良滤过余 sober 空间的收缩仍是余 sober

KiaKeng Giam淡马锡初级学院，新加坡通信作者：giamkiakeng@gmail.com

2026年9月20日；修订于2026年11月9日

arXiv:2611.28446v1 [math.GN] 21 Nov 2026

摘要

Xu 和 Zhao 提出，连续核算子的像是否继承余 sober 性，以及更一般地，收缩是否继承余 sober 性。最近，Xu 、 Xu 、 Ji 和 Qiu 对这两个问题均给出了否定答案。我们证明，只要环境空间还满足良滤过，这两个问题的答案均为肯定；特别地，这对每个 sober 的余 sober 空间都成立。因此，任何一个问题的反例（例如 Xu、Xu、Ji 和 Qiu 所构造的反例）的环境空间都必须是余 sober 而非良滤过的。我们给出一个核算子像的例子，它并非 Wen 和 Xu 继承结果的直接实例，并指出论证中用到良滤性的步骤。

关键词： 余 sober 空间；k-不可约集；良滤空间；收缩；核算子；紧饱和集；sober 空间。

*2020*年数学学科分类：54D99；54B30；54D30；06B35。

1 引言

谱性可谓非豪斯多夫拓扑空间最有用的单一性质，而 Hofmann–Mislove定理则通过空间的紧饱和集与其开集格的开滤子之间的序同构来刻画这一性质。为寻求该定理的对偶形式，Escardó、Lawson 和 Simpson [1, 定义 8。9] 引入了*k*-不可约 紧饱和集以及相应的余 *sober* 空间，并提出了每个 sober 空间是否都是余 sober 空间的问题 [1,问题 9。7]。Wen 和 Xu [6, 例 2。8] 对此给出了否定答案：赋予 Isbell的完备格下拓扑后，它是 sober 的，但不是余 sober 的。随后，Shen、Wu、Xi 和 Zhao [4]构造了一个定向完备偏序集，其 Scott 空间是 sober 的，但不是余 sober 的；Ji 和 Xu [3] 证明了完备布尔代数的 Scott 空间未必是余 sober 的。

在关于良滤过空间和 sober 空间的开放问题综述中，Xu 和 Zhao [11, §9] 列出了关于余 sober 性的六个问题。其中一些问题此后已得到解决。余 sober 空间的 Smyth 幂空间未必是余 sober 的 [8], ，从而对 [11, 问题 94] 给出了否定回答；余 sober 空间范畴在 T_0 空间范畴中并非反射的 [5], ，从而对 [11, 问题 99] 给出了否定回答；而我们在此考察的两个关于遗传性的问题，最近也已得到解答

Xu、Xu、Ji 和 Qiu [9]给出了否定回答：

问题 1 ([11, 问题 95]). 设 X 为余 sober 空间，且 $r\colon X \to X$ 是关于特化序的连续核算子。 $r(X)$是余 sober 空间吗?

问题 2 ([11, 问题 9.6])。 余 sober 空间的收缩是否也是余 sober?

若能对问题2 给出肯定答案，就能对问题1给出肯定答案。目前已知的结果归功于 Wen 和 Xu：余 sober 空间的饱和子空间和闭子空间都是余 sober 的 [6,定理 2。9], 连续闭包算子的像也如此[6], （表述为 [11, 定理 9。2]）。问题1 中核算子的情形恰好是上述最后一个结果的序对偶，而正是这个对偶结果难以成立，因为余 sober 性是通过紧饱和（因而向上闭）的

集合来定义的，而核算子会将点向下移动。事实上，Xu、Xu、Ji 和 Qiu [9, 定理 1。1]构造了一个可数无限的紧余 sober T_0 空间，该空间带有一个连续核算子，但其像并非余 sober，因此这两个问题在一般情况下的答案都是否定的。

我们的结果是，环境空间的良滤性可以恢复继承性质，即使对于更强的问题 2。

定理 3.1。 设 X 是一个余 *sober*、良滤的 T_0 空间，并设 $r\colon X \to X$ 是一个连续幂等映射。那么，收缩 $Y = r(X)$ 是余 *sober* 的。

由于每个 sober 空间都是良滤的，因此对于每个 sober 的余 sober 空间，这两个问题都有肯定答案（推论 4.1）；而任何反例的环境空间（例如 [9],中的空间）都必须是余 sober 但非良滤的（推论 4.5）。例 4.4给出了一个核算子像，它既非饱和、非闭集，也不是任何闭包算子的像，因此并非 [6]中继承结果的直接实例。备注 4.6 和 4.7 讨论了证明中这一假设的作用：论证的关键在于，紧饱和集的一个并素上集具有极小成员；我们还在一个余 sober 空间中说明，这样的上集未必具有极小成员。

