状态空间中的隶属度决策理论

Jeff Dominitz 经济学系及 Ken Kennedy 研究所，莱斯大学，美国德克萨斯州休斯敦 77005jeff.dominitz@rice.edu

Charles F. Manski 经济学系及政策研究所，西北大学，美国伊利诺伊州埃文斯顿 60208cfmanski@northwestern.edu

2026年11月20日

摘要

经典决策理论考察一位面临选择集 C 的决策者（DM），他认为真实自然状态 s^* 属于状态空间 S。目标函数 $w(\cdot, \cdot): C \times S \to R^1$ 将行动和状态映射为福利。决策者希望最大化 $w(\cdot, s^*)$，但不知道 s^*。状态空间规定了一个带标签的可能状态集合。可能性是二元的：S 中的每个状态都可能，而 S 之外的状态都不可能。我们认为这种对可能性的二元视角过于僵化，因此对经典理论加以推广。我们从一个带标签状态全集 U 和一个未标记的剩余状态 r 开始。经典理论为每个 $s \in (U, r)$ 配置一个二元可能性指标 $\mu(s)$。剩余状态 r 不可能，因此 $\mu(r) = 0$。状态空间为 $S = [s \in U: \mu(s) = 1]$。我们将 μ 的取值范围扩展为区间 [0, 1]。因此，μ 现在是一个衡量 隶属度 的实数；这一术语借自模糊集理论。隶属函数$\mu(\cdot): (U, r) \to [0, 1]$ 与贝叶斯决策理论中的主观概率分布有实质区别，但与之相容。贝叶斯理论在经典状态空间的元素上赋予主观分布，而这些元素的隶属度均为一。隶属度表达了一个截然不同的观点：决策者可能希望以定量方式表达其对状态空间构成的不确定性。主观概率与隶属度在数学上的区别在于，前者之和必须为一，而后者不必。形式化基本观点后，我们将三种著名的经典决策准则——主观期望福利最大化、最小最大遗憾和最大化最小值——扩展到经典决策理论的这一推广版本中。

1. 引言

Savage（1954）使用“小世界”一词来描述经典决策理论的适用领域。该理论考察一位面临选择集 C 的决策者（DM），他知道（或认为）真实自然状态 s^* 属于状态空间 S。目标函数 $w(\cdot, \cdot)$: $C \times S \to R^1$ 将行动和状态映射为福利。决策者希望在 C 中最大化 $w(\cdot, s^*)$，但不知道 s^*。

状态空间指定了一组带有标签的自然状态，有时也称为一组“已知的未知”。可能性是二元的。S 中的每个状态都可能发生，S 之外的状态都不可能发生。决策理论并未说明决策者如何判定可能性。决策者排除了真实情况可能属于某个未标记的剩余状态这一可能性。Machina（2003）这样表述（第30页）：“当决策者有理由‘预期意外’时，……所能做的最好不过是指定一个最终兜底状态，标签类似‘以上皆非’，并赋予其一个定义极不明确的结果。”这一剩余状态或许能够涵盖经典决策理论小世界范围之外的“未知的未知”。

对决策理论的研究有三个截然不同的目标： 规范性、描述性和处方性。规范性分析旨在确立决策的理想属性，并致力于阐明“最优”和“理性”这两个概念的含义。描述性分析运用理论来帮助理解和预测现实中的决策者如何行事。处方性分析则旨在提升现实决策的表现。我们关注的是处方性分析。我们希望决策理论能够对实践中的决策有所助益，从而提升决策者所实现的福利。这一务实目标不同于公理化决策理论的规范性取向；后者将假设性选择情境下行为的某些一致性视为其本身具有的优点。关于区分处方性决策理论与规范性决策理论的进一步讨论，参见 Manski（2011）。

我们注意到，抽象理论并未说明应如何规定状态空间，因此我们在 Dominitz 和 Manski（2026）一篇聚焦于利用人工智能进行决策的论文中写道（第 11 页）：

