arXiv:2611.28382v2 [math.GR] 25 Nov 2026

幺幂见证：SU(2) 上词映射的消失阶，以及下中心列中的长度

DANIEL KEREN

Abstract. 令 $n \geq 2$, $k \geq 2$ 和 $1 \neq w \in \gamma_k(F_n)$为秩 n自由群下中心列的第 k项。我们证明，w 的循环约化共轭元至少有 $2k$个循环音节，因此 w 的词长至少为 $2k$；此前由 Malestein 和 Putman 得到的线性下界为 k。对于 $1 \neq w \in [F_n, F_n]$，我们还证明，w 在 SU(2) 或 SO(3) 上的字映射在单位元处的消失阶至多为 $T/2$，其中 T 是 w的循环约化共轭元所含的循环音节数；当 $[x_1, x_2]$ 以及具有六个和八个音节的词时，等号成立。两种证明都通过在幺幺矩阵 $I + tN_i$处取值来考察 w，其中 N_i 是秩一幂零矩阵，并将所得矩阵 $M(t) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[t])$的迹的次数与 $M(t) - I$ 在 $t = 0$处的消失阶进行比较。

1. Introduction and results

令 $n \geq 2$，并令 F_n 表示由 x_1、……、x_n 生成的自由群。记 $F_n' = [F_n, F_n]$ 和 $\gamma_k = \gamma_k(F_n)$ 为下中心列（$\gamma_1 = F_n$、$\gamma_{k+1} = [\gamma_k, F_n]$，因此 $\gamma_2 = F_n'$），其中 $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$。对于一个词 w，n_i 表示 x_i 在 w 中的指数和；当且仅当所有 $n_i = 0$ 时，$w \in F_n'$。音节是约化词中的一个极大块 x_i^r、$r \neq 0$。循环约化词的循环音节是将该词按循环方式读取时得到的音节，因此，如果最后一个音节和第一个音节是同一生成元的幂，它们就会合并。例如，循环约化词 $x_1x_2x_1^{-1}x_2x_1$ 有 5 个音节，但有 4 个循环音节，因为其最后一个和第一个音节合并为 x_1^2。

我们用 $M_2(\mathbb{C})$ 表示复 2×2 矩阵的代数，用 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \subset M_2(\mathbb{C})$ 表示无迹矩阵，并用 $\mathfrak{su}(2) \subset \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 表示 SU(2) 的李代数，即无迹反厄米矩阵；E_{pq} 是在位置 (p, q) 上为 1、其他位置均为 0 的矩阵，对于矩阵 $[X, Y] = XY - YX$。矩阵的范数是相对于 $\mathbb{C}^2$ 上欧几里得范数的算子范数。

定义 1。对于 $1 \neq w \in F_n$ 和一个整数 $d \geq 1$，称 w 在 d 处 I 以 C 阶消失 $\varepsilon_0 > 0$，如果存在 C，$\varepsilon_0 > 0$ 使得

$$\|w(h_1, \ldots, h_n) - I\| \leq C\,\varepsilon^d \quad \text{whenever } 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0,\ h_i \in \mathrm{SU}(2) \text{ and } \|h_i - I\| \leq \varepsilon\ (1 \leq i \leq n).$$

这对 $d = 1$ 成立（见下文引理 5(d)）；如果它对 d 成立，那么它对每个 $d' \leq d$ 都成立。令 $\mathrm{ord}(w) \in \{1, 2, \ldots\} \cup \{\infty\}$ 为所有这类 d 的上确界。

根据下文引理 5(a)、(d)，$\mathrm{ord}(w)$ 是使 k 次齐次项 $w(e^{tX_1}, \ldots\ldots, e^{tX_n})$ 在 $\mathfrak{su}(2)^n$ 上不恒为零的最小 k。特别地，如果 $w \notin F_n'$，则 $\mathrm{ord}(w) = 1$，因为此时该项为 $\sum_i n_i X_i$。覆盖映射 $\rho\colon \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ 限制为一个微分同胚