关于记号的说明。 字母 k 已用于术语“k-不可约”，也用于 [11]中的核算子。为避免冲突，全文用 r 表示幂等元。

2 预备知识

所有空间都是 T_0。我们遵循 [11]中的约定。空间 X 的特化序为

$$x \le y \iff x \in \overline{\{y\}},$$

因此 $\overline{\{y\}} = {\downarrow}y$，开集都是上集，而一个子集是饱和的（即开邻域的交），当且仅当它是一个上集。我们用 $\mathcal{Q}(X)$表示 X的非空紧饱和子集全体，并用 ${\uparrow_X}, {\downarrow_X}$ 表示在 X中求得的上闭包和下闭包。子空间赋予子空间拓扑，且子空间的特化序是环境空间中特化序的限制。

定义 2.1 （Escardó–Lawson–Simpson [1, 定义 8.9]）。 设 $K \in \mathcal{Q}(X)$。若 $K_1, K_2 \in \mathcal{Q}(X)$蕴含 $K = K_1$ 或 $K = K_2$，则 K 是*k*-不可约的。若每个 k-不可约的 $K \in \mathcal{Q}(X)$都可表示为 $K = {\uparrow_X}a$，其中 $a \in X$（必然唯一），则空间 X 是余 *sober*的。

回顾一下， X 是良滤过 的，当且仅当对于每个滤族 $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{Q}(X)$和每个开集 U， $\bigcap \mathcal{K} \subseteq U$蕴含对于某个 $K \in \mathcal{K}$有 $K \subseteq U$；参见 [2, 第 8]章。每个 sober 空间都是良滤过的，反之则不成立。

满足 $r \circ r = r$的连续映射 $r\colon X \to X$是幂等的；其像 $Y = r(X) = \{x \in X : r(x) = x\}$ 恰好是 X的一个收缩。此外，若对所有 x都有 $r(x) \le x$，则 r 是特化序上的核算子；对偶地，若对所有 x都有 $x \le r(x)$，则 r 是闭包算子。对于核算子， $r(x) = \max({\downarrow_X}x \cap Y)$；对于闭包算子， $r(x) = \min({\uparrow_X}x \cap Y)$。

引理 2.2。 设 X 是一个空间。

(i) 每个连续映射关于特化序都是单调的。

(ii) 若 $C \subseteq X$ 是紧的，则 ${\uparrow_X}C$ 是紧饱和的。

(iii) 若 X 是 w *ell*-滤的，且 $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{Q}(X)$ 是一个非空滤族，则 $\bigcap \mathcal{K}$ 是紧饱和的 .

证明。 (i) 是标准结论。对于 (ii)：饱和性是显然的。若 $\{U_i\}$ 是 ${\uparrow_X}C$ 的一个开覆盖，则它覆盖 C，因此有限个 U_{i_1}，……，U_{i_n} 覆盖 C；由于它们是开集，故为上集，所以它们的并集包含 ${\uparrow_X}C$。对于 (iii)：上集的交仍是上集。给定 $\mathcal{V}$ 的一个开覆盖 $\bigcap \mathcal{K}$，令 $U = \bigcup \mathcal{V}$。于是 $\bigcap \mathcal{K} \subseteq U$，由良滤性可知，对于某个 $K \in \mathcal{K}$ 有 $K \subseteq U$；由于 K 是紧的， $\mathcal{V}$ 中有限多个成员覆盖 K，从而覆盖 $\bigcap \mathcal{K}$。 □

3 主要定理

定理 3.1。设 X 是一个余 *sober* 的良滤过 T_0 空间，且 $r\colon X \to X$ 是一个连续幂等映射。那么，收缩 $Y = r(X)$ 在子空间拓扑下是余 *sober* 的。

