arXiv:2611.28384v1 [math.HO] 20 Nov 2026

路易·巴舍利耶的《投机理论》：传播与接受

Hector Giacomini
丹尼斯·泊松研究所，图尔大学–法国国家科学研究中心，法国图尔giacominihector@gmail.com

摘要

路易·巴舍利耶的《投机理论》（1900年）在一项关于金融波动的研究中，首次提出了布朗运动的概率模型，比爱因斯坦1905年的物理理论早了五年。巴舍利耶将概率分布的演变与热方程联系起来，预见了布朗运动理论的核心要素；这一理论后来成为数学和物理学的重要研究领域。他对投机和期权估值的论述也为现代数理金融奠定了基础。这些贡献后来日益重要，由此引出一个历史问题：在其更广泛的意义得到认可之前，这篇学位论文的传播范围究竟有多广？

本文依据与图书馆的通信、留存的副本、入藏登记簿、来源标记、历史目录和印刷版获取清单，重建了这篇学位论文以两种出版形式——单独发行的Gauthier-Villars学位论文，以及刊载于《高等师范学校科学年刊》上的版本——在国际间的传播与接受情况。本文确认了1900年官方学位论文交换网络中列出的三十八家外国学术机构，并通过留存的副本和收讫记录，记述了该网络的运作。大学交换、商业购买、期刊发行和个人赠送构成了相辅相成的传播渠道。美国大学图书馆的大量馆藏展现了其地理传播范围；有日期的证据表明，康奈尔于1900年4月收到该论文。出版商的宣传和作者多次捐赠，进一步证明了他们为跨越学科与国界传播作品、触达读者所作的努力。

同期评论和后续应用表明，这些思想曾选择性地进入数学、精算学和经济学领域，其中包括未经注明出处的传播。对概率合成与扩散的考察，阐明了该学位论文在随机过程史中的地位，以及它在数学上与后来对物理布朗运动的处理之间的关系。现存副本还将早期传播与重新兴起的兴趣联系起来：哥伦比亚大学期刊卷于1901年登记入藏，记录了Mandelbrot的借阅

发生于1961年。

通过区分资料可获得性与有记录的阅读和使用情况，本研究表明，尽管认可来得较晚，早期国际传播与一个可辨识但分散的读者群体却并存。由此，本研究拓展了对巴舍利耶学术接受情况的重新评估，并考察了为金融投机而发展出的思想如何在不同科学传统中得到赏识。

1 巴舍利耶的论文：学术背景、主题与反响

巴舍利耶走上数学道路的经历，与法国科学精英中的许多人不同。他于1870年出生在勒阿弗尔，1889年父母双双去世后中断学业，不得不工作。他或许接手了家族生意。兵役进一步延误了他的学业；1892年，22岁的他开始在索邦大学学习。他既没有就读巴黎高等师范学院，也没有就读巴黎综合理工学院，而这两所院校提供系统的训练，并为进入教学、行政部门及国家技术服务机构铺设了既定道路。因此，他的大学学习处于一种制度框架之外；这一框架为许多未来的科学精英成员保障了早期的职业前景。在这几年间，他似乎曾在巴黎证券交易所相关领域工作；他的学位论文展现出他对当时交易惯例的深入了解（Taqqu，2001年，第4页）。

然而，他所受的训练使他得以直接接触包括 Paul Appell、Joseph Boussinesq 和 Henri Poincaré 在内的顶尖数学家（Courtault 等人，2000年）。正如 Davis 和 Etheridge 所强调的，Boussinesq 向他介绍了热理论，而 Poincaré 则向他介绍了概率，为他分析金融波动提供了可加以结合的资源（Davis 和 Etheridge，2006年，第80–81页）。

巴舍利耶于1900年3月29日在巴黎理学院答辩，其论文为《投机理论》，答辩委员会由 Appell 担任主席，Boussinesq 和 Poincaré 担任考官（Courtault 等人，2000年）。该论文由 Gauthier-Villars 单独出版，并于同年刊载于《高等师范学校科学年刊》第三辑第17卷，第21–86页（Bachelier，1900a,b）。单独印刷还具有制度性用途：博士学位授予程序要求候选人为评审机构和机构分发提供相当数量的副本，其中包括与法国及外国大学图书馆进行交换。

该学位论文将概率演算应用于巴黎证券交易所的投机活动，尤其是对被称为年金债券的法国政府债券进行的交易。在展开数学分析之前，巴舍利耶介绍了主要的证券交易所业务，并解释了用于描述这些业务的术语（巴舍利耶，1900年b，第6页）。

参与者通过解读市场状况，对未来价格作出判断。在引言中，巴舍利耶强调了影响价格的诸多因素，以及买方和卖方相互冲突的预期。他试图用数学方式表达市场对可能价格变动的评估中所隐含的概率。此前已经存在对投机活动的概率论方法，尤其是Jules Regnault于1863年提出的方法（Taqqu，2001年，第13–14页）。巴舍利耶的独特贡献在于，系统地用数学方法处理连续时间中的价格波动，并将其应用于金融合约。

它的历史重要性远远超出了这一背景。巴舍利耶通过随时间连续演化的概率律描述价格变动。他将概率传播与Fourier的热方程联系起来，得到了特征尺度随时间平方根增长的高斯分布，并计算了在给定区间内达到指定价格水平的概率。这一构造的数学意义将在下文考察。

Poincaré 的报告既对这一不寻常的主题持谨慎态度，也肯定了这项工作的数学原创性。他指出，投机不属于博士生通常研究的主题，

同时认可巴舍利耶为界定概率应用于金融交易的合理范围所作的努力。谈到该学位论文的核心分析论证时，他认为概率传播与热之间的类比是合理的：Fourier 的推理几乎可以原封不动地应用于这一不同的问题（Poincaré，1900年）。尽管他遗憾巴舍利耶没有进一步发展这种联系，但他认为这已足以证明高斯定律的合理性，并指出其适用范围的局限（Davis 和 Etheridge，2006年，第78页）。

Poincaré 还特别指出了巴舍利耶对一个困难的首次通过问题的解答：确定价格在给定日期之前达到某一指定水平的概率。他称赞这一论证简短、明晰、优雅且具有原创性（Poincaré，1900年）。

尽管评价如此积极，这篇学位论文获得的评定是良好，而不是更高等级的最高荣誉。这一结果需要谨慎解读。正如 Courtault 等人（2000年）所强调的，Poincaré 认真且积极的评述，使得我们难以将这篇学位论文简单描述为遭考官否定或误解的作品。它作为一篇得到认可的数学学位论文进入传播领域，经法国著名数学家审阅，并发表于法国主要数学期刊之一。

这份博士学位并未为巴舍利耶获得学术职位。1909年至1914年间，他在巴黎理学院开设了一门自由课程，讲授概率、金融业务以及与物理学的类比，但并未因这项教学工作获得报酬。

1914年，大学委员会支持使他的任命成为永久职位的努力，但他被征召入伍后，这一前景便中断了。整个战争期间，他都在法国军队服役，此后也从未在巴黎获得永久教授职位。战后，他先后在贝桑松（1919—1922年）、第戎（1922—1925年）和雷恩（1925—1927年）担任临时讲师，替代休假的教授，或在永久任命确定前填补空缺（Taqqu，2001年，第17页）。直到1927年，他年满57岁时，才成为贝桑松的一名正教授，并一直任职至1937年退休（Courtault 等人，2000年；Ben-El-Mechaiekh 和 Dimand，2018年）。

这种长期的职业不稳定构成了其著作传播时的背景之一，但并不能证明这篇学位论文一直无人获取或无人阅读。学术认可、出版传播以及数学结果的应用遵循着不同的轨迹。因此，要了解它早期的历史，就需要考察这篇学位论文如何传到潜在读者手中，以及现存哪些证据能够反映他们对它的关注。

以往的历史研究挑战了将巴舍利耶视为一位彻底被遗忘的先驱这一形象，着重探讨了同时代人的评价、早期读者以及其思想后来的应用（Courtault 等人，2000年；Taqqu，2001年；Jovanovic，2002年；Davis 和 Etheridge，2006年；Jovanovic，2012年；Ben-El-Mechaiekh 和 Dimand，2018年）。本研究通过重建这篇学位论文以两种出版形式流传的物质路径和机构渠道，为重新评估这一形象作出贡献：一种是单独出版的Gauthier-Villars版本，另一种是刊载于《高等师范学校科学年刊》中的版本。本研究综合考察现存副本、来源标记、入藏记录、历史目录、出版商公告和印刷捐赠名录，以确定有记录可证文本出现的地点和时间，以及它如何传至不同机构。

这些资料揭示了相互补充的传播途径：大学学位论文的交流、商业购买、个人演讲，以及该期刊的国际发行。它们还记录了巴舍利耶努力接触法国以外读者的过程，其中包括精算行业的成员。这种国际传播始于其

出版当年，并通过随后进行的获取和捐赠延续下来。

图书馆藏本只能证明作品可供获取，不能证明有人读过。评论、教学和可识别的应用则能为作品的接受情况提供证据。综合这些来源，可以看出，巴舍利耶后来获得认可时，早期国际传播与选择性关注已构成其背景。

2 奥斯本与资料可获取性问题

这项研究的直接缘起，是物理学家 M. F. M. Osborne 后来的一段评论。他任职于美国海军研究实验室。1959年，他发表了《股市中的布朗运动》，尝试运用受统计物理学启发的方法描述股价波动，影响颇大（Osborne，1959a）。他独立于巴舍利耶发展出自己的研究方法：文章中没有提及《投机理论》。

该文发表后，时任底特律韦恩州立大学统计学研究人员的数学家 A. G. Laurent 指出，相关的价格变动概率模型早已得到发展，并被用于经济分析（Laurent，1959）。同年晚些时候，奥斯本在回复中解释说，后续的通信使他得知了自己撰写文章时尚不了解的早期著作（Osborne，1959b）。他特别有力地评价了巴舍利耶的学位论文：“关于经济时间序列随机性的开创性研究，同时在观点上最具现代性，正是巴舍利耶的工作。”因此，奥斯本既承认了巴舍利耶的优先地位，也认可了他对经济随机波动那种极具现代性的理解。

奥斯本的论述表明，他密切关注巴舍利耶的著作的几个核心特征：对价格变化的概率处理、关于投机预期收益为零的假设——收益与损失在平均意义上相抵——以及价格变化的高斯分布，其离散程度随时间增加。由于他认为原始学位论文“相当难以阅读”，因此将答复的大部分篇幅用于解释其内容。他还指出了藏本所在的位置：美国国会图书馆的珍本室（奥斯本，1959b）。

美国国会图书馆所藏副本上有巴舍利耶题赠罗伯特·S·伍德沃德的亲笔题词；伍德沃德是美国数学与物理科学领域的领军人物，并于1899—1900年担任美国数学学会主席。美国国会图书馆工作人员向作者提供的一张1900年加蒂埃-维拉尔单行本封面的照片，清楚地显示了这则题词和签名。奥斯本没有提及这则题词；他的答复聚焦于巴舍利耶的数学论证及其历史优先权。

四年后，Mandelbrot同样将巴舍利耶的原作描述为“颇难获取”，并提供了几条书目参考，其中包括发表于《高等师范学校科学年刊》的学位论文（Mandelbrot，1963年）。

这两项观察都无法说明这篇学位论文在1900年是否易于获取。它们涉及的是约六十年后的可获取性：在20世纪50年代末或20世纪60年代初难以找到一部作品，并不能证明它在最初流传时也难以获得。

因此，奥斯本的经历将两个不同的问题联系起来。思想上的接受涉及谁读过巴舍利耶、理解或引用过他的论点，或将他的研究成果纳入后来的工作。物质上的可获取性则涉及副本流传到了哪里、哪些机构收到了副本、它们如何被编目，以及这些副本是否一直可以获得。他的重新发现属于接受史；而他关于难以获取的评论，则促使我们考察副本的流通。

法院 ault 及其合著者随后强调，这篇学位论文既发表于

一份声望卓著的数学期刊，也以单行本形式出版，从而对其完全遭到忽视这一叙述提出了质疑（Courtault 等人，2000年）。结合奥斯本的评论来看，这引出了一个具体问题：在1900年之后的最初几年里，这篇学位论文的传播范围究竟有多广？要回答这一问题，就需要追溯其传播渠道，并确定可以查阅它的机构，而不必依赖已知的个别读者。

后来将这篇学位论文描述为晦涩、被忽视或被遗忘的说法，很少区分这两个问题。

一些作者将巴舍利耶有限的接受度归因于他的研究主题。经济思想史学家 Robert W. Dimand 和经济学与金融学教授 Colin Read 强调了金融投机与数学家和物理学家通常关注的问题之间的距离（Dimand，1993年；Read，2013年）。专攻数理金融的概率论学家 Philip Protter 更进一步，将 Poincaré 的态度描述为敌对，并称巴舍利耶的著作“有一段时间被忽视和遗忘”（Protter，2001年）。金融学者 Jens Jackwerth 也写道：“他的学位论文很快就被遗忘了，直到20世纪中叶才重新受到关注”（Jackwerth，2004年）。

