arXiv:2611.28428v1 [math.OA] 20 Nov 2026

保持相似性的非交换映射

ELI SHAMOVICH

摘要。本文研究非交换（简称 NC）球的保持相似性的自同构。我们证明，每个保持相似性的 NC 自同构实际上都由一个带有 NC 可逆函数的相似变换给出。作为应用，我们证明，自由半群代数的自同构群由酉算子实现的自同构和内自同构生成。

1. 引言

本文源于作者与 Salomon 和 Shalit 的合作成果 [37, 38]。在这些工作中，我们研究了自由半群代数 $\mathbb{H}_d^\infty$ 被 WOT 闭理想取商所得代数的同构问题。自由半群代数是全 Fock 空间上由生成算子生成的 WOT 闭代数（更多详情见第 5 节）。许多学者对这一代数进行了广泛研究（例如，见 [12–14, 25, 32–35]）。这些代数既在膨胀理论 [10, 16, 31] 中，也在非交换分析 [2, 6, 7, 26–28, 33, 34] 中，作为单位圆盘上有界解析函数 Banach 代数的非交换推广而出现。本文关注的具体结果是 Cartan 唯一性定理的一个相似不变版本 [38, 定理 4.15]，以及该结果对一类自同构群的推论 $\mathbb{H}_d^\infty$ [38，推论 6.8]。后一个群由 Davidson and Pitts [12] 定义，是由那些模交换子理想诱导恒等映射的自同构组成的群。回顾一下，Cartan 经典唯一性定理指出，若 $U \subset \mathbb{C}^d$ 是一个有界域，且 $f\colon U \to U$ 是解析映射，并且对某个 $z_0 \in U$，有 $f(z_0) = z_0$ 且 $Df(z_0) = I_d$，那么 f 就是恒等映射。在非交换情形下，[38，定理 4.15] 指出：若 f 是单位行球相似包络上的非交换解析自映射，且固定 0、在 0 处的导数为恒等映射，那么 f 必须保持不可约点的相似轨道。直观地说，f 模相似变换等于恒等映射。一个自然的问题是，这样的映射是否必须由一个带有解析非交换函数的相似变换实现。我们的主要结果对此给出了肯定的回答（定义见下一节）。

定理 A。设 $\mathcal{E}$ 是 $\mathbb{C}^d$ 上的算子空间结构，其中 $d \geq 2$。设 $\mathbf{B}_{\mathcal{E}}$ 为 $\mathcal{E}$ 的开单位球。设 $\widetilde{\mathbf{B}_{\mathcal{E}}}$ 为 $\mathbf{B}_{\mathcal{E}}$ 的相似包络。若 $\varphi\colon \mathbf{B}_{\mathcal{E}} \to \mathbf{B}_{\mathcal{E}}$ 是一个保持不可约点的相似轨道的非交换解析双全纯映射，那么存在一个非交换解析可逆函数 G 使得 $\varphi(X) = G(X)^{-1} X G(X)$ 对于 $\widetilde{\mathbf{B}_{\mathcal{E}}}$ 所有 $X \in \mathbf{B}_{\mathcal{E}}$。

E.S. 部分得到了 BSF资助 2022235 的支持。1

这个定理可以视为对 [38, 定理 4.15] 的加强，因为它描述了所有这类自同构。实质上，它们与一个可逆解析函数相似变换后就是恒等式。随后，我们利用这一结果证明下面的定理。

定理 B. $\mathbb{H}_d^\infty$的每个拟内自同构都是内自同构。

这是一个有些出人意料（对作者而言）的结果，因为它意味着 $\mathbb{H}_d^\infty$的自同构群由酉实现的自同构和内自同构生成，而前者源自 $\mathbb{C}^d$ 中欧几里得开单位球的双全纯自同构。

论文结构。 除本节外，本文还分为四节。第2 节汇集了有关非交换函数和域的必要信息。第3 节给出了初步结果，讨论某些非交换域的相似包络各层何时为全纯域（等价地，Stein 域）。第4 节是本文的技术核心，其中给出了定理 A 的证明。最后，有关自由半群代数及其自同构的必要信息见第5节。特别地，定理 B 在第5节中得到证明。

工具使用。本文汇集了作者在滑铁卢大学逗留期间形成的旧有想法。引理4.10 和4.11 是此前缺少的关键内容，由 ChatGPT 6.0 Astra 补充。此外，ChatGPT 6.0 Astra 还为定理5.2的证明提供了关键观察。本文由作者撰写，并使用 ChatGPT 6.0 Astra 核验了部分命题和拼写。

2. 背景与记号

本节回顾非交换分析理论的一些基础知识。感兴趣的读者可参阅 [4, 29] 了解详情。我们固定 $d \in \mathbb{N}$ 并考虑自由代数 $\mathbb{C}\langle z_1, \ldots, z_d\rangle$。对于字母表 $\{1, \ldots, d\}$上的有限字 α，我们记作$|\alpha|$ 的长度，并记 α 以及$z^\alpha = z_{\alpha_1} \cdots z_{\alpha_n}$，其中 $|\alpha| = n$。我们将自由代数的元素称为非交换（简称 NC）多项式；在不会引起混淆时，也简称多项式。自由代数的有限维表示由 d元矩阵组参数化。我们将这个空间记为

$$\mathbb{M}_d = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} M_n(\mathbb{C})^d.$$

在 NC 设定下， $\mathbb{M}_d$ 类似于 $\mathbb{C}^d$，后者是 $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$的一维表示空间。更一般地，给定一个算子空间 $\mathcal{E}$，我们可以考虑$\mathbb{M}(\mathcal{E}) = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} M_n(\mathcal{E})$。如果我们在 $\mathbb{C}^d$ 上固定一个算子空间结构，并将 $M_n(\mathbb{C}^d) \cong M_n(\mathbb{C})^d$，那么 $\mathbb{M}_d = \mathbb{M}(\mathcal{E})$。由于 $\mathbb{C}^d$ 上的所有算子空间结构都是完全有界同构的，每一层上的拓扑与算子空间结构的选择无关。

空间 $\mathbb{M}_d$ 配备了两种源自直和与表示的同构的自然运算。对于 $X \in M_n(\mathbb{C})^d$ 和 $Y \in M_m(\mathbb{C})^d$，我们将直和 定义为

$$X \oplus Y = \left(\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & Y_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} X_d & 0 \\ 0 & Y_d \end{pmatrix} \right) \in M_{n+m}(\mathbb{C})^d.$$

直和用于连接 $\mathbb{M}_d$的不同分层。对于相似变换，我们对$S \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$和 $X \in M_n(\mathbb{C})^d$，定义为

$$SXS^{-1} = \left(SX_1S^{-1}, \ldots, SX_dS^{-1}\right).$$

显然，每个 $f \in \mathbb{C}\langle z_1, \ldots\ldots, z_d\rangle$ 都满足以下三个性质：

（i） f 是分次的，即 $f(M_n(\mathbb{C})^d) \subset M_n(\mathbb{C})$；（ii） f保持直和，即对于每个 X, $Y \in \mathbb{M}_d$， $f(X \oplus Y) = f(X) \oplus f(Y)$；（iii） f保持相似性，即 $f(SXS^{-1}) = Sf(X)S^{-1}$。

如果由 X 诱导的 $\mathbb{C}\langle z_1, \ldots\ldots, z_d\rangle$ 的表示是不可约的，我们就称点 $X \in \mathbb{M}_d$是不可约的。换句话说，由 X_j 生成的代数就是 $M_n(\mathbb{C})$。根据伯恩赛德定理，这等价于 X_j 没有非平凡的公共不变子空间。否则，我们称 X 是可约的。如果 $X \in M_n(\mathbb{C})^d$ 是可约的，则存在一个酉矩阵 U 使得

$$UXU^* = \begin{pmatrix} X^{(1)} & \star & \star & \star \\ 0 & X^{(2)} & \star & \star \\ 0 & 0 & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & X^{(k)} \end{pmatrix}.$$

这里的点 $X^{(j)}$ 是不可约的。我们将 $X^{(j)}$ 的相似轨道称为 X 的 Jordan-H¨older 构成元。记作 $X^{ss} = \oplus_{j=1}^{k} X^{(j)}$。后一个点在相似变换意义下定义。我们将 X^{ss} 称为 X 的半单化。