在 I 的邻域之间，因此每个接近 I 的 $g \in \mathrm{SO}(3)$ 都是某个接近 I 的唯一 $h \in \mathrm{SU}(2)$ 的 $\rho(h)$，并且在 I 附近，$\|\rho(h) - I\|$ 和 $\|h - I\|$ 彼此之间有常数倍的界；由于 $\rho(w(h_1, \ldots\ldots, h_n)) = w(\rho(h_1)\ldots\ldots, \rho(h_n))$，将 SO(3) 替代 SU(2)（并采用任意实 3×3 矩阵范数）的定义 1 给出相同的数值。

Date：2026 年 11 月。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 20F14、20E05；次要分类号 20F12。*Key words and phrases.* 下中心列、自由群、词长、词映射、近似定律、SU(2)、迹多项式。

定理 2。 设 $1 \neq w \in F_n'$ 是一个长度为 L 的词，令 T 为 w 的某个循环约化共轭元的循环音节数（任意两个这样的共轭元互为循环置换，因此 T 仅取决于 w）。那么

$$\mathrm{ord}(w) \leq T/2 \leq L/2.$$

此界由 $w = [x_1, x_2]$ 达到；对于它，$\mathrm{ord}(w) = 2$，且在每个秩为 $n \geq 2$ 的情况下都有 $T = L = 4$。

定理 3. 设 $n \geq 2$、$k \geq 2$ 和 $1 \neq w \in \gamma_k(F_n)$。那么，$w$ 的一个循环约化共轭元至少有 $2k$ 个循环音节；特别地，表示 w 的约化词长度至少为 $2k$。

在定理 3 之前，已知的长度下界为 k，这是 Malestein 和 Put- man [8, 定理 1.2] 对任意秩的自由群所给出的结果，改进了由 Fox [3, 引理 4.2] 得到的界 $k/2$；$\gamma_k(F_2)$ 中最短元素的长度已知至多为 $k^{1.45}$ 阶（Elkasapy–Thom [2], Elkasapy [1]）；关于这一差距的最新综述，见 [9]。定理 3 将线性下界的常数从 1 提高到 2，且适用于每个秩。与证明 [8, 定理 1.2], 类似，该定理证明了 γ_k 的非平凡元素至少有 k 个音节；它给出的是音节数的界，而不只是长度的界，并未改变指数。其证明纯属代数方法，不使用第 2 节。对于 $k = 2$，3 和 4，音节界可以达到（注 9）；我们不知道当 k 较大时，常数 2 是否还能提高。论证只用到了 tr $M(t)$ 的次数及其在 $t = 0$ 处的消失阶；若要改进，想必需要关于 tr $M(t)$ 的更多信息。

定理 2 对已知 SO(3) 近似定律背后的量给出了上界：对于所有 $A, B \in \mathrm{SO}(3)$，长度为 L、满足 $\|W(A, B) - I\| \leq \exp(-cL^{\delta})$ 的非平凡字 W。Elkasapy [1] 的 $\delta = \log_2((1+\sqrt{5})/2) = 0.694\ldots$，而 Yehuda [10] 的 $\delta = 0.879\ldots$，二者都来自那些在单位元处的阶随长度按幂次增长的字。根据定理 2，该阶至多为 $L/2$。

定理 2 中较弱的界 $\mathrm{ord}(w) \leq L$ 可通过引理 5(b) 从 Glazer 和 Hendel [4, 的工作推出。Proposition 7.6], 他们证明，单代数群上字映射的符号——即其在单位元处最低阶的非零项——是一个次数至多为该字长度的李代数字映射。

第 2 节表明，$\mathrm{ord}(w)$ 不超过 $w(e^{tX_1}$、.....、$e^{tX_n}) - I$ 在 $t = 0$ 处的消失阶，对 任意 X_1、.....、$X_n \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 都成立，即使这些 X_i 不属于 $\mathfrak{su}(2)$，因此矩阵 e^{tX_i} 也不属于 SU(2)。在第 3节中，我们取秩一幂零 X_i，此时该字成为定义在 $\mathbb{Z}[t]$ 上的矩阵 $M(t)$。这些结果源于关于其迹的两个事实。首先，对于包含至少两个生成元的循环约化 w，tr $M(t)$ 的次数等于 w 的循环音节数；对于 $n = 2$，这是 Horowitz 的三角特化 [5], 的一个特例，形式为 [6, 引理 4.4]。其次，由于 det $M = 1$，多项式 tr $M(t) - 2$ 在 $t = 0$ 处的消失阶至少是 $M(t) - I$ 的两倍。据我们所知，此前尚未将这两个事实结合起来。

