arXiv:2611.28449v1 [math.DG] 21 Nov 2026

关于 P-群作用与指标整除性

KYLE GETTIG

摘要。我们证明了一个模-p 整除性结果：假设有限 p-群在维数为 $n \leq 2(p-1)$ 的基流形上光滑作用，且没有驻点，并且该作用等变地提升到算子丛上，则椭圆算子的指标满足此结果。

我们证明了一个推论：如果这类流形是自旋流形或稳定几乎复流形，且群作用提升到相应的结构上，那么它们在相关配边理论模p 中的类完全由一个属决定；事实上，当 $n < 2(p-1)$ 时该类为零。

我们证明了另一个推论：不存在满足 $\hat{A}(M) = 1$，$\hat{A}(M; T_{\mathbb{C}}M) = 0$ 的闭连通 24 维自旋流形 M，其上还存在怪兽群的光滑非平凡作用。这解决了 Hirzebruch 提出的问题。

1 引言与结果陈述

给定一个群 G，哪些流形受到 G 的非平凡作用，是拓扑学中的一个核心结构性问题。对特定群 G （例如阿贝尔群、某阶有限群、单群或半单群等）的假设、流形上的额外结构（例如某种 H-结构），以及作用的具体性质（例如光滑、有效、哈密顿、保持上述流形结构等）常常结合起来，以便证明此类作用存在的障碍，通常以数值不变量的形式出现。作为一个经典例子，Poincaré-Hopf 定理表明，欧拉示性数是闭流形上 S^1 的自由作用的一个障碍。随着 20 世纪后半叶 Atiyah-Singer 等等变指标理论的发展，类似结果大量涌现 [6, 5, 7, 19]。

我们的主要定理属于这一范畴：

定理 3.1。设 p 为奇素数，P 为有限 p群，并设 M 为一个维数为 n 的闭流形，P 在其上光滑地作用且没有驻点。设 D 为 M上的一个 P-等变椭圆算子。

(a) 如果 $n < 2(p-1)$，则 $\mathrm{ind}(D) \equiv 0$ (模 p)。*(b)* 如果 $n = 2(p-1)$ 且 M 是连通的，则对于每个其上 $P \to \mathrm{Diff}(M)$ 的核平凡作用的 P-等变向量丛 W，有 $\mathrm{ind}(D \otimes W) \equiv \mathrm{rk}(W)\,\mathrm{ind}(D)$ (模 p)。

因此，对于其类已知由特征数决定的自旋配边和复配边，我们得到以下配边层面的推论。

推论 4.1。设 P 是一个 p-群，对于奇数 p，其光滑地作用于一个闭自旋（分别为稳定几乎复）流形 M 上，该流形的实维数为 $n = 2m$ 且没有驻点。在复数情形下，假设 P 保持稳定几乎复结构。

(a) 如果 $m < p-1$，则配边类 $[M]$ 可被 p 整除于自旋（分别地，复）配边中。*(b)* 如果在复数情形中 $m = p-1$，则在复配边中 $[M] \equiv \mathrm{Td}(M)[\mathbb{C}P^{p-1}]$ (模 p)。*(c)* 如果在自旋情形中 $m = p-1$，则在自旋配边中 $[M] \equiv 2^{-1}\hat{A}(M)[V_p]$ (模 p)，其中 V_p是 $\mathbb{C}P^p$中次数为 $2p$ 的光滑超曲面。

2020 数学主题分类。主要分类 57S17；次要分类 58J20、55N22、20D08、11F22。1

这些结果共同构成了 Haution 结果中情形 (iii) 的光滑推广 [15], , Haution 的结果仅考虑射影簇及其代数不变量。Haution 的结果建立在 tom Dieck 的早期工作之上 [10], , 后者在复配边中针对阿贝尔 P产生了相应的结果。作为一个几乎直接的推论，我们得到关于自旋流形的以下结果。