> “广义而言，我们可以将智能视为规定现实状态空间的一般能力。状态空间既不应体现不可信的确定性——这种确定性建立在关于环境的错误信息之上——也不应体现虚无主义——这种虚无主义未能利用可信信息。使用小于现实情况的状态空间，会错误地将某些行动归类为劣势。使用大于现实情况的状态空间，则会错误地将某些行动归类为非劣势。”

遗憾的是，这一指导过于宽泛，没有提出可操作的推进方法。认识到这一点后，我们写道：

> “.....核心的未决问题在于如何解释‘可信’和‘现实’这两个词。仅仅声称一个智能的决策者应当指定一个可信或现实的状态空间，本身毫无意义。这只不过是把智能定义中的含糊不清，转移成对可信度和现实性含义的含糊不清。”

如今我们认为，经典决策理论中的一个实际问题是：用于指定状态空间的可能性二元视角过于僵化。本文扩展了经典理论，旨在增强其对决策者实际身处的更广阔世界的适用性。

我们从一个带标签状态全集 U 和一个未标记的剩余状态 r 开始。为简化记号，我们将 r 概念化为单个状态，而不是一组状态；这不会影响我们的分析。在这一框架下，经典决策理论为每个 $s \in (U, r)$ 关联一个二元可能性指标 $\mu(s)$。剩余状态 r 不可能发生，因此 $\mu(r) = 0$。状态空间为 $S = [s \in U: \mu(s) = 1]$。决策者知道 $[\mu(s),\ w(c, s);\ c \in C,\ s \in U]$。决策者不知道 $[w(c, r),\ c \in C]$, ，但这无关紧要，因为 $\mu(r) = 0$。

为了超越经典决策理论，我们将 μ 的取值范围扩展为区间 [0, 1]。因此，μ 现在是一个实数，用于衡量隶属度。我们采用模糊集理论中的术语“隶属度”（Zadeh，1965年），该理论将经典的集合隶属关系概念从二元的逻辑陈述扩展为区间 [0, 1]中的实数。用 Zadeh 的说法，状态空间是一个模糊集，而 $\mu(\cdot)$： $(U, r) \rightarrow [0, 1]$ 是隶属函数。

在经典决策理论中，状态空间 S 的设定是由决策者完成的一项主观任务。为 U 中的每个状态设定隶属度，对决策者而言同样是一项主观任务。很自然地，我们会认为，决策者所选择的隶属函数 $\mu(\cdot)$ 取决于决策者所掌握的信息。这些信息可能既包括从理论研究中获得的知识，也包括证据

以及通过实证研究获得的证据。为简化记号，我们在 μ(·) 这一记法中省略了隶属度对决策者所掌握信息的依赖关系。

关于语义的说明：我们采用 Zadeh 的术语“隶属度”，因为它具有中性的数学传统，不会暗示某种特定的解释。我们曾考虑使用其他在日常语言中更具暗示性的术语，例如“可行性”“可能性”“可信度”或“现实性”的程度。然而，我们认为，这些术语及其相关词语不可避免地含义宽泛，且缺乏共识性的解释。例如，我们中的一人长期以来一直难以对耳熟能详的“可信度”一词作出有意义的解释。Manski（2013年）写道（第12页）：

> “我将在本书中始终使用 可信度 一词，但不得不将其视为一个难以作出深层定义的原始概念。《牛津英语词典》第二版 （*OED*）将可信度 定义为“具有可信的性质”。《*OED* 》将可信的 定义为“能够被相信的；可相信的”。它又将可相信的 定义为“能够被相信的；可信的”。如此一来，我们又回到了原点。” ■

人们可能会倾向于认为，隶属度向量 $\mu(\cdot) \equiv [\mu(s),\ s \in (U, r)]$，只是贝叶斯主观概率 $\pi(\cdot) \equiv [\pi(s),\ s \in S]$ 的一种记号扩展，即每个满足 $\mu(s) = 1$ 的 s 都是真实状态。然而，我们旨在将 μ(·) 视为一个独立的概念，它在数学上和实质上都不同于 π(·)。我们将在第1.1节和第1.2节中进行抽象说明，并在第1.3节中概述本文其余部分的内容。