由于我们希望处理解析函数的非交换类比，因此需要考虑 $\mathbb{M}_d$ 的子域。我们称 $\Omega \subseteq \mathbb{M}_d$ 为非交换集（NC set），如果 Ω 在直和运算下封闭。记作 $\Omega_n = \Omega \cap M_n(\mathbb{C})^d$。我们称非交换集 Ω 为非交换域（NC domain），如果对于每个 $n \in \mathbb{N}$，Ω_n 是一个在酉~矩阵相似变换下保持不变的开连通集。最后，我们将 Ω 记为 Ω 的相似包络。也就是说，

$$\widetilde{\Omega} = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \left\{SXS^{-1} \mid S \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \text{ and } X \in \Omega_n\right\}.$$

本文的一个核心非交换域类别由算子空间的开球组成。设 $\mathcal{E}$ 是 $\mathbb{C}^d$ 上的算子空间结构。令

$$\mathbf{B}_{\mathcal{E}} = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \left\{X \in M_n(\mathbb{C})^d \mid \|X\|_{\mathcal{E},n} < 1\right\}.$$

特别地，行算子空间的单位球为

$$\mathfrak{B}_d = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \left\{ X \in M_n(\mathbb{C})^d \mid \sum_{j=1}^{d} X_j X_j^* < 1 \right\}.$$

算子空间球是矩阵凸集的一个特例（例如，参见[11, 21]）。若一个 NC 集在等距映射的压缩下封闭，则称其为矩阵凸。也就是说，若 $X \in \Omega_n$ 且 $V\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ 是等距映射，那么

$$V^*XV = (V^*X_1V, \ldots, V^*X_dV) \in \Omega_m.$$

更一般的一类 NC 域在 [2,3] 中针对多项式映射进行了研究，并在 [6,7] 中进行了普遍研究。具体而言，设$\Omega \subseteq \mathbb{M}_d$是一个 NC 域，且 $Q\colon \Omega \to \mathbb{M}(B(\mathcal{H},\mathcal{K}))$是一个解析 NC 函数，其中 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{K}$ 是可分希尔伯特空间。于是，我们定义

$$D_Q = \{X \in \Omega \mid \|Q(X)\| < 1\}.$$

利用算子空间到 $B(\mathcal{H})$ 的完全等距嵌入，我们可以看出，算子空间的每个球都是 $\mathbb{D}_Q$ 型的域。在 [6]，中，Ball、Marx 和 Vinnikov 运用 Effros-Winkler Hahn-Banach 定理 [15] 证明，每个矩阵凸集都具有 D_Q 的形式。一般而言，这种形式的集合并不一定在每一层都是连通的。因此，每当讨论这类域时，我们都会默认假设 $\mathbb{D}_Q$ 是连通的。本文将主要关注算子空间球，因此这一假设不会起到很大作用。我们还会假设 Ω 是 Q 的极大域。也就是说，不存在 NC 域 $\Omega \subsetneq \Omega' \subseteq \mathbb{M}_d$，以及 NC 解析函数 $Q'\colon \Omega' \to \mathbb{M}(B(\mathcal{H}, \mathcal{K}))$，使得 $Q'|_\Omega = Q$。

给定一个开 NC 域 $\Omega \subset \mathbb{M}_d$，函数 $f\colon \Omega \to \mathbb{M}_1$ 称为 NC 函数，若它相对于 Ω 满足上述性质 (i)–(iii)。一个令人惊讶的事实是，如果 NC 函数在 Ω 上局部有界，那么它自动逐层解析 [1,29]。根据 [29]，中的附录 ~，每个 NC 函数 f 都能唯一延拓到 Ω。此外，每个函数都能在 Ω 中每一点处展开为局部一致且绝对收敛的“幂级数” [29]。若该点是标量，则展开式是关于自由变量的幂级数（即形式幂级数环 $\mathbb{C}\langle\langle z_1, \ldots\ldots, z_d\rangle\rangle$ 的一个元素）。

设 $U \subseteq M_n(\mathbb{C})^d$ 是一个相似不变开集，且 $f\colon U \to M_n(\mathbb{C})$ 是一个全纯函数。遵循 [18]，我们称 f 是一个伴随函数，如果 f 是$\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$-等变的。

3. 良好 NC 域

本节旨在研究一类适合作为算子代数表示空间的 NC 域。回顾一下，对于算子代数 $A \subset B(\mathcal{H})$，限制到不变子空间以及压缩到余不变子空间所得的表示都是完全压缩表示。此外，从 A 到 M_n 的每个有界表示自动都是完全有界的，并且根据 Paulsen 相似定理，它与一个完全压缩表示相似。这引出了下面的定义。

定义 3.1. 设 $\Omega \subset \mathbb{M}_d$ 是一个 NC 域。若 Ω 在压缩到不变子空间和余不变子空间下封闭，则称 Ω 是良好的 。

更准确地说，如果 Ω 是一个良好域且 $X \in \Omega_n$，我们称 $V \subset \mathbb{C}^n$ 是不变的，当且仅当 V 在 X 的坐标作用下是不变的。因此，如果 $\iota\colon \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^n$ 是一个值域为 V 的等距映射，那么 $\iota^* X \iota \in \Omega_k$。余不变子空间也同样如此。如果 Ω 是矩阵凸的，那么它显然是良好的。

由于每个非交换域 Ω 在酉相似下都保持不变，如果 X 有一个不变子空间，那么我们可以找到一个酉矩阵 U 使得

$$UXU^* = \begin{pmatrix} X_1 & \star \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}.$$

因此，$X_1, X_2 \in \Omega$ 当且仅当 Ω 是良好域。这引出了以下引理 .

引理 3.2。 设$\Omega \subseteq \mathbb{M}_d$是一个良好 *NC* 域，且 $Q\colon \Omega \to \mathbb{M}(B(\mathcal{H},\mathcal{K}))$ 是一个 *NC* 函数。如果每一层都是连通的，则 $\mathbb{D}_Q$ 是一个良好 *NC* 域。

证明。 由于 Q 保持酉相似，对于每个具有不变子空间的 $X \in \mathbb{D}_{Q,n}$，我们有

$$UXU^* = \begin{pmatrix} X_1 & \star \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}, Q(X) = (I \otimes U^*) \begin{pmatrix} Q(X_1) & \star \\ 0 & Q(X_2) \end{pmatrix} (I \otimes U).$$

由于 $X_1, X_2 \in \Omega$，我们有 $\|Q(X_1)\|, \|Q(X_2)\| \leq \|Q(X)\| < 1$。由此可得， $\mathbb{D}_Q$ 是良好的。□

*Remark*3.3。 即使这些层不一定连通，证明仍然成立。

下面的引理是显然的。

引理 3.4。 设 $\Omega \subseteq \mathbb{M}_d$ 是一个良好域。则对于每个 $X \in \Omega$， X 的每个 ***Jordan-H¨ölder*** 构成因子的一个代表都包含于 Ω中。因此， X 的半单化的一个代表属于Ω。

我们将 $M_n(\mathbb{C})^d//\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 记为相似作用下的范畴商。具体而言，我们在 $M_n(\mathbb{C})^d$ 上定义关系： $X \sim Y$，当且仅当 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \cdot X \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \cdot Y \neq \emptyset$。集合 $M_n(\mathbb{C})^d//\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 是关于该等价关系的商，我们将 p_n 记为商映射。下面汇总一些关于该关系和 p_n 的事实，这些事实将在后文中使用。这些事实的参考文献是 [5, 第 12 节。6]和 [36]。首先，对于 $X \in \mathbb{M}_d$ 不可约的情形， $p_n^{-1}(p_n(X))$ 是 X的相似轨道。更一般地，对于可约的 X，纤维 $p_n^{-1}(p_n(X))$ 恰好包含一个闭轨道，即X的半单化的轨道。特别地， $X \sim Y$ 当且仅当 $X^{ss} \sim Y^{ss}$。我们称 $E \subset M_n(\mathbb{C})^d$ 是饱和的，如果$p_n^{-1}(p_n(E)) = E$。

定义 3.5。 设 $\Omega \subset \mathbb{M}_d$。我们将 Ω 的饱和化定义为

$$\mathrm{sat}(\Omega) = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} p_n^{-1}(p_n(\Omega_n)).$$

如果 Ω =sat(Ω)，则称 Ω 是饱和的 。

我们记录一个由上述定义立即得出的引理。

引理 3.6。设 $\Omega \subseteq \mathbb{M}_d$。那么，

(i) sat(sat(Ω)) = sat(Ω)。

(ii) Ω ⊂sat(Ω) = sat(Ω)。

下一个命题将良好 NC 域的概念与饱和化联系起来 n.