被忽视的先驱这一形象也出现在 John Eatwell、Murray Milgate 和 Peter Newman 编著的《新帕尔格雷夫：金融学》（1989年）中。该书汇集了从《新帕尔格雷夫经济学词典》（1987年）中选出的金融学相关文章；后者是经济学领域一部重要的四卷本参考工具书。因此，该书将巴舍利耶的成就置于一部面向经济学家的权威参考文集之中。正如 Dimand 所指出的，其编者称金融学拥有“自己的 Gregor Mendel，即路易·巴舍利耶”（Dimand，1993年）。这一类比将奠基性贡献与直到很久以后才获得的认可结合在了一起。

这一叙事也出现在面向物理学家和数学家的论述中。理论物理学家兼科学作家杰里米·伯恩斯坦将巴舍利耶的重新发现与20世纪50年代的经济学家联系起来（Bernstein，2005年），并称这篇学位论文“物理学家完全不知其存在”（Bernstein，2006年）。伦敦政治经济学院数学家Norman Biggs赞扬了它的原创性，同时指出它“多年来一直无人注意”（Biggs，2016）。物理学家Peter Richmond、Jürgen Mimkes和Stefan Hutzler将这项工作描述为“仅发表于他的博士学位论文中”，并称其“半个世纪以来基本上鲜为人知”（Richmond等，2013），却没有提及它曾发表于一份重要的数学期刊。

Davis 和 Etheridge 区分了数学界的认可与经济学界的忽视：“在经济学家中，巴舍利耶简直被遗忘了”（Davis 和 Etheridge，2006年）。近期，Protter将这篇学位论文的发表称为一件“本应为20世纪开启一场思想革命”的事件，同时指出它在很大程度上遭到了忽视（Protter，2022年）。这些评价形成对照：这篇论文的重要性是事后才得到认可的，而它早期的接受度有限。

以下各节将依据三类证据检验这些叙述：用于考察资料可获得性的图书馆记录、用于考察有记录的阅读情况的同期评论，以及用于考察巴舍利耶的著作之引用与运用情况的后期著作。

3 Gauthier-Villars 单独出版的学位论文：出版、交流与国际传播

巴舍利耶的《投机理论》以两种不同的实体形式流传：一是1900年刊载于《高等师范学校科学年刊》第三辑第17卷，二是作为一

部由Gauthier-Villars出版、共70页的独立博士论文（Bachelier，1900a,b）。这两种形式开辟了相辅相成的传播途径。期刊通过订阅和交换流传，而单行本则通过大学学位论文交换传播，并经由图书贸易出售。个人演讲以及此后在不同馆藏之间的转移，进一步扩大了它的流传范围。

这份单行本可供商业购买一事，见于 Gauthier-Villars 1900年第一季度的公告，其中关于该学位论文的启事将在下一小节中考察。因此，现存副本应置于商业与机构流通的更广阔历史背景中加以审视：巴黎大学交换网络之外的机构也可以购买这篇学位论文，尽管有关个人获取情况的记录仍不详。

这份单行本还因题献给 Henri Poincaré 而可能引人关注。这篇简短的颂辞占据整整一页，醒目地展示了他的姓名，以及他与当时一位杰出科学家的关联（Bachelier，1900b）。期刊版本中没有这篇题献，而是直接以引言开篇（Bachelier，1900a）。

学位论文单行本末尾另附一页，说明学院为巴舍利耶的第二篇学位论文指定的课题：根据纳维方程，研究无限延伸的黏性液体对浸入其中的实心球所做的小幅平移运动的阻力。在投机研究之外，还有一个涉及黏性阻力的数学物理学问题；它与粒子运动和扩散相关，而这些问题很快便成为布朗运动物理理论的核心。Bertrand Duplantier 于2005年指出了这种并置，同时也注意到，巴舍利耶关于投机的学位论文并未明确建立这两个问题之间的联系（Duplantier，2005）。

3.1 商业出版与推广

1900年第一季度的*Gauthier-Villars*书店新出版物季刊在“新出版物”栏目中介绍了巴舍利耶的论文。该则介绍及随附的目录占据了近两页（第8—9页）。条目介绍了一册70页的著作，出版年份为1900年，定价五法郎（Gauthier-Villars，1900）。佛罗伦萨的伽利略博物馆—科学史研究所与博物馆图书馆保存着这份季刊，该机构致力于科学史研究。图书馆工作人员提供了第8—9页的照片，因此得以详细考察出版商对该书的介绍。这段介绍并非简短的目录条目，而是阐述了作品的抱负、方法与成果，并着重强调其科学和实践意义。介绍还预见到读者可能对投机数学理论持怀疑态度，并提出这样的问题：能否“可以说，将偶然性的决定论表述出来”？它明确指出了目标读者：“数学家和银行家对此同样感兴趣”。投机者也被视为潜在使用者。由此，出版商将这篇学位论文介绍给数学和金融领域的读者。

这则公告较为详细地遵循了该学位论文的论证思路：证券交易所业务、所考察概率的定义，以及通过三种方法推导概率律。公告特别指出“概率辐射定律”是“一项真正令人称奇的成果”，随后讨论了其在不同交易中的应用。积分方程、级数展开和逐次逼近，与理论结果和观测价格之间的比较一并出现。

续篇探讨复杂业务、价格在

指定区间内达到给定水平的概率，以及价格可能达到该水平的时间。结尾的评述将计算值与观测值之间的一致性视为证据，证明“市场虽不自知，却遵循着一条支配它的法则：概率法则”。详细目录列出了书中探讨的问题及应用。

这段未署名的文字将阐述与正面评价结合在一起。其作者身份仍未确定：可能由出版商或某位合作者撰写，也可能取自巴舍利耶提供的材料。不过，这段文字表明，Gauthier-Villars 通过对学位论文科学内容的详尽介绍来推广该论文，使读者无需购书便能了解其主要问题与论点。

一项有记录的购买表明，这个单行本于1900年通过图书贸易进入了一家英国的科学图书馆。根据图书馆工作人员提供的获取信息，科学博物馆图书馆现藏的这册书于7月18日从 Williams and Norgate 购得。该图书馆源自伦敦的南肯辛顿博物馆，为寻求科学文献的学生及广大公众提供服务。Williams and Norgate 是专门经营学术著作和外国科学文献的书商、出版商及进口商，在伦敦和爱丁堡均设有营业场所。这次获取记录了一条从巴黎出版商通往海外机构读者的商业流通路径。

该单行本随后于1900年12月29日被记载在《法国书目》的法定缴存栏目中（《法国书目》，1900年）。该启事列出了作者、书名和出版商，但未注明价格。它为图书馆员、书商和研究人员提供了另一种发现这部作品的途径。这次在12月底的登记并不标志着流通的开始：出版商的公报和伦敦的购买记录都早于此日期。

3.2 大学学位论文交换制度

商业出版与法国博士论文的有组织分发体系并行运作。1882年7月21日的部长令以及Jules Ferry于1882年8月11日发布的、有关 学位论文事务 的通告，规定了学位论文副本的缴存与分发（Ferry，1882a、b）。部分副本专门用于与外国大学交换；其他副本则在法国同一学科的院系之间流通。

这一外国体系具有互惠性：法国大学向国外寄送学位论文和学术出版物，并从参与交换的机构收到相应材料。法国国家图书馆于1901年出版的《1900年通过国际交换收到的学术出版物目录》，收录了三十八个外国学术机构的条目（法国国家图书馆，1901年，第5—200页）。这些机构名称为交换网络中的参与情况提供了当时的记录。按照当时的政治边界划分，这些机构包括：

- **德国（21所）：** 柏林、波恩、布雷斯劳（今波兰的弗罗茨瓦夫）、埃朗根、布赖斯高地区弗赖堡、吉森、哥廷根、格赖夫斯瓦尔德、哈雷、海德堡、耶拿、基尔、柯尼斯堡（今俄罗斯的加里宁格勒）、莱比锡、马尔堡、慕尼黑、明斯特、罗斯托克、斯特拉斯堡（今属法国）、蒂宾根和维尔茨堡。
- **瑞士（6）：** 巴塞尔、伯尔尼、弗里堡、日内瓦、洛桑和苏黎世。
- **荷兰（3）：** 格罗宁根、莱顿和乌得勒支。

- **比利时（2）：** 根特和列日。
- **瑞典（2）：** 隆德和乌普萨拉。
- **丹麦（1）：** 哥本哈根。
- **俄罗斯帝国（1）：** 尤尔耶夫，即现在爱沙尼亚的塔尔图。
- **英国（1）：** 牛津。
- **美国（1）：** 位于巴尔的摩的约翰斯·霍普金斯大学。

因此，巴黎与广泛的欧洲大学网络相连，并通过约翰斯·霍普金斯大学与美国相连。

在法国境内，另有一种机制规定了同类院系之间的流通。对于巴黎科学学位论文而言，这主要涉及其他科学院系及其大学图书馆。波尔多大学提供的信息将这一做法描述为：向与相关学科有关的法国大学分发学位论文，以供保存和传播。

因此，巴什利耶的学位论文从一开始就 intended 在巴黎之外流通，这一流通独立于个人对有关投机书籍的需求。为确定这一机制是否在实践中运行，我们查阅了三十八家外国机构的目录，并联系了其图书馆。相关证据包括有日期的获取记录、学位论文馆藏中的留存副本，以及历史目录记录。

3.3 通过交换网络分发的证据

若干机构提供了带有日期的接收证据。哥廷根方面证实，这篇学位论文于1901年进入该图书馆，直接由巴黎大学通过大学交换系统寄送而来。它仍与其他巴黎学位论文一同保存。根特方面同样确认，持续收到来自法国大学的学位论文；其收藏的巴舍利耶学位论文副本早在1900年就已存在。

斯特拉斯堡馆藏本与巴黎理学院1899—1900年的学位论文合订。彼时斯特拉斯堡属于德意志帝国，这份馆藏本记录了该学位论文进入这一学术图书馆网络的情况。

蒂宾根已确认其馆藏本仍然保存。历史目录卡将这份1900年巴黎版、共七十页的学位论文标注为“Paris. Th. sc. math. 1899–1900. N° 1018.”
埃朗根通过其历史卡片目录确认了当时收到该书的记录。此前未见于在线目录、存放于馆外库房的馆藏本，在回应此次调查后新增了在线记录。因此，此次调查证实了该书当年的入藏情况，并使读者能够通过现代目录查找到这份馆藏。

格赖夫斯瓦尔德是巴黎交换名单上的另一所大学。该校图书馆找到了此前未见于在线目录的馆藏本。在此次调查中确认其身份后，图书馆确认已为其创建在线记录。

其他德国大学馆藏也保存着副本或目录记录。莱比锡在其数学馆藏中保存着这篇学位论文。耶拿、基尔、布赖斯高地区弗赖堡和慕尼黑大学也有已编目的副本和记录。波恩、哈雷和马尔堡也保存着

这篇学位论文的副本，历史目录卡片对此有所记载，并以与蒂宾根相同的名称描述这篇1900年巴黎学位论文。

在瑞士，巴塞尔和洛桑已确认有存世副本。洛桑的экземпля本现藏于洛桑联邦理工学院，属于2003年从洛桑大学移交的数学文献收藏。巴塞尔的原本仍保存在图书馆中，其信息是通过数字化的历史学位论文卡片目录确认的，而非通过现代在线目录中的单独记录。

丹麦皇家图书馆在哥本哈根大学图书馆原有的学位论文收藏中找到了一份原本。那里的外国学位论文通常只得到最低限度的编目，因此未被收录进现代在线目录。1900年左右，哥本哈根参与了与法国机构开展的系统性学位论文交换，其中包括巴黎大学。这次调查促成了单独在线记录的创建。

在乌得勒支，特藏部找到了一份未出现在在线目录中的原本，随后将其补录其中。

在比利时，除根特的日期证据外，列日现行的卡片目录还确认有一份1900年单独学位论文的可用副本。约翰斯·霍普金斯大学是交换名单上唯一的美国机构，藏有一份已编目的экземпля本。

牛津通过巴黎大学交换系统提供了另一项有文献记录的获取案例。博德利图书馆保存着一份原始单独副本，其上盖有日期为1901年4月6日的入藏印章。随附的一份日期为1900年11月30日的巴黎大学交换表宣布向牛津寄送1899—1900年的“toutes les thèses et publications académiques”，共658件（博德利图书馆档案，c. 1044）。

隆德保存着1900年Gauthier-Villars版本的单行本，该版本记载于其旧目录卡片中。隆德数学科学中心的Mittag-Leffler收藏中还保存着另一份。

历史记录还记载了一些如今已无法找到的副本。在尤尔耶夫（今塔尔图），一张旧目录卡片证明该馆过去曾收藏这篇学位论文。乌普萨拉同样保留着一份下落不明副本的相关证据。因此，现存书籍只代表了最初分布的一部分。

这些大型收藏后续的管理使对其内容的重建变得更加复杂。2024年，莱顿大学图书馆将约40万篇外国学位论文移交给互联网档案馆进行数字化。这些资料通过学术交流积累而来，且大多未编目，占用了超过3.2公里的书架空间，造成了巨大的存储压力。[1] 图书馆工作人员认为，巴什利耶的学位论文可能曾属于该收藏，但无法确认其是否在其中。

