\omega_n \in U$。 □

定理 3.5。 设$\mathbf{A}^{\#}$ 是含幺 C^*-代数 $\mathbf{A}$的一个可计算表示。则存在一个$(\mathbf{A})$ 在 $\mathbf{A}^{\#}$上的可计算紧致赋值表示。此外，可以根据$\mathbf{A}^{\#}$的一个含幺指标计算出该表示的指标。

证明。利用引理 3.4，我们可以计算一个指标，从而得到一个在 A 上弱*稠密于 $S(\mathrm{A})$ 的态可计算序列 $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$。由引理 3.2，序列 $(\Phi(\omega_n))_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $X^{\#}$中的一个可计算稠密序列。因此，根据 [4, 引理 3.27]，Φ 的像在 $X^{\#}$中是可计算可枚举闭的。引理 3.1 中，我们证明了Φ的像在 $X^{\#}$中是补可计算可枚举闭的。结合起来，根据 [4, 命题 3.29]，，这些事实表明，表示 $(\Phi(S(\mathrm{A})), (\Phi(\omega_n))_{n\in\mathbb{N}}, d_X|_{\Phi(S(\mathbf{A}))})$ 是 Φ的像的一个可计算紧致表示。由于 Φ 是等距映射，这意味着 $S(\mathrm{A})^{\#} = (S(\mathrm{A}), (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}, d_S)$ 是 $S(\mathrm{A})$的一个可计算紧致表示。

接下来需要验证， $S(\mathbf{A})^{\#}$ 在$\mathbf{A}^{\#}$上是可求值的。给定一个点 $a \in \mathbf{A}$ 的$\mathbf{A}^{\#}$-名称，以及一个 $\omega \in S(\mathbf{A})$和一个 $k \in \mathbb{N}$的 $S(\mathbf{A})^{\#}$-名称。利用 a的名称，计算 n，使得 $\|a - a_n\| < 2^{-k-2}$。同样，利用 ω的名称，计算 m，使得 $d_S(\omega, \omega_m) < 2^{-k-n-4}$。最后，计算 $q \in \mathbb{Q}(i)$，使得 $|\omega_m(a_n) - q| < 2^{-k-2}$。我们将证明 $|\mathrm{ev}(\omega, a) - q| < 2^{-k}$。

根据 d_S 的定义，我们有

$$d_S(\omega, \omega_m) \geq 2^{-n-1} \min\{1, |\omega(a_n) - \omega_m(a_n)|\},$$

因此，

$$\begin{aligned}\min\{1, |\omega(a_n) - \omega_m(a_n)|\} &\leq 2^{n+1} d_S(\omega, \omega_m) \\ &< 2^{n+1} 2^{-k-n-4} \\ &= 2^{-k-3}.\end{aligned}$$

由于 $2^{-k-3} < 1$，这意味着

$$|\omega(a_n) - \omega_m(a_n)| < 2^{-k-3}.$$

Thus

$$\begin{aligned}|\omega(a) - q| &< |\omega(a) - \omega(a_n)| + |\omega(a_n) - \omega_m(a_n)| + |\omega_m(a_n) - q| \\ &\leq |\omega(a - a_n)| + 2^{-k-3} + 2^{-k-2} \\ &\leq \|a - a_n\| + 2^{-k-3} + 2^{-k-2} \\ &< 2^{-k-2} + 2^{-k-3} + 2^{-k-2} \\ &< 2^{-k}.\end{aligned}$$

□

反过来，我们也有：

定理 3.6。假设$\mathbf{A}^\dagger$ 是$\mathbf{A}$ 的一个表示，并且 $S(\mathbf{A})$ 具有一个$(\mathbf{A})^\dagger$ 的表示 S，该表示关于$\mathbf{A}^\dagger$是可计算紧致且可求值的。那么$\mathbf{A}^\dagger$ 是可计算的。此外，$\mathbf{A}^\dagger$ 的一个含幺指标可以由$S(\mathbf{A})^\dagger$ 的一个指标和求值映射的一个指标计算得到。

证明。对于任意 $a \in \mathbf{A}$ 以及任意 $\omega \in S(\mathbf{A})$，有 $|\omega(a)| \leq \|\omega\| \|a\| = \|a\|$。若 a是正规态，则存在某个态 ω_a 使得 $\|a\| = |\omega(a)|$ [17, 定理 3.3。6]。因此，若 a是正规态，则有

$$\|a\| = \sup_{\omega \in S(\mathbf{A})} |\omega(a)| .$$

现在，若 a 是$\mathbf{A}^\dagger$的一个生成点，则定义 f：$S(\mathbf{A}) \to \mathbb{R}$ 如下：

$$f(\omega) = |\omega(a^* a)| = |\mathrm{ev}(\omega, a^* a)| .$$

由于 $S(\mathbf{A})^\dagger$ 在$\mathbf{A}^\dagger$上是可求值的，f 是可计算的，且关于 a一致。我们有

$$\|a\| = \sqrt{\|a^* a\|} = \sqrt{\sup_{\omega \in S(\mathbf{A})} |\omega(a^* a)|} = \sqrt{\sup_{\omega \in S(\mathbf{A})} f(\omega)}.$$

由于 $S(\mathbf{A})^\dagger$ 是可计算紧致的，且 f 是可计算的，因此上确界是可计算的，且关于 f 一致（见 [4, 命题 3.5(1)]）。因此，$\|a\|$ 是可计算的，且关于 a 一致。

要计算单位元的一个指标，令 $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 为$\mathbf{A}^\dagger$中生成点的有效枚举。对于每个 n，我们有

$$\begin{aligned}\|1_{\mathbf{A}} - b_n\|^2 &= \|(1_{\mathbf{A}} - b_n)^* (1_{\mathbf{A}} - b_n)\| \\ &= \sup_{\omega \in S(\mathbf{A})} \omega((1_{\mathbf{A}} - b_n)^* (1_{\mathbf{A}} - b_n)) \\ &= \sup_{\omega \in S(\mathbf{A})} (\omega(1_{\mathbf{A}}) - \omega(b_n^*) - \omega(b_n) + \omega(b_n^* b_n)) \\ &= \sup_{\omega \in S(\mathbf{A})} (1 - \omega(b_n^*) - \omega(b_n) + \omega(b_n^* b_n))\end{aligned}$$