命题 3.7。 设$\Omega \subseteq \mathbb{M}_d$ 是一个良好 *NC* 域。则Ω 也是一个良好域。此外，Ω 是饱和的。

证明。 对于第一个断言，我们考虑 $X \in \Omega_n$。固定一个 $V \subset \mathbb{C}^n$ 非平凡的 X-不变子空间。令 $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$。则， SV对于 SXS^{-1}是不变的。令 $\alpha, \beta\colon \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^n$ 为等距映射，其值域分别为 V 和 SV。则， $\alpha^* S^{-1} \beta \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{C})$。此外，设$\xi \in \mathbb{C}^k$。则存在 $\eta \in \mathbb{C}^k$ 使得 $\beta\xi = S\alpha\eta$。因此，

$$(\beta^* S\alpha)(\alpha^* S^{-1}\beta)\xi = \beta^* S\alpha\eta = \xi.$$

现在，由于 Ω 是良好的， $\alpha^* X\alpha \in \Omega_k$。接下来，我们利用 V是 X-不变的这一事实进行计算

$$(\beta^* S\alpha)(\alpha^* X_j\alpha)(\alpha^* S^{-1}\beta)\xi = \beta^* SX_j\alpha\alpha^* S^{-1}\beta\xi = \beta^* SX_j\alpha\eta = \beta^* SX_jS^{-1}\beta\xi.$$

$\widetilde{\ }$由此可得 $\beta^* SXS^{-1}\beta \in \Omega$。对于余不变子空间，同样的论证也成立。

现在我们证明第二个断言。根据前述引理，只需证明 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$sat(Ω) $\subseteq \Omega$。现令 $X \in \Omega_n$。如果 X 不可约，则 $p_n^{-1}(p_n(X)) \subseteq \Omega$。如果 X 可约，则 X^{ss} 包含于 Ω 中，因为 Ω 是良好的。由于 $p_n^{-1}(p_n(X))$ 由半单化决定，因此对于 $Y \in p_n^{-1}(p_n(X))$，存在 $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 使得

$$SYS^{-1} = \begin{pmatrix} X^{(1)} & \star & \star & \star \\ 0 & X^{(2)} & \star & \star \\ 0 & 0 & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & X^{(k)} \end{pmatrix}.$$

对每个 $t > 0$ 定义

$$R_t = t^{k-1}I \oplus t^{k-2}I \oplus \cdots \oplus tI \oplus I.$$

然后，不难验证 $\lim_{t\to 0+} R_t SYS^{-1}R_t^{-1} = X^{(1)} \oplus \cdots \oplus X^{(k)} \in \Omega_n$。由于 Ω_n $\widetilde{\ }$是开集，我们看到 $Y \in \Omega$，于是得证。□

推论 3.8。 设 $\Omega \subseteq \mathbb{M}_d$ 是一个良好 *NC* 域，且 $Q\colon \Omega \to \mathbb{M}(B(\mathcal{H},\mathcal{K}))$ 是一个解析 $\widetilde{\ }$ *NC* 函数。那么， $\mathbb{D}_Q$ 是良好且饱和的。

在 [39], Sergeev 和 Khaˇıntsner 研究了在群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 的作用下，NC 多圆盘第二层的轨道是否为全纯域这一问题。上述问题的答案是肯定的。为此，他们提出了轨道凸性的概念。在 [39], 中，他们研究了紧李群 K在仿射空间 $\mathbb{C}^d$ 上的作用，以及该作用向 K的复化 $K^{\mathbb{C}}$ 的延拓。我们将注意力限制在 $K = U_n$的情形，此时仿射空间为 $M_n(\mathbb{C})^d$，复化为 $K^{\mathbb{C}} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$。由于我们的域是 NC 域，我们考虑各层上的作用。以下定义是 [39, 第 2 节中的定义3]针对我们的情形所作的调整。

定义 3.9。 设 $\Omega \subseteq \mathbb{M}_d$ 是一个良好 NC 域。若对于每个 $X \in \Omega_n$ 以及每个满足 $e^H X e^{-H} \in \Omega_n$的自伴 $H \in M_n(\mathbb{C})$，对于每个 $0 \le t \le 1$, $e^{tH} X e^{-tH} \in \Omega_n$均有相应性质，则称 Ω 是轨道凸 的。

前述定义等价于要求：对于每个 $X \in \Omega$ 以及每个满足 $AXA^{-1} \in \Omega_n$的严格正 A，对于每个 $0 \le t \le 1$均有 $A^t X A^{-t} \in \Omega_n$ 。我们将在下面引理的证明中使用这一观察。

引理 3.10。 设 $Q\colon \mathbb{M}_d \to \mathbb{M}(B(\mathcal{H},\mathcal{K}))$ 是一个无法延拓 $\widetilde{\ }$ 到更大非交换域的解析 *NC* 函数。那么，对于每个 $n \in \mathbb{N}$满足 $\mathbb{D}_{Q,\ n} \neq \emptyset$, $D_{Q,\ n}$ 是全纯凸的。

证明。我们的目标是应用 [39, 定理 3]。为此，我们注意到，根据推论 3.8, $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$$\mathbb{D}_Q$ 是良好的且饱和的。固定 $n \in \mathbb{N}$，使得 $\mathbb{D}_{Q,n} \neq \emptyset$。于是，$\mathbb{D}_{Q,n}$ 是饱和的。此外，$\mathbb{D}_{Q,n}$ 是全纯凸的。事实上，若写作 $\rho(X) = \|X\|_{\mathrm{row}} - \log(1 - \|Q(X)\|)$，则 ρ 是 $\mathbb{D}_{Q,n}$的拟多重次调和耗尽函数。因此，我们只需证明 $\mathbb{D}_Q$ 是轨道凸的。为此，取$X \in \mathbb{D}_{Q,n}$，并设 A 为严格正的，使得 $A^{-1}XA \in \mathbb{D}_{Q,n}$。我们需要证明，对于每个 $0 \le t \le 1$，都有 $A^{-t}XA^t \in \mathbb{D}_{Q,n}$ 。我们的假设等价于 $Q(X)A^2Q(X)^* < A^2$。我们需要证明，对于每个 $0 \le t \le 1$，都有 $Q(X)A^{2t}Q(X)^* < A^{2t}$。现在回顾 [8,定理 V.1.9] 和 [8, 定理 V.2.5]，可知

对于每个 $0 \le t \le 1$，函数 $f_t(x) = x^t$ 在 $[0,\infty)$ 上是算子单调且凹的。因此，将 [8, 定理 V.2.3(iii)] 应用于 $-f_t$，我们得到 $Q(X)A^{2t}Q(X)^* \le A^{2t}$。现在，若 T 和 S 是正算子，且满足 $T < S$，则存在一个 $\varepsilon > 0$，使得$T \le S - \varepsilon$。因此，由单调性和函数演算可得，$T^t \le (S-\varepsilon)^t < S^t$。于是，我们得到了所需结果。□

注 3.11： 可以证明，这一结论在更一般的情形下成立。具体而言，若 Ω 是一个相似变换不变的非交换域，其每个非空层都是全纯域，并且Q: Ω $\to \mathbb{M}(B(\mathcal{H}, \mathcal{K}))$ 是一个 NC 解析函数，且无法解析延拓到任何严格包含 Ω 的非交换域上，则上述引理仍然成立。由于这与本文的主要结果无关，我们不再对此作进一步推导。

4. 相似变换保持映射

本节将把讨论限制在算子空间球上。固定一个算子空间结构 $\mathcal{E}$ 于 $\mathbb{C}^d$ 并令 $\mathbf{B}_\mathcal{E} \subseteq \mathbb{M}_d$ 为 $\mathcal{E}$的开单位球。如第 2节所述，$\mathbf{B}_\mathcal{E} = \mathbb{D}_Q$ 对于线性 Q。因此，前一节的结果适用于$\widetilde{\mathbf{B}_\mathcal{E}}$。特别地，我们有 $\mathbf{B}_\mathcal{E}$ 是良好的且轨道凸的，而 $\mathbf{B}_\mathcal{E}$ 是饱和的，并且每个层都是全纯域。

在本节中，我们固定 $\varphi\colon \mathbf{B}_\mathcal{E} \to \mathbf{B}_\mathcal{E}$ 一个 NC 解析双全纯映射$\widetilde{\ }$，使得 $\varphi(X) \in \{X\}$ 对每个 $X \in \mathbf{B}_\mathcal{E}$都成立。我们的目标是证明，$\varphi$ 由一个可逆解析 NC 函数所定义的相似变换实现。我们的策略是先证明它在每个足够高的层上成立，然后将其扩展到较低的层，并使其满足直和性质。因此，固定 $n \ge 3$，并假设 $d \ge 2$。这些假设确保所有可约点构成 $M_n(\mathbb{C})^d$中的一个余维数严格大于 1 的代数子簇。