空间限制也导致一些较旧且很少查阅的学位论文被处置。在此次调查中联系的部分图书馆报告称，它们连同目录卡片一起丢弃了大量此类著作。因此，现有馆藏和留存记录既反映了最初的流通情况，也反映了后来在存储、著录和保留方面所作的决定。

人员配置限制也限制了调查。一些图书馆表示，目前缺乏检索其历史学位论文收藏及相关记录所需的人员能力。这些情况仍未得到解决：无法开展检索并不能证明不存在巴舍利耶的学位论文。

调查未能确认目前或过去持有该论文的十四家机构全部

[1]莱顿大学图书馆，2024年年度报告及关于外国学位论文馆藏的公告，2024年9月。

都出现在法国国家图书馆1900年和1901年收到的外国学位论文目录中（法国国家图书馆，1901年，1902年）。这些记录表明，在相关时期，这些机构积极参与了交换网络。鉴于这些交换的组织具有互惠性质，且有记录证实其他参与机构收到了巴舍利耶的论文，因此这十四家机构很可能也收到了这篇论文，尽管目前尚无确证。

法国方面的证据补充了这些海外馆藏。波尔多于1900年记录了该书的藏本，并明确指出，它与法国大学之间有组织的学位论文分发有关。蒙彼利埃也将其藏本与系统性的学位论文交换联系起来；该书保存在巴黎数学科学博士论文之中。里昂、普瓦捷和雷恩的科学图书馆也记录了这篇原版 Gauthier-Villars学位论文，进一步证实了它在法国的地理分布范围。

巴黎的馆藏包括索邦图书馆、法国国家图书馆，以及亨利·庞加莱研究所、法兰西学会、法国国家自然历史博物馆、高等师范学校和巴黎矿业学院的图书馆。这些馆藏共同证明，该文献保存于法国各类大学和科学图书馆之中。

这些发现表明，交换目录所述的机制确实有效地促进了文献流通，同时也揭示了仅依靠现代目录进行检索的局限。巴塞尔、隆德和蒂宾根的例子说明，历史卡片至今仍有价值。在哥本哈根、格赖夫斯瓦尔德、埃朗根和乌得勒支，调查促成了各自独立在线记录的创建。

3.4 书商、个人演讲及其他收藏

这份单行本的流传范围超出了大学交换网络。其标示的价格和有文献记录的伦敦购藏，证明了它具有商业可获得性。交换清单之外的副本，属于科学书籍的这种日常流通，与收藏之间的赠予和转让并存。它们的经历揭示了几条不同的流通路径。

伯克利提供了一个由书商促成分布的清晰例证。其副本于1901年11月进入加利福尼亚大学图书馆，属于一批规模庞大、经过系统收集的巴黎数学学位论文藏书，涵盖了十九世纪的大部分时期。这批藏书由书商赫尔曼从巴黎供应，使这份学位论文进入了一所官方交换网络之外的大学。

美国国会图书馆的副本记录了巴舍利耶的个人行动。在本次调查确认的样本中，这是唯一已知带有其亲笔赠词的副本。在封面上，他用“Hommage de l’auteur”及其签名将此书题赠给罗伯特·S·伍德沃德。伍德沃德是一位数学家、大地测量学家和物理学家，曾于1899—1900年担任美国数学学会主席。这段题赠表明，巴舍利耶曾将自己的作品直接赠予一位杰出的美国科学家。美国国会图书馆的入藏印章记录了它后来于1908年入藏。

布朗大学科学图书馆也将一册单独发行的 Gauthier-Villars版本编入目录。其来源和入藏日期仍不明。

另一份重要版本来自 Gösta Mittag-Leffler 的个人抽印本收藏，现藏于隆德的数学科学中心。Mittag-Leffler 于 1882 年创办《数学学报》，并在国际数学交流中发挥了核心作用，尤其是通过与法语和德国数学家保持密切联系。该学位论文的

出现使其成为这些网络中一位重要人物所收集出版物的一部分。与他的藏书不同，这批抽印本收藏于 1992 年从米塔-莱夫勒研究所转至隆德。图书馆工作人员通过其 20 世纪 90 年代编制的目录找到了这篇学位论文。

与米塔-列夫勒编辑活动的进一步联系，见于《数学学报》第36卷的书目增刊（1913年）。在第2—3页，该期刊列出了巴舍利耶的《Calcul des probabilités》（1912年），并概述了其内容（《数学学报》，1913年，第2—3页），明确包括“投机的数学理论”、“投机操作研究”和“《投机理论》”。

其他美国藏本也有有据可查的机构收藏史，但尚未确定最初的供应者。哈佛的藏本于1921年进入哈佛学院图书馆，随后并入怀德纳图书馆的经济学藏书，并于1998年转入贝克图书馆。其更早的来源仍不得而知。在康奈尔，一本1900年单独版本的原藏本上的标记表明，它可能于1913年被获取。这将证明该书在出版十多年后仍在持续流通，尽管这些标记无法确定具体交易。

在法国，里昂市立图书馆的藏本来自里昂阅读协会——这是一个面向会员设有图书馆的私人学术与文化协会。这一来源表明，这篇学位论文曾被保存在大学体系之外的阅读机构中。

意大利的藏本揭示了其他几个来源环境。威尼斯卡福斯卡里大学经济学图书馆的藏本曾属于经济学家 Alfonso de Pietri-Tonelli（1883—1952）；他是该校教授，研究领域包括数理经济学和金融市场。他受到曾与之通信的维尔弗雷多·帕累托的影响，并于1913年发表了《*La speculazione di borsa*》，这是一项关于股票市场投机的研究。因此，巴什利耶的学位论文与他的研究兴趣高度契合。其获取日期和来源仍不得而知，但与该论文一同保存的巴舍利耶另一篇短文上，有手写字样“offert par l’auteur”。这证明该馆藏中存在作者赠呈，但不能据此确定这篇学位论文本身也是赠品。

位于米兰附近塞斯托圣乔瓦尼的当代史研究所藏本，来自米兰及省工程师与建筑师学院的图书馆。这个由工程师和建筑师组成的专业学术协会始建于1563年，并于1868年重组，旨在促进技术知识与专业实践。该藏本将这篇学位论文置于一个致力于工程学和应用科学的环境中。

在罗马智慧大学，“恩里科·巴罗内”图书馆所藏的这本书，属于该机构现代经济学院前身的历史藏书。图书馆研究表明，至迟在1928年它已入藏，或许更早。

罗马的另一册藏本位于国家保险研究所（INA）的历史图书馆，来自数学家格奥尔格·博尔曼的私人藏书。其有据可查的获取过程以及前任藏主的科学兴趣，值得在下文进一步考察。

这些来源信息记录了不同的流转途径：经书商促成的购藏、作者赠呈，以及特定机构或个人的所有。Gauthier-Villars 的出售要约为大学交换系统之外的购藏提供了更广泛的商业背景。

3.5 从 Bohlmann 的私人藏书到罗马的 INA

INA 馆藏本的来源信息尤其丰富。INA 成立于1912年，于2000年被忠利集团收购，后者也接管了其馆藏。忠利集团于1831年在的里雅斯特成立，后来发展成为一家大型国际保险集团。其历史档案馆工作人员找到了该书，并通过历史图书馆记录重建了它此前的所有权和获取经过。

该书于1929年2月20日进入 INA 图书馆，成为其从莱比锡古旧书商 K. F. Koehlers 处购入的一批藏书的一部分。这批藏书包括90册珍稀及绝版书籍，以及1,100册关于纯数学、概率、精算学和统计学的小册子，原属数学家格奥尔格·博尔曼（1869—1928）的私人藏书。

Bohlmann 的职业生涯赋予了这一来源特别的意义。在费利克斯·克莱因的支持下，他于1894年在哥廷根取得任教资格，并在次年成立的大学保险研讨班教授精算数学。1901年，他获授特聘教授头衔，但并未获得带薪教授职位。1903年，他接受了纽约互助人寿保险公司柏林分公司的职位，同时继续开展数学研究（Krengel，2011年，第2—3页）。

这份获取记录见证了这篇学位论文如何从一位专家的私人藏书，经由古籍贸易，最终进入一家意大利保险机构。Bohlmann 本人获取该书的时间和具体情况仍不得而知，但其来源记录表明，现存的一册被纳入了与巴舍利耶研究直接相关的数学文献收藏。

当时的一段讨论提供了更多背景。1910年11月，俄罗斯概率学家 A. A. 马尔可夫与统计学家 A. A. 丘普罗夫在讨论相关变量的大数定律时，于通信中提到了 Bohlmann 和巴舍利耶的著作。马尔可夫在回复丘普罗夫时，请对方提供两位作者文章的参考文献。巴舍利耶的相关成果是他1906年的《连续概率论》（Bachelier, 1906），而非1900年的学位论文（Ondar, 1981, pp. 7–9）。这段通信并不能证明 Bohlmann 与巴舍利耶曾有私人交往，但表明当时的讨论曾将两人的研究贡献一并纳入概率相关性问题的讨论。

Bohlmann也为概率公理化的早期发展作出了贡献：他在1900年发表了关于人寿保险数学的研究，并于1908年在罗马举行的国际数学家大会上有所贡献。早在1900年，希尔伯特就在其第六问题的脚注中引用了Bohlmann的《论保险数学》；该问题要求对物理科学，尤其是概率与力学，进行公理化处理（Krengel，2011年，第3–6页）。

3.6 MIT文本及其后来的再发现

MIT案例将文献的流传与后来的学术再发现联系起来。保罗·萨缪尔森（1915—2009）是麻省理工学院的经济学家，也是数理经济学领域的核心人物，他于1970年获得诺贝尔经济学纪念奖。他与巴舍利耶的相遇，使这篇学位论文得以进入一位学者的视野，而这位学者的工作助力塑造了现代经济理论。

萨缪尔森在查阅学位论文之前就知道巴舍利耶。在2000年8月14日与 Murad Taqqu 分享的一段回忆中，他回忆说，数学家斯坦尼斯瓦夫·乌拉姆曾在1937年至1940年间谈起巴舍利耶，当时两人都属于哈佛学会。

他还回忆说，自己曾在威廉·费勒的著作中见到巴舍利耶的名字（Taqqu，2001年，第27页，含注释49）。这段证词指出了一条更早的个人传播渠道，但没有说明乌拉姆读过哪些著作，也没有说明他曾向萨缪尔森谈及这些著作的哪些内容。

后来的一次调查促使萨缪尔森寻找巴舍利耶的著作。他回忆说，因《统计学基础》（1954年）而闻名的美国数学家和统计学家伦纳德·J·萨维奇（1917—1971）曾给包括他在内的几位经济学家寄明信片，询问他们是否了解巴舍利耶及其广为人知的1914年著作《游戏、机遇与偶然》（巴舍利耶，1914年）。萨缪尔森在麻省理工学院数学图书馆寻找这本书时，找到的却是1900年的博士论文。这次查阅据称发生在20世纪50年代中期（萨缪尔森，2006年，第vii页）。

这份实物文献的身份仍未确定。麻省理工学院另行编目的藏品是一份影印本，约于1962年根据普林斯顿大学图书馆的一份原件复制。因此，它不可能是萨缪尔森回忆中数年前查阅的那份文献。麻省理工学院目前的纸本馆藏也缺少《高等师范学校科学年刊》第三辑第17卷，其中收录了期刊版本。

普林斯顿的单独副本装订在1900年卷《数学学位论文》的首篇位置。数字化卷本中包含一枚藏书票，标明其属于普林斯顿数学神学院。这正是麻省理工学院影印本所依据的原本。

因此，萨缪尔森的记述表明，在现存影印本制作出来之前，他已在麻省理工学院接触到该文献。普林斯顿的副本厘清了后来的复制本的历史，但萨缪尔森查阅的那份副本仍不得而知。

3.7 学位论文的捐赠及后续出版物

伦敦精算师协会的档案记录了另一条流通渠道，其读者群体是专业人士，他们的工作将概率与保险及金融估值联系起来。1906年10月出版的图书增补目录列出了巴舍利耶的《投机理论》和《博弈数学理论》（巴舍利耶，1901年），两者均标注“作者赠送”（精算师协会，1906年）。这一对捐赠者的明确标识表明，巴舍利耶亲自将学位论文赠送给该协会，而此时距离论文发表已过去六年。

后续的图书馆清单记录了截至1913年他进一步捐赠其出版物的情况。与赠予罗伯特·S·伍德沃德的出版物一同，这些反复的赠书记录表明，巴舍利耶持续努力扩大其研究的国际传播，并触及精算行业的读者。

苏格兰也有一项类似的捐赠记录。《爱丁堡数学学会会刊》第XXIV卷涵盖1905年至1906年，其中在“赠予图书馆的礼物”一栏列有“《投机理论》、《博弈数学理论》，作者为L.巴舍利耶先生”。引言明确指出，这些出版物是赠品。该记录确认，截至该学期结束时，图书馆已收到1900年的学位论文和1901年的论文集（爱丁堡数学学会，1906年）：正是这两部作品于1906年被记录为捐赠给伦敦精算师协会的出版物。

伦敦数学会还记录了其图书馆在1905年10月至1906年12月期间收到《投机理论》，将其列为获赠书籍之一。该学位论文出现在“来自相关作者或出版商”这一标题下，这表明它是通过赠送方式收到的，但未进一步明确捐赠者（伦敦数学会，1907年）。随后公布的图书馆书目还记录了巴舍利耶其他出版物的赠书。

