arXiv:2611.28434v1 [physics.geo-ph] 21 Nov 2026

PFASST-BISICLES：时间并行冰盖模型

Weijia (Emma) Liu[1], Hans Johansen[2], 和 Daniel F. Martin[2]1美国伊利诺伊州芝加哥市芝加哥大学2美国加利福尼亚州伯克利市劳伦斯伯克利国家实验室**通讯作者：** Weijia (Emma) Liu (liuwj@uchicago.edu)

摘要。 在现代计算系统上高效模拟冰盖动力学，对于预测冰盖对气候强迫的响应及其对海平面变化的影响至关重要。要充分利用现代计算架构，必须实现高度并行化。传统上，冰盖模型等时变模拟完全通过分配空间域来实现并行，而随着解向前推进，时间维度仍按串行方式处理。我们介绍 PFASST-BISICLES，该模型将时空并行全近似格式（PFASST）与 BISICLES 冰盖模型相结合，以并发方式推进多个时间步。我们使用带自适应网格加密的完全接地正弦冰流和 MISMIP+海洋冰盖基准测试，评估数值一致性和并行性能。对于正弦流，在相同时间步下，PFASST-BISICLES 产生的时间误差约比前向欧拉法小一个数量级，但两种方法均表现出近似一阶收敛。空间扩展性在处理器数量达到约 16 个时趋于平缓，而时间并行可进一步加速；时间处理器数量达到约 16 个时，加速比几乎呈线性增长。在 MISMIP+中，经过 50 年的冰川演化后，PFASST-BISICLES 再现了主要的厚度和速度模式，最大差异集中在接地区附近。在固定使用四个空间处理器的情况下，将时间处理器数量从一个增至四个，可将运行时间从 33.8 小时缩短至 10.5 小时。这些结果表明，时间并行能够补充冰盖建模中的空间分解，在保持主要模拟特征一致的同时缩短求解时间。

1 引言

了解格陵兰和南极冰盖对全球气候变化的动态响应，对于预测全球海平面上升等影响至关重要（Edwards 等，2021）。在过去十年左右的时间里，新一代高性能计算冰盖模型得以开发，这些模型还能够利用并行

计算高效地使用现代计算资源，其中包括 BISICLES 模型（Cornford 等，2013）。BISICLES 使用块结构自适应网格加密（AMR），通过动态地将计算资源集中于所需区域来提高计算效率，从而充分解析接地线和冰流相对精细尺度的局部动力学；这些局部动力学通常控制着冰盖的大尺度动力学。

与此同时，高性能计算架构的发展趋势是并发性不断提高，单个超级计算机节点上往往拥有数十甚至数百个处理器核心。（Shalf，2020）BISICLES 一直依靠空间并行来利用并发性——将冰盖的空间域划分开，并分配由此产生的子域

到各个处理器核心上；对于块结构自适应网格加密，这种方式尤其有效，因为每个细化层级都由一组网格块构成，易于分配。随后，分布式模拟按时间顺序推进，并可随着自适应网格的变化、追踪不断演变的解，对空间域进行重新分配。遗憾的是，BISICLES 往往在能够充分利用这些资源之前，可扩展性就已达到极限，部分原因在于采用自适应网格加密来减少未知数。对于这类时变模拟，一种提升可扩展性的方法是实现时间并行方案（Gander，2015年；Emmett 和 Minion，2012年），同时在时间维度上增加一定程度的并行性。

在时间离散和空间离散中引入并行性的概念并不新颖；并行实时间算法最早由 Lions 于2001年提出（Lions 等，2001）。另一种方法，即时间多重网格约减（MGRIT），基于多重网格求解器中的相关概念，这些求解器通常用于求解线性系统。（Falgout 等，2014）在本研究中，我们的方法基于 Emmett 和 Minion（2012）提出的时空并行全近似格式（PFASST）。

2 方法

我们的方法是从现有的 BISICLES 冰盖模型（Cornford等人（2013））开始，保留其空间离散，同时用 PFASST 替换原有的时间离散。这需要对代码进行一些重组，以增加直接计算厚度更新方程右端项的功能，这不同于Cornford等人（2013）所描述的积分式时空方案。

2.1 空间离散与自适应性

如 Cornford等人（2013）所述，BISICLES 使用了 Schoof 和 Hindmarsh（2010）提出的垂向积分动量平衡形式的一个修订版本。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{u} h) = M_s + M_b, \tag{1}$$

$$\beta^2(u_b)\boldsymbol{u_b} + \boldsymbol{\nabla} \cdot [h\mu(\dot{\epsilon}^2, T)(\boldsymbol{\nabla} + \boldsymbol{\nabla}^T)\boldsymbol{u_b} - 2\mu(\dot{\epsilon}^2, T)(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u_b})] = -\rho g h \boldsymbol{\nabla} s, \tag{2}$$

其中，h 为冰厚度，$\boldsymbol{u}(x, y)$为垂向积分速度矢量，$\boldsymbol{u_b}$ 为冰底部的冰速，M_s 和M_b 分别为表面积累率和底部融化率，β^2 为冰底部的摩擦系数（在漂浮冰架下该值为 0），s 为冰的上表面，ρ 为冰密度，g 为重力加速度（9.81 $\frac{m}{s^2}$），μ 为冰黏度，其为应变率张量 $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ 和冰温 T的函数。