2. Witnesses outside $\mathfrak{su}(2)$

为了从上方界定 $\mathrm{ord}(w)$，只需给出一个元组，使得 w 与 I 相距不太近。若 $(X_1, \ldots, X_n) \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})^n$ 使得 $e^{tX_1}, \ldots, e^{tX_n} - I$ 在 $t = 0$ 处恰好消失到 $B < \infty$ 阶，我们就称其为 w 的阶数为 B 的见证，或简称见证；根据下文的引理 5(c)，$\mathrm{ord}(w) \leq B$。见证不必属于 $\mathfrak{su}(2)^n$：下文的系数 c_k 是多项式，因此它们在 $\mathfrak{su}(2)^n$ 上恰好于在 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})^n$ 上一样为零。

引理 4。 对于 $X_1,\dots,X_n \in M_2(\mathbb{C})$，映射 $t \mapsto \Phi_w(t) = w(e^{tX_1},\dots,e^{tX_n})$ 由关于 t 的幂级数给出，该级数对每个 $t \in \mathbb{C}$都收敛：

$$\Phi_w(t) = I + \sum_{k\ge 1} c_k(X_1,\dots,X_n)\, t^k,$$

其中每个 $c_k:\ M_2(\mathbb{C})^n \to M_2(\mathbb{C})$ 都是有理数系数的多项式映射，且为 k 次齐次。

证明。 每个字母贡献一个因子 $e^{\pm tX_i} = \sum_j (\pm tX_i)^j/j!$，这是一个对任意 t 都绝对收敛的级数；因此它们的乘积也绝对收敛，其中每个 w 字母对应一个因子。展开并合并 t 的各次幂后，t^k 的系数是一个有限和，由总长度为 k 的 X_i 的乘积构成，且系数为有理数。常数项为 I。□

引理 5。 设 c_k 是引理 *4* 中对应于字 w 的系数映射，并令 $m = \min\{k \ge 1:\ c_k \not\equiv 0$ 在 $\mathfrak{su}(2)^n\} \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ 上（若集合为空，则 $m=\infty$）。那么：

(a) $\mathrm{ord}(w) \le m$；*(b)* $m = \min\{k\ge 1:\ c_k \not\equiv 0$ 在 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})^n\}$ 上；*(c)* 若对某个 $X_1,\dots,X_n \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$，有 $w(e^{tX_1},\dots,e^{tX_n}) = I + t^B W(t)$，其中 $B\ge 1$ 为整数，且 $W(t)$ 是满足 $W(0)\neq 0$ 的矩阵值幂级数（也就是说，$(X_1,\dots,X_n)$ 是 w 的一个 B 阶见证），则 $\mathrm{ord}(w) \le B$；*(d)* $\mathrm{ord}(w) \ge m$；因此，结合 *(a)*，$\mathrm{ord}(w) = m$。

证明。 (a) 若 $m=\infty$，则无需证明。否则，选取 $X_1,\dots,X_n \in \mathfrak{su}(2)$，使得$c_m(X_1,\dots,X_n)\neq 0$；将每个 X_i 替换为某个实数 $\lambda>0$ 倍的 λX_i后，我们可以假设 $\|X_i\|\le 1$。对于$0<\varepsilon\le 1$，令 $t=\varepsilon/2$。那么 $e^{tX_i} \in$ 属于 SU(2)，且

$$\|e^{tX_i} - I\| \le t\|X_i\| e^{t\|X_i\|} \le (\varepsilon/2)e^{1/2} \le \varepsilon$$

（将 tX_i 从 $e^{tX_i}-I$的级数中提出来），而由于 $c_k \equiv 0$ 在 $\mathfrak{su}(2)$ 上对 $k<m$成立，^{n}，由引理 4 得

$$\|w(e^{tX_1},\dots,e^{tX_n}) - I\| \ \ge\ \|c_m\|\, t^m - O(t^{m+1}) \ \ge\ \tfrac{1}{2}\|c_m\|\, 2^{-m}\varepsilon^m$$