1.1. 隶属度与主观概率的数学差异

为便于阐述，设 U 为可数集。主观概率与隶属度的数学区别在于，π(·) 必须满足加总约束 $\sum_{s \in (U, r)} \pi(s) = 1$,

但 $\mu(\cdot)$ 不必如此。$\mu(\cdot)$ 可以取单位超立方体中的任意值，前提是存在某个 $s \in U$，使得 $\mu(s) > 0$.[1]

当人们提出关于不同隶属度下决策的其他条件不变问题时，$\mu(\cdot)$与$\pi(\cdot)$之间的这种数学区别便会显现出来。设 s 为一个指定的状态。对于不同的隶属度 $\mu(s)$ 和 $\mu'(s)$，考虑以下问题：其他条件不变，如果隶属度 $\mu(s)$ 改为等于 $\mu'(s)$，决策将如何变化?

在考虑隶属度时，这个问题是适定的；但在考虑主观概率时则不是。假设有人提出这样的问题：其他条件不变，如果主观概率 $\pi(s)$ 改为等于 $\pi'(s)$，决策将如何变化？这个问题并不适定，因为不可能在其他条件不变的情况下改变 $\pi(s)$。概率测度的加总条件意味着，$\pi(s)$ 的变化必须伴随着其他状态的概率发生相应变化，以确保所有状态的概率之和为一。

当我们将 $\mu(\cdot)$ 的取值范围设为区间 $[0, 1]$, 时，将下界 $\mu(s) = 0$ 解释为完全不可能，是我们分析的根本出发点。在第3节和第4节中，我们维持经典假设，即 $\mu(r) = 0$。这使得分析可以忽略剩余状态。第5节则探讨当 $\mu(r) > 0$时的决策问题。

将隶属度的上界设为 $\mu(s) = 1$ 并非必要。我们在第3节中展开的分析的抽象层面只要求 μ 是序数尺度。第4节和第5节中展开的较具体层面，则要求将 $\mu(\cdot)$ 设为比率尺度，且具有有限上界。将上界设为一只是为了简化符号。

[1] 如果 U 是一个足够大的不可数集，就会出现进一步的区别。从形式上看，可能只能定义一种概率测度，将全部质量赋予 U 的某个足够“小”的子集。这一困难看似深奥，却是非参数回归分析中的一个重要问题。对于 $\mu(\cdot)$，则不会出现这一问题，因为它不必是测度。

1.2. 提出 隶属度与主观概率之间的实质性差异

如果没有实质性问题需要这一数学构造来解决，那么提出隶属度这一数学构造就没有多大意义。我们将可能性这一概念从二元指标扩展为隶属度，旨在弱化经典决策理论中状态空间内外状态之间僵硬的区分。在经典理论中，状态空间为 $S = [s \in U: \mu(s)= 1]$。U 中所有其他状态的可能性均为零，因此与决策无关。在扩展理论中，所有满足 $\mu(s) > 0$ 的状态 $s \in (U, r)$ 都可能与决策相关。具有完全隶属度 $\mu(s) = 1$ 的状态并无特殊地位。

贝叶斯决策理论中的主观概率为状态空间中的每个状态赋予一个定量的似然度。我们已经指出，主观概率与隶属度的不同之处在于，主观概率之和必须为一。两者的定义域也不同。对于 $s \in S$，$\pi(s)$ 表示在持有真实状态必定处于预先指定的状态空间 S 内这一信念的条件下，s 为真实自然状态的似然。状态空间 S 以外的状态没有定义主观概率。相比之下，对于所有 $s \in (U, r)$，$\mu(s)$ 都有定义，其中 (U, r) 穷尽列出了所有可能性。

隶属度不应与贝叶斯理论的扩展相混淆，后者指决策者考虑不止一个主观分布。这些扩展被分别称为多重先验、不精确概率或稳健贝叶斯理论，假定决策者将一组主观分布置于同一个预先指定的状态空间 $S \equiv [s \in U: \mu(s) = 1]$，正如标准贝叶斯分析所做的那样。它们并不涉及标记宇宙 U 或剩余状态 r。[2]