由于代数运算在生成点上是可计算的，给定 n，我们可以计算出 r 和 s，使得 $b_n^* = b_r$ 和 $b_n^* b_n = b_s$。因此，根据可求值性，$1 - \omega(b_n^*) - \omega(b_n) + \omega(b_n^* b_n)$可计算，且关于 n 和 ω一致。由上面的计算可知，按照证明 $\|a\|$ 可计算的方式，$\|1_{\mathbf{A}} - b_n\|$ 可计算，且关于 n一致。要为 $1_{\mathbf{A}}$构造一个可计算名称，给定 k，搜索一个满足 $\left\|1_{\mathbf{A}} - b_{n(k)}\right\| < 2^{-k}$的 $n(k)$。由于生成点稠密，该搜索会终止。于是，$(b_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $1_{\mathbf{A}}$的一个可计算名称。□

一般来说，我们不知道每个含幺 C*-代数是否都存在可计算纯态。对于交换代数，答案是肯定的，因为纯态对应于盖尔范德谱上的点求值，因此，可计算纯态的存在性可由 [16, 定理 11]得出。

4. Effective GNS representations

态的一个主要用途是通过 GNS 构造，在希尔伯特空间上构造 C*-代数的表示。我们将证明这一过程可以有效地进行。本节只要求$\mathbf{A}^{\#}$ 是可计算可枚举的，因此我们会在每个定理中明确陈述这一假设。

我们先设定一些记号，并回顾经典的 GNS 构造（更多详情请参见例如 [17, 第 3 节4]）。设 φ 是 A 上的一个态。令 $N_\varphi = \{a \in \mathrm{A} : \varphi(a^* a) = 0\}$。令 $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi : \mathrm{A} \times \mathrm{A} \to \mathbb{C}$ 由$\langle a, b\rangle_\varphi = \varphi(b^* a)$定义。这是一个半内积，它通过 $\|a\|_\varphi = \sqrt{\langle a, a\rangle_\varphi}$在 A 上诱导出一个半范数。因此，$\mathrm{A}/N_\varphi$ 的完备化是一个希尔伯特空间 H_φ，其内积也记作 $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi$，范数记作 $\|\cdot\|_\varphi$。我们将典范映射记作 $\eta_\varphi : \mathrm{A} \to H_\varphi$，该映射先将 a 送至 A/N_φ 中的 $a + N_\varphi$，再应用 A/N_φ 到 H_φ的标准嵌入。注意，$\|\eta_\varphi\| \leq 1$。

定义 4.1。设 φ 是 $\mathbf{A}$ 上的一个态。由$\mathbf{A}^{\#}$诱导的 H_φ 表示，是一个具有特殊点 $(\eta_\varphi(a_j))_{j\in\mathbb{N}}$ 的表示，其中 $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbf{A}^{\#}$ 的生成点的有效枚举。

注意，由于 $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 在 A 中稠密，因此 $(\eta_\varphi(a_j))_{j\in\mathbb{N}}$ 在 H_φ 中稠密，所以由 $\mathbf{A}^{\#}$ 诱导的 H_φ 确实是一个表示。判定 N_φ 中的成员关系可能无法有效实现，因此我们不试图使列表 $(\eta_\varphi(a_j))_{j\in\mathbb{N}}$ 成为单射。

引理 4.2。设 φ 是 $\mathbf{A}$ 上的一个可计算态，并设 $H^{\#}$ 是由可计算可枚举表示 $\mathbf{A}^{\#}$ 诱导的 H_φ 的表示。则 $H^{\#}$ 和 η_φ 是可计算的。特别地，循环向量 $\eta_\varphi(1_{\mathbf{A}})$ 是 $H^{\#}$ 中的一个可计算点，并且可由$\mathbf{A}^{\#}$ 的含幺指标一致地得到。

证明。根据定义，η_φ 的可计算性是显而易见的。要证明$H^{\#}$是可计算的，给定 j，$k \in \mathbb{N}$，我们有 $\langle \eta_\varphi(a_j)\, \eta_\varphi(a_k)\rangle_\varphi = \varphi(a_k^* a_j)$，它是可计算的（关于 j 和 k一致可计算），因为 φ 是可计算的。□

给定 $a \in \mathbf{A}$，令 $\pi_\varphi(a) : \mathbf{A}/N_\varphi \to \mathbf{A}/N_\varphi$ 为由$\pi_\varphi(a)(b + N_\varphi) = ab + N_\varphi$定义的线性算子。已知 π_φ 是压缩的，因此 π_φ 可延拓为线性算子 $\pi_\varphi : H_\varphi \to H_\varphi$。GNS 表示是由 $a \mapsto \pi_\varphi(a)$ 给出的 *-同态$A \to B(H_\varphi)$。当 H_φ 是无限维时，$B(H_\varphi)$ 是一个非可分的 C*-代数，因此无法按通常意义赋予可计算表示。因此，我们不能要求 GNS 表示本身是

可计算映射。相反，恰当的可计算性概念是，$\pi_\varphi(a)$ 是 $H^\#$ 的可计算映射，且关于 a 一致。

定理 4.3. 假设 φ 是一个可计算态。设 $H^\#$ 是由可计算可枚举表示 $\mathbf{A}^\#$ 诱导的 H_φ 的表示。若 a 是 $\mathbf{A}^\#$ 的可计算点，则 $\pi_\varphi(a)$ 是 $H^\#$ 的可计算算子。此外，这一过程对于 a 的一个 $\mathbf{A}^\#$-名称是统一的。

证明。设 $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbf{A}^\#$ 的生成点的有效枚举，该枚举用于定义 $H^\#$。