当 ε充分小时成立，其中 $c_m = c_m(X_1,\dots,X_n)$。因此，w在 I处不以 $m+1$阶消失。
(b) 这些矩阵

$$Z_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}\end{pmatrix},\quad Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix},\quad Z_3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}$$

属于 $\mathfrak{su}(2)$，且在 $\mathbb{C}$上线性无关，因此它们构成 3 维复空间 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$的一组基；每个 $X\in\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$都可唯一表示为 $X=\sum_j \xi_j Z_j$，其中 $\xi_j\in\mathbb{C}$唯一；当且仅当所有 ξ_j 均为实数时，$X\in\mathfrak{su}(2)$ 成立。在坐标 $X_i=\sum_j \xi_{ij}Z_j$ 下，c_k 的每个元素都是关于 $(\xi_{ij})\in\mathbb{C}^{3n}$ 的复多项式。若它对所有实数 (ξ_{ij}) 都为零，则其所有系数均为零，因此它在 $\mathbb{C}^{3n}$ 上恒为零。因此，$c_k\equiv 0$ 在 $\mathfrak{su}(2)^n$ 上成立，意味着 $c_k\equiv 0$ 在 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})^n$上成立；反之显然。

（c）比较 t^k 在 $I+t^B W(t)$ 中的系数与引理 4 的展开式，得到 $c_k(X_1,\ \dots\dots,\ X_n) = 0$ 对于 $k<B$ 和 $c_B(X_1,\ \dots\dots,\ X_n) = W(0) \neq 0$。因此 $c_B\neq 0$ 在 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})^n$ 上成立，故由 (b) 可得 $m\le B$，并由 (a) 得 $\mathrm{ord}(w) \le m \le B$。

(d) 设 L 为 w的长度。若 $h\in$ SU(2) 且 $\|h-I\|\le\varepsilon$，则用酉矩阵将 h 对角化：h 的特征值为 $e^{\pm \mathrm{i}\theta}$，其中 $0\le\theta\le\pi$；而 $h=e^X$ 是某个特征值为 $\pm\mathrm{i}\theta$的 $X\in\mathfrak{su}(2)$。于是 $\|X\|=\theta$ 且 $\|h-I\| = |e^{\mathrm{i}\theta}-1| = 2\sin(\theta/2) \ge 2\theta/\pi$，因此 $\|X\|\le \pi\varepsilon/2$。现在令 $h_1,\ \dots,\ h_n\in$属于 SU(2)，且 $\|h_i-I\|\le\varepsilon$；由上可知，$h_i = e^{X_i}$具有 $X_i\in\mathfrak{su}(2)$，并且 $\|X_i\|\le r:=\pi\varepsilon/2$。由引理 4，取 $t=1$，$w(h_1,\ \dots,\ h_n) = I+\sum_{k\ge1} c_k(X_1,\ \dots,\ X_n)$，且 $c_k(X_1,\ \dots,\ X_n)$

是对满足 $\sum_l j_l = k$的 $(j_1, \ldots, j_L)$ 求和所得的项，每项都是范数至多为 $\prod_l r^{j_l}/j_l!$ 的乘积；因此 $\|c_k(X_1, \ldots, X_n)\| \le (Lr)^k/k!$。由于 $c_k \equiv 0$ 在 $\mathfrak{su}(2)^n$ 上对 $k < m$成立，

$$\|w(h_1, \ldots, h_n) - I\| \le \sum_{k \ge m} \frac{(Lr)^k}{k!} \le (Lr)^m e^{Lr} \le \left(\frac{\pi L}{2}\right)^m e^{\pi L/2}\, \varepsilon^m \qquad (\varepsilon \le 1).$$

因此，w 在 I处的消失阶为 m。（对于 $m = \infty$，将此结论应用于每个有限的 m'。）由于 $m \ge 1$，这也给出了定义 1 中所用的情形 $d = 1$。□