证明思路。取一个 k-不可约 $Q \in \mathcal{Q}(Y)$，并令 $K = \uparrow_X Q$ 为 X中 Q 的饱和。令 $\mathcal{Q}_K(X) = \{P \in \mathcal{Q}(X) : P \subseteq K\}$，按包含关系排序。它对二元并封闭，因此 $(\mathcal{Q}_K(X) \cup)$ 是一个以 K 为最大元的并半格。映射 $P \mapsto \uparrow_Y r(P)$ 将 $\mathcal{Q}_K(X)$ 的成员映到 Q 的紧饱和子集，并保持有限并。因此，这族

$$\mathcal{P} = \{\, P \in \mathcal{Q}_K(X) \;:\; \uparrow_Y r(P) = Q \,\}$$

仍能生成 Q 的那些 P 包含 K，是 $\mathcal{Q}_K(X)$ 的一个上集，并且是并素的，因为 Q 是 k-不可约的：

$$P_1 \cup P_2 \in \mathcal{P} \implies P_1 \in \mathcal{P} \text{ or } P_2 \in \mathcal{P} \qquad (P_1, P_2 \in \mathcal{Q}_K(X)).$$

（一般而言，它并非整个 $\mathcal{Q}(X)$ 的上集，因为较大的紧饱和集未必包含于 K。）良滤性使我们能够在 $\mathcal{P}$ 内缩小到一个极小成员 P_0；并素性与极小性共同使 P_0 成为 k-不可约的，因此 X 的余 sober 性给出 $P_0 = \uparrow_X a$；进而 $r(a)$ 必为 Q 的最小元。除了紧致性之外，唯一用到的拓扑性质是 $r^{-1}(\downarrow_X q)$ 为闭集，这使得可以应用良滤性。

证明。设 $Q \in \mathcal{Q}(Y)$ 是 k-不可约的。我们必须构造 $y \in Y$使得 $Q = \uparrow_Y y$。令

$$K := \uparrow_X Q.$$

由于 Q 在子空间 Y 中是紧的，因此它在 X中也是紧的，所以 $K \in \mathcal{Q}(X)$ 由引理 2.2(ii) 得出。

步骤 1：$r(K) = Q$。设 $x \in K$，例如 $x \geq q$ 使得 $q \in Q$。由引理 2.2(i)，$r(x) \geq r(q) = q$。此外，$r(x) \in Y$，且 Q 是 Y 的上集，因为它在 Y 中是饱和的；因此 $r(x) \in Q$。这便得到 $r(K) \subseteq Q$，并且 $Q = r(Q) \subseteq r(K)$，因为 r 逐点固定 Y。

步骤 2：映射 φ。记 $\mathcal{Q}_K(X) = \{P \in \mathcal{Q}(X) : P \subseteq K\}$ 并定义

$$\varphi\colon \mathcal{Q}_K(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(Y), \qquad \varphi(P) = \uparrow_Y r(P).$$

这是良定义的：$r(P)$ 是 Y的非空紧子集，所以 $\uparrow_Y r(P) \in \mathcal{Q}(Y)$ 由引理 2.2(ii) 在 Y中应用而得；并且 $r(P) \subseteq r(K) = Q$ 由步骤 1 得出，因此 $\varphi(P) \subseteq \uparrow_Y Q = Q$。此外，$\varphi$是单调的，并且

$$\varphi(P_1 \cup P_2) = \varphi(P_1) \cup \varphi(P_2), \tag{1}$$

因为 $r(P_1 \cup P_2) = r(P_1) \cup r(P_2)$，且 $\uparrow_Y$保持并。最后，由步骤 1 得 $\varphi(K) = \uparrow_Y Q = Q$。Se t

$$\mathcal{P} := \{P \in \mathcal{Q}_K(X) : \varphi(P) = Q\},$$

使得 $K \in \mathcal{P}$，特别是 $\mathcal{P} \neq \emptyset$。

步骤 3： $\mathcal{P}$ **对非空滤族的滤交封闭**。令 $\{P_j\}_{j \in J} \subseteq \mathcal{P}$ 为一个非空滤族，并设 $P_\infty = \bigcap_j P_j$。固定 $q \in Q$ 并令

$$C_q := r^{-1}\big(\downarrow_X q\big).$$

由于 $\downarrow_X q = \overline{\{q\}}$ 是闭集且 r 是连续的，C_q 是闭集。因为 $\varphi(P_j) = Q \ni q$，所以存在 $p \in P_j$使得 $r(p) \leq q$，也就是说，对于每个 j都有 $P_j \cap C_q \neq \emptyset$。如果有 $P_\infty \cap C_q = \emptyset$，那么 $P_\infty \subseteq X \setminus C_q$，对滤族 $\{P_j\}$ 和开集 $X \setminus C_q$ 应用良滤性，将得到某个 j 使得$P_j \subseteq X \setminus C_q$，这与 $P_j \cap C_q \neq \emptyset$矛盾。因此

