同伦版库拉托夫斯基定理

Loïc Dubois

圣母大学

摘要

我们证明，若一个从图 G 到某个紧致可定向曲面（可能带边界）的映射无法通过变形消除所有交叉，那么将其限制到 G 的某个子图上也无法做到；该子图中度不等于二的顶点至多有 72 个。在球面上，这就是库拉托夫斯基定理；相比之下，曲面上的可嵌入性极小障碍会随着其亏格增大。我们的证明将问题归约为带有顺序约束的圆盘平面性问题，并确定了该问题存在规模较小的障碍所需满足的条件。我们的主要工具是深度优先搜索树的同伦版本；经典的平面性测试和库拉托夫斯基子图的提取都以此为基础。

2012年ACM学科分类计算数学 → 图与曲面；计算数学 → 几何拓扑；计算理论 → 计算几何

关键词和短语图嵌入、同伦、曲面、库拉托夫斯基定理、禁用子图、解缠

arXiv:2611.28401v1 [cs.CG] 20 Nov 2026

1 引言

本文探讨从图 G 到曲面 S 的映射 f 何时可以解缠：也就是说，何时可以通过变形消除所有交叉，换言之，何时与一个单射映射同伦。如果一个图顶点的度不为二，则称其为拓扑顶点。我们证明：

▶**定理1.1**。 设 S 是一个可能带边界的紧致可定向曲面， G 是一个图， $f\colon\ G \to S$ 是一个映射。如果 f 无法解缠，那么对于某个 $G' \subseteq G$ ，其拓扑顶点数至多为72， $f|_{G'}$ 也无法解缠。

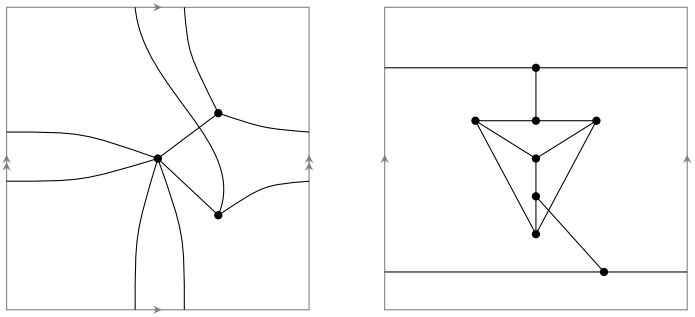


图1 到环面和圆环上无法解缠的最小映射。

值得注意的是，该界限不会随着 S的亏格增长，这与可嵌入性障碍形成鲜明对比。定理1.1还给出了一个多项式时间算法，用于计算一个较小的证书，以证明 f 无法解缠：在 f 的限制仍然无法解缠的情况下，反复删除 G 的一条边或一个孤立顶点，并在每一步使用 Colin de Verdière、Despré 和 Dubois 的算法进行测试 [8]。这些结果是否能推广到不可定向曲面仍是一个开放问题；最优常数究竟是多少也尚无定论，其范围介于8（图1，右）和72之间；极小映射中涉及哪些图同样未知。我们固定一个紧致可定向曲面 S。

1.1 相关工作

当 S 为球面时，从 G 到 S 的所有映射都是同伦的，因此 f 可以解缠，当且仅当 G 是平面图，而定理1.1就归结为库拉托夫斯基定理 [18]。在没有同伦约束的情况下，固定曲面中的可嵌入性可由有限多个极小禁用子图刻画 [26], ，但目前仅对平面和实射影平面已知这些子图；实射影平面中已有103个这样的子图 [16, 2], ，并且其数量会随着曲面的亏格 g 增长：$g+1$ 个K_3的不相交副本,3 无法嵌入，而每个真子图都可以嵌入。

当 G 是一个圈时，问题在于闭曲线是否同伦于一条简单曲线。这一问题可追溯至庞加莱 [24], ，并由 Reinhart [25], 、Chillingworth [5, 6], 以及 Birman 和 Series [3]解决；Despré 和 Lazarus 给出了一种近线性算法 [10]。由于最短闭测地线使交点数最小化 [14], ，一族闭曲线可以被解缠，当且仅当每条曲线以及每一对曲线都可以被解缠。

Colin de Verdière、Despré 和 Dubois [8] 利用弱嵌入的识别 [15, 1]，在多项式时间内判定一个映射是否可以被解缠。Ladegaillerie 刻画了嵌入的同痕 [19]，Colin de Verdière 和 de Mesmay [7]则高效地解决了这一判定问题。在平面中，嵌入子式对平面图构成良拟序，因此每个子式封闭性质都有有限多个排除子式；这一点由 Medina、Mohar 和 Salazar [21], 以及 Lunel 和 Maria [20]证明。

我们的问题与圆盘中的平面性有关：匹配的边界顶点对必须具有相反的边序。这是同步平面性的一个特殊情形，Bläsius、Fink 和 Rutter 已在线性二次时间内解决了该问题 [4]。该算法与 Fulek 和 Kynčl 关于弱嵌入的 Hanani–Tutte 定理型刻画 [15], 一样，都没有限定障碍的大小。

我们的证明依赖于深度优先生成树，也称为 Trémaux 树；它们是平面性测试 [17, 9] 以及提取库拉托夫斯基子图 [29]的基础。

1.2 概述

一个 圈图 是指其每个连通分支都只有一个顶点的图。Colin de Verdière、Despré 和 Dubois 的论证 [8] 给出：

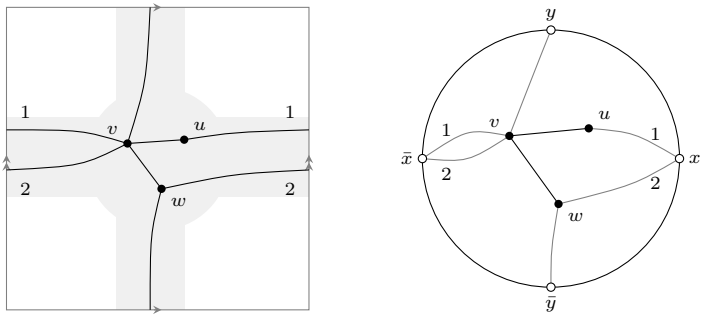
▶ **引理 1.2** (附录 A)。 设 L 为圈图，且 $\lambda\colon L \to S$。如果 λ 不可解缠，则 L 含有一个至多包含四个环的子图 L'，使得 $\lambda|_{L'}$ 不可解缠。

同一作者将一般图归约为环图 [8]。给定一个图 G 及映射 $f\colon G \to S$，在 G 的每个连通分支中，将生成树的像收缩为一点，将同伦回路成束，并收缩可缩的回路。这样便将 f 转化为复合映射 $\lambda \circ \mu$，其中 L 是一个环图，$\mu\colon G \to L$ 且 $\lambda\colon L \to S$：这是沿生成森林对 f *along* g 的分解，并且在 λ 的同伦意义下确定。弱嵌入是一列嵌入的一致极限。

▶ **引理 1.3** ([8, 引理 5。5])。 设 $\lambda \circ \mu$ 是 $f\colon G \to S$ 沿生成树的分解 g 森林 *of* G。如果 λ 是一个嵌入，并且如果 f 可以被解缠，那么 μ 是一个弱嵌入。

因此，当 λ 是一个嵌入时，对 f 进行解缠，就是将 μ 扰动为靠近 L 的嵌入，其中每个嵌入对应 L 的一个连通分支。我们将其重新表述为带顺序约束的平面性问题。嵌入 λ 按循环顺序规定了 L 的半边围绕其顶点的排列。我们构造一个圈 C，其顶点按此顺序与每条半边一一对应；将 G 中沿回路发送的每条边切开为两个匹配半边，并将它们连接到 C 中相应的顶点上（图2）。

▶ **定义 1.4.** 一个构件 (H, C) 由一个圈 C 和一个与之不共享边的图 H 构成。与 C 相接的 H 的边称为半边。为方便起见，记号中省略了它们和 C的顶点；这些半边和顶点被划分为匹配对，且匹配半边位于匹配顶点处。



(a) (b)

图2 环面上圈图附近的绘图（a）及其构件（b）。

我们只考虑 H 的子图 H'，其中每个半边都包含其匹配边。若可实现，则 $H' \cup C$ 具有一个平面嵌入，其外面 C 使匹配顶点处半边的顺序反转。其连接图由将匹配半边连接成单边并删除 $V(C)$ 得到，其秩是该图的圈秩。对于分解的构件，H' 对应 G的一个子图。

▶ **引理1.5**（附录B）。令 $H' \subseteq H$ 对应于 $G' \subseteq G$。假设 $H' - V(C)$ 是连通的。那么，当且仅当 H' 可实现时，$f|_{G'}$ 才可以被解缠。

非可实现构件是否具有较小的非可实现子图并不清楚：一个看似相关的问题具有任意大的极小障碍 [22, 第 5]节。我们的关键贡献是给出了一个使其成立的条件。如果集合 $U \subseteq V(H) \setminus V(C)$ 中的半部至少到达 C 的两个顶点，则称其为富。设 T 是 $H - V(C)$ 的一棵生成树，以顶点 r 为根；如果 $V(T)$ 是富的，并且当 K 是 $T - r$ 的一个富连通分支时，$V(T) \setminus K$ 也为富，则称其为扎根。如果由 T 张成的图中的每条边都将一个顶点连接到其自身或其在 (T, r) 中的某个祖先，则根树 (T, r) 在该图中是深度优先的。

▶ **命题 1.6**（第3节）。设 $(H、C)$ 是一个构件。假设 $H - V(C)$ 在 H 的连接图中具有一棵扎根且深度优先的有根生成树 $(T、r)$。如果 H 不可实现，那么某个秩至多为37 的 $H' \subseteq H$ 也不可实现，且该 $H' - V(C)$ 是连通的。

命题 1.6 的证明大致如下。将 T 的一条边 e 称为刚性 边，如果 $T - e$ 的两个连通分支都是富的。刚性边构成一棵包含 r 的子树 R，或者是$\{r\}$。$T - V(R)$ 的每个连通分支都不富，因此其半部（如果有）都连接到 C 的一个顶点；根据深度优先性，其余边以及其半部的匹配边都终止于 R。于是，H 的其余部分分裂成若干部件，这些部件连接到 R，且每个部件至多包含 C 的一个顶点。将 C 的每个顶点 x 处的部件收缩到 x 中，得到骨架（图3）。由于每条刚性边的两侧都是富的，骨架在由 C 界定的圆盘中的所有嵌入，除镜像外，在 R 上、在由通向每个 x 的边进入的 R 的角上，以及这些角围绕 x 的排列上，都相同。于是，当且仅当骨架可嵌入，并且对于每一对匹配顶点，将它们处的部件沿其半部粘合后，能够嵌入一个圆盘，且这些角按此顺序位于圆盘边界上时，H 才可实现。如果其中一个圆盘问题失败，Mohar 的一个定理 [22, Theorem 3.1] 会给出该问题的一个小型障碍；再由 T 的几条路径将其提升为所需的 H 子图。