3. The unipotent witness

令 $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $\omega(u, v) = u^\top J v = \det(u \mid v)$，其中 $u, v \in \mathbb{Z}^2$（这是以 u, v为列的矩阵的行列式）。选取 $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{Z}^2$，使得 $\omega(u_i, u_j) \ne 0$适用于 $i \ne j$（例如，取 $u_i = (1, i)$，此时 $\omega(u_i, u_j) = j - i$），并定义

$$N_i = u_i u_i^\top J, \qquad g_i(t) = e^{tN_i} = I + tN_i.$$

由于 $u_i^\top J u_i = 0$，我们有 $\operatorname{tr} N_i = 0$且 $N_i^2 = 0$。因此 $N_i \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$，指数级数在一次项后终止，$g_i(t) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[t])$，并且对每个整数 r，$g_i(t)^r = I + rtN_i$。对于一个词 w，令

$$M(t) := w(g_1(t), \ldots, g_n(t)) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[t]).$$

每个音节 x_i^r 贡献单个因子 $I + rtN_i$，其各项的次数为 ≤ 1；因此，M 的各项次数至多为 w的音节数。

对于 $n = 2$，$u_1 = (1, 0)$，$u_2 = (0, 1)$，可得 $N_1 = E_{12}$，$N_2 = -E_{21}$。在这种情况下，下一个引理是 Horowitz [5] 关于三角矩阵 $\begin{pmatrix} \lambda & t \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ t & \mu^{-1} \end{pmatrix}$中的词的三角特化的一个特例：通过令 $\lambda = \mu = 1$，并在第二个矩阵中用 $-t$ 替换 t 即可得到（参见 [6, 引理 44]，其中计算了一般情形下的首项系数 λ, μ）。

引理 6 (迹的精确次数)。设 $w = x_{i_1}^{r_1} x_{i_2}^{r_2} \cdots x_{i_T}^{r_T}$是一个循环约化词，写成其 $T \ge 2$ 个循环音节，使得 $r_j \ne 0$，且相邻音节（包括最后一个和第一个）涉及不同的生成元（$i_j \ne i_{j+1}$，指标模 T）。那么，迹 $M(t)$ 是关于 t 的一个次数恰为 T的多项式，其首项系数为

$$\prod_{j=1}^{T} r_j \prod_{j=1}^{T} \omega(u_{i_j}, u_{i_{j+1}}) \ne 0.$$

证明。$M(t) = \prod_{j=1}^{T} (I + r_j t N_{i_j})$。展开乘积后，若某一项包含某个因子中的加项$I$，则其关于 t 的次数至多为 $T - 1$；唯一次数为 T 的项是 $t^T \prod_j r_j \cdot N_{i_1} N_{i_2} \cdots N_{i_T}$。令 $v_j = u_{i_j}$（且 $v_{T+1} = v_1$），

$$N_{i_1} \cdots N_{i_T} = v_1 \, (v_1^\top J v_2)(v_2^\top J v_3) \cdots (v_{T-1}^\top J v_T)\, v_T^\top J,$$

其迹为 $\prod_{j<T} \omega(v_j, v_{j+1}) \cdot v_T^\top J v_1 = \prod_{j=1}^{T} \omega(v_j, v_{j+1})$。每个因子都非零，因为$i_j \ne i_{j+1}$。□

引理 7（行列式恒等式）。设 $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}[t])$，$M = I + t^B W$且 $B \ge 1$，$W \in M_2(\mathbb{C}[t])$。则

$$\operatorname{tr} M - 2 = -t^{2B} \det W.$$

证明。对于 2×2 矩阵，$\det(I + Q) = 1 + \operatorname{tr} Q + \det Q$。由 $Q = t^B W$ 和 $\det M = 1$:$t^B \operatorname{tr} W + t^{2B} \det W = 0$，所以 $\operatorname{tr} M - 2 = \operatorname{tr} Q = t^B \operatorname{tr} W = -t^{2B} \det W$。□

定理 2 的证明。 令 $1 \neq w \in F_n'$。w 的阶在共轭下保持不变（SU(2) 中的共轭保留 $\|\cdot - I\|$），M 的迹也如此；因此我们可以将 w 替换为一个循环约化共轭元，其长度至多为 L，属于 F_n' 且非平凡。它至少涉及两个生成元（单个生成元的非平凡幂具有非零指数和）。对它作循环置换，所得仍是 w 的一个共轭元，因此还可以假设其首末音节分别是不同生成元的幂。于是它具有引理 6 的形式，其中 $2 \le T \le L$。