记 $G_{d,n} \subset M_n(\mathbb{C})^d$ 为所有不可约元组的集合，并记 $E_{d,n} = (\mathbf{B}_\mathcal{E})_n \cap G_{d,n}$。此外，回顾一下，$p_n\colon M_n(\mathbb{C})^d \to M_n(\mathbb{C})^d /\!/ \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$是由前一节所述关系定义的商映射。我们用$V_{d,n} = p_n(G_{d,n})$和$Q_{d,n} = p_n(E_{d,n})$表示。根据 Le Bruyn 和 Procesi 的结果 [30, 定理 II.3.4]，$p_n\colon G_{d,n} \to V_{d,n}$ 是一个主 $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$丛，并且，$V_{d,n}$ 是 $M_n(\mathbb{C})^d /\!/ \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$中的光滑点集合。

引理 *4.1.* 对于每个$X \in E_{d,n}$和n，存在唯一的 $S(X) \in PGL_n(\mathbb{C})$，使得 $\varphi(X) = S(X)^{-1} X S(X)$。此外，函数 $S\colon E_{d,n} \to PGL_n(\mathbb{C})$ 是全纯的，并且具有 $PGL_n(\mathbb{C})$-等变性，即 $S(TXT^{-1}) = TS(X)T^{-1}$。

证明。 根据假设，对于每个 $X \in \mathbf{B}_{\mathcal{E},\,n}$，都存在这样的 $S(X)$。然而，由于 X 不可约，Procesi 的结果以及 φ是双射这一事实表明，这个 $S(X)$ 是唯一的。由于 φ 具有等变性，我们得到，对于每个 $X \in E_{d,\,n}$ 以及 $T \in \mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$,

$$S^{-1}(TXT^{-1})TXT^{-1}S(TXT^{-1}) = \varphi(TXT^{-1}) = T\varphi(X)T^{-1} = TS^{-1}(X)XS(X)T^{-1}.$$

由唯一性，$S(TXT^{-1}) = TS(X)T^{-1}$。

最后，对于 $X \in E_{d,\,n}$ 我们考虑方程 $XS = S\varphi(X)$。这是一个全纯系数的线性方程。此外，由于 X 的交换子仅为标量，因此在开集$E_{d,\,n}$上秩为常数。因此，存在一个局部全纯截面，将其投影到 $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$ 上即可得到 $S(X)$。因此，$S(X)$是全纯的。□

按照 [18], , 我们设 $L_{d,n} = E_{d,n} \times^{\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$，以及 $P_{d,n} = E_{d,n} \times^{\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})} \mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$。这是笛卡尔积关于等价关系 $(X,T) \sim (S^{-1}XS, S^{-1}TS)$ 取商的标准记法。利用第一坐标上的投影，这些是 $Q_{d,n}$ 上的 $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$-丛。上述引理意味着 $S(X)$ 诱导出 $P_{d,n}$ 的一个全纯截面。此外，我们有 $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$-丛的正合序列

$$1 \longrightarrow E_{d,n} \times^{\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})} \mathbb{C}^\times \longrightarrow L_{d,n} \longrightarrow P_{d,n} \longrightarrow 1.$$

这里，$\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$ 在 $\mathbb{C}^\times$ 上的作用是平凡的，而第二个映射是中心的嵌入。显然，$E_{d,n} \times^{\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})} \mathbb{C}^\times$ 的全纯截面层就是 $Q_{d,n}$ 上处处不为零的全纯函数层。通常我们将 $\mathcal{O}_{Q_{d,n}}$ 记作 $Q_{d,n}$ 上的全纯函数层，将 $\mathcal{O}^\times_{Q_{d,n}}$ 记作 $Q_{d,n}$ 上的可逆全纯函数层。因此，若将 $\mathcal{L}_{d,n}$ 和 $\mathcal{P}_{d,n}$ 分别记作 $L_{d,n}$ 和 $P_{d,n}$ 的全纯截面层，我们便得到一个正合序列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^\times_{Q_{d,n}} \longrightarrow \mathcal{L}_{d,n} \longrightarrow \mathcal{P}_{d,n} \longrightarrow 0\ . \tag{4.1}$$

我们现在的目标是证明，S（我们已将其识别为 $H^0(Q_{d,n}, \mathcal{P}_{d,n})$ 的一个元素）可以提升为 $H^0(Q_{d,n}, \mathcal{L}_{d,n})$ 的一个元素。根据 [18] ，后者将为我们提供实现 φ 的所需全纯伴随函数。这使我们得以更深入地研究这些层的上同调。回顾一下，指数正合列为

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_{Q_{d,n}} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^\times_{Q_{d,n}} \longrightarrow 0. \tag{4.2}$$

由指数正合列得到上同调中的长正合序列，并利用流形上常值层的层上同调 $Q_{d,\ n}$实际上就是整数系数的拓扑上同调这一事实，我们看到需要理解 $Q_{d,\ n}$ 的拓扑。这个观察很有用，因为正合序列（4.1）是群层的正合序列。因此，根据 [17, I.6 节，定理 I.2], , 存在一个非阿贝尔上同调中的正合序列

(4.3)
$$0 \longrightarrow H^0(Q_{d,n}, \mathcal{O}^\times_{Q_{d,n}}) \longrightarrow H^0(Q_{d,n}, \mathcal{L}_{d,n}) \longrightarrow H^0(Q_{d,n}, \mathcal{P}_{d,n}) \longrightarrow H^1(Q_{d,n}, \mathcal{O}^\times_{Q_{d,n}}).$$

因此 ，为了证明我们可以提升 S，只需证明 $H^1(Q_{d,\ n},\ \mathcal{O}^\times_{Q_{d,\ n}}) = 0.$

引理 4.2。 在我们的假设 $d \geq 2$ *and* $n \geq 3$ 下，有$E_{d,\ n}$ 是道路连通的，并且 $\pi_1\ (E_{d,\ n}) \ = \pi_2\ (E_{d,\ n}) \ = 0$。

证明。 在我们的假设下，可约点的轨迹$\widetilde{\ }$的复余维数至少为 2。因此，其实余维至少为 4。由于 $\mathbf{B}\varepsilon,\ n$ 是可缩的，$E_{d,\ n}\widetilde{\ }$是道路连通的。现在设 $\gamma\colon S^1 \to E_{d,\ n}$ 是一条闭环。由于 $\mathbf{B}\varepsilon,\ n$ 是可缩的， γ 可以延拓到闭单位圆盘。根据 [23,定理 2.2。2], 我们可以对该延拓作微小扰动，并假设其为光滑的。通过反复取该簇的光滑点，再取剩余奇异轨迹的光滑点，可以将奇异轨迹分解为光滑流形的并集，于是我们可以应用横截定理 [23, 定理 3.2。5]事实上，余维数至少为 4，而圆盘的切空间是二维的。这一论证表明，我们可以对该延拓作微小扰动，使其与每一层都横截。由于我们的扰动可以任意小

且 γ 的像是紧的，我们看到可以选择扰动后的延拓，使其落在 $E_{d,\ n}$中。现在，我们可以通过将 γ 移动到圆的扰动后的像上，再将其收缩，来构造一个同伦。这证明了 $\pi_1(E_{d,\ n})$ $= 0$。对于$\pi_2(E_{d,\ n})$，类似的论证同样成立。□

下面的引理是众所周知的，但为完整起见，我们仍将其列出。

引理 4.3。 对于每个 $n \geq 2$、 $\pi_1(\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$。

证明。 由 [22, 定理 14.3。11], $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$ 形变收缩到其极大紧子群 PU_n。现在我们使用正合序列，

$$1 \longrightarrow S^1 \longrightarrow \mathrm{U}_n \longrightarrow \mathrm{PU}_n \longrightarrow 1.$$

利用同伦群的长正合序列 [20,定理 4.41]以及 [20, 例 4.55], 中的计算，我们得到

$$0 \longrightarrow \pi_2(\mathrm{PU}_n) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \pi_1(\mathrm{PU}_n) \longrightarrow 0.$$

现在，行列式诱导出一个同构 $\pi_1(\mathrm{U}_n) \to \pi_1(S^1)$。因此，中心的基本群作为 $\pi_1(\mathrm{U}_n)$ 的 n 的倍数子群包含于其中。这一观察结合上述正合序列，证明了所需结果。□

引理 4.4。 的首批同伦群为 $Q_{d,\ n}$ 为 $\pi_1(Q_{d,\ n}) = 0$ 和 $\pi_2(Q_{d,\ n}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