接地性可以直接定义在 G 的有根生成树（T，r）上。用同伦类 $\langle e \rangle$ 标记 G 的每条有向边 e，其中该同伦类属于 $\pi_1(S, f(r))$，表示经过 f 的像：回路从 r 沿着 T 到 e 的尾端，然后经过 e，再沿 T 回到 r。顶点集合 U

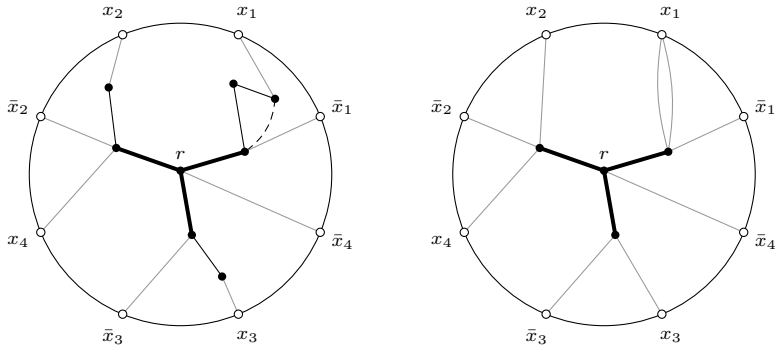


图3 一个带有有根锚定树的构件，其刚性树以粗线表示（a），以及它的骨架（b）。

G 的顶点集合对 f 具有丰富性，如果尾端位于 U 中的两条有向边具有不同的非平凡标记；而（T，r）对 f 具有接地性，当且仅当它对于这种丰富性概念是接地的。

▶ **引理1.7**（附录C）。设 G 是一个连通图，（T, r） 是G, f的有根生成树： $G \to S$是一个映射，而 $\lambda \circ \mu$是 f沿 T的分解。如果（T, r） 对于 f是扎根的，那么它对于该分解的构件也是扎根的。

这样的有根树可能不存在，例如当 f 可缩时。更一般地，如果 f 的像是 S的基本群的一个循环子群，我们就称 f 是循环的 。

▶ **命题 1.8**（第4节）。设 G 是一个连通图，且 f： $G \to S$。如果 f 不是循环的，并且对于 G 的每个圈 O， $f|_O$ 都可以不可解缠，那么 G 就有一棵相对于 f深度优先且扎根的有根生成树。

命题 1.8 的证明如下。在深度优先有根树中， G 树外每个块的边的标记在共轭意义下生成该块中闭游走的类。任何包含具有不可缩圈的块的顶点集都是富的。如果两个块都有不可缩圈，那么以一个将它们分隔开的顶点或同时位于两者上的顶点为根，就能使其扎根。否则，某个块不是循环的，并且包含一个 θ图，其路径 X，Y 与第三条路径 M 一起构成不同的非平凡类。由于每个圈都可以解缠，最长的此类 M 使深度优先搜索沿着 M，然后 X，再然后 Y 进行。这使 M 第一条边的两侧都成为富的。循环情形另行处理：

▶ **引理 1.9** (附录D)。设 G 是一个连通图，并且 f： $G \to S$。如果 f 是循环的且不可解缠，那么 G 有一个至多包含16 个拓扑顶点的子图 G'，使得$f|_{G'}$ 不可解缠。

定理1.1的证明。只需找到 $G' \subseteq G$ 使得 $f|_{G'}$ 无法解缠，且圈秩至多为 37 或至多有 72 个拓扑顶点。事实上，根据第 2 节，从 G' 中移除一个度至多为一的顶点后，其圈秩以及 f 无法在其上解缠这一事实均保持不变。重复此操作可得到一个非空且最小度至少为二的图，因此，如果其圈秩至多为 $2 \cdot 37 - 2 = 72$，则其拓扑顶点数至多为 37。

设 $\lambda \circ \mu$ 是 f 沿 G 的生成森林 T 的分解。若无法解缠 λ，则根据引理 1.2， L 至多有四个回路无法对其进行解缠。令 G' 由分别绕过这些回路中每一个的边组成，并且在 G 的每个连通分支中，取包含它们端点的 T 的最小子树。移除这些边后得到一个森林，因此 G' 的圈秩至多为

四，而通过收缩 $T \cap G'$， $f|_{G'}$ 的一次解缠将给出这些回路上的 λ。因此，无论选择 T 如何，我们都可以假设 λ 在同伦意义下是一个嵌入。

如果 f 能在 G的每个连通分支上解缠，那么根据引理 1.3， μ 在每个连通分支上都是弱嵌入，因此它在 G 自身上也是弱嵌入，因为 G 的不同连通分支被映射到 L的不同连通分支上，而且 f 能够解缠。因此，我们可以用 G 中一个无法使 f 解缠的连通分支替换 G，并假设 G 是连通的。如果 G中的某个圈 O 无法解缠，就取 $G' = O$。如果 f 是循环的，引理 1.9 即可得出结论。否则，根据命题 1.8，我们为 T 选择一棵对f而言既是深度优先又是扎根的有根生成树。根据引理1.7，它对分解中的构件（H， C）也是扎根的。由于它的边被映射到 L的顶点上，它也是 $H - V(C)$的一棵生成树，并且在 H的连接图中是深度优先的，而该连接图就是 G。由于 $H - V(C) \supseteq T$是连通的，根据引理1.5， H 不可实现。命题 1.6 给出了一个秩至多为 37 的不可实现 H'，且 $H' - V(C)$连通；根据引理1.5， f 无法在相应的 G'上解缠。◀

2 预备知识

我们使用图论 [11, 23] 和低维拓扑 [27, 13]中的标准概念。 S是一个紧致可定向曲面，其基本群没有二阶元素。

▶**引理 2.1** (Epstein [12, 定理 4.2])： S 上的一条不可缩简单闭曲线不与 c^k 任何闭曲线 c 和 $k \geq 2$同伦。

我们将图视为可能含有环和平行边的拓扑空间。图的圈秩 等于其边数减去顶点数，再加上其连通分量数。若一个连通图的顶点 v 的边分裂成两个非空部分，且这两个部分仅共享 v，则称 v 为该图的割点 。块 是没有割点的极大连通子图。连通图的块和割点构成一棵树，即块割树。库拉托夫斯基子图 是 K_5 或$K_{3,\,3}$的细分。含有圈 C 的图的平面嵌入具有外面 C，当且仅当整个图都位于由C界定的闭圆盘内。删除度至多为一的顶点会保持圈秩不变，也会保持映射是否可以被解缠不变，因为可以将该顶点及其边在图的其余部分附近重新绘制。

3 扎根深度优先树产生小型障碍

本节证明命题 1.6。固定一个构件 $(H,\ C)$，以及 $H - V(C)$ 的一棵有根生成树 $(T,\ r)$，该树在 H 的连接图中是扎根的且为深度优先树。假设 H 不可实现。我们寻找一个见证：一个秩至多为 37 的不可实现 $H' \subseteq H$，使得 $H' - V(C)$ 连通。作为预备工作：

▶ **引理 3.1** （附录 E）。设 $F \subseteq H$，且 U 是 T 的一棵子树。通过路径将 $F - V\,(C)$ 的连通分支连接起来，并使这些路径与 F 相对不相交，可以使 F 中位于 U 上的顶点在 $F - V\,(C)$ 中两两连通。这不会增加半边，并且保持 $F - V\,(C)$ 的圈秩不变。

3.1 刚性树

e 的一条边 T 若 $T - e$ 的两个连通分支都是富的，则称为刚性的。令 R 为由刚性边构成的 T 的子图；若不存在刚性边，则令 R 为 $R = \{r\}$。悬挂子树是 $T - V(R)$ 的一个连通分支。

▶**引理 3.2**。 R 是连通的，并且包含 r。每个悬挂子树 Z 由某个顶点的后代组成，该顶点的父节点 p 位于 R中。在 Z 处的半边至多通向一个顶点

C。从 Z出发的每条边 $H - V(C)$，以及 Z处每条半边的匹配边，都在 T 从 p到 r的路径上结束。

证明。 如果 T的两条边是刚性的，那么它们之间的每条边也都是刚性的，因为这些边的每一侧都包含其中一条边的一侧。如果 K的某个 $T - r$连通分支是富的，那么 $V(T) \setminus K$也因接地性而是富的，因此从 r到 K 的边是刚性的，而 R 是一个包含 r的子树。否则， T的每条边都有一侧包含在 $T - r$的某个连通分支中，而该分支并不富，因此 $R = \{r\}$。

令 z 为 Z 中离 r最近的顶点，并令 p 为它的父节点。由于 R 是连通的且包含 r，p 位于 R中，而 z 的后代避开了 R。因此， Z 由 z的后代组成。它并不富：如果 $T - r$ 的任何连通分支都不富，那么它包含于其中一个连通分支内；否则，边 pz 不是刚性的，而包含 r 的那一侧是富的，因为它包含 r处一条刚性边的一侧。因此， Z 处的两半都通向 C 的同一个顶点。

设 $u \in V(Z)$。由于 (T, r) 在 H 的连接图中按深度优先遍历，因此 $H - V(C)$ 在u处的边，以及 u处半边的匹配边，均以 u 的祖先或后代为端点。其中位于Z 之外的边位于从 p 到 r的路径上。 u 处半边的一条匹配边不在 Z处，因为它通向 C 的另一个顶点。◀

对于悬挂子树 Z，设 p_Z 为其中距离 r最近的顶点的父节点，设 c_Z 为 C 中由其半边到达的顶点（若存在）。

3.2 部件

设 $F \subseteq H$，并设 $R' \subseteq F$为 R的一棵子树。 R'-部件是 F 的一条边，该边的两个端点都在 $F - E(R')$ 中；或者是 $F - V(R')$ 的一个连通分支 $- V(C)$，连同其与$R' \cup C$相连的边。若 $F - V(C)$ 连通，且每个 R'-部件至多包含 C 的一个顶点、每个避开 C 的 R'-部件至少与 R' 相交两次，并且对于 R'的每个叶 q，包含 q 的两个 R'- 部件包含 C 中不同的顶点，则二元组 (F, R') 是可容许的。