4 第二条渠道：通过《年刊》传播

《投机理论》还刊载于《高等师范学校科学年刊》第17卷（Bachelier，1900a）。该期刊由路易·巴斯德于1864年创办，最初涵盖数学、物理学、化学和自然科学。到1900年前后，在经历了三十多年与法国领先高等教育机构之一相关的科学出版后，该期刊已转为专门刊载数学内容。

这份期刊提供了另一条独立的扩散渠道：即使图书馆没有购入或编目单行本学位论文，也可以通过订阅获得完整文本。第17卷通过既有的大学图书馆和研究图书馆网络传播。现存副本为我们提供了另一种途径，可据此重建巴舍利耶的著作在出版后数年间的地理可及范围。

4.1 第17卷的早期传播

我们逐一联系各图书馆，以确认其是否藏有1900年出版的第三辑第17卷原版。之所以需要核实，是因为列支敦士登内恩德尔恩的Kraus Reprint于1974年重印了该卷。因此，标注为1900年的目录记录可能指原版，也可能指复制版。我们请图书馆工作人员区分不同版本，并在可能的情况下辨认印章、入藏日期或其他来源证据。

巴舍利耶的学位论文刊载于标注为1900年1月的分册中。下文讨论的收讫日期记录了该论文截至当年4月的国际传播情况，此时距他3月29日答辩仅数日。单期分册的收讫时间可能早于全年卷册编目完成。以下概述按国家归纳馆藏，并区分已确认的原版与尚未确定的情况。

在奥地利，原本收藏于格拉茨大学、因斯布鲁克大学、维也纳大学和维也纳工业大学。

在比利时，原本保存于鲁汶天主教大学、位于布鲁塞尔的比利时皇家图书馆以及列日大学。

在英国，已确认的馆藏包括大英图书馆（其副本存放于波士顿斯帕）、剑桥大学图书馆、牛津大学的博德利图书馆、爱丁堡大学、格拉斯哥大学和雷丁大学。雷丁大学的这一卷曾属于数学家埃里克·哈罗德·内维尔；1914年，他帮助拉马努金前往剑桥。苏格兰国家图书馆列出了一套涵盖1866年至1976年的连续馆藏，这表明其1900年卷可能是原本，但这一点尚未得到确认。

在丹麦，原本收藏于哥本哈根大学数学图书馆和位于欧登塞的南丹麦大学。

在德国，已确认柏林国家图书馆、比勒费尔德大学、汉诺威科技信息图书馆、哥廷根州立与大学图书馆、柏林洪堡大学、卡尔斯鲁厄理工学院、莱布尼茨天体物理研究所（波茨坦）、莱比锡大学、慕尼黑大学和慕尼黑工业大学藏有原版；波恩、达姆施特特、哈雷和明斯特的大学图书馆及州立图书馆也有收藏；科隆、埃朗根-纽伦堡、弗赖堡大学、吉森、格赖夫斯瓦尔德、海德堡、耶拿、罗斯托克和蒂宾根的大学也有收藏。汉堡据报藏有两册：一册藏于汉堡大学的MIN-Forum图书馆，记录显示该册于 1922 年作为赠书入藏；另一册则确认藏于汉堡州立与

大学图书馆。

在意大利，原始版本保存在罗马国家中央图书馆、罗马智慧大学、博洛尼亚大学图书馆、热那亚大学图书馆、热那亚大学科学图书馆、佛罗伦萨大学、帕多瓦大学、帕维亚大学、比萨高等师范学校、都灵大学，以及位于罗马的林琴科学院暨科西尼亚纳图书馆。罗马智慧大学保存的博卡兄弟书店档案记录了1900年的订阅信息，为商业流通提供了证据。在那不勒斯，卡洛·米兰达图书馆和国家科学、文学与艺术学会图书馆分别藏有可追溯至1864年的大量连续卷册，其中分别包括1896年至1966年以及1884年至1903年间未曾中断的连续收藏。这些馆藏表明，它们所藏的1900年卷册可能是原始版本，尽管两家图书馆均未对此予以确认。

在荷兰，原始版本收藏于代尔夫特理工大学、莱顿大学、阿姆斯特丹大学和格罗宁根大学。

在西班牙，原件收藏于马德里康普顿斯大学和巴塞罗那的加泰罗尼亚图书馆。

在瑞典，原件保存于隆德大学、斯德哥尔摩大学和乌普萨拉大学。

在瑞士，已确认的收藏机构包括洛桑联邦理工学院、苏黎世联邦理工学院、弗里堡大学和日内瓦大学。

在美国，原件收藏于布朗大学、布林莫尔学院、凯斯西储大学、哥伦比亚大学、康奈尔、达特茅斯学院、哈佛、印第安纳大学布卢明顿分校、约翰斯·霍普金斯大学、美国国会图书馆、纽约公共图书馆、西北大学、俄亥俄州立大学、普林斯顿、斯坦福大学、加利福尼亚大学伯克利分校、芝加哥大学、辛辛那提大学、伊利诺伊大学厄巴纳–香槟分校、爱荷华大学、堪萨斯大学、密歇根大学、明尼苏达大学、密苏里大学哥伦比亚分校、宾夕法尼亚州立大学、宾夕法尼亚大学、匹兹堡大学、威斯康星大学麦迪逊分校、卫斯理大学和耶鲁大学。

这份名单根据与各机构的通信整理而成，并不完整。原件目前的所在地也不一定能证明其在1900年已在那里：有些卷册是后来购得的，或之后转移过去的。

然而，若干记录仍证明该刊在出版后的数月内已经流通。博洛尼亚按时间顺序编排的入藏登记簿记载，1900年4月2日从霍普利——这家米兰书商兼出版商——购入该刊，这与收到一月分册的情况相符。牛津所藏合订本上盖有日期为1900年4月17日的入藏印章，可能记录了收到该创刊号。康奈尔保存的一月封面上盖有日期为4月19日的收讫印章；海德堡于4月21日收到该分册。弗赖堡的入藏登记簿也记载该刊于1900年4月到达，乌普萨拉则确认自1900年起即已收藏。这些记录证明，该刊通过期刊网络迅速流通，包括在1900年春季抵达北美。

在法国，1900年卷册见载于波尔多、格勒诺布尔、里尔、里昂、马赛、雷恩和图卢兹的大学图书馆。巴黎的馆藏包括巴黎高等师范学院、亨利·庞加莱研究所，以及朱西厄的数学研究图书馆。奥赛的雅克·阿达马尔图书馆和帕莱索的巴黎综合理工学院也有进一步的馆藏记录。

美国馆藏分布广泛，遍及东北部各州、中西部和加利福尼亚州，涵盖公立大学和私立基金资助机构。这种广度应当

结合十九世纪下半叶美国高等教育的发展来理解。联邦资助、州投资和大规模私人捐赠，推动了各地区相距甚远的机构发展。留存下来的藏本与这一广泛网络的壮大相吻合，该网络收藏国际科学文献。

数量众多的德国馆藏同样反映出由大学、技术院校和研究图书馆构成的密集网络，这一网络扎根于19世纪初的大学改革。

4.2 通过数学期刊接触巴舍利耶

期刊形式也塑造了读者接触巴舍利耶的著作的方式。尽管《投机理论》可能会让人联想到一项专业性金融研究，但它发表在《年刊》中，与其他文章一道，收录于一份重要的数学期刊之内。

这篇学位论文刊载于1900年1月期的第21至86页。同一年度合订本还收录了David Hilbert的《几何学基础》法语译文；该著作最初于1899年以德语出版。译者莱昂斯·洛热尔将其译为《几何学基本原理》，刊载于第103至209页，分布在1900年3月、4月和5月的各期中。希尔伯特考察了几何学的基本假设及其逻辑关系（Hilbert，1900年）。

这份译文还包含希尔伯特提供的增补内容。在第123页的脚注中，洛热尔解释说，希尔伯特专门为法语版本撰写了一则新注释，并对结论作了扩充。第204页的一则注释指出，延伸至第208页目录的段落完全是新增内容。因此，这份译文提供了德文版中没有的补充材料。

因此，读者在查阅希尔伯特的著作及其增补内容时，可能会接触到巴舍利耶的研究。这些论文分别刊载于不同分册，却共同构成同一年度卷，并由订阅图书馆保存。巴舍利耶的文章通过常规期刊采购进入数学文献收藏，并非出于对金融问题的特别兴趣。

其他论文拓宽了该卷的潜在读者群。力学和数理物理学占据了相当大的篇幅，其中包括关于刚体运动、薄板的弹性平衡、弹性杆的横向振动，以及内压作用下椭球壳平衡的论文。此外，还刊载了代数、微分方程和几何学方面的研究。

因此，该卷可能吸引数学家、数理物理学家以及从事理论力学的工程师，使巴舍利耶的潜在读者群扩展到那些并非专门寻找投机研究的读者。

通过现存藏书和历史记录，可以追查到约160册，这表明该书曾在国际间广泛传播。这些证据挑战了这篇学位论文已经失传或几乎没有流传的看法。

这种早期的国际可获取性，为考察其接受情况提供了背景。获取只意味着可以接触到，并不能证明读者实际查阅或使用过相关内容。评论、引用、教学，以及对巴舍利耶研究成果的明确使用，都记录了人们与之接触的情况，使我们得以通过具体读者及其回应，考察传播与学术认可之间的关系。

5 早期评论与后续接受

书目公告和评论让持有巴舍利耶学位论文的机构之外的读者，也得以了解其数学内容。读者可以获知，《投机理论》对金融波动进行了概率处理。后来的文献表明，一些人将其中的论证和研究成果纳入了自己的数学或经济学著作。

5.1 当代报道与评论，1900年–1902年

1900年，里昂理学院的 Léon Autonne 在《纯粹与应用科学综述》上评论了巴舍利耶的论文；该刊是二十世纪初法国主要的综合性科学期刊之一。该期刊兼刊原创文章、科学综述和书目评论，并发表国际知名学者的文章，其中包括 David Hilbert 于1900年发表的著名数学问题演讲。这可能是已发表的第一篇关于《投机理论》的评论，为这部著作提供了当时的评价（Autonne，1900年）。Autonne 简要介绍了该著作在股市投机中的应用，并指出，要理解这部著作，需要具备很少能同时拥有的数学与金融专业知识。因此，他的报道揭示了评估一项横跨这两个领域的成果所面临的困难。

1901年1月，比利时的《科学问题评论》也出现了类似的看法；该刊由布鲁塞尔科学学会出版（《科学问题评论》，1901年）。这篇未署名的报道介绍了由 Gauthier-Villars 于1900年出版的独立七十页专著，并指出巴舍利耶的目标是揭示一种支配股市波动的概率律。文章没有评价他的结论，只是指出，许多数学家不会成为投机者，而许多投机者也不会成为数学家，并将这种分离视为评估和运用其研究结果的一项困难。

更为详尽的讨论于1901年发表在《数学教学》上。这本国际期刊由日内瓦的Henri Fehr和巴黎的Charles-Ange Laisant于1899年创办，旨在促进数学教师之间的交流，以及数学界与更广泛科学共同体之间的联系。其委员会汇集了来自多个国家的杰出数学家。因此，一篇评论能够将巴舍利耶的著作介绍给投身数学教学与学术研究的国际读者。

评论者Louis Desaint是一位从事函数论研究的法国数学家。他的学位论文《关于函数理论的若干问题》于1897年提交至巴黎理学院，并于同年发表于《高等师范学校科学年刊》。因此，他的评论记录了一位受过数学分析训练的研究者所作出的回应。

Desaint用数页篇幅讨论了这篇学位论文的金融应用和数学论证（Desaint，1901年）。他探讨了高斯概率律、波动特征尺度随时间平方根增长的规律、巴舍利耶的“概率辐射”与傅里叶热方程之间的联系，以及其在证券交易合同中的应用。

他的评价明确是正面的。他将这篇学位论文称为“出色的科学著作”，祝贺巴舍利耶的创举，并设想一种日益受到统计学和数学分析影响的经济科学。他的评论表明，当时的一位读者认识到了巴舍利耶构想的核心特征，并向更广泛的

数学界读者阐释了这些特征。

这篇学位论文还刊载于Eugène Estanave于1901年出版的《学位论文十年综述》中。该书目汇编收录了1891年至1900年间在巴黎理学院提交的博士论文。其条目同时注明了单行本Gauthier-Villars版本以及在《年刊》中的刊载情况，并引导读者参阅Autonne和Desaint的评论（Estanave，1901年，第23页）。该汇编本身并未作出评价，但为查找这篇学位论文及当时对它的讨论提供了另一种途径。

这部著作也进入了德国书目渠道。1901年，《style id='1'>数学与物理杂志》将其列为“Theorie der Spekulation”（Wölffing，1901年）。这则简短条目提高了其可见度，但所提供的信息远少于那些篇幅较长的评论。