2.2 顺序时间离散化

Cornford等人（2013）所述的时间积分格式是一种预测-校正格式：利用时间 t^n 的单元中心解值，采用基于分段抛物线法（PPM）（Colella and Woodward, 1984）的非分裂格式，预测半时间（$t^{n+\frac{1}{2}} = t^n + \frac{1}{2}\Delta t$）的冰厚度面中心值。这些面中心厚度

随后与面中心速度相乘，以计算半时间的冰通量，再利用这些冰通量计算有限体积通量散度。尽管使用以半时间为中心的通量可构成时间二阶格式，但使用在 t^n 计算的速度会使该格式在形式上只有时间一阶精度，不过仍能保持守恒。

2.3 PFASST 时间并行离散化

PFASST 算法最初由 Emmett 和 Minion（2012年）提出，用于求解偏微分方程（PDEs）的一般初值问题。在我们的模型中，我们将该算法应用于 Picard 积分形式的二维质量输运方程

$$h(t) = h_0 + \int_0^t f(h(\tau), \boldsymbol{u}(\tau))d\tau, t \in (0, T_f], \tag{3}$$

其中， h_0是初始冰厚度，右端函数 $f(h,\ \boldsymbol{u})$ 和速度场 $\boldsymbol{u}$ 分别由方程 1 和方程 2 得到。

PFASST 背后的基本概念是对时间维度进行分层离散化，构建一个结构化的时间网格层级，通常称为“时间层级”，其范围从粗到细。在每个层级内，我们采用谱延迟校正（SDC）技术（Dutt 等，2000年；Minion，2003年），通过使用低阶方法在求积节点上迭代逼近方程 3 中的积分，计算每个物理步内的解。通过采用全近似方案（FAS）（Brandt，1977年；Trottenberg 等，2000年）实现有效的层级间通信，该方案将在本节末尾讨论。

对于模拟时间跨度 $[0, T_f]$，首先在时间方向上进行均匀离散，将其划分为由 N 个时间间隔组成的网格。随后，我们为每个时间间隔 $[t_n, t_{n+1}]$ 分配不同的时间层级，其中最粗和最细的层级分别指定为第 0 层和第 L 层。在每个层级 $l \in [0, L]$ 上， $[t_n, t_{n+1}]$ 进一步划分为 M_l 个子区间，并配置 $(M_l + 1)$ 个 SDC节点。因此，对于任意层级 l，时间步的划分可概括为

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = T_f,\ \ \Delta t = t_{n+1} - t_n, \tag{4}$$

$$t_n = t_{n0} < t_{n1} < ... < t_{nM_l} = t_{n+1},\ \ \Delta t_m = t_{n(m+1)} - t_{nm}. \tag{5}$$

在一个子步长 $[t_{nm}, t_{n(m+1)}]$ 内，我们使用显式欧拉法在每个层级上迭代计算解 h 。为简化记号，将在第 k 次 SDC迭代的 SDC节点 t_{nm} 处求得的解 h 记为 h^k_{nm}，速度 u_m 和右端函数 f（h^k_{nm}，u_{nm}）同理。于是，在 SDC节点 $[t_{n1}, ..., t_{nM_l}]$ 处计算 $[h_1^{k+1}, ..., h_{M_l}^{k+1}]$ 的递推方程可写为

$$h^{k+1}_{n(m+1)} = h^k_{nm} + \Delta t_m \left(f(h^{k+1}_{nm}, u_{nm}) - f(h^k_m, u_m)\right) + I^{m+1}_m(h^k, \boldsymbol{u}),\ \ m = 0, ..., M_l - 1, \tag{6}$$

其中， I_m^{m+1}（h^k， $\boldsymbol{u}$）是在第 k 次迭代中对 $[t_{nm}, t_{n(m+1)}]$ 处右端函数积分进行数值求积近似的结果

$$\int_{t_{nm}}^{t_{n(m+1)}} f(h^k, \boldsymbol{u}) d\tau \approx I_m^{m+1}(h^k, \boldsymbol{u}) = \Delta t \sum_{j=0}^{M} q_{mj} f(h_{nj}^k, u_{nj}). \tag{7}$$

记作 q_{mj} 的系数是 SDC 节点处的求积权重，可以预先计算。因此，上述求积近似就是一次简单的矩阵向量乘法。于是，方程 6 的紧凑形式为

$$\boldsymbol{h}^{k+1} = \boldsymbol{I} h_0 + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{F}^{k+1} - \boldsymbol{F}^k) + \Delta t \boldsymbol{Q} \boldsymbol{F}^k, \tag{8}$$

其中， $\boldsymbol{I}$ 是单位矩阵， $\boldsymbol{Q}$ 是大小为 $M_l \times (M_l + 1)$ 的求积积分矩阵，其元素为 q_{mj}； $\boldsymbol{h}$ 是在所有 SDC 节点 $[h_{n0}, ..., h_{nM_l}]^T$ 处计算得到的冰厚度向量； $\boldsymbol{F}$ 是在所有 SDC 节点$[f(h_{n0}, u_{n0}) ..., f(h_{nM_l}, u_{nM_l})]^T$ 处计算得到的右端函数向量； $\boldsymbol{S}$ 定义为

$$s_{ij} = \begin{cases} \Delta t_{(j-1)} & \text{if } j \leq i, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{9}$$