由于 $\mathbf{A}^\#$ 是可计算可枚举的，根据 a 的一个名称，我们可以计算出一个有理数 M，使得 $\|a\| < M$。假设给定了 $n \in \mathbb{N}$ 和一个可计算向量 $x \in H$ 的 $H^\#$-名称。于是我们可以计算出 j，使得 $\|x - \eta_\varphi(a_j)\|_\varphi < \frac{1}{M2^{n+1}}$。同样利用 $\mathbf{A}^\#$ 是可计算可枚举的这一事实，我们可以计算出一个有理数 M'，使得 $\|a_j\| < M'$，然后可以计算出 k，使得 $\|a - a_k\| < \frac{1}{M'2^{n+1}}$。乘法在 $\mathbf{A}^\#$ 的生成点上是可计算的，因此我们可以计算出一个 ℓ，使得 $a_\ell = a_k a_j$。于是 $\eta_\varphi(a_\ell)$ 是 $H^\#$ 的一个特殊点，因此只需证明 $\|\eta_\varphi(a_\ell) - \pi_\varphi(a)x\|_\varphi < 2^{-n}$。为此，我们计算：

$$\begin{aligned}
\|\eta_\varphi(a_\ell) - \pi_\varphi(a)x\|_\varphi &= \|\eta_\varphi(a_k a_j) - \pi_\varphi(a)(x)\|_\varphi \\
&\le \|\eta_\varphi(a_k a_j) - \eta_\varphi(a a_j)\|_\varphi + \|\eta_\varphi(a a_j) - \pi_\varphi(a)(x)\|_\varphi \\
&\le \|(a_k - a)\|\,\|a_j\| + \|\pi_\varphi(a)(a_j) - \pi_\varphi(a)(x)\|_\varphi \\
&< \frac{1}{M'2^{n+1}}M' + \|\pi_\varphi(a)(a_j - x)\|_\varphi \\
&\le 2^{-n-1} + \|a\|\,\|a_j - x\|_\varphi \\
&< 2^{-n-1} + M\frac{1}{M2^{n+1}} \\
&< 2^{-n}
\end{aligned}$$

□

5. Tracial states

$T(\mathbf{A})$ 的迹单纯形，以及 $T(\mathbf{A})$ 与 $K_0(\mathbf{A})$ 之间的典范配对，在 Elliott 分类纲领中发挥着关键作用。因此，当 $\mathbf{A}^\#$ 可计算时，自然会希望 $T(\mathbf{A})$ 能够具有可计算紧致赋值表示。正如我们将看到的，情况并不总是如此。我们先从一些积极的观察开始。以下关于态为迹的条件的重新表述将会很有用；该表述直接由态的连续性和极化恒等式推出。

事实 5.1。设 φ 为一个态，且 $D \subseteq \mathbf{A}$ 是 $\mathbf{A}$ 的稠密子集。那么，对于所有 $a \in D$，φ 为迹，当且仅当 $\varphi(a^*a) = \varphi(aa^*)$。

命题 5.2。在 $S(\mathbf{A})$ 的任意可求值表示中，迹空间 $T(\mathbf{A})$ 都是补可计算可枚举闭集。

证明。设 $\mathbf{A}^\#$ 的生成点为 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，令 $e_n : S(\mathbf{A}) \to \mathbb{C}$ 由 $e_n(\varphi) = |\varphi(a_n a_n^*) - \varphi(a_n^* a_n)|$ 定义。根据 $S(\mathbf{A})^\#$ 为可求值表示的定义，每个映射 e_n 都是可计算的，且对 n 一致。因此，集合 $C_n = \{\varphi \in S(\mathbf{A}) : e_n(\varphi) = 0\}$ 是余可计算可枚举闭的，且对 n 一致。我们有 $T(\mathbf{A}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$，因此它是 $S(\mathbf{A})^\#$ 的一个余可计算可枚举闭集。□

在少数情况下，我们可以轻松证明， $T(\mathbf{A})$继承了 $S(\mathbf{A}^{\#})$的可计算紧致赋值表示。

命题 5.3。 如果$\mathbf{A}$ 是交换的，或者$\mathbf{A}$ 具有唯一迹，那么 $T(\mathbf{A})$ 具有一个在$\mathbf{A}^{\#}$上可求值的可计算紧致表示。

证明。 如果 $\mathbf{A}$ 是交换的，则 $\mathbf{A}$ 上的每个态都是迹，因此由定理3.5可得结论。

如果 A 具有唯一迹，那么根据 [4, 事实 3.25]，该迹是$S(\mathrm{A}^{\#})$中的一个（一致）可计算点。特别地， $T(\mathrm{A}^{\#})$具有一个一致可计算稠密点序列，因此根据 [4, 引理 3.27] ，它在 $S(\mathrm{A}^{\#})$ 中是可计算可枚举闭的。根据命题 5.2 和 [4, 命题 3.29]， $T(\mathrm{A})$ 从 $S(\mathrm{A}^{\#})$ 继承一个可计算紧致赋值表示。□

在 Elliott 不变量中，迹并不是直接作用于$\mathbf{A}$的元素，而是作用于 $K_0(\mathbf{A})$ 中的类。因此，能够有效地在$\mathbf{A}$ 上的矩阵代数中的投影与 $K_0(\mathbf{A})$中的类之间进行转换是很有用的。

定义 5.4。 表示 $K_0(\mathbf{A})^{\#}$ 与 $K_0(\mathbf{A})$ 兼容 $\mathbf{A}^{\#}$ ，当且仅当存在一个算法：该算法以投影 $p \in M_n(\mathbf{A})$ 的指标作为输入，并输出一个 $K_0(\mathbf{A})^{\#}$-标记；同时存在一个算法：该算法以类 $x \in K_0(\mathbf{A})$ 的 $K_0(\mathbf{A})^{\#}$-标记作为输入，并输出投影 $p \in M_n(\mathbf{A})$ 和 $q \in M_k(\mathbf{A})$ 的指标，使得 $x = [p]_{K_0} - [q]_{K_0}$。

在 [6]中，已证明存在一个可计算函子，将 C*-代数的可计算可枚举表示映射为其（有序） K_0 群的可计算可枚举表示。我们将由此从 $K_0(\mathbf{A})$ 得到的表示记为 $\mathbf{A}^{\#}$ 的 $K_0(\mathbf{A}^{\#})$。关于 $K_0(\mathbf{A}^{\#})$ 的构造，我们唯一需要用到的是下面的定理 5.5 。定理5.5 的证明隐含于 [6], 中，但我们借此机会详细给出证明，因为该结果本身也具有独立的意义。对于证明中使用的所有未定义记号，请读者参阅 [6, 第 2]节。