推论 4.2. 设 P 是一个奇数阶 p 群，它在一个维数为 $2m$ 的闭连通自旋流形 M 上光滑作用，且没有驻点。

ˆ*(a)* 若 $m < p-1$，则对于每个 P-等变复向量丛 W， $A(M;\ W) \equiv 0$*(*模 p*)*。ˆˆ*(b)* 若 $m = p-1$，则对于每个 P-等变复向量丛 W，只要 $P \to$*Diff(*M*)* 的核平凡作用于其上，就有 $A(M;\ W) \equiv$*rk(*W*)*$A(M)$ *(*模 p*)*。特别地，*sign(*M*)* $\equiv A(M)$ *(*模 p*)*。

作为一项具体应用，这意味着对 Hirzebruch 提出的问题给出了否定答案。

ˆ**推论 4.4.** 不存在闭、连通的24维自旋流形 M ，使其满足 $A(M) = 1$ 且ˆ$A(M; T_{\mathbb{C}}M) = 0$，并能受到怪兽群的非平凡光滑作用。

这个问题源于所谓的“怪兽月光”：20世纪70年代末，人们观察到模形式理论（尤其是 j 函数）与（当时仍是假设存在的）怪兽群 [9] 的表示之间存在若干数值上的“巧合”。Frenkel、Lepowsky 和 Meurman 于 80 年代末发现了“月光模”，从而阐明了二者之间的大部分联系：这是一个顶点算子代数，怪兽群以自同构群 [12] 的形式作用于其上。

不久之后，Hirzebruch 提出了他的“悬赏问题”：是否存在一个 24 维自旋流形 ˆˆM，使得 $p_1(M) = 0$、 $A(M) = 1$，且 $A(M;\ T_{\mathbb{C}}M) = 0$，并且怪兽群通过微分同胚[16, p.87]作用于其上？ 首先，这样的流形的 Witten 属将是 $(j - 744)\Delta$，其中 Δ 是模判别式；这将通过等变扭曲 Dirac 指标，在 j 与怪兽群的表示之间建立直接联系。其次，从物理角度来看，以 M 为靶空间的非线性 σ模型，理论上可以产生一种共形场论，其手征代数恰好是月光模，从而为后者的起源提供一种颇具吸引力的微分几何动机（例如参见 [13]）。

Hopkins 和 Mahowald 于 2002年运用同伦论的技巧证明了，不存在具有怪兽群作用的此类流形 [18]。我们的推论表明，不存在具有非平凡光滑Monster作用的此类流形，从而对 Hirzebruch问题给出了否定答案。

本文结构如下：我们首先陈述并证明主要定理所需的两个引理。然后陈述并证明主要定理。接着，我们陈述并证明若干主要定理的推论，这些推论已在引言中介绍。

本文的撰写过程中使用了 Claude Opus 5.5。所有文字均由作者本人撰写，且作者在使用该工具时已尽到一切应有的审慎义务。

2 两个引理

在下文中，设 p 为一个奇素数， C_p 为阶为 p的循环群，且 $\zeta = e^{2\pi i/p}$。

引理 2.1. 设 $D : E \to F$ 是定义在流形 M上的椭圆算子。假设 C_p 在 M上光滑地作用，且该作用可提升到 E 和 F，使其与 D交换。那么，对于任意非恒等的 $g \in C_p$， *Lefschetz*数$L_g(D)$ 属于 $\mathbb{Z}[\zeta]$，并且

$$\operatorname{ind}(D) \equiv L_g(D) \pmod{(1-\zeta)}.$$

证明. 这是因为 g 的所有特征值都具有 $\zeta^k \equiv 1 \pmod{(1-\zeta)}$ 的形式，因此在模 $(1-\zeta)$ 下取迹时，迹就变成了维数。□

令 $g \in C_p$ 作用于一个 n维闭流形 M，并令 D 为 M上的 C_p等变椭圆算子，其符号为 $\sigma(D) \in K_{C_p}(TM)$。令 F为不动点集 M^g的一个维数为 $2d_F$ 的连通分支（我们允许 d_F 为半整数），并令 F 的法丛 N 的复维数为 r_F，从而 $d_F + r_F = n/2$。g 在 N 上的作用使我们能够分解 $N \cong \oplus_m N_m$，其中每个 N_m 都是一个复向量丛，且 g 在其上按乘以 ζ^m的方式作用。