通常，SDC 节点选取为与标准高斯求积节点对齐，例如高斯-勒让德节点和高斯-拉道节点。这里，我们在最细层级采用高斯-洛巴托节点。随后，将粗层级的 SDC 节点选为细层级 SDC 节点的子集，以便于层级间通信。然而，值得注意的是，这种选择并不能保证较粗层级的 SDC 节点也为高斯-洛巴托节点，因此会导致精度阶数降低（ Emmett 和 Minion，2012年）。本研究中，我们为粗层级和细层级分别选择 2 个和 3 个节点。

在 PFASST 中，SDC 迭代在多个层级上进行，重点是在粗层级上执行额外的迭代，以减少总工作量。这种方法也称为多层 SDC（Speck 等人，2015年）。虽然这种方法能够有效降低计算成本，但不可避免地会在解的精度方面引入权衡。因此，为了在较粗层级的分辨率下运行时获得与细层级 SDC 迭代相当的精度，并在各层级之间传递解，引入了 FAS校正项 τ，用于校正粗层级上的解

$$\boldsymbol{\tau} = \Delta t (\boldsymbol{Q}^C \boldsymbol{F}^C - \boldsymbol{T}_F^C \boldsymbol{Q}^F \boldsymbol{F}^F), \tag{10}$$

其中，上标 C 和 F 分别表示粗层级和细层级， $\boldsymbol{T}_F^C$ 是将各量从细层级传递到粗层级的限制算子。由于我们选择粗层级上的 SDC节点作为细层级节点的子集，因此在本例中，限制算子实际上就是逐点注入。带有粗层级 FAS 校正的时间区间 $[t_n, t_{n+1}]$ 内的配点问题（公式 8）随后可表示为

$$\boldsymbol{h}^{k+1} = \boldsymbol{I} h_0 + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{F}^{k+1} - \boldsymbol{F}^k) + \Delta t \boldsymbol{Q} \boldsymbol{F}^k + \boldsymbol{\tau}^k. \tag{11}$$

粗层迭代完成后，使用插值算子 $\boldsymbol{T}_C^F$ 将解从粗层传递到细层。在此情境下， $\boldsymbol{T}_C^F$ 采用标准多项式插值构造。

2.4 空间与时间并行化

在我们的模型中，我们使用两个基于 MPI 的通信器，分别用于块结构自适应网格细化网格上的空间并行化和时间并行化。因此，每个处理器都是这两个通信器的成员，也就是说，它在 PFASST 的某个特定时间步持有 BISICLES 中自适应网格细化网格的一个子框。

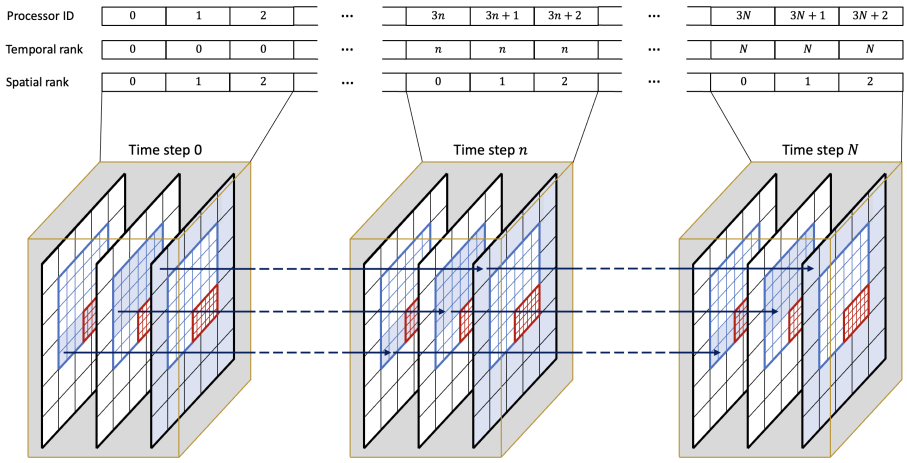

图 1。 使用 N 个时间处理器进行并行化的示例，其中每个时间处理器包含 3 个空间处理器。时间方向使用 PFASST通信器分解为 N 个时间步，每个时间步由一个灰色网格块表示。在每个时间步内，空间网格被分解为 3 个子区域，并由 3 个空间处理器管理，如 3 个切片所示。每个切片负责整个网格中的一个子区域，以蓝色阴影区域表示。这些切片共同构成整个空间域。不同时间步之间的通信通过切片间打包与解包实现，如蓝色箭头所示。在此示例中，空间网格从粗到细包含 3 个自适应网格加密层级，分别以黑色、蓝色和红色网格表示。

在图 1 所示的示意图中，我们对时间方向和空间方向采用了严格的分解策略。首先，时间方向通过 PFASST通信器分解到 N 个 MPI时间秩上，该通信器表示物理时间步，并以灰色网格块表示。随后，在每个时间步内，将整个空间网格封装起来，并分配到 3 个 MPI空间秩上，由本地 BISICLES通信器进行协调，在每个灰色网格块内表示为 3 个切片。时间处理器之间的数据传输仅限于位于同一空间秩中的处理器之间，并通过切片间传输实现，如蓝色箭头所示。在此示例中，我们展示了将空间网格划分为 3 个子区域（蓝色阴影区域）以及 3 个自适应网格加密层级（黑色、蓝色和红色网格）。这种分配时间处理器和空间处理器的方法可以推广到任意数量的网格块和自适应网格加密层级。从本质上讲，该方法支持“N 冰盖”的并行并发运行，其中 N 表示物理时间步的总数。