证明。 应用纤维丛的同伦群长正合序列，可得

$$\cdots \longrightarrow \pi_2(E_{d,n}) \longrightarrow \pi_2(Q_{d,n}) \longrightarrow \pi_1(\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})) \longrightarrow \pi_1(E_{d,n}) \longrightarrow \pi_1(Q_{d,n}) \longrightarrow 0.$$

由引理 4.2，可得 $\pi_1(Q_{d,\ n}) = 0$和 $\pi_2(Q_{d,\ n}) \cong \pi_1(\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$，其中第二个等式由前一个引理推出。□

引理 4.5。 有 $H^1(Q_{d,\ n}, \mathbb{Z}) = H^2(Q_{d,\ n}, \mathbb{Z}) = 0$。此外， $H^1(Q_{d,\ n}, \mathcal{O}_{Q_{d,\ n}}) = H^1(Q_{d,\ n}, \mathcal{O}^{\times}_{Q_{d,\ n}})$。

证明。 首先注意到，由 Hurewicz 定理 [20, 定理 4.32], $H_2(Q_{d,\ n},\ \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 和 $H_1(Q_{d,\ n},\ \mathbb{Z}) = 0$。现在应用万有系数定理 [20, 定理 3.2] ，得到关于 $i = 1,\ 2$ 的正合序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}(H_{i-1}(Q_{d,n}, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \longrightarrow H^i(Q_{d,n}, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_i(Q_{d,n}, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$

现在，对于 $i = 2$，我们立即看到最左项和最右项都为 0。对于$i = 1$，最右项为 0，且 $H_0(Q_{d,\ n},\ \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ ，因此最左项为 0。

要证明最后一个结论，我们使用由指数正合列（4.2）得到的层上同调长正合序列。特别地，我们得到其中的如下正合部分:

$$H^1(Q_{d,n}, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(Q_{d,n}, \mathcal{O}_{Q_{d,n}}) \longrightarrow H^1(Q_{d,n}, \mathcal{O}^{\times}_{Q_{d,n}}) \longrightarrow H^2(Q_{d,n}, \mathbb{Z}) \ .$$

No现在我们只需应用已经得到的关于整数上同调的结果 d. □

上述引理表明，要证明我们的障碍消失，只需证明 $H^1(Q_{d,\ n},\ \mathcal{O}_{Q_{d,\ n}}) = 0$。为此，我们将使用一些局部上同调。关于解析范畴中的局部上同调的详细内容，请参阅 [9, 第二章] 。回顾一下，交换局部环 $(A,\ \mathfrak{m})$ 称为 Cohen-Macaulay 环，当且仅当 深度$_{\mathfrak{m}}\, A =$维数 A。

这里的深度是 $\mathfrak{m}$ 中最长正则序列的长度。若解析空间 X 的所有局部环都是 Cohen-Macaulay 环，则称其为 Cohen-Macaulay 空间。我们需要下面这个引理，它概述了整体层上同调与局部层上同调之间关系的一些结果。

引理 4.6。设 X 是一个纯维 *Cohen-Macaulay* 解析空间。设 $Y \subsetneq X$ 是其余维数至少为 $r \geq 1$的闭解析子空间。则，对于 $0 \leq k < r-1$，有

$$H^k(X, \mathcal{O}_X) = H^k(X \setminus Y, \mathcal{O}_{X\setminus Y}).$$

证明。假设 维数 $X = m$。因此，维数$Y \leq m - r$。由于 X是 Cohen-Macaulay 的，我们有 维数$Y +$ $(r-1)$ $+1 \leq m =$深度 X。根据 [9, 推论 II.3。9], 对于 $q = r-1$，我们得到局部上同调层 $\mathfrak{H}^k_Y = 0$ 对于 $0 \leq k \leq r-1$。定理 3 中 (c) 与 (d) 的等价性 [9, 定理 3。6]蕴含了该结论。 □

由于对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$\mathrm{B}_{\varepsilon,n}$ 都是全纯域，上述引理结合 Cartan 定理 B [40, 定理 11.4。3] 推出，对于 $d \geq 2$ 和 $n \geq 3$，$H^0(E_{d,n}, \mathcal{O}_{E_{d,n}}) = H^0(\mathrm{B}_{\varepsilon,n}, \mathcal{O}_{\mathrm{B}_{\varepsilon,n}})$，并且对于 $1 \leq k < (d-1)(n-1) - 1$，$H^k(E_{d,n}, \mathcal{O}_{E_{d,n}}) = 0$。特别地，我们可以将 $E_{d,n}$ 上的每个全纯函数延拓到 $\mathrm{B}_{\varepsilon,n}$（这实际上是此情形下的 Hartogs 延拓定理）。为了理解$Q_{d,n}$，我们还需要另一个技术性引理。

引理 4.7. 设 X 是一个复仿射代数簇。若作为代数簇，X 是 *Cohen-Macaulay* 的，则作为解析簇，它也是 *Cohen-Macaulay* 的。此外，代数局部环与解析局部环的维数相同。

证明。这是 [19, 命题 XII.2.1]。 □

引理 4.8. 代数簇 $M_n(\mathbb{C})^d//\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ 是一个不可约 *Cohen-Macaulay* 仿射簇。此外，在假设 $d \geq 2$和 $n \geq 3$成立的条件下，$M_n(\mathbb{C})^d//\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ 中的奇异轨迹的余维数至少为3。

证明。记 $\mathbb{C}[M_n(\mathbb{C})^d]$ 为由 d-元矩阵组的坐标构成的（交换）多项式环。第一个断言由以下事实得出：$M_n(\mathbb{C})^d//\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$是环 $\mathbb{C}[M_n(\mathbb{C})^d]^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$的谱，而根据 [24]的主定理，该环是 Cohen-Macaulay 的。该代数簇是不可约簇的像，因此不可约。$M_n(\mathbb{C})^d//\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ 的维数为 $(d-1)n^2 + 1$，因为商映射的一般纤维维数为 $n^2 - 1$。现在注意到，奇异轨迹是可约半单点的像。对于每个可约半单点，我们都可以将其分解为直和。因此，对于 $1 \leq m \leq n-1$，我们有如下映射

$$M_m(\mathbb{C})^d// \mathbf{GL}_m(\mathbb{C}) \times M_{n-m}(\mathbb{C})^d// \mathbf{GL}_{n-m}(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})^d// \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}).$$

这些映射的像覆盖了奇异轨迹。因此，奇异轨迹的维数至多为 $\max_{1\leq m\leq n-1}((d-1)(m^2 + (n-m)^2) + 2) = (d-1)(1 + (n-1)^2) + 2$。因此，奇异轨迹的余维数至少为

$$(d-1)n^2 + 1 - (d-1)(1 + (n-1)^2) - 2 = (d-1)(2n-2) - 1 \geq 3.$$

□

命题 4.9。对于每个 $d \geq 2$ 和每个 $n \geq 3$，都存在一个矩阵伴随式 S_n：$\mathbf{B}_{\varepsilon,\, n} \to \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$，使得对于每个 $X \in \mathbf{B}_{\varepsilon,\, n}$, $\varphi(X) = S_n(X)^{-1} X S_n(X)$。

证明。由 [39, 定理 1] 和 [39,推论 2], 可知， $p_n(\mathbf{B}_{\varepsilon,n})$ 是一个 Stein 空间。因此，根据 Cartan 定理 B，其结构层的第一上同调为 0。由引理 4.7 和 4.8，我们得到 $H^1(Q_{d,n},\mathcal{O}_{Q_{d,n}}) = 0$。现在，引理 4.5 表明 $H^1(Q_{d,n},\mathcal{O}^{\times}_{Q_{d,n}}) = 0$。因此，正合序列 (4.3) 化为短正合序列

$$0 \longrightarrow H^0(Q_{d,n},\mathcal{O}^{\times}_{Q_{d,n}}) \longrightarrow H^0(Q_{d,n},\mathcal{L}_{d,n}) \longrightarrow H^0(Q_{d,n},\mathcal{P}_{d,n}) \longrightarrow 0.$$

由此可得，我们可以将 S 提升为$E_{d,n}$上的一个伴随函数。现在，引理4.6 及其后面的段落表明，我们可以将 S 扩展为$\mathbf{B}_{\varepsilon,n}$上的全纯矩阵值函数$\widetilde{\ }$。然而，由于我们也可以扩展 S^{-1}，根据恒等定理，$\widetilde{\ }$我们得到一个伴随函数 $S\colon \mathbf{B}_{\varepsilon,n} \to \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$，使得对每个 $X \in \mathbf{B}_{\varepsilon,n}$，$\varphi(X) = S(X)^{-1}XS(X)$。□