其中一种 Atiyah-Segal 不动点公式的形式 [4] 是 $L_g(D) = \sum_F c_F$，其中

$$c_F = \operatorname{ind}\left(\frac{i_F^*\sigma(D)(g)}{\lambda_{-1}(N_{\mathbb{C}})(g)}\right). \tag{1}$$

根据等变 K 理论的 Thom 同构（见 [3]），$i_F^*\sigma(D) = \tau_F \cdot \lambda_{-1}(N)$ 对于唯一的$\tau_F \in K_{C_p}(TF)$。由于 $N_{\mathbb{C}} \cong N \oplus N$，在 $\lambda_{-1}(N)$ 中的1约去后得到

$$c_F = \operatorname{ind}(\tau_F(g) \cdot E_F^{-1}), \tag{2}$$

其中，$E_F = \lambda_{-1}(N^*)(g)$是等变 K 理论欧拉类。

若陈特征 ch(V)仅包含上同调次数不低于 $2j$的项，我们就称 $V \in K(F)\otimes\mathbb{Q}$ 的次数至少为 j。由于 g在 TF上平凡作用，τ_F按特征值分解为 $\tau_F(g) = \sum_k \zeta^k \tau_{F,\,k}$。每个$\tau_{F,\,k}$都属于 $K(TF)$，因此是某个椭圆算子 $D_{F,\,k}$的符号；该算子由 D 在 F上诱导而来。

引理 2.2。对于 M^g的每个分支 F，存在类 V_0、$\cdots$、$V_{\lfloor d_F \rfloor}$，它们属于 $K(F) \otimes \mathbb{Z}[\zeta]$，由 N_m 的外幂构造而成，且与 D 无关，并且 V_j 的次数至少为 j，使得

$$c_F = \sum_k \sum_{j=0}^{\lfloor d_F \rfloor} \zeta^k (1-\zeta)^{-(r_F+j)} \operatorname{ind}(D_{F,k} \otimes V_j).$$

证明。这可直接由公式（2）关于 c_F 以及展开式

$$E_F = \lambda_{-1}(N^*)(g) = \prod_m \sum_k (-\zeta^{-m})^k \Lambda^k N_m^*.$$

固定一个 m，并令 r_m =rk$_{\mathbb{C}} N_m$。直接计算可得

$$\lambda_{-1}(N_m^*)(g) = (1-\zeta^{-m})^{r_m}(1+X_m),$$

其中

$$X_m = \sum_{j\geq 1} (1-\zeta^m)^{-j} \gamma^j (N_m^* - r_m). \tag{3}$$

这里，γ^j是第 j 个 γ-运算；我们可以将 $N_m^* - r_m$ 分解为复线丛 L_i 的和 $\oplus_i(L_i - 1)$，在这种情况下，$\gamma^j(N_m^* - r_m)$ 是 $L_i - 1$ 的第 j 个初等对称函数。特别地，$\gamma^j(N_m^* - r_m)$ 的次数至少为 j。

由于 X_m 的秩为 0，它是幂零元，因此 $1 + X_m$ 在 K 理论中可逆；于是我们可以表示为

$$\begin{aligned} E_F^{-1} &= \prod_m \lambda_{-1}(N_m^*)(g)^{-1} \\ &= \prod_m (1-\zeta^{-m})^{-r_m}(1+X_m)^{-1}. \end{aligned} \tag{4}$$

我们将此乘积与 (3) 一起展开，并对每个固定的 j，将含有以下项的项合并$\gamma^{a_1}\cdots\gamma^{a_l}$（对应于 $a_1 + \cdots + a_l = j$），提取所有可能的 $(1-\zeta)^{-1}$因子，并将所得结果作为我们的 V_j。

最后，我们统计有多少个这样的因子 $(1-\zeta)^{-1}$ 会与每个 V_j紧密关联。每一项（4）中的复系数都属于 $(1-\zeta)^{-r_m}\mathbb{Z}[\zeta]$，因此我们可以免费得到 $(1-\zeta)^{-r_F}$，且与 j无关。