▶ **引理 3.3**。 假设 $H - V（C）$ 是平面的。删除避开 C且仅与 R 相交一次的 R-部件中的 H，保持可实现性，并使 $（H, R）$ 成为可容许的。

证明。 这些部件是平面的，没有半边，并且每个部件都仅在一个顶点处与 H 相交。因此，在其余部分的一个实现中，可以将它们画在这些顶点周围的小圆盘内，并使这些顶点位于其外面上；删除它们保持可实现性。由于这些部件没有半边，富集集合不会发生变化，并且 T 减去被删除的顶点后是新 $H - V（C）$的生成树，在其连接图中仍然是扎根的并且是深度优先的。因此，引理 3.2 仍然成立，且具有相同的 R。

新的一对（H, R）是可容许的。事实上， $H - V（C）$包含 T，因此它是连通的。根据上述描述，每个部件至多包含 C 的一个顶点，而避开C 的部件现在与 R 相交两次。令 q 为 R 的一个叶。若 $R = \{q\}$，则 H 有一条半边，因为 V （T）是富的；其匹配边通向 C 的另一个顶点，并且每个部件都包含 q。否则，令 e 为 R 在 q处的边。由于 e 是刚性的，包含 q 的 $T - e$ 的连通分支 U 是富的。由于 q 是R的叶， U 的其他顶点位于带有 $p_Z = q$的悬挂子树 Z 中。因此， U 处的半边位于包含 q的部件中，并且它们到达 C 的两个顶点。◀

3.3 圆盘障碍

▶**引理 3.4**。 若连通图 F 不存在以给定圈 C 为外面的平面嵌入，那么对于某个 $\Omega \subseteq F - E(C)$，也不存在以该圈为外面的平面嵌入；其中 $C \cup \Omega$的圈秩至多为6，在 C 上的顶点至多4 个，这些顶点关联的边至多8 条，并且$\Omega - V(C)$ 至多有2 个连通分支。

证明。 对 C作细分后，不妨设 $|C| \geq 3$。令 F^+ 为 F加上一个与 C中所有顶点相邻的顶点 v。根据 [22, 定理 3.1], , 存在某个 $\Omega \subseteq F - E(C)$，使得 $C \cup \Omega$ 不存在以 C 为外面的平面嵌入，且 Ω 属于以下类型之一：(a) 两条不相交路径，其内部与 C不相交，且端点沿着 C交替出现；(b) 一个细分的 $K_{2,\,3}$，以及三条不相交路径，它们的内部与 C 不相交，且可以是平凡路径，并分别从该图的三个度为二的顶点通向 C；(c) F^+ 的某个 3-连通分量中的一个库拉托夫斯基子图，该分量不包含 $C + v$。

类型 (a) 和 (b) 如所述。在类型 (a) 中，Ω 的圈秩为零，且 C 处有四条边。在类型 (b) 中，它的圈秩为二，C 处至多有六条边，并且 $\Omega - V(C)$ 包含 $K_{2,\,3}$ 的两个度为三的顶点；除非其余三个顶点位于 C 上，否则它是连通的。

在类型 (c) 中，F^+ 具有一个分离（F_1，F_2），其中 $\Sigma = V（F_1 \cap F_2）$的大小至多为二，F_2是连通的并包含 $C + v$，使得 F_1 加上连接 Σ的顶点的边（如果有两个顶点）不是平面的：取 Σ 分离所讨论的两个 3-连通分量，其中第一个是 F_1 加上该边的拓扑子式。于是 F_1 与 $C + v$ 的交仅为 Σ。如果$v \in \Sigma$，则 v 在 F_1中至多有一个邻点，因此 $F_1 - v$ 不是平面的，我们取其一个库拉托夫斯基子图作为 Ω。否则，令 K 为 F_1的一个库拉托夫斯基子图；如果 $\Sigma = \{s,\ t\}$，则再加上边 st。如果 K 使用了 st，则用从 s 到 t的 F_2 的一条路径替换 st，并将该路径上位于 C上的第一个和最后一个顶点 a、b 之间的部分（如果存在）替换为 C的一条弧；这样避开了 v，其邻点位于 C上。于是 $C \cup$K 不是平面的，并且 Ω = K $- E（C）$去掉其孤立顶点后，仅在 C处与 s、t、a、b相交。

在类型 (c) 中，Ω 是一个最大度为四的库拉托夫斯基子图，可能删去一条边 st，并有两条路径以一端附着其上，因此其圈秩至多为六。它在 C 处至多有八条边：在 s 和 t 处各至多四条；但如果 $a \neq s$，那么 $s \notin C$ 和 a 的度为一，b 和 t 也同样如此。最后，$\Omega - V(C)$ 是一个经细分的 3-连通图，删去至多两个顶点或一条边，并删去若干度为一的顶点，再加上以一端附着的路径，因此它至多有两个连通分支。◀

3.4 骨架

令 $(F,\ R')$ 为可容许的。对于 $x \in V(C)$，令 F_x 为包含x的 F的所有 R'-部件之并；那么 $F_x - V(R')$是连通的，且包含 x。骨架 $K(F,\ R')$由 $F \cup C$通过将每个 $x \in V(C)$对应的 $F_x - V(R')$收缩为 x得到。它由 C、由 R' 和避开 C的 R'-部件构成的核心 K_0，以及星边组成：对于 R'中顶点 a 处的 F_x 的每条边，都有一条从 a 到 x的星边。骨架的嵌入 是外面为 C的平面嵌入。

▶ **引理 3.5。** 如果（H、R）是可容许的，而 K（H、R）没有嵌入，则 H 有一个见证。

证明。骨架是连通的，正如 $H - V(C)$ 一样。因此，引理 3.4 给出圈秩至多为六的 $\Omega \subseteq K(H$、$R) - E(C)$，使得 $C \cup \Omega$ 没有嵌入；其在 C 处的边都是星边，且至多有八条。Ω 中从 a 到 x 的每条星边，都来自半边 ax，或来自一条边 au，其中 u 位于悬挂子树 Z 中，且该子树带有 $c_Z = x$。令 J 为以下各项的并：1）Ω 去掉其星边以及位于 C 上的顶点；2）对于 Ω 的每条星边，取这样的一条半边 ax 或边 au；3）在每个这样的 Z的一个顶点处取一条半边；4）这些半边的匹配边。每个包含半边且与 J 相交的悬挂子树 Z 都包含 J的一条半边。将引理 3.1 应用于 J在 Z中的部分，并取 $U = T[Z]$；由于该部分没有边，它成为 T的一个子树。

假设 J 可实现。在一个实现中，将每个包含半边且与 J 相交的悬挂子树 Z 中 J 的部分（连同其半边）收缩到 c_Z；这部分是连通的，且在 c_Z 处有一条半边。这样一来，每条边 au 都变成星边，并嵌入一个包含 $C \cup \Omega$ 的图，矛盾。因此 J 不可实现；而引理 3.1 利用 $U = T$ 使 $J - V(C)$ 连通后，它仍然不可实现。

所得结果是一个见证。事实上， J 至多有八对匹配半边，每条 Ω 的星边至多对应一对，因为第 3 项中的半边取代了边 au。在最后一次应用引理 3.1 之前，将悬挂子树中的 J 子树收缩，并将悬挂子树 Z 中那些与相同顶点 c_Z 相连的子树收缩到该顶点。这将 $J - V(C)$ 映射为 Ω 的一个子图，外加一些孤立顶点。收缩树会保留圈秩，而识别顶点不会使圈秩降低。因此，即使应用引理 3.1 之后， $J - V(C)$ 的圈秩至多为六，且 J 的秩至多为 $6 + 8 = 14$。◀

3.5 局部图

设 (F, R') 是可容许的，且 ψ 是其骨架的嵌入。在 R' 的顶点 a 周围， R' 在 a 处的边将以 a 为中心的小圆盘分割成若干扇区；如果 a 是 R' 的叶，则只有一个扇区。角是 R' 的一个顶点 a，且在 a 处有一个扇区。端点为 a 且位于 R' 中的星边，其初始部分位于 a 处的扇区中，进入该扇区的角。见图 4。

▶**引理 3.6**。设 $x \in V(C)$ 按顺时针次序具有星边 s_1、……、s_k。在 x 处，位于 s_i 与 s_{i+1} 之间且带有 s_2、……、s_{k-1} 的 ψ 的各个面构成一个开圆盘，即 x 的扇（当 $k = 1$ 时，是 s_1 的薄邻域），其边界由 s_1、s_k 以及 K_0 的一条游走组成；该游走按顺序访问由 s_1、……、s_k 进入的角，且每个角恰好访问一次。

证明。位于 s_i 与 s_{i+1} 之间的面在 x 处仅与 C 相交于这个角度：否则，从这个角度到 C 内部另一点或另一个角度的一条曲线会将 s_i 与s_{i+1} 在 R'中的端点分开。因此，扇是一个开圆盘，其边界由 s_1、s_k以及 W 的游走 K_0构成。

设 s、s' 是进入 a 处同一个角的星边，并且在这些星边中，它们在 a 周围彼此相邻。它们与 C 的一条弧围成一个圆盘 Δ，其中包含它们之间在 a 处的角度，因此 R' 在 a 处没有边。由于 R' 连通， Δ 仅在 a 处与 R' 相交。因此， Δ 不包含任何避开 C 的部件，因为这些部件会与 R' 相交两次；它也不包含星边： Δ 是 ψ 的一个面。因此，进入 R' 的一个角的星边都终止于 K_0 的外面的同一个角。

最后， W 是 K_0 的外面的边界游走的一部分；该游走经过其每个角恰好一次，而 W 不会重复经过任何角：否则，它就会绕 K_0 一周，而 R' 中除至多一个叶子以外的所有叶子都只会有通向 x 的星边，这与可容许性矛盾。◀

令 $X = \{x, \bar{x}\}$ 是 C 的一对匹配顶点。局部图 G_X （图 4）由 $F_x \cup F_{\bar{x}}$ 按如下方式得到：将每对匹配半边合并为一条边，并删除 x 和 $\bar{x}$。然后，将 R' 的顶点处的边分离，并将 F_x 中星边进入同一个角的边重新连接到一个共同的新顶点，即 x 的一个角； $\bar{x}$ 也同样处理。边界 C_X 是一条圈，它依次经过 x 的各个角，顺序由其星边绕 x 的顺时针次序决定；接着依次经过 $\bar{x}$ 的各个角，处理方式相同。由引理 3.6 可知，该次序定义良好。