命题中得到的正合序列表明， S 在相差一个全纯$\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$-不变函数的意义下是唯一的。我们在每一层上固定一个可逆的全纯伴随函数 S_n，使其实现 φ。为了得到直和性质，我们需要对每个 $n \geq 3$找到一个全纯$\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$-不变函数 α_n，使得 $\alpha_n S_n$ 保持直和。为此，我们注意到，若 $X \in \mathbf{B}_{\varepsilon,n}$ 且 $Y \in \mathbf{B}_{\varepsilon,m}$ 对于 $n, m \geq 3$成立，则根据不变性，对每个 λ, $\mu \in \mathbb{C}^{\times}$

$$(\lambda I_n \oplus \mu I_m)S_{n+m}(X \oplus Y) = S_{n+m}(X \oplus Y)(\lambda I_n \oplus \mu I_m).$$

特别地， $S_{n+m}(X \oplus Y)$ 是分块对角的。此外，

$$S_{n+m}(X \oplus Y)^{-1}(X \oplus Y)S_{n+m}(X \oplus Y) = \varphi(X \oplus Y) = \varphi(X) \oplus \varphi(Y) = (S_n(X)^{-1} \oplus S_m(Y)^{-1})(X \oplus Y)(S_n(X) \oplus S_m(Y)).$$

记 $S_{n+m}(X \oplus Y) = A(X,Y) \oplus B(X,Y)$。于是， $A(X,Y)S_n(X)^{-1}$ 与 X 对易。因此，对于不可约的 X，它必定是非零标量。这个标量为 $a_{n,m}(X,Y) = \frac{1}{n}\operatorname{tr}(A(X,Y)S_n(X)^{-1})$。现在固定 Y，我们得到一个 $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$-不变函数，并且可以像之前那样将它延拓到整个$\widetilde{\ }\mathbf{B}_{\varepsilon,n}$。所得函数在 $E_{d,n}$ 上处处非零。因此，任何零点都只能位于可约轨迹中，其复余维数至少为 2；而非零全纯函数的非空零点集的复余维数为 1。下面的引理总结上述函数的性质。特别地，我们证明这些函数具有类似上循环的性质。

引理 4.10. 对于每个 n、m、$k \geq 3$，以下两个陈述成立：

(i) 存在一个 $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathbf{GL}_m(\mathbb{C})$-等变函数 $a_{n,m}\colon \mathbf{B}_{\varepsilon,n} \times \mathbf{B}_{\varepsilon,m} \to \mathbb{C}^{\times}$，使得对于每个 (X, Y)，我们有

$$S_{n+m}(X \oplus Y) = \begin{pmatrix} a_{n,m}(X,Y)S_n(X) & 0 \\ 0 & a_{m,n}(Y,X)S_m(Y) \end{pmatrix}.$$

(ii) 对于任意 $X \in \mathbf{B}_{\varepsilon,n}$, $Y \in \mathbf{B}_{\varepsilon,m}$ 和 $Z \in \mathbf{B}_{\varepsilon,k}$，都有

$$a_{n+m,k}(X \oplus Y, Z)a_{n,m}(X,Y) = a_{n,m+k}(X, Y \oplus Z).$$

证明。 引理的第一部分（恒等式除外）已在前面的讨论中证明。为看出恒等式，我们注意到

$$B(X,Y)\oplus A(X,Y)=\begin{pmatrix}0 & I_m\\ I_n & 0\end{pmatrix}S_{n+m}(X\oplus Y)\begin{pmatrix}0 & I_n\\ I_m & 0\end{pmatrix}=S_{n+m}(Y\oplus X).$$

现在对 $S_{n+m}(Y\oplus X)$ 作同样的考察，即可得到所需的恒等式。对于第二部分，我们使用引理第一部分中的恒等式

$$S_{n+m+k}(X\oplus Y\oplus Z)=\begin{pmatrix}a_{n+m,k}(X\oplus Y,Z)S_{n+m}(X\oplus Y) & 0\\ 0 & a_{k,n+m}(Z,X\oplus Y)S_k(Z)\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}a_{n+m,k}(X\oplus Y,Z)a_{n,m}(X,Y)S_n(X) & 0 & 0\\ 0 & a_{n+m,k}(X\oplus Y,Z)a_{m,n}(Y,X)S_m(Y) & 0\\ 0 & 0 & a_{k,n+m}(Z,X\oplus Y)S_k(Z)\end{pmatrix}.$$

另一方面，我们有

$$S_{n+m+k}(X\oplus Y\oplus Z)=\begin{pmatrix}a_{n,m+k}(X,Y\oplus Z)S_n(X) & 0\\ 0 & a_{m+k,n}(Y\oplus Z,X)S_{m+k}(Y\oplus Z)\end{pmatrix}.$$

现在比较左上角的元素，并利用 $S_n(X)$ 的可逆性，即可得到类似余循环的性质。□

引理 4.11. 取 $Z_0\in\mathbf{B}\varepsilon_{,3}$ 并对每个 $n\geq 3$ 定义，

$$\alpha_n(X)=\frac{a_{n,3}(X,Z_0)}{a_{3,n}(Z_0,X)}\ \textit{and}\ G_n(X)=\alpha_n(X)S_n(X).$$

那么， α_n 是定义在$\mathbf{B}\varepsilon_{,n}$ 上的一个处处非零的解析$\mathbf{G}\mathrm{L}_n(\mathbb{C})$-等变函数，并且对每个$n$、 $m\geq 3$ 和$\mathbf{B}\varepsilon_{,n}$ 以及$\mathbf{B}\varepsilon_{,m}$， $G_{n+m}(X\oplus Y)=G_n(X)\oplus G_m(Y)$。

证明。 首先注意到，由于 $a_{n,m}$ 的不变性，对于所有 $n,m,k\geq 3$, $a_{n+m,k}(X\oplus Y,Z)=a_{n+m,k}(Y\oplus X,Z)$，我们有相应结论；第二个坐标的情形也类似。关于 α_n 的第一个断言由前述引理立即得出。现在固定 n, $m\geq 3$ 并计算

$$G_{n+m}(X\oplus Y)=\alpha_{n+m}(X\oplus Y)S_{n+m}(X\oplus Y)=$$
$$\alpha_{n+m}(X\oplus Y)\begin{pmatrix}a_{n,m}(X,Y)S_n(X) & 0\\ 0 & a_{m,n}(Y,X)S_m(Y)\end{pmatrix}.$$

Now

$$\alpha_{n+m}(X\oplus Y)a_{n,m}(X,Y)=\frac{a_{n+m,3}(X\oplus Y,Z_0)a_{n,m}(X,Y)}{a_{3,n+m}(Z_0,X\oplus Y)}=\frac{a_{n,m+3}(X,Y\oplus Z_0)}{a_{3,n+m}(Z_0,X\oplus Y)}=$$
$$\frac{a_{n,m+3}(X,Z_0\oplus Y)}{a_{3,n+m}(Z_0,X\oplus Y)}=\frac{a_{n+3,m}(X\oplus Z_0,Y)a_{n,3}(X,Z_0)}{a_{n+3,m}(Z_0\oplus X,Y)a_{3,n}(Z_0,X)}=\alpha_n(X).$$

对第二个加项也可采用类似的论证。 □

现在我们可以证明本节的主要结果了。

定理 4.12. 设 $\mathcal{E}$ 是 $\mathbb{C}^d$ 上的一个算子空间结构，满足 $d \geq 2$，并设 $\varphi: \mathbf{B}_{\mathcal{E}} \to \mathbf{B}_{\mathcal{E}}$ 是一个 *NC* 解析双全纯映射，使得对每个 $X \in \mathbf{B}_{\mathcal{E}}$，$\varphi(X) \in \{X\}$。那么，存在一个定义在 $\mathbf{B}_{\mathcal{E}}$ 上的 *NC* 解析函数 G，使得对每个 $X \in \mathbf{B}_{\mathcal{E}}$，

$$\varphi(X) = G(X)^{-1} X G(X).$$

证明。前述引理使我们能够通过令 $G(X) = G_n(X)$，为 $X \in \mathbf{B}_{\mathcal{E},n}$ 构造一个定义在 $n \geq 3$ 层上的解析 NC 函数 G。我们只需将此函数扩展到较低的层。为此，令 $X \in \mathbf{B}_{\mathcal{E},m}$，其中 $m = 1$ 或 $m = 2$。现在考虑 $I_3 \otimes X = X^{\oplus 3}$。于是，根据 G 的等变性，对于每个维数为 3 的置换矩阵 U，我们有

$$G(I_3 \otimes X) = G\big((U^* \otimes I_m)(I_3 \otimes X)(U \otimes I_m)\big) = (U^* \otimes I_m) G(I_3 \otimes X)(U \otimes I_m).$$