我们还得到 $(1-\zeta)^{-j}$ 与每个 γ^j 项相关联；合起来便得到引理中的 $(1-\zeta)^{-(r_F+j)}$ 因子。 □

3 主要定理

定理 3.1。令 p 为奇素数，P 为有限 p-群，并令 M 为一个维数为 n 的闭流形，P 在其上无驻点地光滑作用。令 D 为 M 上的一个 P-等变椭圆算子。

(a) 如果 $n < 2(p-1)$，则 $\operatorname{ind}(D) \equiv 0$（模 p）。*(b)* 如果 $n = 2(p-1)$ 且 M 连通，则对于 M 上的每个 P-等变向量丛 W，都有 $\operatorname{ind}(D \otimes W) \equiv \operatorname{rk}(W)\operatorname{ind}(D)$（模 p），其中 $P \to \operatorname{Diff}(M)$ 的核平凡作用。

我们对部分 (b) 中的 W 作两点简要说明。首先，对于任何由切丛 TM 自然构造的 W（即张量幂、对称幂、外幂，以及它们的和与差），关于 W 的条件都立即得到满足。其次，一旦部分 (b) 成立，它也立即推广到 P-等变虚 K-理论丛。

证明。令 $O = \mathbb{Z}_{(p)}[\zeta]$为环 $\mathbb{Z}[\zeta]$，其中除 p 外的所有素数都已求逆。它有唯一的极大理想 $\mathfrak{p} = (1-\zeta)$，以及一个 p-进赋值 v，我们将其重新规范化为 $v(1-\zeta) = 1$，使得 $v(p) = p-1$。标准代数理论表明

$$\mathfrak{p} = \{x \in O \mid v(x) > 0\}.$$

我们要利用的关键事实是 $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$，因此 O 中赋值为正的任何整数必然能被 p整除。

(a) 我们对数对 $(|P|, n)$ 进行归纳，按字典序排列。P平凡的情形由无驻点假设直接得出。我们可以假设 M 是连通的，因为 M 中处于 P同一轨道的各连通分支对算子指标的贡献相同，这是由等变性保证的；而此类轨道的大小要么为 1，要么是 p的某个倍数。

令 $z \in P$ 为一个阶为 p的中心元素。我们分情况讨论：z 在 M上的作用非平凡，以及 z 的作用平凡。

首先，假设 z 的作用非平凡。由引理 2.1，$\operatorname{ind}(D) \equiv L_z(D) = \sum_F c_F$ (模 $\mathfrak{p}$)，对不动分支 F 求和 M^z。由于 z 是中心的，整个群 P 会置换这些分支 F，且由自然性可得 $c_{gF} = c_F$对 $g \in P$成立。由引理 2.2，$v(c_F) \geq -\lfloor n/2 \rfloor$。

- 若 F 被 P移动，则轨道大小是 p的倍数，因此该轨道对 $L_z(D)$ 项的贡献，其赋值总和不小于 $p-1-\lfloor n/2 \rfloor > 0$。
- 若 F 在 P下不变，则对维数归纳可知，引理 2.2 求和表达式中的所有指标均被 p 整除（P-限制算子的完全等变性是归纳所必需的，它由 z的中心性推出）。因此，求和得到 c_F 的各项赋值均不小于 $p-1-\lfloor n/2 \rfloor > 0$，所以 c_F本身也满足这一点。

因此 $L_z(D)$ 是若干具有正赋值的项之和，这意味着 $L_z(D) \in \mathfrak{p}$，因此根据引理 2.1，$\operatorname{ind}(D) \equiv 0$(模 p)。

接下来，假设 z对 M的作用是平凡的。根据 D是 P-等变的假设，z 的作用按特征值 $D = \oplus_k D_k$ 分解，其中每个 D_k 都是椭圆的，因此 z 在等变指标 $\operatorname{ind}_P(D_k)$ 上的作用为标量 ζ^k。我们进一步分为三种情况。