▶**命题 3.7**。 F 可实现，当且仅当其骨架存在一个嵌入 ψ，使得对于每一对匹配对 X，$G_X \cup C_X$ 都有一个以 C_X 为外面的平面嵌入。

证明。给定 ψ 及这些嵌入，按照 ψ绘制 C和 K_0。固定 $X = \{x, \bar{x}\}$。在 G_X中，来自 F_x的部分连同 x的角是连通的，因为每个部件都与 R'相交，并且包含 C_X的一条弧； $\bar{x}$ 同理。因此，连接起来的两半和 C_X 的两条边构成一个极小割，并且圆盘中的某条曲线恰好穿过这些边各一次。沿此曲线切割，并将每一侧收缩为一个点，得到 F_x 和 $F_{\bar{x}}$ 在圆盘中的嵌入，其中分别有 x和 $\bar{x}$及其角位于边界上，并且 x 和 $\bar{x}$处两半的顺序相反。除镜像外，这些角的顺序与引理 3.6中的顺序一致。因此，我们可以将这些圆盘映射到 x 和 $\bar{x}$的扇的闭包中，使每个角映射到该扇的游走经过该角所在的点。对每个 X 进行这一操作，即得到 F的一个实现。

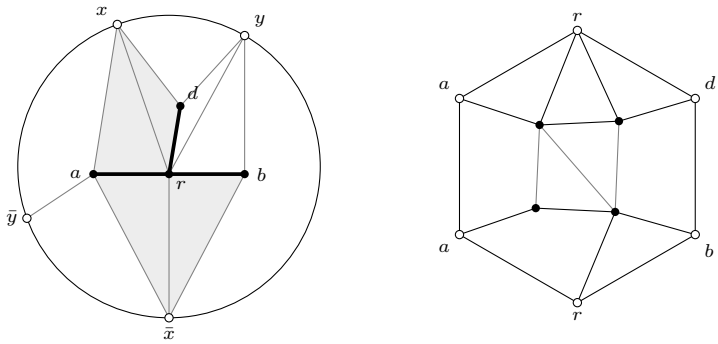


图 4 骨架中 x 和 $\bar{x}$ 的扇 (a)，以及 x、$\bar{x}$ 处的局部图 (b)。

反过来，考虑 F的一个实现。对于每个 $x \in V$（C），图 $F_x - V$（R'）仅在 x处与 C 相交，因此绘图的其余部分位于包含 $C - x$的面内。于是，收缩这些图得到骨架的一个嵌入 ψ，而 F_x 绘制在 x的扇的闭包中，R' 处的每条边都位于其星边进入的角处。在 x 和 $\bar{x}$ 处用一条带连接 x 和 $\bar{x}$ 的扇，从而将 $G_X \cup C_X$ 嵌入，使外面为 C_X：连接起来的两半沿带延伸而不相交，因为它们在 x 和 $\bar{x}$ 处的顺序相反。◀

3.6 刚性

▶ **引理 3.8**。设 (F, R') 可容许，且 ψ、ψ' 是其骨架的两个嵌入。对于每个匹配对 X，ψ 和 ψ' 在 X 处的局部图彼此重合，至多相差边界方向的反转。

证明。设 C^* 是 C 中具有星边的顶点集。设 Q 是由 R'、星边、按 C 的循环次序经过 C^* 的圈 C'，以及一个与 C^* 中所有顶点相邻的顶点 v 构成的图。从 ψ 中删除 $K_0 - R'$，抑制 C^* 之外的 C 中的顶点，并在 C 之外添加 v，即可得到 Q 的一个嵌入。其旋转系统决定了局部图：星边进入的角由其端点在 R' 中的旋转确定，而 x 周围星边的次序则由 x 处的旋转确定。反转所有旋转会反转所有边界。只需证明 Q 的嵌入唯一，至多相差镜像以及平行星边的次序。

合并平行边并抑制度为二的顶点。根据 Whitney定理 [28]，只需证明所得图是 3-连通的，或至多有三个顶点。因此，设 $p, q \in V(Q)$；我们证明 $Q - \{p, q\}$ 中度至少为三的顶点都位于同一个连通分支中。首先，$(C' + v) - \{p, q\}$ 是连通的，除非 $C^* = \{p, q\}$，此时 v 的度为二。其次，设 w 是 $R' - \{p, q\}$ 中一个度至少为三的顶点。它在 $R' - \{p, q\}$ 中所在的连通分支包含 R' 的一个叶，该叶通过星边连接到 C^* 中的两个顶点；或者它是 R' 中连接 p 与 q 的路径的一部分，在该路径上 w 在 R' 中的度为二，因而有一条星边。在这两种情况下，w 都在 $Q - \{p, q\}$ 中与 $C^* - \{p, q\}$ 相连，除非 $p, q \in C^*$；此时 R' 是连通的，并通过星边连接到 C^* 中的所有顶点。

最后，平行星边在其端点周围彼此相邻：否则，它们构成的二圈就会将度至少为三的顶点分隔开，因为不存在一条 Q 经过度为二的顶点的路径，将一个顶点 R' 连接到 C^*中的一个顶点。因此，它们进入同一个角。◀

3.7 提升

现在，我们通过将 H 的子图补全为有界秩的可容许对，把局部图中的障碍转化为见证。若集合 $N \subseteq V$（R）包含 R中 F 的顶点以及每个与 F 相交的悬挂子树 Z 对应的顶点 p_Z，则称其锚定子图 $F \subseteq H$。

▶ **引理 3.9**。设 $F \subseteq H$ 与 R 相交，由 N 锚定，且没有一条边的两个端点都在 R 中；设 m 是 $F - V(C) - V(R)$ 的连通分支数。存在 $H' \supseteq F$，其秩至多比 F 高 $|V(F) \cap V(R)| + 2m + 2|N| + 5$，使得 (H', R') 对 $R' = H' \cap R \supseteq N$ 是可容许的，并且 H' 中每个与悬挂子树 Z 相交的 R'-部件都包含 c_Z。

证明。设 q 是 R的一片叶。由于 (H, R) 是可容许的，包含 q 的两个 q -部件包含 C的不同顶点。在处的连边 q 是每个部件在 q 处的一条边。若 $q \neq r$，则 q 在 R 中没有后代。因此，q 处的连边，以及其中半边所对应的匹配边，终止于 q的祖先，或终止于包含 Z 且满足 $p_Z = q$的悬挂子树中。

令 N' 为 N，若 r 是 R的一片叶，则至多再加两个顶点，具体如下。r处的每条连边除 r外，另有一个端点位于 T中：若该连边是半边，则取其另一端点，或其匹配边的端点。若此端点位于 R中，就将它加入；若它位于悬挂子树 Z中，则加入 p_Z。令 R_0 为 R中包含 N'的最小子树。$R - E(R_0)$的每个连通分支都与 R_0 相交于一个顶点。若 R_0 至少有两个顶点，则对于 R_0 中不是 R的叶的每个叶 q，向 R_0 中加入一条路径：从 q 通往 R 中位于 $R - E(R_0)$在 q处的连通分支内的一片叶，该连通分支还含有另一个顶点。若 R_0 是一个单顶点，且不是 R的一片叶，则它就是 r；从该顶点出发，沿不同的边加入两条通往 R 的叶的路径。所得的树 R' 包含 r，且其 $\ell \leq |N| + 2$ 片叶都是 R的叶。

令 H' 由以下部分组成：F、R'各叶处的连边、F 或这些连边所遇到的每个悬挂子树中一个顶点处的一条半边，以及所有这些半边的匹配边。对于 F 所遇到的每个悬挂子树 Z，将引理 3.1 应用于 H' 在 Z 中的部分加上 p_Z，其中 U 是由 Z 和 p_Z 构成的 T 的子树。根据引理 3.2 及上述结论，新增边在 R 中的所有端点，以及所有这些顶点 p_Z，都位于 R' 中；因此 $H' \cap R = R'$。

H' 的 R'-部件包括其在 R' 处的半边，以及对于 H' 所遇到的每个悬挂子树 Z，该子树在 Z 中的部分；这个部分是连通的，与 p_Z 相连，并包含一条通向 c_Z 的半边。因此，$H' - V(C)$ 是连通的，并且每个部件恰好包含 C 的一个顶点。在 R' 的每个叶处，连边位于两个分别包含 C 的不同顶点的部件中。

最后，我们给出 H'的秩的上界，即与H'对应的 G 子图的圈秩。令 F的秩为 ρ，并令 $s = |V(F) \cap V(R)|$。将 R' 加入 F至多使秩增加 $s - 1$，因为 R' 是一棵树，与 F相交于 s 个顶点且没有边。然后我们加入各条边——每条不是半边的连边，以及每一对匹配半边各计作一条边——随后加入引理 3.1中的路径。圈秩的增加至多等于这些没有新端点的边的数量加上这些路径的数量。在悬挂子树 Z中，对于 $F - V(C) - V(R)$的每个连通分支，以及每个不与 p_Z相邻的新顶点，引理 3.1至多增加一条路径。因此，$F - V(C) - V(R)$的每个连通分支至多耗费两项：一条路径，以及其悬挂子树中的半边所对应的一项，该半边或者作为一条边出现，或者通过其新端点的路径出现。叶 $q \neq r$ 处的一条连边至多耗费一项：一条边，或者悬挂子树 Z中与其匹配的半边的新端点所对应的一条路径；如果它是一条连接到 Z的新顶点 u 的边，那么 u 与 $p_Z = q$相邻，而该连边本身不产生额外开销，只有 Z处的半边至多耗费一项。同样，r 处的一条连边至多耗费两项。因此，H' 的秩至多为 $\rho + (s - 1) + 2m + 2\ell + 2 \leq \rho + s + 2m + 2|N| + 5$。◀

现在固定一个可容许对 (H, R)，其中 $H - V(C)$ 是平面的，其骨架的一个嵌入为 ψ，一个匹配对为 X，而 $\Omega \subseteq G_X - E(C_X)$ 如引理 3.4 所给定。若一个可容许对 (H', R') 满足 $H' \subseteq H$ 捕获 Ω，即其骨架包含于 $K(H, R)$ 中，且对于 ψ 的限制，其在 X 处的局部图包含 Ω，并且 $\Omega \cap C_X$ 在边界上的循环次序相同，则称该可容许对捕获 Ω。

▶ **引理 3.10.** 某个可容许对(H', R')，其中 H' 的秩至多为37，捕获了Ω。

证明。根据引理 3.2，悬挂子树处半边的匹配边终止于 R，因此每条连接边都以一个角为端点，而 $G_X - V(C_X)$ 是以下图的不交并$H[Z]$，这些图对应于悬挂子树 Z，其中 $c_Z \in X$。将Ω 的每条连接边替换为它的两个