将此结果与把 U 替换为对角矩阵时的相同论证结合起来，可得 $G(I_3 \otimes X) = I_3 \otimes G_m(X)$。这里，$G_m(X)$ 自动为解析函数，且具有 $\mathbf{GL}_m(\mathbb{C})$-等变性。因此，我们已将 G 扩展到了较低的层。此外，由于 φ 保持直和，恒等式 $\varphi(X) = G(X)^{-1} X G(X)$ 现在在所有层上均成立。若取 $k > 3$ 并考虑 $I_k \otimes X$，则与前面一样，$G(I_k \otimes X) = I_k \otimes H(X)$。然而，由于 G 对 $n \geq 3$ 保持直和，我们有

$$I_{3k} \otimes G_m(X) = G(I_k \otimes I_3 \otimes X) = G(I_{3k} \otimes X) = G(I_3 \otimes I_k \otimes X) = I_{3k} \otimes H(X).$$

因此，该定义与所选放大规模无关。现在令 X，$Y \in \mathbf{B}_{\mathcal{E}}$。那么，$I_3 \otimes (X \oplus Y)$ 必定位于足够高的层上。现在取一个洗牌酉矩阵 P 使得 $P(I_3 \otimes (X \oplus Y))P^* = (I_3 \otimes X) \oplus (I_3 \otimes Y)$，我们得到

$$I_3 \otimes G(X \oplus Y) = G(I_3 \otimes (X \oplus Y)) = P^*(G(I_3 \otimes X) \oplus G(I_3 \otimes Y))P = I_3 \otimes (G(X) \oplus G(Y)).$$

因此，G 保持直和性质，结论得证。 □

推论 4.13。 设 $\varphi: \mathbf{B}_{\mathcal{E}} \to \mathbf{B}_{\mathcal{E}}$ 是一个 *NC* 解析双全纯映射，并且对于每个不可约 $X \in \mathbf{B}_{\mathcal{E}}$，$\varphi(X) \in \{X\}$。那么，$\varphi$ 保持相似轨道，并且具有如下形式 $\varphi(X) = G(X)^{-1} X G(X)$，其中 G 是定义在 $\mathbf{B}_{\mathcal{E}}$ 上的可逆 *NC* 解析函数。

证明。由于 φ 保持不可约点的相似轨道，我们有，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，φ 在 $p_n(\mathbf{B}_{\mathcal{E},n}) \subseteq M_n(\mathbb{C})^d // \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ 上诱导恒等映射。此外，整个证明策略包括将 $E_{d,n}$ 上的相似变换提升为可逆等变函数。此部分可逐字翻译。现在，解析函数的恒等定理确保等式 $\varphi(X) = S_n(X)^{-1} X S_n(X)$ 对于 $d \geq 2$ 和 $n \geq 3$ 在可约轨迹上同样成立。证明的其余部分完全相同。□

注 4.14。请注意，限定在算子空间球上是为了简化假设。显然，对于形如 $\mathbb{D}_Q$ 且在所有充分高的层上都具有足够良好拓扑的域，证明技术同样适用。

5. $\mathbb{H}_d^\infty$ 的自同构

全 Fock 空间 $\mathbb{H}_d^2$ 是自由代数 $\mathbb{C}\langle z_1, \ldots, z_d \rangle$ 在由使单项式构成标准正交基的内积所诱导的范数下的完备化。坐标的左乘给出了一个行等距算子。我们将记作 $L_{z_i} = L_i$ 和 $L = (L_1, \ldots, L_d)$：$\mathbb{H}_d^2 \otimes \mathbb{C}^d \to \mathbb{H}_d^2$。由 L_i 生成的弱算子拓扑闭代数记作 $\mathbb{H}_d^\infty$，它是有界解析函数代数的非交换类比

单位圆盘上的函数。代数 $\mathbb{H}_d^\infty$<style id='4'}Davidson and Pitts 将其称为自由半群代数 [12–14]。事实上， $\mathbb{H}_d^2$ 是一个非交换再生核希尔伯特空间，而行球 $\mathfrak{B}_d$ 上的有界非交换函数是它的左乘子。此外，正如 Popescu 最早指出的 [33], , 行球上的有界解析函数代数与自由半群代数酉等价（另见 [37, 定理 3。1]）。这解释了所用的记号。

在 [12,定理 4.6], 中，Davidson and Pitts 证明了 $\mathbb{H}_d^\infty$的每个自同构都自动是弱算子拓扑连续的。此外，根据 [12,定理 4.1],, 存在一个正合序列

$$1 \longrightarrow \text{q-Inn} \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{H}_d^\infty) \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{B}_d) \longrightarrow 1.$$

这里 $\mathbb{B}_d$ 表示 $\mathbb{C}^d$ 中的欧几里得开单位球，$\text{Aut}(\mathbb{B}_d)$ 是 $\mathbb{B}_d$的全纯自同构群。此外，商映射存在一个截面，因为 $\mathbb{B}_d$ 的每个自同构都会诱导 $\mathbb{H}_d^\infty$的一个酉实现的自同构。事实上，所有酉实现的自同构都由此产生。正规子群q-Inn 是商映射的核。Davidson and Pitts 将 q-Inn 中的元素称为拟内自同构。在 [38], 中，Salomon、Shalit 和作者证明，$\sim\mathbb{H}_d^\infty$的自同构会诱导 $\mathfrak{B}_d$ 的非交换解析自同构，且相对于某种伪双曲度量的类比度量是双 Lipschitz 的。此外，根据 [38, 推论 6.8], , 每个拟内自同构都必须保持不可约点的相似轨道。结合这一结果与 [38, 推论 6.3]及推论4.13，我们得到以下命题。

$\sim$ $\sim$**命题 5.1.** 设 $\Phi \in \text{q-Inn}$ ，并设 φ: $\mathfrak{B}_d \to \mathfrak{B}_d$ 为诱导的 *NC* 解析双全纯映射。则存在定义在 $\mathfrak{B}_d$ 上的解析可逆 *NC* 函数 G 以及常数 C_1、 $C_2 > 0$，使得对每个 $X \in \mathfrak{B}_d$,

(i) $\varphi(X) = G(X)^{-1} X G(X)$;
(ii) $\|\Psi_{\varphi(X)}\| \le C_1$.
(iii) *For every* $f \in \mathbb{H}_d^\infty$, $\sup_{X\in\mathfrak{B}_d} \|G(X)^{-1} f(X) G(X)\| \le C_2 \|f\|_\infty$.

特别地，(iii) 项意味着对每个词 α，都有

$$\sup_{X\in\mathfrak{B}_d} \|G(X)^{-1} X^\alpha G(X)\| \le C_2.$$

定理 5.2. 每个 $\Phi \in \text{q-Inn}$ 都是内函数。

证明。根据 [12, 推论 4.8], , 对于每个 $1 \le i \le d$， $\Phi(L_i) - L_i$ 都属于由交换子生成的弱算子拓扑闭双边理想。特别地， $\Phi(L_i) = L_i + g_i$，其中 g_i 在 0 处的消失阶至少为 2。由于 Φ 是一个同态，对于每个满足 $|\alpha| \ge 1$ 的词 α ，我们有 $\Phi(L^\alpha) = L^\alpha + g_\alpha$，其中 g_α 在 0 处的消失阶至少为 $|\alpha| + 1$。因此，$(L^\alpha)^* \Phi(L^\alpha) = 1 + (L^\alpha)^* g_\alpha \in \mathbb{H}_d^\infty$。将 G 在 0 处的 Taylor-Taylor 展开写为 $G = \sum_{n=0}^\infty \sum_{|\alpha|=n} a_\alpha z^\alpha$ ，并类似地写出 $G^{-1} = \sum_{n=0}^\infty \sum_{|\alpha|=n} b_\alpha z^\alpha$。注意，这些级数在每一层的紧集上一致且绝对收敛。归一化 $G(0) = 1$。于是，对于每个点 $X \in \mathfrak{B}_d$ 和每个词 α,

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{\substack{|\beta|=n \\ |\gamma|=m}} b_\beta a_\gamma X^{\beta\alpha\gamma} = G(X)^{-1} X^\alpha G(X) = \Phi(L^\alpha)(X).$$