- 若 $k = 0$，使得 z 的作用完全平凡，则所有作用都下降为 $P/\langle z \rangle$ 的作用，且保持等变性。由于 z 已经固定了所有对象，$P/\langle z \rangle$ 作用没有驻点。对 p-群的阶作归纳可得，$\operatorname{ind}(D_0) \equiv 0$ (模 p)。
- 如果 $k \neq 0$和 z属于换位子群 $[P,P]$，那么所有一维表示在 z的作用下均保持不变，这意味着根据假设 z 以 ζ^k的方式作用，不可约表示中不会出现一维表示 $\operatorname{ind}_P(D_k)$。所有其他不可约表示的维数都是 p的正整数次幂，因此 $\operatorname{ind}(D_k) \equiv 0$(模 p)。

- 如果 $k \neq 0$ 和 z 不属于换位子群 $[P,P]$，那么存在某个 P 的一维特征标 χ，使得 $\chi(z) = \zeta^{-k}$。扭曲算子 $D_k \otimes \chi$ 是 P-等变的，且其指标与 D_k 相同，但它在 z 的作用下权重为 0，因此适用第一种情况，得到 $\mathrm{ind}(D_k) \equiv 0$(模 p)。

因此，对 k 求和可得 $\mathrm{ind}(D) \equiv 0 \pmod{p}$，正如所需。

(b) 我们对 $|P|$ 作归纳。此证明的整体结构大致仿照 (a) 部分的证明；与该部分一样，我们固定中心中一个阶为 p 的元素 $z \in P$。令 $R = \mathrm{rk}(W)$。与 (a) 部分不同，对 P 在 W 上的作用施加的核条件阻止了将问题化归到连通情形，因此我们先验地假设 M 是连通的。

z 若 M 在 z 上平凡作用，这种情形几乎是 (a) 部分相应情形的直接重述，因此我们先从这里开始，叙述略为简洁。根据假设，z 在 W 上也平凡作用；由等变性，我们可以再次按 z 的作用的特征值分解 $D = \oplus_k D_k$。

- 如果 $k = 0$，$P/\langle z\rangle$ 在所有相关对象上作用时均无驻点，并且 $P/\langle z\rangle \to \mathrm{Diff}(M)$ 的核仍然平凡作用。因此，按群的阶归纳可得 $\mathrm{ind}(D_0 \otimes W) \equiv R\,\mathrm{ind}(D_0) \pmod{p}$。

- 如果 $k \neq 0$ 且 $z \in [P,P]$，那么完全类似于情形 (a)，有 $\mathrm{ind}(D_k \otimes W) \equiv \mathrm{ind}(D_k) \equiv 0$(模 p)。

- 如果 $k \neq 0$ 且 $z \notin [P,P]$，那么我们仍然可以用一个满足 $\chi(z) = \zeta^{-k}$ 的特征标 χ 对 D_k 进行扭曲，并回到已证明的 $k = 0$ 情形。

因此，对 k 求和得到所需的 $\mathrm{ind}(D \otimes W) \equiv R\,\mathrm{ind}(D)$（模 p）。

现在设 z 在 M 上非平凡作用。我们无法逐字重复 (a) 部分中相应论证的原因，恰好出现在 $j = d_F$ 在 c_F 的引理 2.2求和公式中的项；此处 $1-\zeta)^{-1}$的因子多了一个，因此我们无法再保证赋值为正。若令 $c_F(W)$ 表示与不动点分支 F 在 M^z 及算子 $D \otimes W$ 相对应的项，并类似地令 $c_F(1)$ 表示与算子 D 相对应的同一项，那么我们需要额外的因子 $1-\zeta$ 出现在引理 2.2 对

$$c_F(W) - R c_F(1).$$

这正是我们需要用到 V_{d_F} 的次数至少为 d_F 这一事实的地方。我们所关注的 $c_F(W) - R c_F(1)$ 的相关部分是

$$\sum_k \zeta^k \left(\sum_m \zeta^m \mathrm{ind}(D_{F,k} \otimes (W|_F)_m \otimes V_{d_F}) - R\,\mathrm{ind}(D_{F,k} \otimes V_{d_F}) \right),$$