为了将 PFASST 算法应用于 BISICLES 冰盖模型，我们使用了 PFASST库，并构建了 BISICLES向量工厂和绑定接口，以确保数据兼容性。

3 结果

我们在两个问题上测试了这一实现：正弦冰流（Cornford 等，2013）和 MISMIP+ 海洋冰盖社区基准（Asay-Davis 等，2016）。这些测试案例构成了互补基准，用于评估我们实现的能力。正弦形冰流问题是一项基础测试，主要用于展示我们的时间并行冰盖模型的有效性。MISMIP+ 着重研究接地线后退与前进，有助于评估 PFASST-BISICLES 模型是否适用于具有移动网格、且解的状态已被证明对分辨率不足敏感的快速变化冰盖。

为比较传统顺序模型与时间并行模型之间的差异，我们针对上述每个测试问题分别开展了两组模拟。下文将其分别称为“顺序运行”和“并行运行”。

3.1 正弦冰流

根据 Cornford等人（2013）的研究，我们考察倾斜平面上的正弦冰流，床面沿 x 方向倾斜 -0.5 度。计算域设为 $[160,160]$ 千米，所有边界均采用周期边界条件。初始冰厚度在整个计算域内设为 1000 米。冰体完全接地，并采用线性底部摩擦定律。

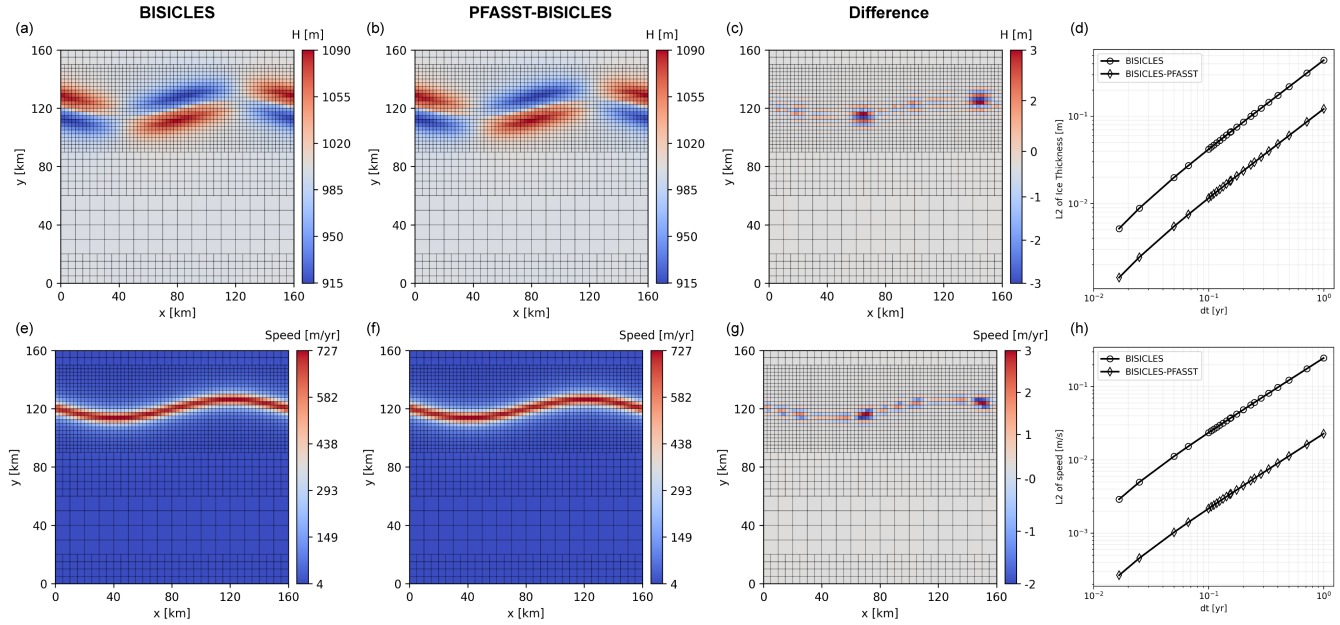

图 2。 使用 BISICLES 和 PFASST-BISICLES 算法对正弦形冰流问题进行比较。第一行和第二行分别展示冰厚度和表面速度的结果及其差异。(a)、(b) 和 (c) 列分别展示使用 BISICLES、PFASST-BISICLES 及二者差异所得的结果。(d) 图展示以 $dt = 0.05$ 年为参考的时间收敛性。所有模拟均使用三级自适应网格细化网格，总模拟时间为 20 年。

对于该问题，两种模拟均采用三个层级的自适应网格细化网格，其中最粗的自适应网格细化层级（层级 0）的网格尺寸为 $\Delta x = 16$ 千米，最细层级（层级 2）的网格尺寸为 $\Delta x = 4$ 千米。我们使用无雅可比牛顿-克雷洛夫方法求解力平衡方程 2（Brown 和 Saad，1990；Knoll 和 Keyes，2004）。在时间离散方案方面，我们分别使用前向欧拉法（BISICLES）和 PFASST 算法（PFASST-BISICLES）求解厚度演化方程 1。