[2] 一位坚持认为不确定性始终应通过主观概率分布来表达的决策者，可能会建议将 $\mu(s)$ 理解为：对于任意 s，$\in (U, r)$ 为可能事件的决策者主观概率。为使这一点形式化，该决策者可以保留可能性是二元的这一经典假设，并将 $\mu(\cdot)$ 视为一个主观随机向量，其元素可以取 0 和 1。由此，决策者会在 (U, r) 的所有非空子集 V 上设置一个主观分布 $\varphi(\cdot)$，其中 $\varphi(V)$ 是 $[\mu(s) = 1$ 且 $s \in V$ 的主观概率；$\mu(s) = 0$，$s \in (U, r)/V]$。从这一角度看，并不存在预先指定的状态空间 S，而只有可能的状态空间的主观分布。

尽管经典决策理论通常未考虑剩余状态，但不完全合同的经济学研究是一个例外，该研究以不同方式对剩余状态进行了概念化。在一篇审视不完全合同理论基础的文章中，Maskin 和 Tirole（1999）提出，应在由“不可预见的意外情况”构成的剩余状态上配置主观概率，并在该状态下的收益上配置主观分布。在一篇批评 Maskin 和 Tirole 这一提议的文章中，Hart 和 Moore（1999）将该问题表述为状态的“不可描述性”，而非不可预见的意外情况。尽管这两篇文章在多个方面存在差异，但它们都运用概率概念，使用期望效用理论研究不完全性。[3]

我们不从概率视角探讨可能性，因为我们认为，决策理论必须涵盖这样的情形：决策者觉得自己无法形成可信的主观概率分布。为应对这些情形，经典决策理论提出并研究了若干决策准则；从不同意义上说，这些准则在整个状态空间内都能保持一致的良好表现。其中较为重要的准则是最小最大后悔准则（MMR）和最大最小准则（MM）。经典应用这些准则时，必须预先指定状态空间。我们将 MMR 和 MM 扩展到缺乏明确状态空间的环境中。

1.3. 本文的贡献

本文的核心创新贡献，是提出将经典决策理论扩展为采用状态空间中的隶属度这一概念。我们的目标是通过放宽对状态空间的界定，使决策理论在应用中更具现实性。据我们所知，此前尚无研究

[3] 计量经济学和统计学关于设定检验的研究（如 Hausman（1978年））采用了截然不同的方法来应对剩余状态的可能性。在这种方法中，指定的状态空间是一个参数模型。通过频率学派假设检验来比较两个参数估计量。在原假设成立时，两个估计量均具有一致性，因此渐近收敛于同一个参数值。如果原假设不成立，这两个估计量的渐近概率极限则不同。实践中，如果检验统计量拒绝原假设，人们便暂时得出结论，认为该参数模型不包含真实自然状态。这类研究并未探讨其对决策的影响。

发展这一思路。本文的另一项贡献，是提出在决策中运用剩余状态这一概念的新方法。

在开始第3节的正式分析之前，第2节说明应用研究如何使用我们的新概念。这些初步示例取材于我们过去和正在开展的应用研究，包括使用观察性面板数据进行政策选择、在深度不确定性下选择气候政策，以及在模型不确定性下选择货币政策。第4节和第5节还提供了运用我们分析结果的进一步示例。

第3节和第4节的分析均维持一个传统条件，即不存在剩余状态。第3节提出了我们认为采用隶属度概念的合理决策准则应具备的三项性质。其中两项性质显而易见：决策准则应尊重弱支配，并且不应受到隶属度为零的状态中的福利影响。第三项性质则更耐人寻味。我们提出，如果某一决策准则在指定状态 t 为真时会给出最优选择，那么在其他条件不变的情况下，当状态 t 具有更高的隶属度时，该准则也应给出这一选择。