根据引理 6，$\operatorname{tr} M - 2$ 是一个次数为 T 的非零多项式；特别地，$M \neq I$。由于 $M(0) = I$，记 $M = I + t^B W$，其中 $B \ge 1$ 且 $W(0) \neq 0$。根据引理 7，t^{2B} 整除非零多项式 $\operatorname{tr} M - 2$，因此 $2B \le T$。应用引理 5(c)，取 $X_i = N_i$，$\operatorname{ord}(w) \le B \le T/2 \le L/2$。

等号成立于 $[x_1, x_2]$。这里 $L = T = 4$，因此根据我们刚刚证明的结果，$\operatorname{ord}([x_1, x_2]) \le 2$。反之，如果 $w \in F_n'$，那么 $c_1(X_1, \ldots, X_n) = \sum_i n_i X_i = 0$，因为所有指数和都为零，所以 $m \ge 2$，并且根据引理 5(d)，$\operatorname{ord}(w) \ge 2$。□

定理 3 的证明。 令 $\Gamma_p = \{U \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[t]) : U \equiv I \bmod t^p\}$。对于 $U = I + t^p P \in \Gamma_p$ 和 $V = I + t^q Q \in \Gamma_q$（其中 $P, Q \in M_2(\mathbb{Z}[t])$），

$$UVU^{-1}V^{-1} - I = (UV - VU)\,U^{-1}V^{-1} = t^{p+q}(PQ - QP)\,U^{-1}V^{-1},$$

由于 Γ_{p+q} 是一个子群（模 t^{p+q}约化映射的核），$[\Gamma_p, \Gamma_q] \subset \Gamma_{p+q}$。同态 $\varphi: F_n \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[t])$，$x_i \mapsto g_i(t)$，将 F_n 映射到 Γ_1中，因此根据归纳法，$\varphi(\gamma_k) = [\varphi(\gamma_{k-1}), \varphi(F_n)] \subset [\Gamma_{k-1}, \Gamma_1] \subset \Gamma_k$。

令 $1 \neq w \in \gamma_k$, $k \ge 2$。由于 γ_k 是正规子群，我们可以像定理 2 的证明中那样，用一个循环约化共轭元替换 w，该共轭元具有 T 个循环音节，并按引理 6 中的形式书写；它属于 F_n'。根据引理 6，$M \neq I$，因此 $M = I + t^B W$，其中 $W(0) \neq 0$，且 $B \ge k$，因为 $M \in \Gamma_k$。如定理 2 的证明中所述，$2B \le T$。因此 $2k \le T$，而 T至多等于该循环约化共轭元的长度，而后者至多等于表示 w的约化词的长度。□

注 8. 定理 3 并未用到第 2 节：它只用到了 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[t])$、滤子 $\Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \cdots$和引理 6、7。对于 $k = 2$（$[x_1, x_2]$），音节界 $2k$ 可以达到；对于 $k = 3$（注 9 中的词$ab^2ab^{-1}a^{-2}b^{-1}$，它属于 γ_3 且有 6 个音节）以及 $k = 4$（注 9 中的词$a^3b^2ab^{-1}a^{-3}b^{-2}a^{-1}b$，它属于 γ_4 且有 8 个音节），该界也可以达到。

注 9（例子，$n = 2$）. 设 $a = x_1$、$b = x_2$，并取 $u_1 = (1,0)$、$u_2 = (0,1)$，使得 $N_1 = E_{12}$ 和 $N_2 = -E_{21}$。在本注中，我们始终使用见证 $(N_1, -N_2)$，而非 (N_1, N_2)：令 $\alpha(t) = e^{tE_{12}} = g_1(t)$、$\beta(t) = e^{tE_{21}} = g_2(-t)$，以及 $M(t) = w(\alpha(t)\ \beta(t))$。引理 5 和 7 仍然适用，而引理 6 的首项系数乘以 $(-1)^s$后仍成立，其中 s 是 b-音节的数量。对于 $w = ab^2ab^{-1}a^{-2}b^{-1}$（由计算机搜索找到），它属于 F_2'，且有 $L = 8$ 和 $T = 6$，

$$M(t) = \begin{pmatrix} 1 - 4t^4 - 4t^6 & 2t^3 + 4t^5 \\ -2t^3 - 4t^5 & 1 + 4t^4 \end{pmatrix},$$

因此 $\operatorname{tr} M - 2 = -4t^6$ 和 $M - I$ 恰好以 3 阶消失。因此，$\operatorname{ord}(w) \le 3$.