定理 5.5。 在可计算同构意义下，与 $\mathbf{A}^{\#}$ 相容的 $K_0(\mathbf{A})$的唯一表示是 $K_0(\mathbf{A}^{\#})$。

证明。我们首先证明， $K_0(\mathrm{A}^{\#})$ 与 $\mathrm{A}^{\#}$ 相容。假设给定了元素 $x \in K_0(\mathrm{A})$ 的一个 $K_0(\mathrm{A}^{\#})$-标记 w 。 [6,命题 2.14] 中对 $K_0(\mathrm{A}^{\#})$ 的构造保证，典范满射 $\pi\colon \mathcal{D}(\mathrm{A}^{\#}) \times \mathcal{D}(\mathrm{A}^{\#}) \to K_0(\mathrm{A}^{\#})$ 是可计算的，并且 $(\mathcal{D}(\mathrm{A}) \times \mathcal{D}(\mathrm{A}))^{\#}$ 上的 Grothendieck 等价关系 $\sim$ 是可计算可枚举的，而且这些性质都关于 $\mathrm{A}^{\#}$ 的一个指标是一致的。因此，通过枚举 $\sim$，我们可以搜索一对 (g_0, g_1)，它们是 $\mathcal{D}(\mathrm{A}^{\#})$ 的标记，分别对应于 $[p']_{MvN}$ 和 $[q']_{MvN} \in \mathcal{D}(\mathrm{A})$，使得 $x = [p']_{K_0} - [q']_{K_0}$。由于 $\mathcal{D}(\mathrm{A}^{\#})$ 关于 $\mathrm{A}^{\#}$ 是可计算支撑的，并且关于 $\mathrm{A}^{\#}$ 是一致的（见 [6, 定理 2.9]），因此可以从 g_0 计算出 n 以及一个可计算投影 $p \in M_n(\mathrm{A})$ 的指标，使得 $p \sim_{MvN} p'$；类似地，我们可以从 g_1 计算出 k 以及一个可计算投影 $q \in M_k(\mathrm{A})$ 的指标，使得$q \sim_{MvN} q'$。于是 $x = [p']_{K_0} - [q']_{K_0} = [p]_{K_0} - [q]_{K_0}$。

现在，假设我们有一个可计算投影 $p \in M_n(\mathbf{A})$ 的指标。令 $(p_{m,k})_{m,k\in\mathbb{N}}$ 为在定理 2 的证明中构造 $\mathcal{D}(\mathbf{A}^{\#})$ 时所用的投影序列。因此，$(p_{m,k})$ 是一个可计算的投影序列，并且关于 m 一致可计算，且 $(\mathbf{A}^{\#})$ 中的每个投影都与某个 $p_{m,k}$ Murray-von Neumann 等价。由推论 2，存在一个可计算可枚举子集 $Q \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$，使得若 e 和 e' 是投影的指标，则 $(e, e') \in Q$ 当且仅当这两个

两个投影 Murray-von Neumann 等价，并且可以根据 $\mathrm{A}^{\#}$ 的指标计算出 Q 的指标。由于 p 与某个 p_n Murray-von Neumann 等价，因此通过搜索 Q，我们可以计算出一个满足此条件的 k 值。接着，根据 $\mathcal{D}(\mathrm{A}^{\#})$ 的定义，$\langle n,k\rangle$ 是 $\mathcal{D}(\mathrm{A}^{\#})$ 的一个标记，表示 $[p]_{MvN}$。最后，由命题 2，我们可以计算出 $K_0(\mathrm{A}^{\#})$ 的指标，以及典范映射 $\gamma:\mathcal{D}(\mathrm{A})\to K_0(\mathrm{A})$ 的指标。因此，根据 γ 是可计算映射的定义（定义 2），从表示 $[p]_{MvN}$ 的 $\mathcal{D}(\mathrm{A}^{\#})$-标记 $\langle n,k\rangle$，我们可以计算出 $\gamma([p]_{MvN})$ 的 $K_0(\mathrm{A})$ 标记，也就是 $[p]_{K_0}$。

现在我们来证明唯一性。假设 $K_0(\mathrm{A})^{\dagger}$ 是 $K_0(\mathrm{A})$的另一种表示，且与 $\mathrm{A}^{\#}$相容。给定 $x\in K_0(\mathrm{A})$的一个 $K_0(\mathrm{A})^{\dagger}$-标签，利用 $K_0(\mathrm{A})^{\dagger}$ 与 $\mathrm{A}^{\#}$ 相容这一点，我们可以计算投影 $p\in M_n(\mathrm{A})$和 $q\in M_k(\mathrm{A})$的 $\mathrm{A}^{\#}$-索引，使得 $x=[p]_{K_0}-[q]_{K_0}$。然后，利用 $K_0(\mathrm{A}^{\#})$与 $\mathrm{A}^{\#}$相容这一点，根据 p 和 q 的索引，我们可以计算 $[p]_{K_0}$ 和 $[q]_{K_0}$ 的$K_0(\mathrm{A}^{\#})$-标签，从而可以计算$x=[p]_{K_0}-[q]_{K_0}$的一个 $K_0(\mathrm{A}^{\#})$-标签。因此，从 $K_0(\mathrm{A})^{\dagger}$ 到 $K_0(\mathrm{A}^{\#})$的恒等映射是可计算的。类似地，从 $K_0(\mathrm{A}^{\#})$到 $K_0(\mathrm{A})^{\dagger}$的恒等映射也是可计算的，因此 $K_0(\mathrm{A})^{\dagger}$ 与 $K_0(\mathrm{A}^{\#})$可计算同构。□

迹 $\tau\in T(\mathbf{A})$ 可以自然地扩展为迹 τ_n 在 $M_n(\mathbf{A})$ 上的迹，定义为

$$\tau_n([a_{i,j}]_{1\le i,j\le n})=\sum_{i=1}^{n}\tau(a_{i,i}).$$

给定一个类 $x\in K_0(\mathbf{A})$，如果 $x=[p]_{K_0}-[q]_{K_0}$ 对于某些投影 $p\in M_n(\mathbf{A})$ 和 $q\in M_k(\mathbf{A})$，则 τ 在 x 处的求值定义为 $\tau(x)=\tau_n(p)-\tau_k(q)$。众所周知，这一定义与用于表示 x 的投影 p 和 q 无关。于是，$T(\mathbf{A})$ 与 $K_0(\mathbf{A})$ 的配对定义为

$$\langle\tau,x\rangle=\tau(x).$$

命题 5.6。如果 $T(\mathbf{A})^{\#}$ 在 $\mathbf{A}$ 上是可求值的，那么配对映射是一个从 $T(\mathbf{A})\times K_0(\mathbf{A})$ 的表示到由 $T(\mathbf{A})^{\#}$ 和 $K_0(\mathbf{A}^{\#})$ 诱导的可计算映射。