匹配半边，并将每个角替换为其顶点。这就得到 $F \subseteq H$。它在 R 中的顶点构成集合 A，即 Ω 的各角的顶点；它没有连接 R中两个顶点的边，而其余位于 C 之外的顶点构成 Ω $- V(C_X)$，其至多两个连通分支分别包含在某个悬挂子树 Z 中，且满足 $c_Z \in X$。并且 $A \neq \emptyset$，否则 Ω $\subseteq H - V(C)$ 就不是平面图。与 F 对应的 G 子图，是通过将 Ω 中具有相同顶点的角识别为一点得到的，因此 F的秩至多为 $6 + c - |A|$，其中 $c \leq 4$ 是 Ω 的角数。

令 N 由 r、 A、这至多两个悬挂子树的顶点 p_Z，以及以下部分组成：对于每个 $a \in A$，若 Ω 有 $k \geq 2$ 个角，则取 k 的叶子 R；在 R 的一条边之外、位于 a 处，且处于绕 a相邻的每两个角之间。由于 $c \leq 4$， A 的顶点和这些叶子的数量至多为六，因此 $|N| \leq 9$。于是 N锚定 F，由引理 3.9 可得 (H', R')，其中秩至多为 $(6 + c - |A|) + |A| + 4 + 18 + 5 \leq 37$的 H'。

由于 $H' \cap R = R'$， H' 的每个 R'-部件都包含在 H的一个 R-部件中，且在 R'处有相同的边。因此，(H', R') 的骨架包含于 $K(H, R)$ 中。在 ψ的限制中， R'在 a 处的一个角是 R 在 a处若干角的并，且星边保持其顺时针次序。Ω 在 a 处的不同角仍彼此不同，因为 R' 在它们任意两者之间的 a 处都包含一条边。因此，Ω 的各角都是 (H', R') 在 X 处的局部图的角，并且在其边界上保持相同的循环次序。由引理 3.9，Ω 中不属于 C_X 的顶点位于包含 x 或 $\bar{x}$的部件中。因此，该局部图包含 Ω。◀

3.8 命题 1.6 的证明

命题 1.6 的证明。若 $H - V(C)$ 不是平面的，则其中的一个库拉托夫斯基子图就是一个秩至多为六的见证。否则，根据引理 3.3，我们可以假设 (H, R) 是可容许的。若 $K(H, R)$ 没有嵌入，则引理 3.5 给出一个见证。否则，令 ψ 为其中一个嵌入。由于 H 不可实现，命题 3.7 给出一个匹配对 X，使得 $G_X \cup C_X$ 没有以 C_X 为外面的平面嵌入。该图是连通的，因为每个部件都与 R 相交。因此，引理 3.4 给出 Ω，而引理 3.10 给出一个捕获 Ω 的可容许对 (H', R')，其中 H' 的秩至多为 37。

假设 H' 可实现。根据命题 3.7，(H', R') 的骨架的某个嵌入具有局部图，且这些局部图都带有以其边界为外面的平面嵌入。根据引理 3.8， ψ 的限制也具有这一性质。但它在 X 处的局部图包含 Ω，且边界上的循环次序相同，因此它不具有这一性质。于是 H' 不可实现。由于 (H', R') 是可容许的， $H' - V(C)$ 是连通的，因此 H' 是一个见证。◀

4 扎根的深度优先树存在

本节证明命题 1.8。我们固定一个连通图 G 和一个映射 $f\colon\ G \to S$，该映射不是循环的，使得对于 G的每个圈 O，都可以将 $f|_O$ 不可解缠。对于 G中的闭游走 W，我们将 $f \circ W$的自由同伦类记作 $[W]$。有根生成树在 G中是深度优先的，而丰富性和接地性则针对 f。

4.1 块的像

连通子图 B 在 G 中的像，是 S的基本群的一个子群；对于任意基点， B 的基本群通过 f映射到该子群。

▶ **引理 4.1**。 令(T, r) 为深度优先。 $T - r$ 的连通分支是 $G - r$的各连通分支的顶点集。对于 G 的每个块 B， $T \cap B$ 是 B的一棵生成树，而 B 中不属于 T 的边的标记生成了 B的像的一个共轭。

证明。G 的每条边都将一个顶点与其某个祖先连接起来，因此没有边连接 $T-r$的两个连通分支；这就得到了第一个结论。设 B 中不属于 T的一条边为 uu'，其中 u'是 u 的一个祖先。它与 T 中从 u 到 u'的路径组成一个圈，该圈位于 B中。因此，由于 B 是连通的，$T\cap B$ 是 B的一棵生成树。设 t 是其中距 r最近的顶点。对于 B的每个顶点 u，T 中从 r 到 u 的路径经过 t，随后一直留在 B中。因此，B 中不属于 T 的边的标记，是其在 $T\cap B$中以 t为基点的基本圈的类，并由 T 中从 r 到 t的路径的类共轭。这些基本圈生成 B的像。◄

由于所有边的标记生成了 G 的像，而该像不是循环的，因此引理 4.1 表明，G 的某个块具有非循环像，或者有两个块具有非平凡像。我们分别讨论这两种情况，并使用引理 4.1 的以下推论。

► **引理 4.2**。设 (T,r) 是深度优先的，且 B 是一个具有非平凡像的块。任何包含 $V(B)$ 的顶点集合都是富的。

证明。由引理 4.1，B 中有一条边的标记 x 是非平凡的。将其按两个方向定向后，它从该集合发出，标记分别为 x 和 x^{-1}，二者不同，因为 $\pi_1(S)$ 无挠。◄

4.2 具有非平凡像的两个块

►**引理 4.3**。如果 G 的两个块具有非平凡像，那么 G 有一棵有根生成树，它既是深度优先的，又是关于 f 扎根的。

证明。首先，假设两个具有非平凡像的块 B_1、B_2 不相交。设 r 是在块割树中从 B_1 到 B_2 的路径上跟随 B_1 的割点。于是 $r\in V(B_1)$，且 B_2 位于 $G-r$ 的一个避开 B_1的连通分支 K 中。任取一个深度优先有根生成树 (T,r)，并设 e 是 T 中从 r 到 K 的边。根据引理 4.1，e 的两侧分别为 $V(K)\supseteq V(B_2)$ 及其补集，后者包含 $V(B_1)$。根据引理 4.2，两者都是富的。因此，$V(G)$ 是富的；并且对于 $T-r$ 的每个富连通分支 K'，$V(G)\setminus K'$ 也是富的：它是 $V(G)\setminus K$，或包含 K。因此，对于 f，T 是扎根的。

否则，具有非平凡像的块两两相交，因此根据块割树的子树所具有的赫尔利性质，它们共享一个顶点 v。任取一个深度优先有根生成树 (T,v)。包含 v 的不同块分别与 $G-v$ 的不同连通分支相交。因此，$T-v$ 的每个连通分支 K 都避开某个具有非平凡像的块，并且根据引理 4.2，$V(G)\setminus K$ 是富的。由于 $V(G)$ 是富的，对于 f，T 是扎根的。◄

4.3 一个具有非循环像的块

三路径由两个顶点 $m\neq n$ 和三条内部不相交路径组成：一条是从 m 到 n的 M，另外两条是从 n到 m的 X和 Y；其中 $x=[MX]$和 $y=[MY]$是非平凡且不同的。本小节中，$[MX]$、$[MY]$以及其他以M起始的闭游走的类，均取自 $\pi_1(S,f(m))$. 其长度是 M的边数。

► **引理 4.4**。在每个三路径中，$x\neq y^{-1}$。

证明。如果 $x=y^{-1}$，那么 X与 $M^{-1}Y^{-1}M^{-1}$在端点相对意义下同伦。因此，圈$X\cup Y$，视为闭游走 XY^{-1}从 n出发，其类为 $[(M^{-1}Y^{-1})^2]$, 是 $y^{-1}\neq 1$的某个共轭的平方。由引理 2.1，这个圈不可解缠，矛盾。◄

►**引理 4.5**。若 G 的某个块具有非循环像，则 G 有一条三路径。

证明。任何这样的块 B 都是 2-连通的，因为单边和环的像都是循环的。取一个耳分解 $B_0 \subset \cdots \subset B_k = B$，其中 B_0 是一个圈，而 B_i 是 B_{i-1} 与一条路径Q 的并；这条路径的两个端点互不相同且位于 B_{i-1} 中，内点则在其外。B_i 的像由 B_{i-1} 的像以及任意一条沿着 Q 恰好经过一次的闭游走的类生成。选取极小的 i，使得 B_i 具有非循环像。于是 B_{i-1} 的像为 c，其中 $c \neq 1$；否则 B_i 的像将是循环的，并且 B_i 中每条沿着 Q恰好经过一次的闭游走，若在 B_{i-1} 内连接到基点，其类都不属于 c。

设 Z 是 B_{i-1} 的一个圈，其中含有 $[Z] \neq 1$；由于圈的共轭类生成 B_{i-1} 的像（模共轭），这样的圈确实存在。由于 B_{i-1} 是 2-连通的，Q 的端点通过互不相交的、可能是平凡的路径与 Z 相连；这些路径仅在不同的端点 m 和 n 处与 Z 相交。设 M 是由这些路径和 Q 形成的从 m 到 n 的路径，并设 X 和 Y 是 Z 中从 n 到 m 的两条路径。于是 $[MX]$ 和 $[MY]$ 都是非平凡的，因为 MX 和 MY 各自经过 Q 一次。它们彼此不同，因为 $[MX]^{-1}[MY] = [X^{-1}Y] = [Z]^{\pm 1}$ 在共轭意义下是非平凡的。◀

▶ **引理 4.6**。在最大长度的三路径中，不存在一条路径将 X 的一个内部顶点连接到一个 i在避开 $M \cup X \cup Y$ 其余部分的同时，Y 的内部顶点。

证明。假设存在这样一条路径 P，连接 $p \in X$ 和 $q \in Y$。在 p 处分裂 $X = X_1X_2$，并在 q 处分裂 $Y = Y_1Y_2$，令 $e = [MX_1PY_2]$ 和 $e' = [MY_1P^{-1}X_2]$。考虑中间路径分别为 MX_1、MY_1、X_2M 和 Y_2M 的四个 θ 图；它们都比 M 长。在每一对中，忽略由共同元素共轭所产生的差异后，它们的类对分别为 (x, e)、(y, e')、(x, e') 和 (y, e)。由极大性可知，它们都不是三路径。由于 x、$y \neq 1$，这给出 $e \in \{1, x\} \cap \{1, y\}$ 和$e' \in \{1, y\} \cap \{1, x\}$。由于 $x \neq y$，这迫使 $e = e' = 1$。现在 ey^{-1} 和 $(e'x^{-1})^{-1}$ 都等于 $[MX_1PY_1^{-1}M^{-1}]$。因此 $y^{-1} = x$，这与引理 4.4 矛盾。◀