现在我们证明 $\operatorname{ord}(w) \ge 3$。设 $w = y_1 \cdots y_L$ with $y_p \in \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}$，令 $\epsilon_p = \pm 1$ 为 y_p的指数；对于 $X, Y \in M_2(\mathbb{C})$，若 $y_p = a^{\pm 1}$ 则令 $A_p = \epsilon_p X$，若 $y_p = b^{\pm 1}$则令 $A_p = \epsilon_p Y$。$\prod_p e^{tA_p}$ 的 t^2-系数为 $c_2 = \frac{1}{2}\sum_p A_p^2 + \sum_{p<q} A_p A_q$。若 $w \in F_2'$，则 $\sum_p A_p = 0$，平方后得到 $\sum_p A_p^2 = -\sum_{p<q}(A_pA_q + A_qA_p)$，因此 $c_2 = \frac{1}{2}\sum_{p<q}[A_p, A_q]$。两个 a 字母组成的字对或两个 b 字母组成的字对均不产生贡献，因为 $[X, X] = [Y, Y] = 0$；又由于 $\left(\sum_{y_p \in \{a^{\pm 1}\}} \epsilon_p\right)\left(\sum_{y_q \in \{b^{\pm 1}\}} \epsilon_q\right) =$

0，因此以 b 字母开头的字对与以 a 字母开头的字对贡献相同。因此

$$c_2 = \nu(w)\,[X,Y], \qquad \nu(w) = \sum_{\substack{p<q \\ y_p\in\{a^{\pm1}\},\ y_q\in\{b^{\pm1}\}}} \epsilon_p\epsilon_q.$$

（对于 $[a,b]$、 $\nu = 1$；一般而言， $\nu(w)$ 是 w 所围成的闭格路的有向面积，逆时针方向为正，其中 $a^{\pm1}$ 和 $b^{\pm1}$ 是向右/左和向上/下的单位步。）对于我们的 w，四个 a 字母分别贡献 0， -2， 1， 1，因此 $\nu(w) = 0$。于是 $c_1 \equiv c_2 \equiv 0$，并且根据引理 5(d)，$\mathrm{ord}(w) \geq 3$。所以 $\mathrm{ord}(w) = 3 = T/2$，定理 2 的界 $T/2$ 得以达到。

此外， $w \in \gamma_3$。事实上， c_2 在 F_2' 上可加，因为其中 $w(e^{tX},\ e^{tY}) = I + O(t^2)$，且它在 $\gamma_3 = [F_2', F_2]$ 上为零：若 $U = I + O(t^2)$ 和 $V = I + O(t)$ 是关于 t 的幂级数，那么如同定理 3 的证明中那样， $UVU^{-1}V^{-1} - I = (UV - VU)\ U^{-1}V^{-1} = O(t^3)$。因此， ν 诱导出一个同态 $\gamma_2/\gamma_3 \to \mathbb{Z}$，将 $[a,b]$ 映为 1。此外， γ_2/γ_3 由 $[a,b]$ 的像生成： γ_2 是 $[a,b]$ 的正规闭包，因为模去该正规闭包后， F_2 是阿贝尔的；而模去 γ_3 后， $[a,b]$ 的每个共轭元都等于 $[a,b]$，因为 $g[a,b]g^{-1} = [a,b]\,[[a,b]^{-1}, g]$。所以该同态是一个同构，并且 $\nu(w) = 0$ 给出 $w \in \gamma_3$。由于 w 有 $T = 6$ 个音节，它还表明，对于 $k = 3$，定理 3 的界 $T \geq 2k$ 得以达到。