$$P_\infty \cap C_q \neq \emptyset \qquad \text{for every } q \in Q. \tag{2}$$

特别地，$P_\infty \neq \emptyset$（这里我们使用了 $Q \neq \emptyset$），因此根据引理 2.2(iii)，$P_\infty \in \mathcal{Q}(X)$；显然，$P_\infty \subseteq K$。根据（2），对于每个 $q \in Q$，存在 $p \in P_\infty$ 使得 $r(p) \leq q$，即 $q \in \uparrow_Y r(P_\infty) = \varphi(P_\infty)$。因此，$Q \subseteq \varphi(P_\infty)$，而根据步骤 2，反向包含成立。所以 $P_\infty \in \mathcal{P}$。

步骤 4：一个极小成员。 在 $\mathcal{P}$ 上按 $\subseteq$排序。$\mathcal{P}$ 中的每个非空链都是一个非空滤族，因此根据步骤 3，它在 $\mathcal{P}$中有一个下界，即其交集；空链的下界为 K。根据佐恩引理，$\mathcal{P}$ 具有一个 $\subseteq$-极小元 P_0。

步骤 5： P_0**在 中是 k-不可约的。** 假设 $P_0 = P_1 \cup P_2$满足 P_1，$P_2 \in \mathcal{Q}(X)$。那么 $P_i \subseteq P_0 \subseteq K$，因此 $P_i \in \mathcal{Q}_K(X)$ 并且，根据（1），

$$Q = \varphi(P_0) = \varphi(P_1) \cup \varphi(P_2),$$

$\mathcal{Q}(Y)$中两个成员的并。由于 Q 是 k-不可约的，对于某个 i，有 $\varphi(P_i) = Q$；也就是说，$P_i \in \mathcal{P}$。由于 $P_i \subseteq P_0$，P_0 的极小性迫使 $P_i = P_0$。

步骤 6：结论。 X 是余 sober，且 $P_0 \in \mathcal{Q}(X)$ 是 k-不可约的，因此对于某个 $a \in X$，$P_0 = \uparrow_X a$；注意，$a \in P_0 \subseteq K$。如果 $x \geq a$，那么 $r(x) \geq r(a)$，所以 $r(\uparrow_X a) \subseteq \uparrow_Y r(a)$，从而

$$Q = \varphi(P_0) = \uparrow_Y r(\uparrow_X a) \subseteq \uparrow_Y r(a).$$

反过来，由步骤 1，$r(a) \in r(K) = Q$；而 Q 是 Y 的一个上集，因此 $\uparrow_Y r(a) \subseteq Q$。所以$Q = \uparrow_Y r(a)$，这正是我们要证明的。 □

4 推论

推论 4.1。 若 X 是余 *sober* 且良滤的，那么问题 *1* 和 *2* 对于X都有肯定的答案。特别地，*sober* 余 *sober* 空间的每个收缩都是余 *sober* 的。

证明。 连续核算子特别是连续幂等映射，因此定理3.1 适用；请注意，假设 $r(x) \leq x$ 从未用到。最后一句是因为每个 sober 空间都是良滤的。

□

注 4.2。 Xu 和 Zhao 证明了，良滤空间的每个收缩都是良滤的 [10,推论 3。3]。结合定理 3.1，这表明余 sober 良滤空间类在收缩下封闭。

注 4.3. 推论 4.1 所涵盖的类别并不小。设 L 是一个完备格，令 $\omega(L)$ 为由集合 $L \setminus \uparrow x$ 生成的下拓扑。那么 $(L, \omega(L))$ 是谱的：事实上，$\omega(L) = \nu(L^{\mathrm{op}})$，即对偶格的上拓扑，而 L^{op} 又是一个完备格，因此每个不可约子集都有上确界，且 [7, 命题 2.9] 适用； [4]中也记录了这一点。根据 [6, 推论 2.5]，$(L, \omega(L))$ 是余 sober 的，当且仅当 Scott 空间 ΣL 是谱的。因此，每个 Scott 拓扑为谱的完备格——例如，每个连续格——都会生成一个谱的余 sober 空间，因而可应用推论 4.1。下文例 4.4 展示了有限的谱余 sober 空间。