证明。假设给定了 $x\in K_0(\mathrm{A})$ 的一个 $K_0(\mathrm{A}^{\#})$-标记，以及一个可计算点 $\tau\in T(\mathrm{A}^{\#})$。定理 5.5 使我们能够计算出投影 $p\in M_n(\mathrm{A})$ 和 $q\in M_k(\mathrm{A})$ 的指标，使得 $x=[p]_{K_0}-[q]_{K_0}$。由于 $T(\mathrm{A})^{\#}$ 是可求值的，我们随后可以计算 $\tau_n(p)$ 和 $\tau_k(q)$。□

我们注意到，上述证明是统一的，也就是说，根据 $\mathbf{A}^{\#}$和求值映射 $T(\mathbf{A})\times\mathbf{A}\to\mathbb{C}$ 的指标，可以计算出迹配对映射的指标。

给定 $x\in K_0(\mathbf{A})$，令 $I_x=\{\tau(x):\tau\in T(\mathbf{A})\}\subseteq\mathbb{R}$ 表示 x上迹配对的值域。由于 $T(\mathbf{A})$ 是紧的且凸的，并且配对关于第一个坐标连续，因此 I_x 是一个紧区间（前提是 $T(\mathbf{A})\neq\emptyset$）。

推论 5.7。设 $T(\mathbf{A})\neq\emptyset$ 和 $T(\mathbf{A})^{\#}$ 在 $\mathbf{A}^{\#}$ 上是可计算紧致且可求值的。对于每个 $x\in K_0(\mathbf{A})$，区间 I_x 是可计算紧致的。此外，根据 $K_0(\mathbf{A}^{\#})$- x 的标记，可以计算出 I_x 的端点。

证明。只需证明后一个断言，因为端点可计算的紧区间是可计算紧致的。令 $f\colon T(\mathbf{A})\to\mathbb{R}$ 由 $f(\tau)=\tau(x)=\langle\tau,x\rangle$定义。根据命题 5.6, f 是可计算的，并且可以计算出 f 的一个指标

根据 $\mathbf{A}^{\#}$ 的一个指标以及求值映射的一个指标。从 f 的一个指标和 $T(\mathbf{A}^{\#})$ 的一个指标出发，由于 $T(\mathbf{A}^{\#})$ 是可计算紧致的，我们可以根据 $_{\tau\in T(\mathbf{A})}\, f(\tau)$ 求上确界，并根据 $_{\tau\in T(\mathbf{A})}\, f(\tau)$ 求下确界，所依据的是 [4, 命题 3。5].□

现在我们可以证明，命题 5.3 并不适用于 C 的所有可计算表示*-代数，事实上，甚至并不适用于单 AF 代数的所有可计算表示。

定理 5.8。存在一个单 *AF* 代数$\mathbf{A}$ 及其一个可计算表示$\mathbf{A}^{\#}$，使得不存在一个$\mathbf{A}$ $T(\mathbf{A})$ 的可计算紧致表示，该表示相对于$\mathbf{A}^{\#}$是可评估的。此外，在此例中，$\mathbf{A}$ 的任何极端迹都不是$\mathbf{A}^{\#}$的可计算映射。

证明。我们将使用 [3, 定理 61]中构造的 Bratteli 图。下面回顾这一构造。

设 $\beta\in$ (0,1) 是一个右可计算可枚举的非可计算实数，并固定一个有理数的可计算递减序列 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\searrow\beta$，满足 $b_0=1$。令 $\beta_0=b_0=1$，并对每个 $n>0$，令 $\beta_n=b_n/b_{n-1}$。于是 $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个有理数的可计算序列，且 $\prod_{n\in\mathbb{N}}\beta_n=\beta$。将 $\frac{1+\beta_n}{2}=\frac{p_n}{q_n}$ 写成最简分数，并令 $X_n=p_n$和 $Y_n=q_n-p_n$。Bratteli图 B 只有一个根层 $L_0=\{r\}$，此后对每个 $n>0$，各层均有两个元素，$L_n=\{c_n,d_n\}$。从 r 到 c_1 有一条边，从 r 到 d_1有一条边。对于 $n\geq 1$，从 c_n到 c_{n+1}有 X_n 条边，从 d_n 到 d_{n+1}有 X_n 条边，从 c_n 到 d_{n+1}有 Y_n 条边，并且从d_n 到 c_{n+1}有 Y_n 条边。令$\mathbf{A}$ 为与 B相关联的 AF 代数。

注意到 B 是一个可计算的 Bratteli 图，因此根据 [5, 主定理 3]，我们得到一个$\mathbf{A}^{\#}$ 的可计算表示$\mathbf{A}$。此外，在这个表示中，与 Bratteli 图的顶点 $p\in\mathbf{A}$ 对应的投影 c_1 是一个可计算点。根据推论 5.7，$I_p=\{\tau(p)\colon\tau\in T(\mathbf{A})\}$的最大值是可计算的。正如在 [3, 定理 6.1], 的证明中所指出的，我们有 $I_p=\left[\frac{1-\beta}{2},\frac{1+\beta}{2}\right]$。因此 $\frac{1+\beta}{2}$ 是一个可计算实数，这与 β的选择矛盾。

关于不存在可计算的极端迹这一结论成立，是因为这个代数恰有两个极端迹，而这两个迹正是在 I_p 的端点处取得的。□

我们的最终目标是证明，对于定理 **5.8**$^{\#}$ 中的表示 A，不存在 $T(\mathbf{A})$ 的可计算紧致表示，使得与$K_0(\mathbf{A}^{\#})$ 的迹配对是可计算的。一般而言，已知 $\langle\tau,\cdot\rangle=\langle\tau',\cdot\rangle$ 并不意味着$\tau=\tau'$，因此我们不应指望一般来说能够计算 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 就意味着 $T(\mathbf{A})$ 的表示是可求值的。然而，如果 $\mathbf{A}$ 的实秩为零，那么知道迹在 K_0 类上的取值，就足以恢复迹本身。为了证明这一事实的有效版本，我们定义如下实秩零的有效版本。