《style id='1'>数学进展年鉴》第31卷第241—242页刊载了一则更为详尽的评介，该卷于1902年出版，但收录的是1900年的出版物。评介署名为“Ot.”，合作者名单表明此人为来自曼海姆的Oster博士。评介将这篇学位论文归入组合学和概率论，称其为一篇构思巧妙的论文，值得数学家，尤其是关注金融和保险的读者重视。然而，Oster强调，证券交易所术语，加上巴舍利耶本人所作的定义，使得向非专业人士解释其内容变得困难。他简要概述了数学期望、概率律、或然偏差、期权，以及在给定区间内达到指定价格的概率。这则评介传达了这项研究的广度，并承认其价值，但没有解释将概率模型与傅里叶热方程联系起来的推导过程（Oster，1902年）。

这些述评从简短的书目条目到详尽且正面的数学讨论，内容不一。它们记录了人们对这篇学位论文之概率论价值的认可，也反映出跨学科传播它所面临的困难。

5.2 后续引用，1908年–1933年

初期评论之后，对该论文的关注仍在延续。Robert de Montessus de Ballore（1870–1937）是一位在里尔自由理学院任教的法国数学家，研究代数连分数，并因此获得科学院的认可。他的《概率计算基础教程》（1908年）专设一节讨论投机，并介绍了巴舍利耶论文中的研究成果，明确提及关于投机者的数学期望为零的“巴舍利耶定理”（Montessus de Ballore，1908年）。将这项研究纳入概率论教科书，已不只是介绍或评价这项工作。

Bernard Bru 还指出，法国精算师兼经济学家 Alfred Barriol（1873–1959年）在《金融业务理论与实践》中阐述了巴舍利耶的高斯模型，该书于1908年首次出版。随附的注释强调，该书被一代又一代金融与保险专业学生使用（Taqqu，2001年，第16页，注19）。然而，Barriol 并未注明巴舍利耶的贡献：首版中的计算没有注明出处（Barriol，1908年，第324–327页），而 Ben-El-Mechaiekh 和 Dimand（2018年，第46页）指出，第四版中也有同样的遗漏（1931年，第374–384页）。因此，他的研究成果得以传播，其来源却未获认可。

El Karoui、Parent 和 Pradier 将 Barriol 的论述置于数理经济学的精算教学背景下。他们将 Barriol 对巴舍利耶方法的介绍，与其对莱昂·瓦尔拉斯（1834–1910）的兴趣联系起来；瓦尔拉斯是发展出一般均衡的数学理论的法国经济学家。Barriol 似乎是一位中介，将两位作者的著作

带给精算学读者（El Karoui 等，2026）。

1910年，Maurice Gherardt 在于巴黎出版的《*Le gain mathématique à la Bourse*》中引用并讨论了这篇学位论文（Gherardt，1910）。他是巴黎证券交易所的一名投机者，也是实用赌博手册的作者，致力于探寻一种有利可图的投机方法。他的引用记录了面向实际投机者的作者群体之间的传播。[2]

另一个例子是 Alfonso de Pietri-Tonelli 的《*La speculazione di borsa*》。Pietri-Tonelli 是一位意大利经济学家，曾在威尼斯的皇家高等商业研究院讲授商业政策。经修订和扩充的第二版（1921年）九次提及巴舍利耶（Pietri-Tonelli，1921年）。[3] 第一次提及引用了《投机理论》（巴黎，1900年）（Pietri-Tonelli，1921年，第4页，注3）。后续引用既涉及这篇学位论文，也涉及1912年的《*Calcul des probabilités*》，内容包括证券交易所业务和数学期望等主题。这些引用表明，相关著作与巴舍利耶的思想之间并非只有孤立的书目关联。

这些参考资料补充了实物证据：Pietri-Tonelli 的藏品中包括现藏于威尼斯卡福斯卡里大学的学位论文。他发表的参考文献和留存的副本共同证明了巴舍利耶的著作既曾被使用，也曾被收藏。

在其1931年关于概率论中的解析方法的论文中，安德烈·柯尔莫哥洛夫指出，据他所知，巴舍利耶是最早系统研究这样一类方案的人：其中转移概率随时间连续变化（Kol mogorov，1931）。这些概率描述了在给定时间区间内从一种状态转移到另一种状态的可能性。他引用了1900年的学位论文、巴舍利耶1910年关于多元概率的论文，以及1912年的《Calcul des probabilités》（Bachelier，1900a、1910、1912）。

这一认可具有特殊的历史意义。Kolmogorov 成为一位杰出的二十世纪数学家，也是现代概率论的核心人物。其1931年的论文助力确立了马尔可夫过程解析理论（Kolmogorov，1931），而其《Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung》（1933）则为概率论提供了测度论公理基础（Kolmogorov，1933）。他对巴舍利耶的引用，构成了其对随机过程研究这一奠基性贡献的一部分（Davis 和 Etheridge，2006年，第87—88页）。

1933年，亚历山大·欣钦这位俄罗斯数学家、概率论的重要贡献者，也认可了巴舍利耶。在经 Taqqu 翻译的一段文字中，他称赞巴舍利耶率先直接研究连续极限过程的分布律，同时指出其数学工具的不足（Taqqu，2001年，第13页，注11）。

这些例子准确阐释了选择性接受。Montessus 将论文成果纳入一本概率论教科书；Barriol 向精算师介绍了其中的金融计算；Gherardt 和 Pietri-Tonelli 在有关投机的著作中讨论了这篇论文。Kolmogorov 和 Khinchine 认识到它对随时间连续演化的概率律所作的贡献。读者根据自身的问题和受众，运用了其中不同的方面。Barriol 的论述还说明了为什么明确引文无法完全衡量接受程度：成果可能在未注明作者姓名的情况下被传播。

在这一背景下，法国数学家之间参考文献的匮乏尤为引人注目。除了 Autonne 和 Desaint 的同期评论之外，Montessus 的1908年著作仍然是

[2]Jovanovic（2000年）此前已经注意到 Gherardt 对巴舍利耶的论文的使用。Bernard Bru 对 Murad Taqqu 的访谈中也讨论了这一点（Taqqu，2001年，第16页，包括注20），Ben-El-Mechaiekh 和 Dimand（2018年，第46页）也对此有所论述。[3]博科尼大学图书馆目录记载了一个更早的版本，该版本于1912—1913年由罗维戈的 Tipografia sociale editrice 出版。这里讨论的参考文献已在1921年的第二版中得到核实。

此处所确定的唯一一个例子，即一位法国数学家在1933年之前对该学位论文所作的已发表讨论。这并不能证明该论文在法国无人阅读，但凸显了在所考察的数学文献中，资料可得性与可见接受度之间的差距。

这一主题的文化关联同样值得考察。在十九世纪法国，证券交易投机引发了道德和政治争议，尤其是因为它与赌博和快速获利联系在一起。其正当性受到质疑，但并未遭到普遍否定（Jovanovic，2001年）。这些关联可能使投机看起来不像是一个适合进行数学研究的传统主题。

对巴舍利耶呈现研究结果方式的保留态度，也有助于解释一些数学家在20世纪30年代的反应。在与 Murad Taqqu 的谈话中，Bernard Bru 报告说，Bohuslav Hostinský 是一位研究概率的捷克数学家和理论物理学家；他曾写信给 Maurice Fréchet——这位法国数学家因对泛函分析和概率论的贡献而知名——称巴舍利耶犯了太多错误，不值得一读。Bru 将这一评价与缺乏严谨证明区分开来：巴舍利耶经常以物理学家的方式展开论述，指出研究路径并陈述公式，而不是提供完整的论证。然而，在 Bru 看来，这些路径和公式是可靠的，并且常常展现出相当出色的数学原创性（Taqqu，2001年）。这份证言表明，即使巴舍利耶的研究成果为进一步研究提供了富有成效的方向，论述和证明的规范也可能妨碍人们对其著作的理解与欣赏。

5.3 流通、可见性与数学用途

这些发现支持 Courtault 等人（2000 年）和 Jovanovic（2002 年、2012 年）的重新评估；他们对巴舍利耶作为一位完全被忽视的先驱这一形象提出了质疑。Jovanovic 展示了法学教授 Julien Laferrière 的一份未发表手稿，该手稿于 1951 年存放于巴黎法学院图书馆，其中关于投机数学理论的讨论广泛援引了巴舍利耶的研究。手稿记录了法国国家图书馆、巴黎理学院和圣日耳曼德佩图书馆中的学位论文存放位置及书架索书号，同时指出，该学位论文和《*Calcul des probabilités*》已很难通过书商购得（Jovanovic，2002 年）。这些证据将学术接受与在萨维奇于20世纪50年代推动重新发现巴舍利耶之前，实际寻找其著作的途径联系起来。本调查通过重构这篇学位论文更广泛的物质流通，补充了已有文献记载的读者群体。Mark H. A. Davis 同样将巴舍利耶的著作描述为贯穿20世纪随机分析的一条“连续线索”，并将这种数学领域的接受与其晚得多才被金融经济学家采用的情况进行了对比（Davis，2008 年，第 9 页）。

早期评论进一步记录了当时的理解与评价。认识到其数学价值，并不一定会带来广泛的读者群体。比利时和德国评论者所面临的困难，与 Robert W. Dimand 的解读相呼应；该解读强调了通过金融投机这一专业主题来呈现一般性数学贡献所产生的影响（Dimand，1993 年）。

Davis 和 Etheridge 将巴舍利耶在数学文献中的持续存在，与其在经济学家中的遭到忽视进行了对比（Davis 和 Etheridge，2006年，第 2、96 页）。Gherardt 和 Pietri-Tonelli 的参考文献对这一对比进行了限定：它们确立了该学位论文曾传达到有关实际投机和经济分析的作者手中，但并未证明存在一种建立在其金融应用之上的持续研究传统。

6 巴舍利耶概率构造的意义 n

这些实物和文献证据进一步提出了一个问题：巴舍利耶的学位论文传播了哪些数学思想？尽管该论文关注的是巴黎证券交易所中的投机问题，但其概念影响超越了金融估值。巴舍利耶通过随时间演变的概率律描述价格变化，将连续波动的组成与一个微分方程联系起来。

其中一个关键步骤，是从离散试验转向连续时间演化。重复博弈的经典问题通常按照试验次数对结果进行编号。连续概率分布当时已经确立，但其本身并不能描述连续时间中的随机演化。巴舍利耶在描述波动时，将时间设为连续参数；这一特征后来受到 Kolmogorov 的强调（Kolmogorov，1931年）。

巴舍利耶为给定时间区间内的价格变动指定了一个概率分布。他将连续的变动视为相互独立、没有偏向任何方向，并假定其分布取决于区间的持续时间，而非区间的起始日期。因此，较长区间上的分布可以通过组合其构成区间上的分布得到。

用现代记号表示，令 $p(x,t)$ 表示持续时间为 t 内价格变动 x 的概率密度。巴舍利耶的积分关系式为

$$p(z,t+s)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,t)\,p(z-x,s)\,dx, \qquad t,s>0. \tag{1}$$

它表达了连续增量的独立性，以及其分布仅取决于持续时间这一事实（Bachelier，1900a，第35—36页）。

总变化 z 具有直接的概率意义：它可以由第一段时间内的任意变化 x，再加上第二段时间内的变化 $z-x$ 而成。独立性允许将相应的密度相乘；积分则涵盖所有中间值 x。因此，将整个时间间隔视为一个整体，所得分布必定与将其分成两部分所得的分布相同，无论两部分的持续时间如何。

这一运算就是熟悉的卷积，用于求独立随机变量之和的密度。若 U 和 V 是密度分别为 f 和 g的独立随机变量，那么$U+V$ 的密度为

$$h(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,g(z-x)\,dx.$$

在通常的应用中， f 和 g 是已知的，公式用于确定 h。它并非关于未知密度族的积分方程，也没有引入时间或概率演化。

巴舍利耶赋予卷积进一步的作用。方程（1）中的三个密度属于同一个未知族，分别取值于 t、 s和 $t+s$。该方程约束了这一族随时间的变化方式。巴舍利耶明确称这是一个必须满足的条件方程（Bachelier，1900a，第36页）。其要求是，在对时间间隔进行任意划分时，结果都保持一致。用现代术语来说，该方程是 Chapman–Kolmogorov关系的一个特例，其中转移概率仅取决于经过的时间，以及终态与初态之差（Davis 和 Etheridge，2006年；Bernstein，2005年）。

利用这一复合法则来确定连续时间的概率演化，是一项开创性贡献。

其新颖之处在于所提出的问题：寻找一族能够描述任意时长内变化的概率律。
Kolmogorov 对巴舍利耶系统研究随时间连续变化的转移概率予以肯定，这有助于确认其历史意义。

它与统计力学和动力学理论的区别，并不简单地在于密度随时间变化：分子物理学中的分布同样可以连续演化。区别在于位移律及其复合所发挥的作用。在巴舍利耶的齐次模型中，同一个密度描述从任意初始价格出发、经过给定时长后发生的位移。刘维尔方程描述的是机械运动对相空间分布的输运，玻尔兹曼方程描述的是分子输运和碰撞；而巴舍利耶则直接通过关于连续随机增量的假设来施加一致性。他所求的位移律族必须与其自身在连续变化的时长下的复合法则相一致。

通过考察极短时间间隔内的变化，可以理解其与傅里叶方程的联系。下述论证是现代的非正式重构：严格推导在数学上颇为微妙，所需条件也不止复合法则本身。假设连续的价格变化彼此独立，且其分布仅取决于时间间隔的时长。它们的对称性意味着不存在偏好的方向，同时假设其均方有限。这些性质共同意味着，均方与经过的时间成正比增长，而无需预先假定高斯分布。当时间间隔的时长趋于零时，位移必须集中在零附近，这与初始时价格变动趋于零相一致。还需要一个更强的条件：当时间间隔缩小时，超过任意固定幅度的变化对单位时间均方的贡献必须可以忽略不计。最后，密度必须足够规则，以保证下文所使用的展开和极限运算具有正当性。在这些假设下，复合法则导出扩散方程。令Y_s 表示时长为 s的短时间间隔内的价格变动，其密度为 $p(y,s)$。上横线表示对各种可能的变动按其概率加权后取平均。在上述假设下，以下极限存在且有限：

$$D = \frac{1}{2}\lim_{s\downarrow 0}\frac{\overline{Y_s^2}}{s} = \frac{1}{2}\lim_{s\downarrow 0}\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 p(y,s)\,dy.$$

由于均值增量为零，其均方也就是其方差。因此 D 衡量了不确定性随时间累积的速率的一半。极限内的表达式非负，因为 y^2 和 $p(y,s)$ 均为非负数，且 $s>0$。 D 越大，概率分布扩散得越快。

To 要了解该系数如何进入演化方程，可将复合法则写成

$$p(x,t+s) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x-y,t)\,p(y,s)\,dy.$$

虽然积分涵盖所有可能的变化，但随着区间缩短，这些变化的概率会集中在零附近。关于较大变化的假设以及密度的正则性，使我们能够在积分中使用如下局部展开：

$$p(x-y,t) = p(x,t) - y\frac{\partial p}{\partial x}(x,t) + \frac{y^2}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x,t) + \cdots.$$

在积分　在积分中，常数项给出 $p(x,t)$，因为密度 $p(y,s)$ 的积分为 1　　.