▶**引理 4.7**。如果 G 的某个块具有非循环像，那么 G 有一棵既是深度优先树、又关于 f 扎根的有根生成树。

证明。根据引理 4.5，取一条长度最大的三路径。从 m开始执行深度优先搜索，沿着 M 到达 n，然后沿着 X 一直走到顶点 x_* 之前的 m。回到 n后，沿着 Y一直走到顶点 y_* 之前的 m。这是可行的：否则，Y 的一个内部顶点会通过新顶点（避开先访问的 M）从 X 的一个内部顶点到达，这与引理 4.6 矛盾。

令 $(T,\ m)$ 为所得的深度优先有根生成树。X 和 Y 的最后一条边不在 T 中。将方向指向 m 时，它们分别从 x_* 和 y_* 发出，标记分别为 x 和 y。将方向背离 m 时，它们都从 m 发出，标记分别为 x^{-1} 和 y^{-1}。令 e 为 M 的第一条边。根据第二对边，e 中包含 m 的一侧是富的。另一侧包含 x_* 和 y_*，因此根据第一对边也是富的。因此，$T - m$ 中包含 n 和 V（G）$\setminus K$ 的连通分支 K 都是富的，而 $T - m$ 的其他每个连通分支 K' 都有 V（G）$\setminus K' \supseteq K$ 富。此外，包含 K 的 G（V）是富的，因此 T 关于 f 是扎根的。◀

命题 1.8 的证明。某个块的 G 具有非循环像，或者根据引理 4.1，两个块具有非平凡像。应用引理 4.7 或引理 4.3。◀

人工智能声明

人工智能被用于协助撰写内容和生成图示。

参考文献

1 Hugo A. Akitaya、Radoslav Fulek 和 Csaba D. Tóth。《图的弱嵌入识别》。《*ACM* 算法汇刊》，15(4):50:1–50:27，2019 年。 doi:10.1145/3344549。

14 同伦 Kuratowski 定理

2 Dan Archdeacon. 实射影平面上的 Kuratowski 定理。《图论杂志》, 5(3):243–246, 1981. doi:10.1002/jgt.3190050305. 3 Joan S. Birman and Caroline Series. 曲面上的简单曲线算法。《伦敦数学学会杂志》(2), 29(2):331–342, 1984. 4 Thomas Bläsius, Simon D. Fink, and Ignaz Rutter. 同步平面性及其在受约束平面性问题中的应用。《ACM 算法汇刊》, 19(4):34:1–34:23, 2023. 初步版本发表于 ESA 2021。 5 David R. J. Chillingworth. 曲面上的简单闭曲线。《伦敦数学学会通报》, 1(3):310–314, 1969. 6 David R. J. Chillingworth. 曲面上的绕数。II.《数学年刊》, 199:131–153, 1972. doi:10.1007/BF01431419. 7 Éric Colin de Verdière and Arnaud de Mesmay. 曲面上的图同痕测试。《离散与计算几何》, 51(1):171–206, 2014. doi:10.1007/s00454-013-9555-4. 8 Éric Colin de Verdière, Vincent Despré, and Loïc Dubois. 曲面上的图解缠。《ACM 杂志》, 73(5):1–46, 2026. doi:10.1145/3830462. 9 Hubert de Fraysseix and Pierre Rosenstiehl. 用 Trémaux 序刻画平面图。《组合数学》, 5(2):127–135, 1985. doi:10.1007/BF02579375. 10 Vincent Despré and Francis Lazarus. 曲线几何交数的计算。《ACM 杂志》, 66(6):45:1–45:49, 2019 年。 doi:10.1145/3363367. 11 Reinhard Diestel.《图论》, 《数学研究生教材》第 173 卷。施普林格，第 5 版，2017 年。12 David B. A. Epstein. 二维流形上的曲线与同痕。《数学学报》, 115:83–107, 1966. 13 Benson Farb and Dan Margalit.《映射类群入门》, 《普林斯顿数学丛书》第 49 卷。普林斯顿大学出版社，2012 年。14 Michael H. Freedman, Joel Hass, and Peter Scott. 曲面上的闭测地线。《伦敦数学学会通报》, 14(5):385–391, 1982. 15 Radoslav Fulek and Jan Kynčl. 用于近似图映射的 Hanani–Tutte 定理。载于第 34 届国际计算几何研讨会（SoCG 2018），LIPIcs 第 99 卷，第 39:1–39:15 页，2018 年。doi:10.4230/LIPIcs.SoCG.2018.39. 16 Henry H. Glover, John Philip Huneke, and Chin San Wang. 实射影平面不可约的 103 个图。《组合理论杂志 B辑》, 27(3):332–370, 1979. doi:10.1016/0095-8956(79)90022-4. 17 John Hopcroft and Robert Tarjan. 高效的平面性测试。《ACM 杂志》, 21(4):549–568, 1974. doi:10.1145/321850.321852. 18 Kazimierz Kuratowski. 关于拓扑学中空间曲线问题。《数学基础》, 15:271–283, 1930. doi:10.4064/fm-15-1-271-283. 19 Yves Ladegaillerie. 曲面中一维复形嵌入的同痕类。《拓扑学》, 23(3):303–311, 1984. 20 Corentin Lunel and Clément Maria. 嵌入平面图上的良拟序，2025 年。arXiv:2512.04074。URL: https://arxiv.org/abs/2512.04074. 21 Carolina Medina, Bojan Mohar, and Gelasio Salazar. 平面图子式的良拟序及其在链环图中的应用，2019 年。arXiv:1905.01830。URL: https://arxiv.org/abs/1905.01830. 22 Bojan Mohar. 圆盘和圆柱面的嵌入扩张问题的障碍。《组合、概率与计算》, 3(3):375–406, 1994. 23 Bojan Mohar and Carsten Thomassen.《曲面上的图》。约翰斯·霍普金斯大学出版社，2001 年。24 Henri Poincaré.《位相解析》第五补篇。《巴勒莫数学学会会报》, 18:45–110, 1904. 25 Bruce L. Reinhart. 紧曲面上 Jordan 曲线的算法。《数学年刊》, 75(2):209–222, 1962.

26 Neil Robertson 和 Paul D. Seymour。《图子式》。VIII. 一般曲面上的 Kuratowski 定理。《组合理论杂志 *B*辑》，48(2):255–288，1990。 doi:10.1016/0095-8956(90)90121-F。27 John Stillwell。《经典拓扑学与组合群论》，《数学研究生教材》第 72 卷。施普林格，第 2 版，1993 年。28 Hassler Whitney。图的一组拓扑不变量。《美国数学杂志》，55(1):231–235，1933 年。29 S. Gill Williamson。深度优先搜索与库拉托夫斯基子图。《*ACM* 杂志》，31(4):681–693，1984 年。 doi:10.1145/1634.322451。

A 环图具有较小的障碍

我们遵循 [8, 第 4]节：我们将 L 拉直的图示提升到万有覆盖中，在那里，提升图之间的交叉在任意同伦下都能保留下来。每个这样的交叉至多涉及四个环，其限制无法被解缠；我们称自己返回 它们。

引理 1.2 的证明。在 L的每个连通分支中，移除像可缩的环，并将像在忽略定向后同伦的环合并。新映射仍然不可解缠，因为被移除的环可以重新画成小的可缩环或平行副本。如果某个环的类是真幂，则根据引理 2.1，返回该环。

假设 S 是球面、环面、圆盘或圆环。属于不同连通分支且代数交数非零的两个环不可能解缠；我们返回这两个环。否则，如果 L 是连通的，则存在至多四个无法解缠的环：若其本身至多有四个环，就取它本身；否则任取其中四个环。根据欧拉公式，嵌入环面的一顶点图中，若各环均不可缩，且忽略定向后两两不同伦，则至多有三个环。如果 L 不连通，其连通分支都是由单个平行环组成的，而 λ 可以解缠。

否则， S 具有带测地边界的双曲度量。在L的每个连通分支中，将一个环称为主环，其余称为次环。通过沿主环滑动它们，对 λ 进行同伦变形，使主环成为闭测地线，使次环成为其顶点处的测地环，并使不同顶点具有不同的像。两个主环若具有相同的像，则称为平行，并将它们取向为相同方向。如果某个连通分支中的次环从其顶点的左侧（右侧）离开或抵达该顶点，则称该主环被向左（向右）拉。

在万有覆盖 $\tilde{S} \subseteq \mathbb{H}^2$中，主提升是测地线，而每个次提升都是一条测地线段，连接其所在连通分支的主环的两个提升；这两个提升与该测地线段共同构成其H-块。两个不重叠的提升至多相交一次。对 λ 的同伦变形可提升为这些提升的等变同伦，该等变同伦固定主提升在 $\partial\mathbb{H}^2$上的极限点，以及提升后的顶点沿每条主提升的顺序。

如果两条主提升相交，它们的极限点就会交错，因此我们返回被提升的一个或两个主回路。所以，两条主提升要么不相交，要么具有相同的像。如果平行主回路$E \neq E'$ 被次回路 e、e'拉向同一侧，或者如果 E 被e、e'拉向两侧，我们就返回 e、e'、 E、 E'。事实上，经过一次同伦后， E和 E' 的两条具有相同像的提升会变得不相交且极限点相同，因此其中一条会将另一条与某条提升的 H-块中 e 或 e'的远端主提升分隔开。

˜没有次提升与主提升重叠 E，否则其 H-块的两个主提升就会˜ ˜相交 E，从而具有相同的像。如果某个次提升与 E交叉，那么 E 就会将其 H-块的两个主提升分隔开来，此时我们返回该次回路、其连通分支的主回路，以及由 E提升的回路˜。因此，次提升只会在端点处与主提升相交。

任意两个次提升都不会重叠，否则它们就会有相同的端点，并提升同一连通分支中两个相差一个定向的同伦回路。如果两个次提升交叉（它们可能提升的是同一个回路），那么对于其 H-块中像相同的任意两个主提升，它们都会朝同一侧离开，因此这两个主提升必然相等，因为没有两个平行主回路会被拉向同一侧。根据提升后顶点的次序，它们的 H-块仍然相交，于是我们返回一个或两个次回路，以及其连通分支的主回路。