定义 5.9。**若存在一种算法，其输入为一个可计算自伴元 A** 和一个 $n\in\mathbb{N}$，输出为 $k\in\mathbb{N}$, λ_1、……、$\lambda_k\in\mathbb{Q}$，以及两两正交的可计算投影 p_1、……、$p_k\in\mathbf{A}$ 的指标，使得 $\left\|a-\sum_{j=1}^{k}\lambda_j p_j\right\|<2^{-n}$，则称$^{\#}$ 是有效实秩 0。

由于$\mathbf{A}$中可计算自伴元在所有自伴元的集合中稠密，因此，如果$\mathbf{A}^{\#}$ 具有有效实秩零，那么$\mathbf{A}$ 就具有实秩零。

命题 5.10。 如果 $T(\mathbf{A})^{\#}$ 是 $T(\mathbf{A})$ 的一个表示，且迹配对是可计算的，并且$\mathbf{A}^{\#}$具有有效实秩0，那么 $T(\mathbf{A})^{\#}$ 在$\mathbf{A}^{\#}$上是可求值的。

证明。 我们必须证明 ev：$T(\mathbf{A})^{\#} \times \mathbf{A}^{\#} \to \mathbb{C}$ 是可计算的。假设我们得到了 $\tau \in T(\mathbf{A})$ 的一个名称和 $x \in \mathbf{A}$ 的一个名称。

设 $a = \frac{1}{2}(x + x^*)$ 且 $b = \frac{1}{2i}(x - x^*)$。那么 $a = a^*$、 $b = b^*$、 $x = a + ib$ 以及 a和 b 都可以从 x计算得到。由于 τ 是线性的，这表明只需证明当 $\mathbf{A}$ 的输入元素是自伴时，ev 是可计算的。因此我们假设$x = x^*$。

由于 $\mathbf{A}^{\#}$ 是有效实秩零，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们都可以计算 $k_n \in \mathbb{N}$、λ_n、1、$\ldots$、λ_n、$_{k_n} \in \mathbb{Q}$，以及两两正交投影 p_n、1、$\ldots$、p_n、$_{k_n}$ 的指标，使得 $\left\| x - \sum_{j=1}^{k_n} \lambda_n$、$_j p_n$、$_j \right\| < 2^{-n}$。令 $a_n = \sum_{j=1}^{k_n} \lambda_n$、$_j p_n$、$_j$。利用定理 5.5，我们可以为每个 $n \in \mathbb{N}$ 和每个 $j \in \{1, \ldots, k_n\}$ 计算 $[p_{n,j}]_{K_0}$ 的一个 $K_0(\mathbf{A}^{\#})$-标签，并且该计算对 n 和 j 是一致的。于是我们有：

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}(\tau, a_n) &= \tau(a_n) \\ &= \sum_{j=1}^{k_n} \lambda_{n,j} \tau(p_{n,j}) \\ &= \sum_{j=1}^{k_n} \lambda_{n,j} \langle \tau, [p_{n,j}]_{K_0} \rangle \end{aligned}$$

由于与 K_0 的迹配对是可计算的，这表明 $(\mathrm{ev}(\tau, a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 是一个可计算序列。由于 τ 是压缩的，我们有

$$|\mathrm{ev}(\tau, a_n) - \mathrm{ev}(\tau, x)| = |\tau(a_n) - \tau(x)| \leq \|a_n - x\| < 2^{-n}.$$

因此，$(\mathrm{ev}(\tau, a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 是 $\mathrm{ev}(\tau, x)$ 的一个可计算名称。 □

我们不认为所有实秩零 C*-代数的可计算表示都是有效实秩零的。为了实现我们当前的目标，即证明 Elliott 不变量并非总是完全可计算的，以下这类例子已经足够。

命题 5.11. 每个 *AF* 代数的可计算表示都是有效实秩零。

证明。设 a 是 $\mathbf{A}$ 中一个可计算自伴元，并固定 $n \in \mathbb{N}$。根据 [5, 引理 7.2]，我们可以计算出 $\mathbf{A}$ 的一个可计算可枚举闭有限维 *-子代数 F 的指标，其中 $1_{\mathbf{A}} \in F$ 且 $d(a, F) < 2^{-n}_4$；此外，[5, 引理 7.2]的证明实际上计算出了 F 的一组矩阵单位，因此我们也可以计算 $\dim(F)$。利用 [5, 引理 7.1]，，我们可以计算出一个有限多重集 J 和一个同构ψ：$\bigoplus_{j \in J} M_j(\mathbb{C}) \to F$。

由于 $d(a, F) < 2^{-n}/4$，我们可以通过搜索找到一个满足 $\|a - b\| < 2^{-n}/4$ 的 $b \in F$。注意，$\left(\frac{1}{2}(b + b^*)\right)^* = \frac{1}{2}(b + b^*)$、$\frac{1}{2}(b + b^*) \in F$，并且

$$\begin{aligned}\left\|a - \frac{1}{2}(b + b^*)\right\| &= \left\|\frac{1}{2}((a - b) + (a - b^*))\right\| \\ &\leq \frac{1}{2}(\|a - b\| + \|a - b^*\|) \\ &= \frac{1}{2}(\|a - b\| + \|(a - b)^*\|) \\ &= \|a - b\|\end{aligned}$$