线性项因 $Y_s = 0$ 而消失。二次项的贡献为

$$\frac{\overline{Y_s^2}}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x,t).$$

控制余项是这一论证中最微妙的一步。在上述假设下，将其积分后除以区间的持续时间，其贡献会变得可以忽略。由于 Y_s^2/s 趋于 $2D$，减去 $p(x,\ t)$，除以 s，并令 s 趋于零，可得

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.$$

这就是傅里叶热方程，只不过现在支配的是概率密度，而非温度。这一类比颇具启发性：正如热量从集中的热源向外扩散，概率也会从最初集中的分布向外扩散。因此，该方程描述的是概率的重新分配，而不是概率的产生或消失。这一现代重构将复合法则与巴舍利耶还通过“概率辐射”考察过的扩散联系起来（Bachelier，1900a；Bernstein，2005年）。

最初，价格变动恰好为零，因此所有概率都集中在原点。在整个实数轴上，$t > 0$ 的归一化解为

$$p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}}\exp\!\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right).$$

这条高斯曲线始终关于零对称并以零为中心，既不偏向正向变动，也不偏向负向变动。其总面积始终为一。记 X_t 为持续时间为 t内的价格变动，其均值和均方为

$$\overline{X_t} = 0, \qquad \overline{X_t^2} = 2Dt.$$

Sin因此均值为零，方差为X_t^2，标准差则是其平方根 t:

$$\sqrt{\overline{X_t^2}} = \sqrt{2Dt}.$$

方差随时间线性增长，而衡量波动特征尺度的标准差则随时间的平方根增长。随着曲线变宽，其中心高度按 $t^{-1/2}$的比例降低，从而保持总概率不变。

高斯解满足原始的复合法则。因此，复合法则和扩散方程以两种互补的方式表达了同一演化过程：前者将连续的时间区间连接起来，后者则描述从一个时刻到下一个时刻的变化。

除了积分方法之外，巴舍利耶还通过二项式近似以及他的“概率辐射”得到了高斯定律；后者导向傅里叶方程（Bachelier，1900a，第38–41、45–49页）。不过，积分形式的适用范围仍比这一特定解更广。要求连续区间能够一致地衔接起来，本身并不要求变化必须是高斯变化。不同的假设可以产生其他概率律，同时保留复合原则。

同一思路也可以纳入对起始位置或时间的依赖。在这种情况下，必须记录每个区间从何处、何时开始，而不能只记录其持续时间和变化幅度。这就超越了上述卷积公式，进入更广泛的查普曼–科尔莫哥洛夫框架。保持不变的是其根本

要求：直接计算转移，或通过一个中间时刻计算，所得概率必须相同。

Davis 和 Etheridge 还指出，学位论文的原创性在于它将轨迹视为概率推理的对象（Davis 和 Etheridge，2006年，第 6、84、90 页）。巴舍利耶考察了在某个时间区间内的某一时刻达到指定价格的概率。这不同于询问区间结束时价格将处于何处。价格可能达到某一水平，随后在最终观测前回落。因此，仅凭最终分布无法回答这一问题：价格随时间变化的过程同样至关重要。

巴舍利耶并未以现代意义上的方式，在概率空间上构造随机过程。Kolmogorov 承认了他的连续时间方案，同时明确指出这些方案缺乏数学严谨性（Kolmogorov，1931年）。尽管如此，这篇学位论文将三个相互关联的问题汇集在一起：概率如何在连续的时间区间之间组合，其分布如何随时间演化，以及在整个轨迹中可能发生什么。Davis 和 Etheridge 认为，之后对这些思想的严格发展，构成了二十世纪概率论议程的重要组成部分。

6.1 Smoluchowski、Chapman 与 Kolmogorov：不同的公认先驱

积分复合法则连接了三项后来的研究成果：Marian Smoluchowski 于1913年对外力作用下布朗运动的研究、Sydney Chapman 于1928年对布朗位移的研究，以及安德烈·柯尔莫哥洛夫于1931年对随机过程解析理论的研究。在这些语境中所描述的量各不相同：巴舍利耶研究的是价格变化，Smoluchowski 和 Chapman 研究的是粒子位置与位移，而 Kolmogorov 更为一般的框架研究的是系统状态之间的转移。

Smoluchowski 是一位波兰理论物理学家，也是物质动力学理论的先驱，早在1906年就已发表过一项关于布朗运动的研究。他运用动力学论证以及对连续分子碰撞的概率分析，得出了位移特征量的时间平方根定律。这一推导并未通过随连续时间演化的转移概率密度、积分复合方程或傅里叶扩散方程来进行（Smoluchowski，1906年）。

在 Smoluchowski 于 1913 年的研究中，出现了一个分别取决于初始位置和最终位置的复合法则的明确表述。在他对布朗运动的处理中，起始位置之所以会产生这种依赖，是因为存在外力（Smoluchowski，1913 年，第 423–425 页）。

Smoluchowski 在这篇 1913 年论文的开头一段提到了爱因斯坦，承认他对既有布朗运动理论所作的贡献，但在推导积分复合法则时没有给出具体归属。他没有提及巴舍利耶。爱因斯坦早先提出的积分关系为这一构造提供了一个合理来源，尽管 Smoluchowski 并未明确指出这一点。然而，这篇论文记录了空间非均匀情形下转移复合法则的一种明确表述，比 Chapman 的贡献早了十五年。

Chapman 是一位英国的应用数学家，主要研究气体动理论；他研究了非均匀流体中的粒子位移。文章开篇引用了爱因斯坦 1905年和1906年的布朗运动论文，并将自己的研究描述为从均匀流体推广到温度、组成或其他影响扩散的性质随位置变化的流体。

（Chapman，1928年）。他没有引用巴舍利耶。

Smoluchowski 和 Chapman 的情形都要求转移密度可以依赖于起始位置。在巴舍利耶模型中，$p(x,\ t)$描述了持续 t时间内价格变动x 的密度。其形式与初始价格水平无关，因此得到方程（1）中的卷积。对于 Smoluchowski 和 Chapman 所研究的物理问题，则必须分别记录起始位置和终止位置。

为表达共同的数学结构，考虑一个状态由实数描述的系统。用现代记法，令 $q_t(a,\ b)$表示系统在持续 t 时间内从初始状态 a 转移到最终状态 b 的转移密度。对于粒子而言，这些状态是位置；对于价格模型而言，它们是价格水平。在时间齐次情形下，该密度满足

$$q_{t+s}(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} q_t(a,c)\, q_s(c,b)\, dc. \tag{2}$$

该积分涵盖每一个中间状态 c：系统先从 a 转移到 c，再从c 转移到 b。在巴舍利耶模型中，$q_t(a,\ b) = p(b-a,\ t)$，其中 $b-a$ 是价格变动。因此，代入后，该关系便化为巴舍利耶的卷积。对于处于没有外力的均匀介质中的粒子，同一差值则表示空间位移。这种对应关系涉及数学结构，而变量仍保留其各自不同的金融或物理含义。

Kolmogorov 为状态之间的转移建立了一个一般性框架，而不是将变量限定为价格或粒子位置。他的表述还允许转移概率分别依赖于初始时间和最终时间，超越了上文所使用的时间齐次记法。在引言中，他明确指出，据他所知，巴舍利耶是第一位系统研究转移概率随时间连续变化的方案的人。他引用了《投机理论》（1900年）、多变量概率（1910年）和《*Calcul des probabilités*》（1912年）（Kolmogorov，1931年）。

这种认可超越了引言中的评价。第16节讨论了“巴舍利耶情形”：对于给定的初始时间和最终时间，转移密度取决于状态变量最终值与初始值之差。Kolmogorov 将相应的前向微分方程归于巴舍利耶，同时将其发现与严格证明区分开来。因此，巴舍利耶既被视为一位历史先驱，也是后来理论所纳入的具体情形的提出者。

Kolmogorov 既未引用爱因斯坦，也未引用 Chapman。因此，这些论文在明确致谢方面各不相同：Smoluchowski 在介绍已有的布朗运动理论时提到了爱因斯坦，但没有特别将复合法则归功于他；Chapman 将自己的研究视为对爱因斯坦工作的拓展；Kolmogorov 则给予巴舍利耶重要地位。这些引用记录了受到承认的先行研究，但不足以确立积分复合法则完整的传播链条。

7 后续接受与重新获得读者关注

早期文献确立了巴舍利耶在多个领域中的知名度。后来的回忆记录了读者如何接触到他的著作、他们的反应，以及他们在概率论和金融领域赋予该著作的地位。这些材料既揭示了其思想的持久影响，也展现了人们在1900年的一篇投机论文中发现与后来发展相关的构想时所感到的惊讶。

约瑟夫·杜布（1910—2004）是帮助奠定现代概率论基础、尤其是鞅论基础的美国数学家。他在2003年10月致 Davis 和 Etheridge 的一封通信中，回忆了自己与巴舍利耶著作相遇的经历。1934年开始学习概率论时，他从法文文献中的参考资料得知并寻求巴舍利耶的著作。其中的思想影响了他对赌博系统的研究，并随后影响了鞅论的发展。这段回忆记录了这种持久的影响，但没有指明相关的法文文献，也没有说明他读过巴舍利耶的哪些出版物（Davis 和 Etheridge，2006年）。

这种认可也进入了数学术语。威廉·费勒在其颇具影响力的概率论专著中，将布朗运动称为“维纳–巴舍利耶过程”，正如杰里米·伯恩斯坦后来所指出的那样（Bernstein，2005年，第397页，注1）。这使巴舍利耶进入现代概率论的教学与阐述之中。费勒还主要将发现随机游走与扩散之间联系的功劳归于他，并强调了这一发现对柯尔莫哥洛夫马尔可夫过程理论的重要性；Taqqu 重刊了这段论述（Taqqu，2001年，第26页，注47）。

巴舍利耶也在伊藤和麦基恩的《扩散过程及其样本路径》（1965年）开篇中占有显著位置。序言称赞他取得了描述布朗运动的成果，包括揭示布朗运动与热方程之间的联系，以及给出一段时间间隔内最大位移的概率律。随后，他们讨论了爱因斯坦在1905年提出的物理推导，并将巴舍利耶更早的贡献置于这一领域的历史发展之中。他们指出，巴舍利耶的思想在当时未受重视，同时也将他开创性的论证与维纳后来给出的严谨数学构造区分开来（伊藤和麦基恩，1965年）。

这种认可也体现在大学教学中。在蒂莫·科斯基于斯德哥尔摩KTH皇家理工学院开设的2017年概率与随机过程讲义中，他将巴舍利耶介绍为第一位定义如今称为维纳过程的随机过程的人。在引入这一主题时，他特别强调了该学位论文将这一过程用于期权估值，并明确认可巴舍利耶是金融数学和随机过程两方面的先驱（Koski，2017年，第267页）。

萨缪尔森在麻省理工学院的经历同样展现了重新获得阅读机会所产生的思想影响。他称这篇学位论文为“一颗宝石”，认为其中的工具能够描述随时间发生的不确定变化，并将这些变化的概率与金融合约的方程联系起来。他传播这一发现，并推动其更广泛地流传，包括将其收入保罗·库特纳1964年的文集中（Samuelson，2006年，第vii–viii页）。在Davis 和 Etheridge报道的一次访谈中，他回忆起最重要的东西：“是这些工具。”这篇学位论文提供了在新的研究环境中重新表述和发展的思想。