对于 $k = 4$，通过计算机搜索找到的单词 $w_4 = a^3b^2ab^{-1}a^{-3}b^{-2}a^{-1}b$ 还具有 $L = 14$和 $T = 8$。借助上述见证，

$$M(t) = \begin{pmatrix} 1 - 6t^4 - 12t^6 + 36t^8 & 24t^5 + 36t^7 \\ -6t^5 + 12t^7 & 1 + 6t^4 + 12t^6 \end{pmatrix},$$

因此，$\mathrm{tr}\ M - 2 = 36t^8$ and $M - I$ 恰好以 4 阶消失；于是 $\mathrm{ord}(w_4) \leq 4$。设 ξ, η 是非交换变量。 w_4 的 Magnus 展开，在 $a \mapsto 1 + \xi$, $b \mapsto 1 + \eta$ 下的像（使得 $a^{-1} \mapsto 1 - \xi + \xi^2 - \cdots$ and $b^{-1} \mapsto 1 - \eta + \eta^2 - \cdots$），位于 ξ, η 中形式幂级数环内，且没有 1、2 或 3 次项（由计算机直接计算得出）。根据 Magnus 定理 [7]， γ_k 由 F_2 中 Magnus 展开没有 1，....., $k-1$ 次项的元素构成。因此 $w_4 \in \gamma_4$（并且根据定理 3， $w_4 \notin \gamma_5$，因为 $T < 10$），所以定理 3 的界 $T \geq 2k$ 对 $k = 4$ 也能达到。最后，若 $U = I + O(t^p)$ 和 $V = I + O(t^q)$ 是 t 中的幂级数，则如上所述， $UVU^{-1}V^{-1} = I + O(t^{p+q})$；对 k 进行归纳法可得，每个 $u \in \gamma_k$ 都满足 $u(e^{tX}, e^{tY}) = I + O(t^k)$。对于 $w_4 \in \gamma_4$，这给出 $c_1 \equiv c_2 \equiv c_3 \equiv 0$，所以根据引理 5(d)，$\mathrm{ord}(w_4) \geq 4$，且 $\mathrm{ord}(w_4) = 4 = T/2$。

致谢。 感谢 Gal Yehuda 让我接触到 SU(2) 中的近似定律，并感谢其富有帮助的讨论。

AI 助手 Claude（Anthropic；模型 Opus 5.5）被用于寻找和分析注 9 的例子。对于 5 阶，没有找到带有 $T = 10$ 的词（搜索范围涵盖了由两个生成元构成的、长度不超过 14 的词）。

References

[1]A. Elkasapy, *A new construction for the shortest non-trivial element in the lower central series*, arXiv:1610.09725。[2] A. Elkasapy 和 A. Thom, *On the length of the shortest non-trivial element in the derived and the lower central series* 18 2015 793 804 1311 0138 ，《群论杂志》（），–；arXiv:。。[3] R. H. Fox, *Free differential calculus. I. Derivation in the free group ring*，《数学年刊》（第2辑）57（1953），547–560。[4] I. Glazer 和 Y. I. Hendel, *On singularity properties of word maps and applications to probabilistic Waring type problems* 299 2024 1497 1912 12556 ，《美国数学学会回忆录》（），第号；arXiv:。。[5] R. D. Horowitz, *Characters of free groups represented in the two-dimensional special linear group*，《纯粹与应用数学通讯》25（1972），635–649。[6] I. Kapovich, *On quantitative aspects of trace polynomials*, arXiv:2605.25265。[7] W. Magnus, *Über Beziehungen zwischen höheren Kommutatoren*，《纯粹与应用数学杂志》177（1937），105–115。

On the self-intersections of curves deep in the lower central series of a surface
[8] J. Malestein 和 A. Putman，*group* 149 2010 73 84 0901 2561 ，
《Geom. Dedicata》（），–；arXiv:。。[9] J. Malestein 和 A. Putman，*Word length versus lower central series depth for surface groups and RAAGs*，《Groups Geom. Dyn.》（2024），在线优先发表，doi:10.4171/GGD/842；arXiv:2307.04882。[10] G. Yehuda，*Improved almost laws for SO*（3），arXiv:2607.15811。

Department of Computer Science, University of Haifa, Haifa, Israel*Email address*:
dkeren@ds.haifa.ac.il