其中 $W|_F = \oplus_m (W|_F)_m$ 按照 z 的特征值分解。由于 $\mathrm{ch}(V_{d_F})$ 的上同调次数达到 F 的维数，根据 Atiyah-Singer，

$$\mathrm{ind}(D_{F,k} \otimes (W|_F)_m \otimes V_{d_F}) = \mathrm{rk}((W|_F)_m)\mathrm{ind}(D_{F,k} \otimes V_{d_F}).$$

因此，上述求和变为

$$\left(\sum_k \zeta^k \mathrm{ind}(D_{F,k} \otimes V_{d_F}) \right) \left(\sum_m \zeta^m \mathrm{rk}((W|_F)_m) - R \right).$$

第二个因子为我们提供了在 $j = d_F$ 处所需的额外因子 $1-\zeta$。有了这个额外因子，(a) 部分的赋值论证便可进行。□

4 推论

推论 4.1. 设 P 是一个奇数 p 的 p 群，它在一个没有驻点、实维数为 $2m$ 的闭自旋（分别为稳定几乎复）流形 M 上光滑地作用。在自旋情形下，假设 M 是连通的；在复数情形下，假设 P 保持稳定几乎复结构。

(a) 若 $m < p-1$，则配边类 $[M]$ 可被 p 整除（分别在自旋配边和复配边中）。*(b)* 若在复数情形下有 $m = p-1$，则在复配边中有 $[M] \equiv \mathrm{Td}(M)[\mathbb{C}P^{p-1}]$(模 p)。*(c)* 若在自旋情形下有 $m = p-1$，则在自旋配边中有 $[M] \equiv 2^{-1}\hat{A}(M)[V_p]$(模 p)，其中 V_p是 $\mathbb{C}P^p$中次数为 $2p$ 的光滑超曲面。

证明。 注意，在 (c) 中 V_p 是单连通的，因此具有唯一的自旋结构。通过考虑连通分支，我们假设 M 是连通的。我们可以对这三个部分给出统一的证明。首先，假设某个配边类的所有 KO 理论（分别为 K 理论）特征数模 p均为零。那么相关有理配边环中的有理类 $\frac{1}{p}[M]$的特征数也满足 Stong 示性数关系 [20, 21] (另见[14])。在复数情形下，这立即意味着 $\frac{1}{p}[M]$对应于 Ω^U_{2m}中的某个类。在自旋情形下，这只能保证它对应于$\Omega^{\mathrm{Spin}}_{2m}$/Torsion 中的某个类；此时我们还需要用到自旋配边中的扭结是2-初等的这一事实 [1], ，因此任何额外的扭结项本身都可被p整除。

根据我们的主要结果，由于所有 KO 理论（分别为 K 理论）特征数都是扭曲狄拉克算子（分别为自旋^c 狄拉克算子）的指标，因此它们模 p 的取值完全由一个仅依赖于 M的整数常数确定；由上述结果可知，配边类模 p 也因此完全确定。因此，只需在每种情形下找到一个满足推论条件且在配边中尚未被 p 整除的此类 M 实例；随后通过计算每个实例的任一非零属，即可立即确定相应的、依赖于 M的常数。

对于自旋情形和复数情形中的 $m < p-1$，根据我们最初的讨论，结论无论如何都显而易见。对于复数情形中的 $m = p-1$，取 $\mathbb{C}P^{p-1}$，令其带有一个 C_p^2作用，其中一个生成元循环地作用于射影化坐标，另一个则以特征值为 1、ζ、ζ^2、$\cdots$、ζ^{p-1}的对角乘法作用。对于自旋情形中的 $m = p-1$，取由 $\mathbb{C}P^p$中的费马超曲面 $x_0^{2p} + \cdots + x_p^{2p} = 0$表示的 V_p，并令 $(a, b) \in C_p^2$作用于 $\mathbb{C}P^p$，其作用方式为

$$(a, b) \cdot [x_0, \cdots, x_p] = [x_0, \zeta^a x_1, \cdots, \zeta^{(p-1)a} x_{p-1}, \zeta^b x_p];$$

该作用随后限制为对 V_p 的作用，且没有驻点。最终结果中出现 2^{-1} 源于 $\hat{A}(V_p) = 2$ （参见 $\mathrm{Td}(\mathbb{C}P^{p-1}) = 1$）。