在这些回顾性评估中，与爱因斯坦布朗运动研究的比较变得尤为突出。在强调爱因斯坦物理学严谨性的同时，萨缪尔森指出，巴舍利耶早已取得了部分相重叠的数学结果，并解释了傅里叶热方程如何描述概率扩散。这种预见性以及时间上的组成，是其历史评估的核心（萨缪尔森，2006年，第 viii 页）。

Benoît Mandelbrot 在《分形物体》中也表达了类似的惊叹。他强调，一篇关于巴黎证券交易所的学位论文预见了后来布朗运动数学的广泛发展，而其更深远的意义则通过概率领域的后续发展逐渐显现（Mandelbrot，1995年，第 170–174 页）。

Mandelbrot 转载了 Paul Lévy 1964年1月25日信件的节选。作为一位杰出的法国概率论学家和布朗运动理论的重要贡献者，Lévy 讨论了巴舍利耶的职业困境及其数学重要性。在继续批评其

最初的表述时，他承认巴舍利耶在爱因斯坦和维纳之前就识别出了若干重要性质，尤其是扩散方程以及区间上最大值概率分布。Lévy 将自己的重新评价追溯至1931年阅读 Kolmogorov 的著作（Mandelbrot，1995年；Taqqu，2001年，第20页）。

在其自传中，Lévy在Taqqu另行引用的一段文字里指出，爱因斯坦于1905年重新发现了概率密度与热方程之间的联系，却不知道巴舍利耶早已提出这一发现（Taqqu，2001年，第20页，注27）。这些说法表明，Lévy将巴舍利耶置于布朗运动史中；Mandelbrot和Taqqu又将这一评价传递给了后来的读者。

这一证词也传到了物理学家那里。杰里米·伯恩斯坦承认，Mandelbrot曾亲自寄给他一封信，信中Lévy解释了自己起初为何未能充分认识巴舍利耶的贡献（Bernstein，2005年，第398页，注10）。因此，学位论文、通信和回忆共同塑造了后来的评价。

数学界的认可并未同等延伸至金融内容。Courtault及其合著者转述了Lévy在笔记摘要上的批注："金融内容太多了！"（Courtault 等人，2000年）。对概率论结果的认可，完全可能与对其金融背景的保留态度并存。

重新获得读者关注的情况，也可以通过哥伦比亚大学原藏的《高等师范学校科学年刊》第17卷加以追溯。该卷收录了这篇学位论文，并于1901年11月6日前已入藏。其后来的流通记录载有Mandelbrot之名、约克镇高地以及1961年1月的日期。同一卷文献将早期的国际传播与对金融波动的重新研究联系起来。这条记录证明了该卷曾被借阅，但无法确定 Mandelbrot首次接触巴舍利耶的时间。

Mandelbrot对这一金融模型的赞赏伴随着批评。高斯分布赋予远离均值的变动以极小的概率；他认为，在观测价格中，大幅变动出现得更为频繁。他考察了对数价格的变动，提出具有厚尾的分布，从而允许极端变动具有更高的概率。他明确将此视为巴舍利耶模型的推广（Mandelbrot，1963年，第394–395页）。

他还将高斯模型称为其理论的原型和极限情形，同时保留了该模型对于极端观测较少的经济现象的潜在相关性（Mandelbrot，1963年）。因此，巴舍利耶的构造既是一项令人钦佩的成就，也是一种其金融假设可以受到质疑并加以扩展的框架。

这种认可也延伸到了金融从业者。埃莉耶特·杰曼强调了这篇学位论文对数理金融的奠基性贡献，并讲述了向交易员展示其关于"复杂交易"讨论中的期权组合收益图时，他们所表现出的惊讶。她还特别提到罗伯特·C·默顿对巴舍利耶的认可。默顿于1997年获得诺贝尔经济学纪念奖，他在《理性期权定价理论》（1973年）的摘要开头追溯了期权定价与巴舍利耶 1900年公式之间的渊源（杰曼，1997年，第41页）。

默顿在后来对数学模型与金融实践的讨论中，再次谈到巴舍利耶的贡献。他强调了巴舍利耶的学位论文所具有的丰富内涵，指出其中为投机而发展出的数学方法，预示了爱因斯坦后来对布朗运动的处理方式的某些方面（默顿，1995年）。

默顿将这一认可与如下断言结合起来：巴舍利耶的著作一直

在金融文献中鲜为人知，持续了半个多世纪。因此，他的论述展示了人们对这篇学位论文的赞赏，如何与其长期遭到忽视的叙事并存。本文考察的早期引述和应用，尤其是 Barriol、Gherardt 和 Pietri-Tonelli 的相关工作，通过记录巴舍利耶的金融思想在20世纪中叶获得更广泛认可之前已受到关注，对这一叙事作了补充。

杰里米·伯恩斯坦在2005年发表于《美国物理学杂志》的《Bachelier》中，给出了生动的评价。他将这篇学位论文视为预见了爱因斯坦和Smoluchowski的布朗运动理论（Bernstein，2005）。其中的高斯分布会让物理学家“立刻产生似曾相识之感”（Bernstein，2005，第396页）。他从概率合成、平方根时间标度和Fourier扩散方程等方面进行了比较，指出金融问题与后来物理理论之间存在具体的数学对应关系。

在次年发表的《爱因斯坦与原子的存在》中，伯恩斯坦指出，用位置取代价格，就揭示了爱因斯坦后来研究的数学问题。他指出了积分合成关系、一种可与Smoluchowski的方法相比较的随机游走方法，以及高斯解，甚至提出将其命名为“巴舍利耶–爱因斯坦方程”（Bernstein，2006，第869–870页）。他还曾将爱因斯坦的积分关系描述为“查普曼–柯尔莫哥洛夫–巴舍利耶方程”的特例（Bernstein，2005，第397页）。这些比较将巴舍利耶置于物理学布朗运动理论的历史之中。他提及Davis 和 Etheridge于2006年出版的译本，为物理学家了解这篇学位论文提供了另一条途径（Bernstein，2006）。

Bertrand Duplantier 同样在其布朗运动史述中提及巴舍利耶。在 2005 年的一篇综述中，他回顾了巴舍利耶于 1900 年采用随机游走模型的工作，并将其置于后来布朗运动数学理论的发展脉络中（Duplantier, 2005）。这种认可并不局限于巴舍利耶第二个学位论文选题——流体力学——这一传记细节；它还让他关于投机的研究在物理学一项核心概念的历史中占有一席之地。Duplantier 的论述与杰里米·伯恩斯坦的论述一样，值得关注，因为在相关文献中，巴舍利耶的贡献受到的重视并不均衡。概率学家和数理经济学家明确承认了他在数学上的优先地位，而物理学家和物理学史学者的论述则往往以爱因斯坦、Smoluchowski 和 Perrin 为中心，将巴舍利耶排除在这一叙事之外。因此，Duplantier 和 Bernstein 的突出之处在于，他们将巴舍利耶的研究纳入了物理学的历史视野。

经济学家兼金融史学家 Peter L. Bernstein（1919–2009年）在其现代金融史著作中，对巴舍利耶给予了大量关注。他阐释了这篇学位论文如何将投机视为公平博弈、如何提出投机者的数学期望为零、波动幅度与时间的平方根成正比，以及期权估值等内容。他还强调，该论文预见了爱因斯坦关于布朗运动的研究，并将其视为一项超越金融动机、意义重大的成就（Bernstein, 1992）。

Bernstein 将这项原创性与有限的认可度相对照，把它本可能预示的杰出事业与巴舍利耶的职业困境并置。他借鉴 Mandelbrot 的观点，将这种忽视归因于跨学科领域对研究发现进行分类和检索的困难。他的叙述最终落脚于 Savage 在20世纪50年代重新发现这篇学位论文，并将其视为实际上已经失传（Bernstein，1992）。这番论述展现了“遭受忽视、后被重新发现”这一叙事的影响力，同时也凸显了本文的一项核心区分：认可度有限、获取困难，并不能证明该研究在发表时传播范围狭窄。后来，杰里米·伯恩斯坦向物理学家介绍了这段金融史（Bernstein，2005）。

物理学家兼科学作家 Tony Rothman 在2006年发表于《美国科学家》的《迷失在爱因斯坦的阴影中》一文中，也向更广泛的科学读者群提出了类似的比较。他强调，巴舍利耶的金融研究得出的方程，与爱因斯坦后来提出的布朗运动方程完全相同（Rothman，2006，第113页）。Rothman 将巴舍利耶置于一众被爱因斯坦声望掩盖的先驱者之列，也探讨了爱因斯坦是否了解他的研究，并认为这种可能性不大，因为该研究据称遭到了学术忽视。

Robert W. Dimand 曾于1993年在《英国科学史杂志》中论证巴舍利耶在这段历史中的地位。在回应一篇关于布朗运动的论述时，他强调了该学位论文的概率构造，并引用了 Cootner 对其中连续随机过程、扩散方程、首次通过问题和吸收屏障的评价（Dimand，1993年，第233页）。这些评价将巴舍利耶置于概率论领域，其意义远不止于金融应用。

Dimand 总结道，同样的方法既可用于描述粒子运动，也可用于描述金融价格波动。他指出，过于紧密地将这篇学位论文与投机联系起来，掩盖了它更广泛的意义，并敦促布朗运动史学家关注这篇论文（Dimand，1993年，第234页）。

一次公开更正体现了人们持续进行的重新评估。2013年5月23日，Jim Holt 在《纽约书评》上发表了对 Benoît Mandelbrot 的《分形家》的评论《他构想了粗糙性数学》，称巴舍利耶模型借鉴自平衡态气体的物理学（Holt，2013a）。在读者提出异议后，他于2013年10月24日在《与路易·巴舍利耶随机漫步》中重新审视了这一说法。Holt 承认自己低估了巴舍利耶的原创性，并强调，金融波动使他比爱因斯坦开展物理学研究早五年接触到布朗运动数学（Holt，2013b）。

近期研究也为巴舍利耶的学位论文中的一些具体论点带来了新的认识。Beiglböck、Pammer 和 Schachermayer（2022年）重新审视了他的“概率辐射”思想，即概率以类似于热流的方式在相邻价格水平之间扩散。作者还将这一思想与现代最优传输联系起来；最优传输关注的是如何通过移动某一分布的质量，将其转化为另一分布（Beiglböck 等，2022年，第1节）。他们的分析展示了，一个最初为金融投机而提出的论证，如何继续在数学内部促成新的联系，使这篇学位论文的接受史超越了对其价格先驱模型的单纯认可。

这些事例展示了重新获得认可的不同形式：Doob 回忆起巴舍利耶对其研究的影响；萨缪尔森发现了能够开启新可能性的工具；Mandelbrot 则将钦佩与对金融假设的批评结合起来。萨缪尔森、Lévy、两位 Bernstein、Rothman 和 Holt 对爱因斯坦的比较，本身也是接受史的一部分，表达了他们对通过投机发展起来的数学所赋予的重要性。Dimand 同样强调了其超越最初应用的意义。

保存下来的副本、持续不断的引用、个人间的交流以及译本促成了这些相遇。这段历史将学位论文早期的传播，与历代读者借以理解和欣赏它的不断变化的问题联系起来。

7.1 英文译本与更广泛的传播

英语译本使这篇学位论文的传播超越了法语读者的范围，并将其置于新的思想语境中。A. James Boness 的译本发表于 Paul H. Cootner 的《股票市场价格的随机性》一书中，时间为1964年（Cootner，1964）。通过将巴舍利耶

的作品与当代金融价格研究并列，这部文集将其呈现为一项活跃研究领域的先驱。

Mark Davis 和 Alison Etheridge 的2006年版本提供了不同的呈现方式：这是一部专门收录巴舍利耶的学位论文的文集，将新译本与解释性注释、法文原文的再版，以及对概率和金融经济学后续发展的论述结合在一起（Davis 和 Etheridge，2006）。Cootner的文集将这篇学位论文置于金融市场研究之中，而 Davis 和 Etheridge 则持续考察了文本本身及其在数理金融发展中的地位。

8 结论

证据表明，早期的国际传播是通过互为补充的渠道实现的。这份单独成册的学位论文通过大学交换、图书贸易和私人赠礼传播开来。在《高等师范学校科学年刊》发表，则为其进入欧洲和美国图书馆提供了另一条途径。该文本在发表后不久便传入海外机构，远早于其重要性得到广泛认可。

巴舍利耶积极促成了这一传播。献给 Woodward 的题词以及多次向精算师协会赠送书籍的记录，证明了他努力接触海外读者，其中包括关注概率和金融估值的专业群体。精算师协会的记录追溯了他从1906年至1913年的这一活动。伦敦数学学会和爱丁堡数学学会的图书馆清单也记录了它们在1905年–1906年间通过赠礼收到这篇学位论文。

评论与后续使用表明，该著作拥有一批可辨识的读者。Desaint 讨论了其中的核心数学特征；Montessus 将相关结果纳入一本概率论教科书；Barriol 展示了金融计算，却未注明出处；Gherardt 和 Pietri-Tonelli 在有关投机的著作中讨论了该作品；Kolmogorov 和 Khinchine 则承认其对连续时间概率论的贡献。这些例子记录了该著作在不同知识与专业环境中的选择性接受。综合来看，这些案例既修正了“完全遭到忽视”的形象，也修正了数学界认可与经济学界忽视之间存在截然分界的看法。它们确立了分散式的接触与回应，但本身并不能证明存在连续的研究传统。