因此，将 b 替换为$\frac{1}{2}(b + b^*)$后，我们可以假设 $b = b^*$。

设 $c = \psi^{-1}(b)$，例如 $c = \oplus_{j \in J} c_j$，其中每个 $c_j \in M_j(\mathbb{C})$。对于每个 j，搜索满足 $\|c_j - d_j\| < 2^{-n}/4$ 的 $d_j \in M_j(\mathbb{Q}(i))$。如上所述，将 d_j 替换为 $\frac{1}{2}(d_j + d_j^*)$ 后，我们可以假设 d_j 是自伴的，且不会增加 $\|c_j - d_j\|$。具有不同特征值的自伴矩阵在 $M_j(\mathbb{Q}(i))$ 的自伴元素集合中稠密；对于元素属于 $\mathbb{Q}(i)$ 的矩阵，我们可以通过计算特征多项式（其系数属于 $\mathbb{Q}(i)$）的判别式并检查其是否为 0，来判断其特征值是否互不相同。因此，对于每个 j，我们可以搜索满足 $e_j = e_j^*$ 的 $e_j \in M_j(\mathbb{Q}(i))$，使得 e_j 的特征值互不相同，且 $\|d_j - e_j\| < 2^{-n}/4$。特别地，我们知道 e_j 的不同特征值恰好有 j 个，因此根据 [20, 定理 2]，我们可以有效地对角化 e_j；也就是说，我们可以计算出不同的 $\mu_{j,1}, \ldots, \mu_{j,j} \in \mathbb{C}$，以及两两正交投影 $q_{j,1}, \ldots, q_{j,j} \in M_j(\mathbb{C})$ 的指标，使得 $e_j = \sum_{k=1}^{j} \mu_{j,k} q_{j,k}$。对于每个 j 和 k，计算 $\lambda_{j,k} \in \mathbb{Q}$，使得 $|\lambda_{j,k} - \mu_{j,k}| < 2^{-n}/4$。对于每个 j，令 $f_j = \sum_{k=1}^{j} \lambda_{j,k} q_{j,k}$。注意，对于每个 j，

$$\|e_j - f_j\| = \left\|\sum_{k=1}^{j} (\mu_{j,k} - \lambda_{j,k}) q_{j,k}\right\| = \max_k |\mu_{j,k} - \lambda_{j,k}| < \frac{2^{-n}}{4}.$$

令 $f = \oplus_{j \in J} f_j$。重新编排指标后，我们得到可计算的 $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{Q}$ 以及两两正交投影 $q_1, \ldots, q_r \in \bigoplus_{j \in J} M_j(\mathbb{C})$，使得 $f = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k q_k$。

对于每个 k，令 $p_k = \psi(q_k)$。那么这些 p_k 是 F中的两两正交的可计算投影，因此也是$\mathbf{A}$中的两两正交的可计算投影，并且

$$\begin{aligned}
\left\| a - \sum_{k=1}^{r} \lambda_k p_k \right\| &\leq \|a-b\| + \left\| b - \sum_{k=1}^{r} \lambda_k p_k \right\| \\
&< \frac{2^{-n}}{4} + \left\| \psi^{-1}\left(b - \sum_{k=1}^{r} \lambda_k p_k \right) \right\| \\
&= \frac{2^{-n}}{4} + \|c-f\| \\
&\leq \frac{2^{-n}}{4} + \|c-d\| + \|d-e\| + \|e-f\| \\
&= \frac{2^{-n}}{4} + \|\oplus_j (c_j - d_j)\| + \|\oplus_j (d_j - e_j)\| + \|\oplus_j (e_j - f_j)\| \\
&= \frac{2^{-n}}{4} + \max_j \|c_j - d_j\| + \max_j \|d_j - e_j\| + \max_j \|e_j - f_j\| \\
&< \frac{2^{-n}}{4} + \frac{2^{-n}}{4} + \frac{2^{-n}}{4} + \frac{2^{-n}}{4} \\
&= 2^{-n}
\end{aligned}$$

□

推论 5.12. 存在一个单 *AF* 代数$\mathbf{A}$，它具有可计算表示$\mathbf{A}^{\#}$，使得Ell($\mathbf{A}$)在$\mathbf{A}^{\#}$上没有完全可计算表示。

证明。设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}^{\#}$ 如定理 5.8中的陈述所述。由于 $\mathbf{A}$ 是 AF 代数，根据命题 5.11，$\mathbf{A}^{\#}$ 具有有效实秩零。因此，根据命题 5.10，若 Ell(**A**) 在 $\mathbf{A}^{\#}$上具有完全可计算表示，则 $T(\mathbf{A})$ 在 $\mathbf{A}^{\#}$上具有可求值的可计算紧致表示，这与定理5.8矛盾。□

6. Appendix (with Joaquin Cisneros): Computability of the unit

在含幺 C*-代数的背景下，许多关于集合的计算和描述自然会涉及含有单位元 $1_{\mathbf{A}}$ 的 $\mathbf{A}$ 的表达式，因此在可计算性语境中，了解 $1_{\mathbf{A}}$ 是该表示中的一个可计算点，通常很有帮助。例如，在上面的引理 3.1 中，为了证明 $S(\mathbf{A})$ 在适当的圆盘乘积中的像是补可计算可枚举闭的，我们需要 $1_{\mathbf{A}}$的一个可计算名称。

在 [2, 定理 41] 中，我们证明了，对于交换的 C*-代数的每个可计算表示，单位元总是一个可计算点。随后，[6, 命题 45] 将这一结论推广到了 $\mathbf{A}$ 稳定有限的情形。后续工作，例如 [9] 和 [7], 的早期版本，在研究一般含幺 C*-代数的表示时，将单位元的可计算性作为一项假设。这里我们证明，这一额外假设是不必要的。事实上，这不仅适用于可计算表示，也适用于更广泛的（右）可计算可枚举表示（即，在生成点上，只要求范数是一致上半可计算的，而不是一致可计算的表示；参见 [6,定义 12]）。

命题6.1. 单位元是每个含幺 *C**-代数的可计算可枚举表示中的可计算点。

证明. 由于$\mathbf{A}^{\#}$ 的生成点稠密，因此存在一个生成点 a使得 $\|a-1_{\mathbf{A}}\|\leq 1/2$。固定这样一个 a。由于 $\|a-1_{\mathbf{A}}\|<1$，我们有

$$a^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(1_{\mathbf{A}}-a)^n,$$

so

$$\left\|a^{-1}\right\|\leq\sum_{n=0}^{\infty}\|(1_{\mathbf{A}}-a)^n\|\leq\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}=2.$$