最后，我们事后说明为什么不需要额外要求 P 的作用提升到自旋结构上。由于 M 是连通的，而 P 的阶为奇数， P 的每个元素都保持 M 的定向。因此， P 作用于 M 上、与该定向相容的所有可能自旋结构的集合。这个集合构成一个以 $H^1(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 为挠子的挠子，因此其大小是 2 的幂。如果它恰好为 1，那么它当然被 P 固定。如果它是更大的 2 的幂，则它们的 P-轨道大小都是 p 的幂；因此至少有一个 P-轨道的大小为 1，从而存在某个 P-不变的自旋结构。改变自旋结构会使自旋配边中的配边类改变一个扭结元素，而自旋配边中的扭结是 2-主 [1] ，因此在模 p 意义下不可见，所以我们可以假设自旋结构就是这个 P-不变的自旋结构。此外，将 P 的作用提升到旋量丛、并使其保持这个不变自旋结构的障碍位于 $H^2(P; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 中；由于 P 的阶为奇数，该群消失；参见 [2], ，另见 [11, 第 168] 页。因此，我们可以将 P 的作用提升到旋量丛上；相对于一个 P-不变度量，该作用必然与 Clifford 乘法以及狄拉克算子交换。□

推论 4.2。 设 P 是一个 p-群，其中 p 为奇数；该群在一个维数为 $2m$ 的闭连通自旋流形 M 上光滑地作用，且没有驻点。

(a) 若 $m < p-1$，则对每个 P-等变复向量丛 W，$A(M;W) \equiv 0$（模 p）。 *(b)* 若 $m = p-1$，则对每个 P-等变复向量丛 W，若 $\mathrm{Diff}(M)$ 的核在其上平凡作用，则 $A(M;W) \equiv \mathrm{rk}(W) A(M)$（模 p）。特别地，$\mathrm{sign}(M) \equiv A(M)$（模 p）。

证明。 按照4.1推论证明末尾讨论中相同的推理思路，我们可以认为主要定理中的等变性假设对自旋狄拉克算子成立，而无需任何其他假设。

因此，这个推论是主要定理的直接应用。回顾证明，符号算子是 $D \otimes \mathcal{S}^*$（D 狄拉克算子和 $\mathcal{S}$ 旋量丛的算子），其秩为 2^{p-1}。由费马定理，$2^{p-1} \equiv 1$（模 p），结论随即得出。□

下面的引理使我们能够在 P 非阿贝尔时，将主要定理中关于 P 的作用的条件从“没有驻点”改为“有效”。

引理 4.3。 设 P 是一个阶为奇数 p 的非阿贝尔 p-群，它在维数为 n 的连通流形 M 上光滑且有效地作用。若 $n < 2p$，则 P 的作用没有驻点。

证明。 我们证明其逆否命题：若该作用有驻点，则 $n \geq 2p$。设 $x \in M$ 是这样的驻点；于是，$V\colon P \to GL(T_xM)$ 给出一个实维数为 n 的表示。我们不妨假设 P 通过等距变换作用于 M；由于连通黎曼流形上的等距变换由其在一点处的取值和导数唯一确定 [17, 命题 5.22]，P 作用的有效性意味着 V 是忠实的。因此，只需证明 P 的任何实忠实表示的维数至少为 $2p$。

令 $V_{\mathbb{C}}$ 为复化，它仍然是忠实的，且复维数为 n。由一维表示之和给出的忠实作用将意味着 P 是阿贝尔群，但我们假设它并非如此，因此 $V_{\mathbb{C}}$ 含有一个维数大于 1 的不可约直和项 U，因而其维数至少为 p，因为不可约直和项的次数整除 $|P|$。

根据伯恩赛德，不存在非平凡的不可约实值特征标，因此共轭表示 U 不同于 U，并且也必须包含在 $V_{\mathbb{C}}$ 中，因为后者在共轭下不变。因此，直和项 U 和 U 合计贡献的维数至少为 $p+p=2p$，所以 $n \geq 2p$。□