图 2 展示了 BISICLES 和 PFASST-BISICLES 模拟 20 年后的对比。我们比较了厚度（第一行）和表面速度（第二行）。BISICLES 和 PFASST-BISICLES 的结果分别显示在第一列和第二列，差异则在第三列中突出显示。观测到的最大差异约为冰厚度的 0.28% 和表面速度的 0.41%。第四列展示了两种方法在冰厚度和表面速度上的收敛情况，并以 $dt = 0.05$ 年作为参考。由于采用了谱延迟校正方案，在相同时间分辨率下，PFASST-BISICLES 的 L2 误差比 BISICLES 低约一个数量级；不过，两种方法的收敛率斜率均约为 1。

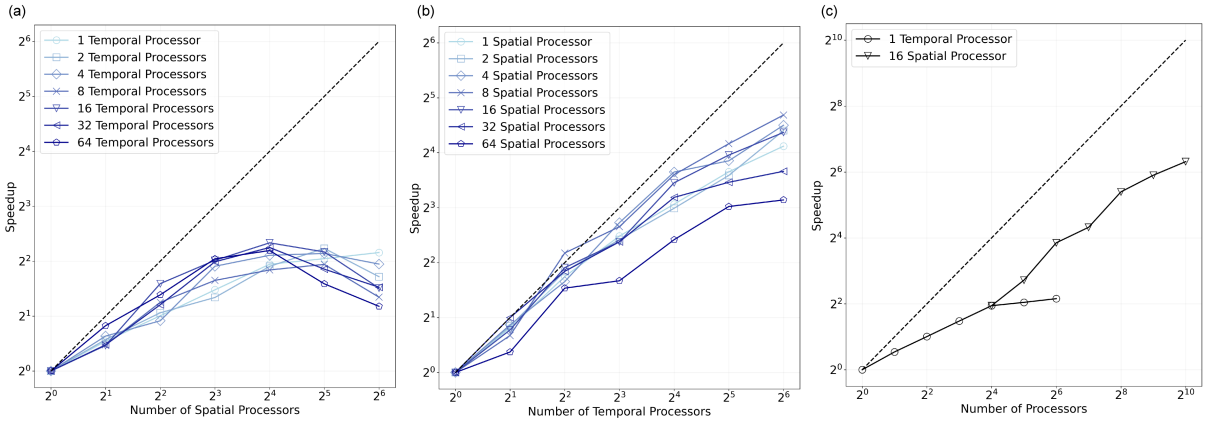

图 3. PFASST-BISICLES 算法在正弦形冰流模拟中的可扩展性。图 (a) 和 (b) 展示了空间可扩展性和时间可扩展性。图 (c) 说明，与仅依赖空间并行化相比，增加时间并行化如何提升整体可扩展性。

随后，我们在相同的正弦形冰流问题上比较 BISICLES 和 PFASST-BISICLES 的可扩展性。原始 BISICLES 实现仅支持空间维度上的并行化，而 PFASST-BISICLES 则支持空间和时间维度上的并行化。我们在空间和时间维度上分别使用最多 64 个处理器进行了模拟，并记录每次模拟完成所需的计算时间。对于在给定并行化方向上使用多于一个处理器的模拟，其计算时间均以该方向上使用单个处理器时的计算时间为基准进行了归一化。所得加速比图如图 3 所示，其中实线表示归一化加速比，虚线表示理想线性加速比。

图 3(a)展示了 PFASST-BISICLES 的空间可扩展性。随着处理器数量增加，计算时间显著缩短；但处理器数量超过约 16 个后，计算时间的缩短速度放缓，甚至开始略微

增加。这表明，对于这一特定问题，PFASST-BISICLES 的空间并行化已达到最高效率，也就是说，超过这一数量后再增加处理器并不能进一步缩短计算时间。

然而，如图 3(b) 和 (c) 所示，通过利用时间并行化，还可以进一步缩短计算时间。在时间维度中增加处理器数量后，计算时间几乎呈线性下降，直到时间处理器数量达到 16 个。超过这一点后，增加更多处理器仍会缩短计算时间，但收益率逐渐降低。这一趋势在所有空间并行化级别下均成立，表明 PFASST-BISICLES 在时间维度上具有良好的可扩展性；同时结合空间并行性与时间并行性，可显著提高计算效率并缩短求解时间。

3.2 MISMIP+

为评估 PFASST-BISICLES 在动态挑战性更高的环境中的表现，我们考察了 MISMIP+ （Asay-Davis 等，2016），这是一个用于评估海洋冰盖对冰架下融化响应的社区基准算例。其理想化几何结构表示一条汇入横向受限冰架的冰流，在定性上与西南极洲的派恩岛冰川相似。融化变化会改变冰架支撑作用并驱动接地线迁移，从而检验冰厚度和速度对随时间变化的强迫所产生的耦合演化。在此，我们比较了 BISICLES 和 PFASST-BISICLES 在覆盖 800×80 千米区域的均匀 1 千米网格上运行 50 年后的解。虽然完整的 MISMIP+ 协议将融化阶段延长至 100 年，随后再允许系统恢复，但我们选择考察 50 年后的解，因为此时处于动态活跃阶段的中期，能够在时间精度方面构成更具挑战性的测试。

图 4 显示，PFASST-BISICLES 重现了 MISMIP+ 问题的主要流动模式，例如接地线附近 x~ 400 千米处冰厚度快速变薄、中心区域集中的快速流动，以及随着接地线后退，接地冰向漂浮冰架的转变。以 BISICLES 为参考，整个区域的相对 L_2 差异约为 0.7%（厚度） h 和 6.1%（水平速度） u。最大差异出现在约 $x = 400$ 千米处的接地区附近，此处厚度和速度变化迅速。BISICLES 与 PFASST-BISICLES 之间的最大差异约为厚度 98 米和 u 速度 300 米/年。中心线剖面显示出相似的冰体几何形态（图 d），而 PFASST-BISICLES 在下游产生的最大速度略低。