这项重构还表明，结合文献资料具有重要价值。当代目录只能提供局部视图：现存副本可能仍难以辨认，而当时的获取清单则记录了如今已无法找到的作品。卷册、来源标记、入藏登记簿、历史目录以及印刷清单，有助于区分当前馆藏与早期可获得性的日期证据。这项物质与制度层面的调查通过明确巴舍利耶在何处、何时以及通过哪些渠道接触到潜在读者，拓展了此前的重新评估。

单本馆藏将早期获取与后来的接触联系起来。哥伦比亚大学于1901年登记入藏的那册书，记录了Mandelbrot于1961年的借阅。萨缪尔森回忆自己在麻省理工学院找到这篇学位论文，同样说明了机构保存如何使后人得以获取它。1964年和2006年的译本扩大了获取渠道，并赋予其新的思想语境。

因此，理解其延迟获得认可，必须结合早期的国际传播、巴舍利耶为传播其研究所作的持续努力，以及可辨识但有限的应用。历史问题在于，作品的可获取性如何促成特定的解读与应用，以及这些解读与应用如何随数学问题和读者群体的变化而改变。

致谢

作者由衷感谢各图书馆及其工作人员，他们慷慨而尽心的协助使这项调查得以开展。他们耐心查找、仔细查验馆藏副本和历史记录，并愿意提供照片及详细信息，这些都对重建巴舍利耶的学位论文的传播过程至关重要。几位工作人员更是远远超出了最初的请求，找到了此前未编入目录的副本，并使其出现在在线目录中。本研究深受他们的专业知识、坚持不懈的精神以及非凡的协作精神之惠。

参考文献

《数学学报》(1913). 路易·巴舍利耶《*Calcul des probabilités*》的书目介绍。第36卷，书目增刊，第2–3页。Autonne, L. (1900). 路易·巴舍利耶《《投机理论》》的书评。《《纯粹与应用科学综述》》，第11卷，第1240页。Bachelier, L. (1900a). “《投机理论》”。《《高等师范学校科学年刊》》，第三辑，第17卷，第21–86页。Bachelier, L. (1900b). 《《投机理论》》。博士论文，巴黎理学院。巴黎：Gauthier-Villars。70页。Bachelier, L. (1901). “《博弈数学理论》”。《《高等师范学校科学年刊》》，第三辑，第18卷，第143–209页。Bachelier, L. (1906). “《连续概率理论》”。《《纯粹与应用数学杂志》》，第六辑，第2卷，第259–327页。Bachelier, L. (1910). “《多变量概率》”。《《高等师范学校科学年刊》》，第三辑，第27卷，第339–360页。Bachelier, L. (1912). 《*Calcul des probabilités*》。第一卷。巴黎：Gauthier-Villars。Bachelier, L. (1914). 《《游戏、机遇与偶然》》。巴黎：欧内斯特·弗拉马里翁。Barriol, A. (1908). 《《金融业务理论与实践》》。巴黎：奥克塔夫·杜安。Beiglböck, M., Pammer, G., and Schachermayer, W. (2022). “从巴舍利耶到迪皮尔：通过最优传输。”《《金融与随机过程》》，第26卷第1期，第59–84页。Ben-El-Mechaiekh, H., and Dimand, R. W. (2018). “路易·巴舍利耶1938年的专著《投机演算》：巴舍利耶后期著作中的数理金融与资产价格的随机性。”《《数学史评论》》，第24卷第1期，第41–106页。Bernstein, J. (2005). “巴舍利耶。”《《美国物理学杂志》》，第73卷第5期，第395–398页。Bernstein, J. (2006). “爱因斯坦与原子的存在。”《《美国物理学杂志》》，第74卷第10期，第863–872页。Bernstein, P. L. (1992).《《资本理念：现代华尔街不可思议的起源》》。纽约：自由出版社。《法国书目》(1900). 路易·巴舍利耶《《投机理论》》的法定缴存记录。12月29日，记录编号13167。法国国家图书馆 (1901). 《《外国大学交换所得及法国国家图书馆于*1900*年收到的学位论文与学术著作目录》》。巴黎：

C. Klincksieck书店。法国国家图书馆 (1902). 《《外国大学交换所得及法国国家图书馆于*1901*年收到的学位论文与学术著作目录》》。巴黎：C. Klincksieck书店。Biggs, N. (2016). “数学、测量与货币。”伦敦数学学会—格雷沙姆学院联合年度讲座，2016年5月24日。Chapman, S. (1928). “悬浮于非均匀流体中的颗粒的布朗位移与热扩散。”《《伦敦皇家学会会刊。*A*辑：数学与物理学论文》》，第119卷第781期，第34–54页。Cootner, P. H. (编) (1964). 《《股票市场价格的随机性》》。马萨诸塞州剑桥：麻省理工学院出版社。Courtault, J. M., Kabanov, Y., Bru, B., Crépel, P., Lebon, I., and Le Marchand, A. (2000). “《投机理论》问世百年之际的路易·巴舍利耶。”《《数理金融》》，第10卷第3期，第339–353页。Davis, M. H. A. (2008). “路易·巴舍利耶的投机理论。”讲义，伦敦帝国学院。Davis, M., and Etheridge, A. (2006). 《《路易·巴舍利耶的投机理论：现代金融的起源》》。普林斯顿：普林斯顿大学出版社。Desaint, L. (1901). “L. Bachelier——《投机理论》（学位论文）。”《《数学教学》》，第3卷，第136–138页。Dimand, R. W. (1993). “布朗运动案例：关于巴舍利耶贡献的一则札记。”《《英国科学史杂志》》，第26卷第2期，第233–234页。Duplantier, B. (2005). “布朗运动：‘多变而无定’。”《庞加莱研讨会》，第1卷，第155–212页。爱丁堡数学学会 (1906). “赠予图书馆的书籍。”《《爱丁堡数学学会会刊》》，第24卷，1905–1906年会期，单独编页的卷末部分，第8页，编号22。El Karoui, N., Parent, A., and Pradier, P. C. (2026). “路易·巴舍利耶的《投机理论》：瓦尔拉斯一般均衡缺失的一块拼图。”《《*Kyklos*》》，第79卷第2期，第429–443页。Estanave, E. (1901). 《《*1891*年*1*月*1*日至*1900*年*12*月*31*日为取得理学博士学位而提交至巴黎科学学院的学位论文十年综述，并附载有大部分论文或其摘要的期刊目录》》。Arcis-sur-Aube：L. Frémont。Ferry, J. (1882a). “关于学位论文事务规程的法令。”1882年7月21日。《《公共教育行政公报》》，第28卷，第525号增刊，第864–866页。Ferry, J. (1882b). “关于学位论文事务的通告。”1882年8月11日。《《公共教育行政公报》》，第28卷，第525号增刊，第862–864页。Gauthier-Villars (1900). 路易·巴舍利耶《《投机理论》》的介绍。《*Gauthier-Villars*书店新出版物季刊》，第一季度，第8–9页。Geman, H. (1997). “从巴舍利耶到布莱克–斯科尔斯–默顿。”《《法国精算公报》》，第1卷第2期，第41–53页。Gherardt, M. (1910). 《《*Le gain mathématique à la Bourse*》》。巴黎：Charles Amat。Hilbert, D. (1900). “《几何学基本原理》。”L. Laugel 译。《《高等师范学校科学年刊》》，第三辑，第17卷，第103–209页。

Holt, J.（2013a）。“他构想了粗糙性数学。”《纽约书评》，5月23日。Holt, J.（2013b）。“《与路易·巴舍利耶随机漫步》。”《纽约书评》，10月24日。精算师协会（1906年）。“图书馆新增藏书。”《精算师协会期刊》，40(4)，403–415。伊藤，K.，与麦基恩，H. P., Jr.（1965年）。《扩散过程及其样本路径》。《数学科学基础丛书》第125卷。柏林–海德堡–纽约：施普林格出版社。Jackwerth, J. C.（2004年）。期权隐含风险中性分布与风险厌恶。弗吉尼亚州夏洛茨维尔：AIMR研究基金会。Jovanovic, F.（2000年）。“金融理论的起源：重新评估路易·巴舍利耶的贡献。”《政治经济学评论》，110(3)，395–418。Jovanovic, F.（2001年）。“金融理论中为何采用随机漫步假说？一种伦理选择的历史缘由。”《金融经济学评论》，61，203–211。Jovanovic, F.（2002年）。“Julien Laferrière论交易所的法律规范与科学规律。”《人文科学史评论》，7，181–191。Jovanovic, F.（2012年）。“巴舍利耶：并非如人们所描绘的那样被遗忘的先驱。路易·巴舍利耶著作在经济学中的传播分析。”《欧洲经济思想史杂志》，19(3)，431–451。Kolmogorov, A.［以A. Kolmogoroff］之名发表（1931年）。“关于概率论中的解析方法。”《数学年刊》，104，415–458。Kolmogorov, A.［以A. Kolmogoroff］之名发表（1933年）。概率论基础。数学及其边界领域成果，2(3)。柏林：尤利乌斯·施普林格。Koski, T.（2017年）。*KTH*概率与随机过程课程讲义。KTH皇家理工学院数学系SF2940概率论课程讲义，斯德哥尔摩。Krengel, U.（2011年）。“格奥尔格·博尔曼对概率论的贡献。”概率与统计史电子期刊，7(1)。Laurent, A. G.（1959年）。致编辑的信——对《股市中的布朗运动》的评论。《运筹学》，7(6)，806–807。伦敦数学会（1907年）。“图书馆。”《伦敦数学会会刊》，第二辑，4。Mandelbrot, B.（1963年）。“某些投机性价格的变动。”《商业杂志》，36(4)，394–419。Mandelbrot, B.（1995年）。《分形物体：形状、随机性与维数》。第4版，修订版。巴黎：弗拉马里翁出版社。默顿，R. C.（1995年）。“金融数学模型对实践的影响：过去、现在与未来。”载于S. D. Howison、F. P. Kelly和P. Wilmott（编），金融数学模型，第1–14页。伦敦：查普曼与霍尔出版社。R. de Montessus de Ballore（1908年）。《概率计算基础教程》。巴黎：Gauthier-Villars。Ondar, Kh. O.（编）（1981年）。*A. A.* 马尔可夫与*A. A.* 丘普罗夫关于概率论与数理统计的通信。纽约：施普林格出版社。

Osborne, M. F. M.（1959a）。“股市中的布朗运动。”《运筹学》，7(2)，145–173。Osborne, M. F. M.（1959b）。致编辑的信——回复对《股市中的布朗运动》的评论。《运筹学》，7(6)，807–811。Oster [署名“Ot.”]（1902年）。路易·巴舍利耶《《投机理论》》书评。《数学进展年鉴》，31（1900年卷），241–242。柏林：Georg Reimer。Pietri-Tonelli, A. de（1921年）。《*La speculazione di borsa*》。第2版，修订增补版。罗维戈：Industrie Grafiche Italiane。Poincaré, H.（1900年）。“关于路易·巴舍利耶论文的报告。”1900年3月29日前。法国国家档案馆，AJ/16/5537。转录见S. A. Walter（编），亨利·庞加莱文献，文献7-3-23。Protter, P.（2001年）。“金融资产定价理论简介（部分）。”《随机过程及其应用》，91，169–203。Protter, P.（2022年）。“连续时间资产定价理论。”R. A. Jarrow所著《《连续时间资产定价理论：基于鞅的方法》》第2版（施普林格出版社，2021年）的书评。《定量金融》，22(5)，813–815。Read, C.（2013年）。“讨论与应用：爱因斯坦与巴舍利耶。”载于《有效市场假说倡导者：巴舍利耶、萨缪尔森、法马、罗斯、托宾与席勒》，第33–43页。帕尔格雷夫·麦克米伦出版社。《科学问题评论》（1901年）。路易·巴舍利耶《《投机理论》》书讯[未署名]。第二辑，第19卷（总第49卷），1月，第348页。Richmond, P.、Mimkes, J.和Hutzler, S.（2013年）。经济物理学与物理经济学。牛津：牛津大学出版社。Rothman, T.（2006年）。“迷失在爱因斯坦的阴影中。”《美国科学家》，94(2)，112–113。Samuelson, P. A.（2006年）。“前言。”载于M. Davis和A. Etheridge（编），《路易·巴舍利耶的投机理论：现代金融的起源》，第vii–xi页。普林斯顿：普林斯顿大学出版社。Smoluchowski, M. von（1906年）。“论布朗分子运动与悬浮液的动力学理论。”《物理学年鉴》，第四辑，21，756–780。Smoluchowski, M. von（1913年）。“外力作用下布朗分子运动的若干实例。”《克拉科夫科学院国际通报，数学与自然科学部，*A*辑》，418–434。Taqqu, M. S.（2001年）。“《巴舍利耶及其时代》：与Bernard Bru的对话。”《法国统计学会杂志》，142(2)，3–40。Wölffing, E.（1901年）。“1900–1901年论文索引。”《数学与物理杂志》，46，第393页，“政治算术”条目34（L. Bachelier，《投机理论》）。