第4节探讨三个重要决策准则的扩展–主观期望福利最大化、最小最大遗憾和最大化最小值–是否满足合理性性质。具体而言，我们研究按照状态的隶属度对状态特定福利进行加权的准则。我们发现，加权期望福利和最小最大遗憾准则始终满足全部三项性质，但加权最大化最小值准则常常违反第二项或第三项性质。鉴于此，本文其余部分将重点讨论加权期望福利和最小最大遗憾准则。我们讨论运用这些准则的决策者如何使用样本数据来形成信念，并指出，最大化加权期望福利的决策者可以仿效贝叶斯更新，从而获得在各状态之间总和为1的后验隶属权重。相比之下，对于在频率学派统计理论的事前框架内运用加权MMR的决策者而言，样本数据不应影响隶属度。第4节最后通过一个临床选择示例作结：在疾病状况不确定时，在监测与积极治疗之间进行选择。

第5节将分析扩展到允许存在具有正隶属度的剩余状态。长期以来，决策理论一直难以应对这样一种可能性：指定的状态空间可能并未穷尽所有可能的真实自然状态。上文提到了Machina（2003）中的讨论以及关于不完全合同的研究。Karni和Viero（2017）的文献综述部分引用了大量论文，并将其归纳为三种方法。

显然，任何处理剩余状态的可操作方法，都必须为这一概念设定某种结构。我们不为剩余状态下的福利设定主观分布，而是提出对该状态下的福利进行界定；在这种情况下，决策者面临的是“部分已知的未知”。据我们所知，此前尚无研究探讨这一思路。我们将说明，其影响取决于界限的形式以及所采用的决策准则。我们重点关注有界变动假设，并以谨慎原则为例加以说明。

第6节通过展望未来的实证研究作结，以确定决策者是否认为隶属度这一概念为经典决策理论提供了一个引人注目且实用的推广。

2. 初步示例

2.1 使用观察性面板数据进行政策选择

Manski 和 Pepper（2013年，2018年）探讨了如何利用观察性面板数据，预测在指定日期让所有具有特定观测协变量的个体接受某种反事实处理时会出现的平均处理结果。评估公共政策时经常会遇到这一问题。这两篇文章中的方法分析探讨了刑事司法政策中颇具争议的问题。2013年的文章关注允许判处死刑的法律对谋杀率的影响，2018年的文章则研究允许公民拥有和携带手枪的法律对犯罪率的影响。

撇开这些应用场景不谈，两篇文章都假设总体中的每个成员都具有两种协变量取值之一：$x = v$ 和 $x = w$。在日期 d，每个个体 j 接受两种互斥且穷尽所有可能的处理（A、B）之一，其潜在结果分别为 $y_{jd}(A)$ 和 $y_{jd}(B)$。在每个日期 d，个体 j 的观测结果为 $y_{jd} \equiv y_{jd}(z_{jd})$；如果 j 在 d 时接受 B，则 $z_{jd} = B$，否则 $z_{jd} = A$。观测结果在两个日期测得，分别标记为 $d = 0$ 和 $d = 1$。在 $d = 0$，总体中的所有成员都接受 A。在 $d = 1$，协变量取值为 $x = v$ 的成员接受 B，协变量取值为 $x = w$ 的成员接受 A。

问题是求出 $E[y_1(A)|x = v]$，在 $d= 1$ 时的反事实平均结果——也就是协变量为 v 的个体若接受 A 而非 B 时的平均结果。政策研究者通常希望了解这一反事实平均结果，以比较分别规定接受处理 B 和 A 的政策下的结果。在 $d= 1$ 时，这些平均结果分别为 $E[y_1(B)|x = v]$ 和 $E[y_1(A)|x = v]$。现有数据揭示了 $E[y_1(B)|x = v]= E(y_1|x = v)$，但并未揭示 $E[y_1(A)|x = v]$。

2.1.1. 基于不变性假设的传统分析

研究这种结构情形时，传统的研究实践是采用足够强的假设，以点识别反事实平均结果。这些假设通常断言某种形式的不变性，从而能够利用现有数据，得到关于反事实平均结果的三种不同结论，如下所示:

(1) 时间不变性: $E[y_1(A)|x = v] = E[y_0(A)|x = v] = E(y_0|x = v)$;

(2) 跨协变量不变性: $E[y_1(A)|x = v] = E[y_1(A)|x = w] = E(y_1|x = w)$;