固定一个满足 $|\omega| < |\alpha|$ 的词 ω。我们要寻找 $(L^\alpha)^*\Phi(L^\alpha)$ 的幂级数中 z^ω 的系数。观察上面的表达式，唯一可能的候选项是形如 $z^{\beta\alpha\gamma}$ 的元素，满足 $z^\beta z^\alpha z^\gamma = z^\alpha z^\omega$。此外，我们必须有 $|\beta| + |\gamma| = |\omega|$。当且仅当 z^α 是 $z^\beta z^\alpha$ 的前缀时，非空 β 才可能出现这种情况。为了排除这一点，我们固定 $z^\alpha = z_1^m z_2$。于是，对于每个长度严格小于 $|\alpha|$ 的非空 β，如果 z^β 是 z^α 的前缀，则对于 $1 \le k \le m$，有 $z^\beta = z_1^k$。然而， $z^\beta z^\alpha = z_1^{m+k} z_2$。但是，后一个词并不以 z^α 为前缀。因此，写作 $f_m = L_2^* L_1^{m*} \Phi(L_1^m L_2)$。我们知道，对于所有 $m \in \mathbb{N}$, $\|f_m\| \le C$。此外，对于 $0 \le k \le m$， f_m 的第 k 个齐次分量与 G 的第 k 个齐次分量一致。特别地， $f_m(0) = 1$。令 f_{m_k} 为 f_m 的一个弱算子拓扑收敛子序列，其极限为 f。于是， $f \neq 0$，因为 $f(0) = 1$。此外，对于每个词 α，我们有 $\lim_{k\to\infty} \langle f_{m_k}, z^\alpha \rangle = \langle f, z^\alpha \rangle$。由于单项式构成标准正交系，该内积恢复了第 α 个泰勒系数。然而，当 k 足够大时， f_{m_k} 的第 α 个泰勒系数与 G 的相应系数相同。我们得到 $f = G$。特别地， G 有界。将同样的论证应用于以 Φ^{-1} 替换 Φ 的情形，我们得到 G^{-1} 在 $\mathfrak{B}_d$ 上也有界。□

参考文献

[1] J. Agler 和 J. E. McCarthy。多个非交换变量中的全局全纯函数。《加拿大数学杂志》，67(2):241–285，2015年。[2]J. Agler 和 J. E. McCarthy。自由全纯函数的 Pick 插值。《美国数学杂志》，137(6):1685–1701，2015年。[3] J. Agler 和 J. E. McCarthy。隐函数定理与自由代数集。《美国数学会汇刊》，368(5):3157–3175，2016年。[4] J. Agler、J. E. McCarthy 和 N. Young。算子分析——复分析中的希尔伯特空间方法，《剑桥数学论丛》第219卷。剑桥大学出版社，剑桥，2020年。[5] M. Artin。关于阿祖马亚代数与环的有限维表示。代数杂志，11:532–563，1969年。[6] J. A. Ball、G. Marx 和 V. Vinnikov。非交换再生核希尔伯特空间。《函数分析杂志》，271(7):1844–1920，2016年。[7] J. A. Ball、G. Marx 和 V. Vinnikov。非交换 Schur-Agler 类的插值与传递函数实现。载于《不同背景下的算子理论及相关应用》，《算子理论：进展与应用》第262卷，第23–116页。Birkh¨auser/Springer，Cham，2018年。[8] R. Bhatia。矩阵分析，《数学研究生教材》第169卷。Springer-Verlag，纽约，1997年。[9] C. B˘anic˘a 和 O. St˘an˘asil˘a。复空间整体理论中的代数方法。Editura Academiei，布加勒斯特；约翰·威立父子出版公司，伦敦—纽约—悉尼，1976年。由罗马尼亚语译出。[10] J. W. Bunce。 n-元组非交换算子的模型。《函数分析杂志》，57(1):21–30，1984年。[11] K. R. Davidson 和 M. Kennedy。非交换 Choquet 理论。arXiv 预印本 arXiv:1905.08436，2019年。[12] K. R. Davidson 和 D. R. Pitts。非交换解析 Toeplitz 代数的代数结构。数学年刊，311(2):275–303，1998年。[13] K. R. Davidson 和 D. R. Pitts。非交换解析 Toeplitz 代数的 Nevanlinna-Pick 插值。积分方程与算子理论，31(3):321–337，1998年。[14] K. R. Davidson 和 D. R. Pitts。自由半群代数的不变子空间与超反射性。伦敦数学会会报（第3辑），78(2):401–430，1999年。[15] E. G. Effros 和 S. Winkler。矩阵凸性：极性定理与 Hahn–Banach 定理的算子类比。《泛函分析杂志》，144(1):117–152，1997年。[16] A. E. Frazho。非交换算子的模型。《函数分析杂志》，48(1):1–11，1982年。[17] J. Frenkel。非阿贝尔上同调与纤维丛。《法国数学会通报》，85:135–220，1957年。

[18] E. Griesenauer、P. S. Muhly 和 B. Solel。边界、丛与迹代数。《纽约数学杂志》，24A，2018年。[19] A. Grothendieck 和 M. Raynaud。Etale 覆盖与基本群。ISpringer 柏林、海德堡，1971年。S´éminaire de G´éom´étrie Alg´ébrique du Bois Marie，1960/61年。[20] A. Hatcher。代数拓扑。剑桥大学出版社，剑桥，2002年。[21] J. W. Helton、I. Klep 和 S. McCullough。自由分析、凸性与线性矩阵不等式域。载于《系统、优化与控制中的数学方法：献给 J. William Helton 的纪念文集》，第195–219页。Springer，2012年。[22] J. Hilgert 和 K.-H. Neeb。李群的结构与几何。Springer 数学专著。Springer，纽约，2012年。[23] M. W. Hirsch。微分拓扑，《数学研究生教材》第33卷。Springer-Verlag，纽约，1994年。1976年原版的修订重印本。[24] M. Hochster 和 J. L. Roberts。约化群作用于正则环时，其不变量环是 Cohen-Macaulay 环。《数学进展》，13:115–175，1974年。[25] M. T. Jury 和 R. T. W. Martin。隶属于自由 Hardy 空间上的自由移位的算子。《函数分析杂志》，277(12):108285，39页，2019年。[26] M. T. Jury、R. T. W. Martin 和 E. Shamovich。自由非交换函数的 Blaschke-奇异-外因子分解。《数学进展》，384:论文编号107720，42页，2021年。[27] M. T. Jury、R. T. W. Martin 和 E. Shamovich。全 Fock 空间中的非交换有理函数。《美国数学会汇刊》，374(9):6727–6749，2021年。[28] M. T. Jury、R. T. W. Martin 和 E. Shamovich。非交换有理 Clark 测度。《加拿大数学杂志》，待刊。[29] D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi 和 V. Vinnikov。自由非交换函数理论基础，《数学调查与专著》第199卷。美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，2014年。[30] L. Le Bruyn 和 C. Procesi。 ′矩阵不变量与伴随量的 Etale 局部结构。载于《代数群：乌得勒支 1986》，《数学讲义》第1271卷，第143–175页。Springer，柏林，1987年。[31] G. Popescu。非交换算子的无限序列的等距扩张。《美国数学会汇刊》，316(2):523–536，1989年。[32] G. Popescu。非交换算子的函数演算。密歇根数学杂志，42(2):345–356，1995年。[33] G. Popescu。 $B(\mathcal{H})^n$单位球上的自由全纯函数。《函数分析杂志》，241(1):268–333，2006年。[34]G. Popescu。 $B(\mathcal{H})^n$单位球上的自由全纯自同构。《纯粹与应用数学杂志》，638:119–168，2010年。[35] G. Popescu。 $B(\mathcal{H})^n$单位球上的自由全纯函数。II。《函数分析杂志》，258(5):1513–1578，2010年。[36] C. Procesi。 $n \times n$ 矩阵的不变量理论。《数学进展》，19(3):306–381，1976年。[37] G. Salomon、O. M. Shalit 和 E. Shamovich。非交换单位球子簇上的有界非交换解析函数代数。《美国数学会汇刊》，370(12):8639–8690，2018年。[38] G. Salomon、O. M. Shalit 和 E. Shamovich。非交换球子簇上的非交换函数代数：有界与完全有界同构问题。《函数分析杂志》，278(7):108427，54页，2020年。[39] A. G. Sergeev 和 P. Khaˇıntsner。扩展矩阵圆盘是一个全纯域。《苏联科学院学报：数学辑》，55(3):647–657，1991年。[40] J. L. Taylor。与代数几何和李群相关的多复变数，《数学研究生教材》第46卷。美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，2002年。

以色列贝尔谢巴 8410501，内盖夫本-古里安大学数学系