下一个例子给出了一个适用定理3.1的收缩，但它并非 [6] 第 1 节中提到的三个继承结果的直接实例。

例 4.4。设 $X = \{\bot, s, c, d\}$ 为具有 $\bot < s < c$ 和 $s < d$ 的偏序集（因此 c 和 d 不可比较），并赋予 Alexandroff 拓扑，其开集为上集。每个有限T_0 空间都是谱空间，因而是良滤过的：不可约闭集 A 等于闭集的有限并 $\bigcup_{a \in A} \downarrow a$，因此不可约性迫使某个 a 满足 $A = \downarrow a$。对偶地，每个有限 T_0 空间都是余 sober 的：紧饱和 K 等于 $\mathcal{Q}(X)$ 中成员的有限交$\bigcup_{m \in}$，因此 k-不可约性迫使某个 m 满足 $K = \uparrow m$。因此，X 满足定理 3.1 的假设。

令 $Y = \{\bot, c, d\}$，并定义 $r\colon X \to X$，使得 $r(\bot) = r(s) = \bot$，$r(c) = c$，$r(d) = d$。于是 r 是单调的，因而在 Alexandroff 拓扑下连续；它是幂等的；并且对所有 x，$r(x) \leq x$，所以 r 是连续核算子，且 $r(X) = Y$。现在：

- Y不是饱和的：$\bot \in Y$和 $\bot < s$，但 $s \notin Y$。

- Y不是闭集： $c \in Y$和 $s < c$，但 $s \notin Y$。
- Y 不是任何闭包算子的像，其定义在 X上：这样的算子必须将 s 映射到 $\uparrow_X s \cap Y = \{c, d\}$的最小元，而这个集合没有最小元。

因此，第 1 节中提到的三个继承结果都不适用于 Y，而定理3.1适用。（直接验证可知， Y，即偏序集 $\perp < c$， $\perp < d$ 配上 Alexandroff 拓扑后，确实是余 sober。）无限例子也可以用同样的方法构造；取 X 为有限集，是为了使每个假设都能通过检视来验证。

推论 4.5。 设 X 是一个余 *sober* 空间，且有一个并非余 *sober* 的收缩。那么 X 不是良滤过的。特别地，定理 *1.1],* 中那个具有连续核算子、且其像并非余 *sober* 的 *[9,* 余 *sober* 空间，不是良滤过的。

证明。这是定理3.1的逆否命题。 □

注 4.6（假设并非多余）。余 sober 性并不蕴含良滤性。对于一个集合 M及其上的拓扑 τ 和 $U \in \tau$，令 δ_U 为由 M上的余有限拓扑与 U共同生成的拓扑。则 $\mathcal{Q}((M, \delta_U)) = 2^M \setminus \{\emptyset\}$，空间 (M, δ_U) 是余 sober 的，并且当且仅当 M 是有限集时才是良滤过的 [8, 引理 4.。因此，推论 4.5 并非毫无意义地排除所有情况；事实上， [9] 的余 sober 空间不是良滤过的，并且有一个非余 sober 的收缩。

注 4.7（究竟哪里出了问题）。证明只在步骤 6 用到余 sober 性，只在步骤 3 用到良滤性。步骤 3 的作用是确保半格 $(\mathcal{Q}_K(X) \cup)$ 的并素上集 $\mathcal{P}$ 有一个极小成员。没有良滤性时，紧饱和集的并素上集未必有极小成员：在 (M, δ_U) 中，当 M 为无限集时， $\mathcal{Q}((M, \delta_U))$ 是 M 的所有非空子集构成的半格，而 $\{A \subseteq M : A$ 无限$\}$ 是一个没有极小元的并素上集。这个族只是用来说明极小性问题；并未证明它能像定理 3.1 的证明那样由一个收缩和一个 k-不可约集产生。问题 1 和 2 的一个实际反例见 [9], ；每个反例都必须恰好利用这一现象：根据步骤 5 和 6（这两步不使用良滤性），附属于一个不具有 $\uparrow_Y y$ 这种形式的 k-不可约集的族 $\mathcal{P}$ 不可能有极小成员。

注记 4.8。 这些空间 (M, δ_U) 本身并不是反例：它们是 T_1，因此其专门化序是离散的，且除恒等算子外不接受任何核算子；并且，任意 $N \subseteq M$ 上诱导的子空间仍具有 $\delta_{U \cap N}$的形式，故为余 sober。