图 5 展示了改变空间处理器和时间处理器数量后的计算性能。在使用一个时间处理器时，将空间处理器数量从两个增加到八个，可将运行时间从 54.7 小时缩短至 22.0 小时，加速比达到 2.5。时间并行化可进一步缩短运行时间。在使用四个空间处理器时，将时间处理器数量从一个增加到四个，可将运行时间从 33.8 小时缩短至 10.5 小时，对应的加速比为 3.2。在使用两个空间处理器时，将时间处理器配置从一个增加到八个，可将运行时间从 54.7 小时缩短至 12.1 小时，加速比为 4.5。这些比较表明，对时间维度进行并行化可以显著缩短该问题的求解时间，尽管其增益呈次线性增长。记录到的最短运行时间为 3.6 小时，此时使用了八个空间处理器和十六个时间处理器。该配置以及其他标记为“(p)”的点是在另一台机器上运行的。因此，涉及这些点的比较包含硬件影响，不能单纯解释为并行化程度提高所带来的增益。

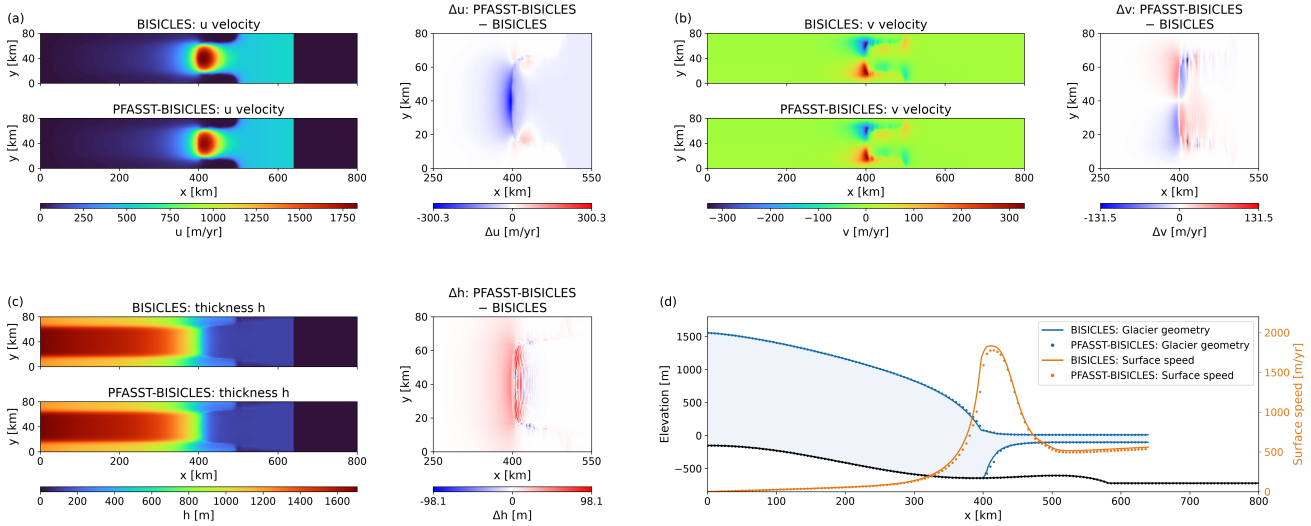

图 4. 网格间距为 1 km 时，MISMIP+ 在 50 年处的 BISICLES 和 PFASST-BISICLES 解。面板 (a)–(c) 分别显示沿流向速度 u、横向速度 v和厚度 h。每个面板均包含全域解及其差值（PFASST-BISICLES $-$ BISICLES），分辨率为 $x \in [250, 550]$ km。面板 (d) 显示区域中心线（$y = 40$ km）上的冰体几何形态和表面速度；实线表示 BISICLES，圆点表示 PFASST-BISICLES。

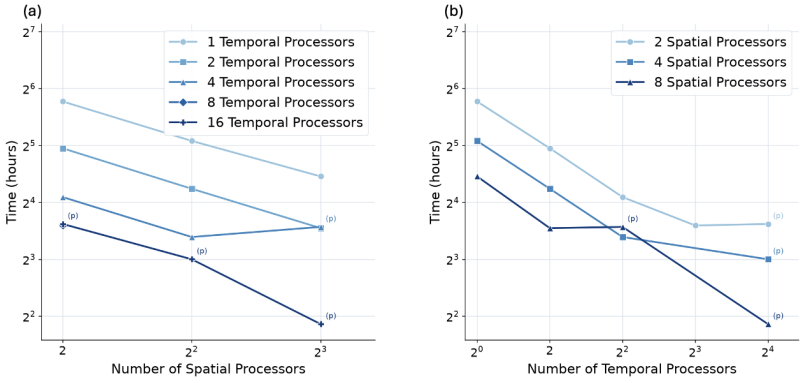

图 5. MISMIP+ 模拟中 BISICLES 和 PFASST-BISICLES 的墙钟运行时间。(a) 固定时间处理器数量时的空间扩展性。(b) 固定空间处理器数量时的时间扩展性。标记为“(p)”的数据点是在另一台机器上获得的。