否则，不同的提升除平行主回路的提升外，仅在公共端点处相交。对于平行主回路，至多有一个向左拉，至多有一个向右拉，其余都没有次环。将它们扰动为互不相交的平行副本，并按从左到右的顺序排列，即可解缠 λ，这与假设矛盾。所有情况下，我们返回的回路至多有四个。◀

B 解缠与实现本质上等价

引理1.5的证明。 令 N 为 L 在 S中的一个正则邻域：一个围绕顶点的圆盘 D，每个回路对应一条带。我们将 C 置于 ∂D上，每个顶点都位于其半边所在带的末端。由于 f 与 μ同伦，我们可以用 f 替换 μ。

假设 H' 可实现，并取 $H' \cup C$ 在 D中的一个实现，其中 $C = \partial D$。每对匹配半边分别位于 x 和 $\bar{x}$处，并延伸至一条带的两个端点。用一条弧穿过该带连接每一对半边。由于 x 和 $\bar{x}$处的顺序相反，这些弧可以做到互不相交。由此得到 G' 在 N中的一个嵌入。它与 $\mu|_{G'}$同伦，因为$H' - V(C)$ 的边始终留在 D 中，而其余边沿各自的回路恰好走一圈。

反过来，假设 $\mu|_{G'}$ 可以不可解缠。 $H' - V(C)$ 的所有边都被映到该顶点。此外， $H' - V(C)$ 是连通的，并包含 G'的所有顶点。因此， $H' - V(C)$ 包含 G' 的一棵生成树，该生成树被映到该顶点；删去 L中未使用的环后， $\lambda \circ \mu|_{G'}$就是沿该生成树对 $f|_{G'}$ 进行的分解，而引理 1.3 表明 $\mu|_{G'}$ 是一个弱嵌入。因此，存在 G' 的一个嵌入，它与 $\mu|_{G'}$ 足够接近，且位于 N中，其顶点位于 D中。沿余核切开每条带。移除带内边与余核之间的二边形后，可以假设每条绕回路映射的边恰好与其相交一次，而其他边都避开它。沿余核切开各条带，并将其缩回 D，即可得到 H'的一个实现。由于 S 是可定向的，匹配顶点处的顺序是反向的。◀

C 映射的丰富性与其构件的丰富性一致

引理 1.7 的证明。 同伦会用同一个元素共轭所有标记，因此我们可以用 $\lambda \circ \mu$来计算标记。映到顶点的边具有平凡标记。映到回路上的边，其标记是该回路按边行进方向取向后的同伦类。由于同伦回路已被捆成束，而可缩回路已被移除，不同的定向回路具有不同的非平凡同伦类。回路及其逆元也是如此，因为 $\pi_1(S)$ 没有挠元。

对于映到回路上的有向边，该定向回路对应于其尾端处半边在 C中的顶点。因此，从 U 出发的两条有向边具有不同的非平凡标记，当且仅当它们在 U 处的半边位于 C的不同顶点上。换言之， U 对于 f 是富的，当且仅当它在(H, C)中是富的。因此，(T, r)对 f是扎根的，也就对(H, C)是扎根的。◀

D 循环映射具有小障碍

本节证明引理 1.9。我们寻找两类障碍：三个无法嵌套的不可缩圈，以及一个被迫容纳不可缩

部件的可缩圈。我们通过剥离图来找出它们：先处理割点，然后是分离对，最后是单个 3-连通节点。常规验证留给读者完成。

在全文中，G 是连通的，且 $f\colon G \to S$ 是循环的且临界的：它不可解缠，但对每个真子图的限制都可以解缠。若子图的像是平凡的，则该子图是平凡的。若一个图的圈秩至多为九，则该图是小的。开环带中闭游走的绕数 A 是其在 $\pi_1(A) \cong \mathbb{Z}$中的类。

D.1 环带

▶**引理 D.1.** 若 G 不是小的，我们可以假设 f 将 G 映入一个开环带，G 是平面且非平凡的，并且圈的绕数为0 或 ± 1。

证明. 若 f 是平凡的，或 G 不是平面的，G 根据临界性是一个库拉托夫斯基子图。若一个圈不可解缠，G 就是该圈。否则，根据引理 2.1，f 的像由一条简单闭曲线 δ的类生成，且圈的类为 δ^k，其中 $k \in \{0, \pm 1\}$，直到共轭。将 f 提升到与 $\langle\delta\rangle$相关的环带覆盖：嵌入的提升仍是嵌入，并且覆盖中的嵌入可以推近到 δ的提升附近，在那里覆盖映射是单射。◀

从现在起，f 将 G 映射到 A，即去掉两个端点 $e^{\pm}$后的球面；定向方式规定：若简单闭曲线的左侧为 e^+、右侧为 e^-，则其绕数为 1。面游走的定向方式使其所在的面位于左侧。

▶ **引理 D.2.** 设 $K \subseteq G$ 是连通的。K 在去掉 $e^{\pm}$ 后的球面中的嵌入与 $f|_K$ 同伦，当且仅当每个面 F都有一条绕数为 $[e^+ \in F] - [e^- \in F]$的面游走。

证明。 的面游走 具有这一绕数，面游走生成圈空间，而到 $A \simeq \mathbb{S}^1$ 的映射由各圈的绕数唯一确定至同伦。◀

如果 K 不是平凡的，那么两个端点位于不同的面中，这些面是环面 面，其面游走包含不可缩圈；位于这些面上的顶点称为暴露的。对嵌入取镜像，可以让我们选择每个端点位于哪个环面面中。最后，连通的 K 中，若某个面包含一条不可缩简单闭曲线，则该面包含一个端点，因为 K 位于该曲线的一侧。

D.2 两种障碍

三个不可缩圈 O_1、O_2、O_3 两两相交于连通（也可能为空）的集合；若对于所有 $\{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}$，$G - V(O_b)$ 都将 O_a 与 O_c 连接起来，则这三个圈构成一个嵌套三元组。分裂 是一个可缩圈 O，它有两个交错桥，每个桥都与 O构成一个不可缩圈。

▶**引理 D.3.** 若 G 有嵌套三元组或分裂，则 G 很小。

证明。 在与 f同伦的嵌入中，包含 e^+ 的 O_i 的各侧彼此嵌套，因此中间一侧将另外两侧分隔开来。这一性质在三个圈的并中仍然成立；其圈秩至多为四，再加上至多三条按要求连接这些圈的路径，所得图很小，并且根据临界性，它是 G。

在一个嵌入中，分裂的可缩圈 O 围成一个不含端点的圆盘，其中没有桥，因此这些桥位于 O 的同一侧并彼此交叉。每个桥都有一条路径，与 O的一段弧构成不可缩环，因为绕数相加。保留 O，并在每个桥中保留一棵包含这条路径及实现交错的附着点、至多有五个叶子的树，可得到一个圈秩至多为 $1 + 4 + 4$的图，而该图是 G。◀

D.3 割点

▶ **引理 D.4.** 设 $G = G_1 \cup G_2$没有公共边，且 G_2 连通、平凡并含有一条边。那么 $G_1 \cap G_2$ 不是顶点；并且若它是$\{u, v\}$，且 G_1 有一条 u–v 路径，那么 G_2 是一条u–v 路径。

证明。否则，将 f 在 G_1上解缠，或在 G_1 加上一条 u–v 路径 $P \subsetneq G_2$上解缠，并在一个小圆盘中，或沿着 P在一个狭长圆盘中重新绘制； $G_2 + uv$ 是平面图，正如 G 一样。这与临界性矛盾。◀

在 x 处的一个悬挂子图 是一条经过 x的不可缩环，或者是一个棒棒糖：一条避开 x 的不可缩环，以及一条从 x 到它的路径。在接下来的三个引理中， $G_1 \cap G_2 = \{x\}$和G_1， G_2 均为连通且非平凡的。

▶**引理 D.5**。 如果 f 能在 G_1 上解缠，也能在 G_2上解缠，且每次都使 x 暴露，那么它也能在 $G_1 \cup G_2$上解缠。

证明。 不妨取其镜像，将 G_2 置于一个带孔圆盘内，该圆盘由 x 在 G_1的一个环面面中的回路所围成。◀

▶**引理 D.6**。 如果 x 位于 G_2的每个不可缩环上，并且对于不可缩环 $O \subseteq G_2$， f 可以在 G_2 上以及在 $G_1 \cup O$ 上进行不可解缠，那么它也可以在 $G_1 \cup G_2$上进行。

证明。 的环带面 G_2 的面游走经过 x，因此 G_2 位于x处两个环之间；将其置于 O的薄邻域中。◀

▶ **引理 D.7**。 如果 f 可以在 $G_1 \cup G_2$上进行不可解缠，并且 G_2 在 x处包含一个棒棒糖，那么它可以在 G_1 上进行，并使 x 暴露。

证明。 棒棒糖位于 G_1 的一个面中，该面包含一个不可缩环，而该面是环面的 .
◀

▶**引理 D.8**。 如果 G 不是小的，则它由一个块 H 和至多两条悬挂边组成，这些悬挂边连接在 H的不同顶点（即标记）上，并且每条都只在那里与 H 相交。

证明。 设 x 是一个割点， Y 是 $G - x$ 的一个连通分支，其中含有 x，而 Y' 是其余部分；根据引理 D.4，二者都是非平凡的。其中一个是悬挂子图：如果 x 位于 Y 的每个不可缩环上，那么根据引理 D.6 及临界性， Y 是一个圈；对 Y' 也同理。否则，根据引理 D.7 和引理 D.5 分别应用于 $Y \cup L'$ 和 $Y' \cup L$，它们在 x 处包含棒棒糖 L， L'，以及 $Y = L$ 或 $Y\prime = L'$。如果 x 处的所有连通分支都给出悬挂子图，那么根据引理 D.5，其中三个是棒棒糖，并形成一个嵌套三元组。否则，每个割点 x 恰好有一个悬挂边P_x，并且这些悬挂边沿块割树彼此嵌套；移除极大的悬挂边后，剩下一个块 H。其中三个会通过 H 形成一个嵌套三元组。◀

▶ 引理 *D.9*。 *</style}*设 $K \subseteq H$ 连通且非平凡。那么，当且仅当 K 在这些标记处露出，且各标记位于不同的环带面上时， f 能在 K 以及某些标记处的悬挂子图上不可解缠。

证明。 每个悬挂子图都位于其标记所在的一个环带面中，而同一环带面中的两个悬挂子图会相交。反过来，应用引理 D.5。◀

▶引理 *D.10*。 *</style}*如果 G 不是小的，那么 H 就不是平凡的。

证明。如果 H 是平凡的， f 当且仅当 H与连接这些标记的边 e 构成平面图时，才可解缠。否则， $H + e$删去 e并连同悬挂边一起考虑，其库拉托夫斯基子图的圈秩至多为 $5 + 2$，而且 f无法在其上解缠。◀