5 两点进一步观察

以下结论独立于定理 3.1，但它解释了为何非主 k-不可约紧饱和集不可能向下有向，从而进一步限制了问题1 和2的反例，例如 [9]中的反例。

引理 5.1。 设 X 为 T_0，且 $Q \in \mathcal{Q}(X)$ 向下有向。那么 Q 有一个最小元 q_0，且 $Q = \uparrow_X q_0$。

证明。 假设 Q没有最小元。给定 $q \in Q$，选取 $p \in Q$ 使得 $p \not\geq q$，然后根据有向性，选取 $t_q \in Q$ 使得 $t_q \leq q$ 且 $t_q \leq p$。若 $t_q = q$，则 $q \leq p$，矛盾；故 $t_q < q$。由于 X是 T_0，且 $t_q \leq q$ 满足 $t_q \neq q$，因此存在一个开 U_q，使得 $q \in U_q$ 且 $t_q \notin U_q$。现在 $\{U_q\}_{q \in Q}$ 覆盖 Q，所以存在某个 $q_1, \ldots, q_n$，使得 $Q \subseteq U_{q_1} \cup \cdots \cup U_{q_n}$，其中 $n \geq 1$是因为 $Q \neq \emptyset$。选取一个小于每个t_{q_i}的 $t \in Q$。每个 U_{q_i} 都是一个不包含 $t_{q_i} \geq t$的上集，因此也不包含 t。因此 $t \in Q$ 未被覆盖，矛盾。最后， Q 是一个包含其最小元 q_0的上集，所以 $Q = \uparrow_X q_0$。

□

推论 5.2. 每个特化序全序的 T_0 空间都是余 *sober*，因此这类空间的每个子空间也都是如此。

证明。 在全序中，每个非空子集都是向下有向的，因此引理 5.1 适用。子空间的特化序是环境空间特化序的限制，因此仍然是全序。 □

致谢

作者感谢匿名审稿人认真审阅稿件，并提出宝贵意见，帮助改进了本文；尤其感谢其指出了论文[10]以及预印本[9]。

CRediT 作者贡献声明

Kia Keng Giam：概念构思、形式分析、调查研究、撰写初稿、审阅与编辑。

资金支持

本研究未获得来自公共、商业或非营利部门资助机构的任何专项资助。

利益冲突声明

作者声明，其不存在已知的可能影响本文所报告工作的竞争性经济利益或个人关系。

数据可用性

本文所述研究未使用任何数据。

关于在稿件准备过程中使用生成式 AI 和 AI 辅助技术的声明

在准备本次修订稿期间，作者使用了 AI 助手 Claude（Anthropic），以检查论证和参考文献，并根据审稿人的报告起草修改内容。使用该工具后，作者根据需要审阅并编辑了内容，并对已发表文章的内容承担全部责任。

参考文献

[1] M. Escardó, J. Lawson, A. Simpson, 《（核）紧生成空间的笛卡尔闭范畴比较》，Topology Appl.**143** (2004) 105–145。[2] J. Goubault-Larrecq, 《非豪斯多夫拓扑与域理论》，New Mathematical Mono- graphs 22，剑桥大学出版社，2013。[3]W. Ji, X. Xu, 《完备布尔代数的 Scott 空间未必是余 sober 的》，预印本，arXiv:2608.08484。[4] C. Shen, G. Wu, X. Xi, D. Zhao, 《谱 Scott 空间并不总是余 sober 的》，Topology Appl.**282**(2020) 107316。[5] C. Shen, X. Xi, D. Zhao, 《某些范畴的反射性》 T_0 域理论中的空间，Rocky Mountain J. Math. **54** (2024)，第 4 期，1149–1166。[6] X. Wen, X. Xu, 《谱空间并不总是余 sober 的》，Topology Appl. **250** (2018) 48–52。[7] X. Xu, C. Shen, X. Xi, D.Zhao, 《关于由良滤空间决定的》 T_0 空间，Topology Appl.**282** (2020) 107323。[8] X. Xu, F. Xu, H. Ji, D. Qiu, 《余 sober 空间的 Smyth 幂空间并不总是余 sober 的》，预印本，arXiv:2608.02047。

[9] X. Xu, F. Xu, H. Ji, D. Qiu, 《余 sober 空间的核回缩》，预印本，arXiv:2611.01531。

[10] X. Xu, D.Zhao, 关于拓扑 *Rudin* 引理、良滤空间和 *sober* 空间，Topology Appl.**272**（2020）107080。[11] X. Xu, D.Zhao, 关于良滤空间和 *sober* 空间的开放问题，Topology Appl.**301**（2021）107540。