3.3 讨论

这两个测试案例都评估了在 PFASST-BISICLES 中引入时间并行化所带来的计算精度和效率。来自 Cornford等人（2013）的完全接地的正弦形冰流，用于测试在不存在接地线迁移的 AMR 层级上的时间积分。
PFASST-BISICLES 产生的误差大约低于

在相同时间步长下采用前向欧拉法，而两种方法均表现出近似一阶收敛。尽管 PFASST 支持高阶积分（Emmett 和 Minion，2012 年），这些结果表明，即使在所测试的条件下采用形式上一阶的积分，误差幅度也有所降低。观察到的收敛速率促使我们进一步考察时间步长、迭代容差，以及厚度演化与速度更新之间的耦合。

MISMIP+ 扩展到具有强空间梯度和接地线动力学的海洋冰盖。与基准 BISICLES 实现相比，使用 PFASST-BISICLES 可以在经过 50 年的动态变薄后，重现整体冰川几何形态和流速。尽管在接地区附近的一致性较弱，但这可能表明 PFASST-BISICLES 方法具有前一示例中所展示的更高时间精度。因此，结果支持对大尺度流动模式和动态响应的重现，同时也表明需要进一步研究接地线轨迹的比较，以评估退缩历史的相对准确性。

可扩展性结果揭示了两个问题共同具有的一项实际优势。对于正弦流，空间扩展性在接近 16 个处理器时趋于平稳，而时间并行化则可进一步提升加速效果：使用大约 16 个时间处理器时，加速比仍近似线性增长。这种行为与早期的 PFASST 应用一致；这些应用扩展了粒子模拟和三维热方程的空间强扩展性（Speck 等人，2012年；Bader 等人，2014年）。MISMIP+ 中的运行时间缩短表明，即使在动态要求更高的情形下，时间并行化仍然有用，不过其效率增益略弱于简单的稳态正弦流情形。

MISMIP+ 案例的性能结果还区分了运行时间缩短与计算成本降低这两个概念。在使用四个空间处理器时，将时间分配从一个增加到四个，可获得约 3.2 的加速比，同时使用四倍数量的处理器。这相当于处理器小时数增加约 25%。虽然更快的模拟会带来额外的资源成本，但在现代多核架构上，这通常意味着能够更高效地利用可用的计算资源。

4 结论

本文将 PFASST 时间并行算法与 BISICLES 冰盖模型耦合，并在两个冰流示例上评估了所得方法。正弦流展示了 PFASST-BISICLES 与 AMR 层级的兼容性。在相同时间分辨率下，PFASST-BISICLES 的误差始终低于原始 BISICLES 模型，尽管其形式收敛阶在时间上仍为一阶。利用 MISMIP+ 基准测试，我们将评估扩展到海洋冰盖动力学。结果表明，尽管在接地区附近的吻合度稍弱，PFASST-BISICLES 仍能再现冰体几何形态和流动的大尺度动态响应。

这些实验都展示了利用时间并行性提高计算效率的实际价值。对于正弦流，在空间扩展性达到极限后，将工作分配到各个时间步上，可以通过增加处理器核心数量来缩短运行时间。MISMIP+ 实验还显示出显著的运行时间缩减效果：在固定空间分配下，使用四个时间处理器可实现3.2的加速比。因此，时间并行性为加速完全接地冰盖和海洋冰盖模拟提供了另一种途径。

这一PFASST-BISICLES示例展示了如何通过在空间和时间两个维度上分配工作，将时间并行性纳入冰盖建模，从而扩大并行计算的高效应用范围。这一能力对于冰盖预测具有重要意义，因为探索底部条件和气候强迫中的不确定性需要反复进行模拟；由于在较长的求解时间内采用顺序时间积分，每次模拟都可能成本高昂且耗时很长。通过缩短单次运行的周转时间，该方法能够支持更广泛的参数研究和更为详细的模拟，将并行时间积分方面的进展与冰盖预测的计算需求联系起来。

代码和数据可用性。 本研究的代码和示例可通过 NERSC 门户获取：https://portal.nersc.gov/cfs/m1411/ pfasst-bisicles

作者贡献。 WL 负责编码、运行示例并撰写了大部分文本。HSJ 就并行时间积分和 PFASST方案提供了建议。DFM 协助编码、编辑文本并提供支持。

利益冲突。 作者声明不存在任何利益冲突。

致谢。 本研究得到美国能源部（DOE）科学办公室生物与环境研究、先进科学计算研究项目资助的先进计算科学发现（SciDAC）计划支持，是ProSPect SciDAC合作伙伴关系的一部分。伯克利实验室的工作得到美国能源部科学办公室主任根据合同编号DE-AC02-05CH11231提供的支持。WL的部分工作得到施密特科学人工智能奖学金的支持。本研究使用了国家能源研究科学计算中心（NERSC）的资源。该中心是位于劳伦斯伯克利国家实验室、由美国能源部科学办公室运营的用户设施，根据合同编号DE-AC02-05CH11231运行，并使用NERSC奖项ASCR-ERCAPm1041。