D.4 分离对

从现在起， G 不是小的。如果 H 是一个圈，则 G 是小的；否则，我们将 H 中除标记外的度为二的顶点予以抑制，并将 H 分解为3-连通分量，得到一棵树T，其节点为圈（S）、键（P）和3-连通简单图（R）。每条树边连同虚边 uv将 H 分成两侧 X 和 Y，其中 $X\cap Y=\{u,v\}$、 $X+uv$和 $Y+uv$ 2连通，且每侧至少有两条边。如果一侧 X 满足 $X-\{u,v\}$连通，则称其为一个分支；只有包含一个相邻P-节点的那一侧不满足此条件。一侧所携带的标记位于 $V(X)\setminus\{u,v\}$中。对于 u–v 游走 p， q， $w(p,q)$是 pq^{-1}的绕数。

非平凡侧的一个探针 是一条不可缩环 O，属于 X，并尽可能避开 u 或 v，再加上从 u 和 v 到 O的不相交路径；其路线 是它的两条 u–v 路径。如果一侧符合以下任一条件，则称其为小 侧：(S1) 一条经过单个标记的 u–v 路径；(S2) 不带标记的探针；或 (S3) 一个束：两条 (S1) 型路径， p, q 与 $w(p,\ q)\ =0$。

▶**引理 D.11**。 在一个非平凡分支中，存在一条避开 u 或 v的不可缩环。

证明。 否则，在一次解缠中， u 和 v 位于两个环带面上，而连接它们并经过这两个面的两条弧将把 $X-\{u,\ v\}$ 与一条连接两端点且避开X的路径分隔开。◀

▶**引理 D.12**。 一个平凡分支 X 属于(S1)型。

证明。若 X 没有标记，根据引理 D.4，它是一条边，而不是一侧。若它有两个标记，出于同样的原因，另一侧 Y 并非平凡，其不可缩圈与两条悬挂边构成嵌套三元组。因此， X 带有一个标记 x，并有悬挂边 P。令 Z 为 Y的一个探针；若 Y平凡，则令 Z 为 Y的一条 u–v 路径。在对 $X\cup Z\cup P$进行解缠后，端点位于 X的同一个面内；该面包含 P，且由于不可缩圈穿过它与 Z相交， u 和 v位于其边界上。因此， $X\cup Z\cup P$加上一个与 u、 x、 v 相邻的顶点 w 是平面图：否则，其中的一个库拉托夫斯基子图以 P和 Z替换 w 后，圈秩至多为 $5+1+2$，且是 G。于是X有一条经过 x的 u–v路径 P'；将 X替换为 P'对 f进行解缠，再沿着远离 P的 P'重新绘制 X，便可由临界性得出 $X=P'$。◀

令 X,Y 为非平凡侧，其探针为 Q_X,Q_Y。令 G_X 由 $X\cup Q_Y$、由 X 承载的悬挂边，以及位于 u 和 v 处的悬挂边组成；同样定义 G_Y。

▶ **引理 D.13.** 若 X 是一个分支，且 f 可在 G_X 和 G_Y 上解缠，那么它也可在 G 上解缠。

证明。在 G_X 的一个解缠中，根据引理 D.11，若 Q_Y 是经过 u 和 v 的圈，则 Q_Y 位于 X 的一个环带面 F_X 中。由于 $X+uv$ 是 2-连通的， F_X 由 X 的两条 u–v 路径 A_1、 A_2 围成，且 $w(A_1,A_2)\ =\pm1$。对于 Y 也同样成立，其中有 B_1、 B_2。由于圈的绕数至多为一，对于固定路径 R，有 $\{w(A_1,R)\ w(A_2,R)\}\ =\{w(B_1,R)\ w(B_2,R)\}$。因此，我们可以拼接 X 和 Y；必要时使用 Y 的镜像，使 $A_1\cup B_j$ 和 $A_2\cup B_{3-j}$ 围成绕数为 0 的面；根据引理 D.2，这样便可在 H 上解缠 f，而 X 和 Y 的其他环带面为 F'_X 和 F'_Y。由 X 承载的标记位于 F'_X 上；若 X 的每个不可缩环都包含 u，则位于 u 处的标记也在其上， Y 的情形同理。检查所有可能的标记对后可知：要么这些标记分别位于 F'_X、 F'_Y 这两个不同的面上，此时由引理 D.9 即可得证；要么避开某个标记的 X 或 Y 的悬挂边和圈构成一个嵌套三元组。◀

▶**引理 D.14.** 某个 R-节点 μ 之外只有小侧，也就是说，对于 μ处的每条树边，不包含 μ 的那一侧都是小的。

证明。 设 X，Y 是树边的两侧， X 是一条分支。若 X 是平凡的，则根据引理 D.12，它是小的。若 X，Y都非平凡，则根据引理 D.13 和临界性， $X = Q_X$ 或 $Y = Q_Y$不带任何标记。若只有 Y 是平凡的，它要么是一条分支，根据引理 D.12 是小的；要么由 P-节点处的其他分支和实边组成，这些是绕数相同的 (S1) 型路径；根据临界性，它们构成一个束。若两侧都小，则 G 是小的。否则，将每条树边朝向其另一侧为小侧的节点定向，便得到一个节点 μ，其外只有小侧。若 μ 是一个圈，则它至多有两个探针，因为三个探针会构成一个嵌套三元组；并且 G 的圈秩至多为 $1+2+1+2$。若 μ是一个键，则它至多有两条实边，因为绕数相同会与临界性矛盾；至多有两个探针，因为三个探针无法解缠；并且至多有两条 (S1) 型路径；因此 G 的圈秩至多为 $5+2+2$。 ◀

D.5 一个3连通节点

设 μ 如引理 D.14 所述。除镜像 [28], 外，其嵌入唯一；其面环均为诱导的且非分隔的，任意两个面至多共用一条边。H 的嵌入可通过以下方式得到：将每个探针或束画在其虚边 uv 处，有两种画法。除了 μ 的面（在探针和束处有所修改）之外，这还在每个束中形成一个绕数为 0 的面，并在每个探针的圈 O_Q 内形成一个绕数为 ± 1 的面 D_Q。若面 μ 不在探针处，则称其为自由的。探针在 uv 处的透镜是由界定 uv 处两个面 f_1，f_2 的两条 u–v 路径 Λ_1，Λ_2 构成的圈。

▶**引理 D.15**。 三个不可缩圈——每个圈都是自由面环、圈 O_Q，或悬挂子图的圈且其标记不在另外两个上——构成一个嵌套三元组。

证明。 它们两两至多共享一条边，并且 μ 去掉一个面环或两个顶点后仍然连通。 ◀

▶**引理 D.16**。 如果探针 Q 的透镜是可缩的， Q 并且透镜中包含不可缩环的任意其他桥构成一个分裂。

证明。 根据平面性和 3-连通性，透镜在 μ 之外的每个桥 uv 都附着在 Λ_1 和 Λ_2的内部。 ◀

设 R、R'是在 uv处的探针 Q的路线，其中 $w(R', R) = 1$，将 uv定向为使 f_1位于其左侧，并设 $s = w(R, \Lambda_1)$以及 $t = w(\Lambda_2, R)$。则 $s \in \{-1, 0\}$，且 $t \in \{0, 1\}$，该透镜的绕数为 $\ell = s + t$；由 f_1、f_2和 D_Q导出的面，在 R围成 f_1时，其绕数为 $(s, t-1, 1)$，否则为 $(s+1, t, -1)$。

▶**引理 D.17.** 在引理 *D.14* 的设定中， G 很小。

证明。 我们解开 f，或者找到一个嵌套三元组或一次分裂。根据引理 D.15，最多有两个探针。一条束带有两个标记；若再有一个探针 Q，它们的悬挂子图与 O_Q 构成一个嵌套三元组。

没有探针。 μ、F 和 F'中恰有两个面的绕数非零，否则三者构成一个嵌套三元组。在两者之外放置一个标记，或仅在 F上放置两个标记，都会形成嵌套三元组；若有一条束，则一个不在该处的面 F 也会形成嵌套三元组。否则，可以放置这些标记。

一个探针 Q。 *</style}*至多一个自由面 具有非零绕数。如果存在这样的面，则*()*，因此 *(*， *t)* 为 (0， 1) 或 (−1， 0)，并且 Q 的一种画法使各面处的绕数为零；环带面为 F_0 和 D_Q，标记按之前的方式处理。如果不存在这样的面，则$\ell = 0$，而 Q 的两种画法除 D_Q 外，各留下一个非零面，分别由 f_1 或 f_2 得到。透镜外的一个标记和 O_Q 根据引理 D.16 给出一个分裂，而 O_Q 外的两个标记给出一个嵌套三元组；否则，可以放置这些标记。

两个探针 Q_1，Q_2。自由面的绕数为 0。如果透镜不共享面且是可缩的，Q_1 及其包含 Q_2 的透镜的桥构成一个分裂。否则，我们绘制探针，使得只有 D_{Q_1} 和 D_{Q_2} 非零：如果透镜不共享面，则如前一种情况；如果它们共享一个面，则令另外两个面为零，这会迫使共享面也为零，因为其绕数至多为一。在 O_{Q_1} 和 O_{Q_2}中都没有标记，或仅在其中一个上有两个标记，会给出一个嵌套三元组；否则，可以放置这些标记。◀

引理 1.9 的证明。 取 $G' \subseteq G$ 为使得 $f|_{G'}$ 无法被解缠的极小对象。它是连通的，因为不可解缠的连通分支可以在环带覆盖中嵌套，因此不妨设 f 是临界的，只需证明 G 很小；于是 G 根据第 2 节，其最小度至少为 2，因此至多有 $2 \cdot 9 - 2 = 16$ 个拓扑顶点。如果 G 不小，则由引理 D.1、D.8 和 D.10，再由引理 D.14，将其化简为单个 R-节点，而引理 D.17 导出矛盾。◀

E 第 3 节附录

引理 3.1 的证明。 当 F 上的两个顶点 U 属于 $F - V(C)$的不同连通分支时，连接它们的 U 路径避开 C，且含有一个子路径，其端点分别位于 $F - V(C)$ 的不同连通分支中，并且没有内部顶点位于 F中。将该子路径加入 F 会合并其中两个连通分支，因此 $F - V(C)$ 的圈秩不变。◀