另请注意，$\|a\|\leq\|a-1_{\mathbf{A}}\|+\|1_{\mathbf{A}}\|\leq 2$。

固定 $n\in\mathbb{N}$。由于 $\mathbf{A}^{\#}$ 是可计算可枚举的，我们可以利用生成点的有效枚举和交错搜索，寻找一个生成点 c_n，使得 $\|c_na-a\|<2^{-n-1}$。要看出该搜索必定成功，请注意，由于生成点是稠密的，存在一个生成点 c，使得 $\|c-1_{\mathbf{A}}\|<2^{-n-2}$；对于这样的 c，我们有

$$\|ca-a\|\leq\|c-1_{\mathbf{A}}\|\,\|a\|<2\,\|c-1_{\mathbf{A}}\|\leq 2^{-n-1}.$$

然后，找到一个满足 $\|c_na-a\|<2^{-n-1}$ 的生成点 c_n 后，我们有

$$\|c_n-1_{\mathbf{A}}\|=\left\|(c_na-a)a^{-1}\right\|\leq\|c_na-a\|\left\|a^{-1}\right\|\leq 2\,\|c_na-a\|\leq 2^{-n}.$$

因此，$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $1_{\mathbf{A}}$ 的一个可计算名称。 □

上述证明是非一致的，因为需要固定 a。McNicholl [16,定理 5。3]已证明一致证明是不可能的；具体而言，不存在一种一致过程，能够以含幺 $\mathbf{CA}^{\#}$ 代数的可计算表示的指标*作为输入，并生成一个$\mathbf{A}^{\#}$-指标，用于表示 $1_{\mathbf{A}}$。

可计算可枚举表示$A^{\#}$ 的**含幺指标** 这一概念由 [9]引入。含幺指标是 $\langle e_1,e_2\rangle$，其中 e_1 是$\mathbf{A}^{\#}$的一个指标， e_2 是 $1_{\mathbf{A}}$的一个$\mathbf{A}^{\#}$-指标，而$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是从 $\mathbb{N}^2$ 到 $\mathbb{N}$的标准可计算双射。上述观察可以概括为：每个含幺 C*-代数的可计算可枚举表示都有一个含幺指标，但仅凭表示的一个指标并不总能计算出含幺指标。

References

1. Jananan Arulseelan、Isaac Goldbring 和 Bradd Hart, *The undecidability of having the QWEP* **92** 2024 2, 349 362 , 《算子理论杂志》（），第 – 期。2. Peter Burton、Christopher J Eagle、Alec Fox、Isaac Goldbring、Matthew Harrison-Trainor、Timothy H McNicholl、Alexander Melnikov 和 Teerawat Thewmorakot, *Computable Gelfandduality*, 《美国数学会会刊》，即将发表。arXiv:2402.16672。3. Daniel Coronel、Alexander Frank、Mathieu Hoyrup 和 Crist´obal Rojas, *Realizing semi-computable simplices by computable dynamical systems*, 《理论计算机科学》**933**（2022年），43–54。4. Rodney G. Downey 和 Alexander G. Melnikov, *Computably compact metric spaces*, 《符号逻辑通报》**29**（2023年），第 2 期，170–263。5. Christopher J. Eagle、Isaac Goldbring 和 Timothy H. McNicholl, *Computable K-theory forC^*-algebras II: AF algebras*, 预印本。arXiv:2602.06882。6. Christopher J. Eagle、Isaac Goldbring、Timothy H. McNicholl 和 Russell Miller, *Computable K-theory for C^*-algebras: UHF algebras*, 《美国数学会汇刊》**379**（2026年），7179–7208。7. , *Effectively nuclear* C*-*algebras*, （2026年），预印本。arXiv:2611.17446。8. , *Non-computability of K-theory for computably presented C^*-algebras*, 《加拿大数学通报》（2026年），即将发表。arXiv:2602.06877。9. Christopher J. Eagle 和 Timothy H. McNicholl, *The computable functional calculus*, （2026年），预印本。arXiv:2606.05456。

10. Ilijas Farah、Andrew Toms 和 Asger T
¨ *The descriptive set theory of* **-algebra* ornquist，C，*invariants*. 2013 5226
《国际数学研究通知》IMRN（），第 22 期，5196–。11. Alec Fox，*Computable presentations of* C**-algebras*，《符号逻辑杂志》（2022年），1–26。12. Alec Fox、Isaac Goldbring 和 Bradd Hart，*Locally universal* C**-algebras with computablepresentations*，《泛函分析杂志》**287**（2024年），第 12 期，论文编号 110652，15 页。13. Johanna N. Y. Franklin、Isaac Goldbring 和 Timothy H. McNicholl，*Effective metric structure theory* 2026 ，施普林格数学专著，施普林格，Cham，。14. Isaac Goldbring，*Computably strongly self-absorbing* C**-algebras*，《理论计算机科学》**1060**（2026年），论文编号 115647，9 页。15. Isaac Goldbring 和 Bradd Hart，*Computability and the Connes embedding problem*，《符号逻辑通报》**22**（2016年），第 2 期，238–248。16. Timothy H. McNicholl，*Evaluative presentations*，《逻辑与计算杂志》**35**（2025年），第 5 期，论文编号 exaf036，11 页。17. Gerard J. Murphy，*C*-algebras and operator theory*，Academic Press, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，1990年。18. Wilhelm Winter，*Structure of nuclear* C**-algebras: from quasidiagonality to classificationand back again*，《2018年国际数学家大会——里约热内卢。第 III 卷：特邀报告》，World Sci. Publ.，哈肯萨克，新泽西州，2018年，第 1801–1823 页。19. Mariko Yasugi、Takakazu Mori 和 Yoshiki Tsujii，*Effective properties of sets and functions in metric spaces with computability structure*，第 219 卷，1999年，《可计算性与复杂性》（达格施图尔城堡，1997年），第 467–486 页。20. Martin Ziegler 和 Vasco Brattka，*A computable spectral theorem*，《分析中的可计算性与复杂性》（斯旺西，2000年），《计算机科学讲义》，第 2064 卷，施普林格，柏林，2001年，第 378–388 页。

（C.J. Eagle）

Department of Mathematics and Statistics University of Victoria. PO , , , , BOX 1700 STN CSC Victoria British Columbia Canada. V8W 2Y2
Email address: eaglec@uvic.ca*URL*: https://web.uvic.ca/~eaglec/