参考文献

Asay-Davis, X. S.,Cornford, S. L., Durand, G.,Galton-Fenzi,B. K.,Gladstone, R.M.,Gudmundsson, G.H., Hattermann,T.,Holland, D.M., Holland, D., Holland, P. R., Martin, D. F., Mathiot, P., Pattyn, F., and Seroussi, H.：三个相互关联的海洋冰盖和海洋模型比较项目的实验设计：MISMIP v. 3（MISMIP+）、ISOMIP v. 2（ISOMIP+）和MISOMIP v. 1（MISOMIP1），《地球科学模型开发》，9，2471–2497，https://doi.org/10.5194/gmd-9-2471-2016，2016年。Bader, M. 等：三维热方程的时空并行求解器，《并行计算：加速计算科学与工程》（CSE），25，263，2014年。Brandt, A.：边值问题的多层自适应解，《计算数学》，31，333–390，1977年。Brown, P. N. and Saad, Y.：非线性方程组的混合克雷洛夫方法，《SIAM科学与统计计算杂志》，11，450–481，1990年。Colella, P. and Woodward, P. R.：用于气体动力学模拟的分段抛物线法（PPM），《计算物理学杂志》，54，174–201，https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0021-9991(84)90143-8，1984年。Cornford, S. L., Martin, D. F., Graves, D. T., Ranken, D. F., Le Brocq, A. M., Gladstone, R. M., Payne, A. J., Ng, E. G., and Lipscomb, W. H.：海洋冰盖的自适应网格有限体积建模，《计算物理学杂志》，232，529–549，2013年。Dutt, A., Greengard, L., and Rokhlin, V.：常微分方程的谱延迟校正方法，BIT Numerical Mathematics，40，241–266，2000年。Edwards, T. L., Nowicki, S., Marzeion, B., Hock, R., Goelzer, H., Seroussi, H., Jourdain, N. C., Slater, D. A., Turner, F. E., Smith, C. J., McKenna, C. M., Simon, E., Abe-Ouchi, A., Gregory, J. M., Larour, E., Lipscomb, W. H., Payne, A. J., Shepherd, A., Agosta, C., Alexander, P., Albrecht, T., Anderson, B., Asay-Davis, X., Aschwanden, A., Barthel, A., Bliss, A., Calov, R., Chambers, C., Champollion, N., Choi, Y., Cullather, R., Cuzzone, J., Dumas, C., Felikson, D., Fettweis, X., Fujita, K., Galton-Fenzi, B. K., Gladstone, R., Golledge, N. R., Greve, R., Hattermann, T., Hoffman, M. J., Humbert, A., Huss, M., Huybrechts, P., Immerzeel, W., Kleiner, T., Kraaijenbrink, P., Le clec'h, S., Lee, V., Leguy, G. R., Little, C. M., Lowry, D. P., Malles, J.-H., Martin, D. F., Maussion, F., Morlighem, M., O'Neill, J. F., Nias, I., Pattyn, F., Pelle, T., Price, S. F., Quiquet, A., Radi´c, V., Reese, R., Rounce, D. R., Rückamp, M., Sakai, A., Shafer, C., Schlegel, N.-J., Shannon, S., Smith, R. S., Straneo, F., Sun, S., Tarasov, L., Trusel, L. D., Van Breedam, J., van de Wal, R., van den Broeke, M., Winkelmann, R., Zekollari, H., Zhao, C., Zhang, T., and Zwinger, T.：预测的陆地冰对二十一世纪海平面上升的贡献，《自然》，593，74–82，https://doi.org/10.1038/s41586-021-03302-y，2021年。Emmett, M. and Minion, M.：面向偏微分方程的高效时间并行方法，《应用数学与计算科学通讯》，7，105–132，2012年。Falgout, R. D., Friedhoff, S., Kolev, T. V., MacLachlan, S. P., and Schroder, J. B.：结合多重网格的并行时间积分，《SIAM科学计算杂志》，36，C635–C661，https://doi.org/10.1137/130944230，2014年。Gander, M. J.：时间并行时间积分的50年历程，载于：《多重射击法与时间域分解方法》，Carraro, T., Geiger, M., Körkel, S. 和 Rannacher, R. 编，69–113页，施普林格国际出版公司，Cham，2015年。Knoll, D. A. and Keyes, D. E.：无雅可比牛顿–克雷洛夫方法：方法与应用综述，《计算物理学杂志》，193，357–397，2004年。Lions, J.-L., Maday, Y., and Turinici, G.：“parareal”偏微分方程时间离散化，《法国科学院院报》- I辑- 数学，332，661–668，https://doi.org/10.1016/S0764-4442(00)01793-6，2001年。Minion, M. L.：常微分方程的半隐式谱延迟校正方法，2003年。

Schoof, C. 和 Hindmarsh, R.：带壁面滑移的薄膜流动：高阶冰川流动模型的渐近分析，《季刊力学与应用数学》，63，73–114，2010年。Shalf, J.：超越摩尔定律的计算未来，《英国皇家学会哲学汇刊A辑：数学、物理与工程科学》，378，20190061，https://doi.org/10.1098/rsta.2019.0061，2020年。Speck, R.、Ruprecht, D.、Krause, R.、Emmett, M.、Minion, M.、Winkel, M. 和 Gibbon, P.：大规模时空并行N体求解器，载于：SC'12：国际高性能计算、网络、存储与分析会议论文集，第1–11页，IEEE，2012年。Speck, R.、Ruprecht, D.、Emmett, M.、Minion, M.、Bolten, M. 和 Krause, R.：多层谱延迟校正方法，《BIT数值数学》，55，843–867，2015年。Trottenberg, U.、Oosterlee, C. W. 和 Schuller, A.：多重网格，第5.3章，第155–159页，爱思唯尔，2000年。