推论 4.4。 不存在这样的闭、连通24维自旋流形 M：其满足 $A(M) = 1$ 且 $A(M; T_{\mathbb{C}}M) = 0$，并且能够由怪兽群在其上施加光滑且非平凡的作用。

证明。 假设这种流形上存在这样的作用。怪兽群中在 M 上平凡作用的群元素构成一个正规子群；因此，由于怪兽群是单群，任何非平凡作用都必须是忠实的。令 $p = 13$ 和 P 为怪兽群的 13 阶 Sylow 子群，它们因而也在 M 上忠实作用；这是一个阶为 13^{1+2} [8] 的特异群。

根据引理 4.3，由于 P 是非阿贝尔群，P 在 M 上的作用没有驻点。推论 4.2 的 (b) 部分因此适用；取 $W = T_{\mathbb{C}}M$，可得 $A(M; T_{\mathbb{C}}M) \equiv 24A(M)$（模 13），这与这些量的预期取值不符。□

这解决了 Hirzebruch 提出的一个问题。作者不禁指出，数字 13 按传统说法与厄运相关。

参考文献

1. Donald W Anderson、Edgar H Brown 和 Franklin P Peterson，自旋配边环的结构，《数学年刊》**86** (1967)，第 2 期，271–298。2. Michael Atiyah 和 Friedrich Hirzebruch，自旋流形与群作用，《拓扑学及相关主题论文集：献给 Georges de Rham 的纪念文集》，施普林格，1970年，第 18–28 页。

3. Michael F Atiyah 等，*Bott* 周期性与椭圆算子的指标，《数学季刊》**19** (1968年)，第 1 期，113–140。4. Michael F Atiyah 和 Graeme B Segal，椭圆算子的指标：*II*，《数学年刊》**87** (1968年)，第 3 期，531–545。5. Michael F Atiyah 和 Isadore M Singer，椭圆算子的指标：*III*，《数学年刊》**87** (1968年)，第 3 期，546–604。6. Armand Borel，变换群研讨班，第 46 号，普林斯顿大学出版社，1960年。7. Glen E Bredon，紧变换群导论，第 46 卷，学术出版社，1972年。8. J. H. Conway、R. T. Curtis、S. P. Norton、R. A. Parker 和 R. A. Wilson，有限群图册：单群的极大子群与普通特征，克拉伦登出版社，牛津，1985年。9. John H Conway 和 Simon P Norton，怪兽月光，《伦敦数学会通报》**11** (1979年)，第 3 期，308–339。10. Tammo tom Dieck，无驻点的有限阿贝尔 *p* 群作用，《拓扑学》**9** 4, 359 1970 366 ( ), no. – . 11. Carla Farsi，低维等变自旋配边，《拓扑学及其应用》**43** 2, 167 1992 180 ( ), no. – . 12. Igor Frenkel、James Lepowsky 和 Arne Meurman，顶点算子代数与怪兽群，第 134 卷，学术出版社，1989。13. Nora Ganter，等变椭圆上同调中的海克算子与广义月光，arXiv 预印本 arXiv:0706.2898 (2007)。14. Akio Hattori，弱近复流形的整数特征数，《拓扑学》**5** 3, 259 1966 280 ( ), no. – . 15. Olivier Haution，涉及数值不变量的不动点定理，《数学汇刊》**155** (2019年)，第 2 期，260–288。16. Friedrich Hirzebruch、Thomas Berger 和 Rainer Jung，流形与模形式，第 20 卷，施普林格，1992年。17. John M Lee，黎曼流形导论，第 2 卷，施普林格，查姆，2018年。18. Mark Mahowald 和 Mike Hopkins，具有可提升至 *BO* 的法丛的 *24* 维流形的结构*[8]*，《当代数学》**293** (2002年)，89–110。19. Reinhard Schultz，流形上的群作用，第 36 卷，美国数学会，1985年。20. Robert E Stong，特征数之间的关系——*I*，《拓扑学》**4** (1965年)，第 3 期，267–281。21. ，特征数之间的关系——*II*，《拓扑学》**5** (1966年)，第 2 期，133–148。

南佛罗里达大学电子邮件地址：
kgettig@usf.edu