(3) 双重差分不变性: $E[y_1(A)|x = v] =$

$$\{E[y_1(A)|x = w] - E[y_0(A)|x = w]\} + E[y_0(A)|x = v] = [E(y_1|x = w) - E(y_0|x = w)] + E(y_0|x = v).$$

假设 (1) 成立的前提是：对于协变量为 v 的个体，除处理 A 被处理 B 替换外，从 $d = 0$ 到 $d = 1$ 期间，结果的决定因素均未发生变化。假设 (2) 成立的前提是：协变量为 v 和 w 的个体对治疗的反应

相同。假设 (3) 成立的前提是：如果协变量为 v 的个体在 d = 1接受了处理 A，那么他们在 d= 0 到 d = 1 期间经历的结果均值变化，将与协变量为 w 的个体所经历的相同。

因此，三个发现中的每一个都是在特定的不变性假设下得到的。在实践中，通常情况下这些不变性假设不会同时成立。每个假设都很强，可能并不现实。也可能没有一个假设成立。

2.1.2. 有界变动假设

上述不变性假设往往因其精确性而令人怀疑。等式（1）、（2）和（3）中的每一个都能点识别反事实平均结果 $E[y_1(A)|x = v]$。为什么其中任何一个应当恰好成立？实证研究者常说，这类假设是“近似”，但他们并未将其含义形式化。

Manski 和 Pepper 观察到，提高实证研究可信度的一种简单方法，是将不变性假设弱化为有界变动假设。他们将假设（1）、（2）和（3）弱化如下：

（4）有界时间变异：$|E[y_1（A）|x = v] – E[y_0（A）|x = v]| \leq \delta_{v(10)}$;

(5) 有界跨协变量变异：$|E[y_1(A)|x = v] – E[y_1(A)|x = w]| \leq \delta_{(vw)1}$;

(6) 有界双重差分变异：

$$|\{E[y_1(A)|x = w] - E[y_0(A)|x = w]\} – \{E[y_1(A)|x = v] – E[y_0(A)|x = v]\}| \leq \delta_{(vw)(10)};$$

δ 的取值为指定的正常数。

每个有界变动假设都具有识别能力，其强弱由相关的 δ 常数的大小决定。原则上，决策者可以将一个、两个或全部三个常数设为无穷大。

因此，不失一般性，我们可以将（4）—（6）视为一组可组合施加的假设。

当三个常数都为正且至少一个为有限值时，这些假设的组合可能会部分识别反事实平均结果，从而得出一个包含 $E[y_l(A)|x= v]$ 的信息性区间。如果多个常数为正，且至少一个接近零，那么可能不存在任何满足这些假设组合的 $E[y_l(A)|x = v]$ 取值。若如此，决策者应得出结论：所提出的组合中必有某一部分不正确。

2.1.3. 状态空间中具有隶属度的分析

基于不变性假设 (1)、(2) 或 (3) 的传统分析中，状态空间是一个单元素集合，具体是哪一个点取决于采用了哪项假设。一个小幅推广是，假定决策者认为这三项假设中有一项正确，但不知道是哪一项。此时，状态空间包含三个点。

假设 (4)、(5) 和 (6) 表达了一系列广泛的推广，用于限定 $E[y_l(A)|x = v]$。界限的宽度和位置取决于对三个 δ 常数所作的假定，因此状态空间扩展为一个连续统的可能性。尽管如此，分析仍处于经典决策理论的范畴之内。无论对 δ 常数作何种假定，某些 $E[y_l(A)|x =v]$ 取值会被视为可能，另一些则不会。

采用隶属度进行分析可以弱化这种鲜明的区分。决策者可能会认为，由较小的 δ 常数组成的 $E[y_l(A)|x = v]$ 值具有较低的隶属度。而由较大的 δ 组成的值则具有较高的隶属度。

在这个示例中，剩余状态这一概念并无必要。$E[y_l(A)|x = v]$ 必须位于实数轴上。因此，无需推测未标记状态。

2.2. 深度不确定性下的气候政策选择

气候经济学家使用综合评估（IA）模型来评估替代性气候政策的收益与成本。政策比较通过考察一位规划者来进行，该规划者旨在对温室气体（GHG）减排成本与气候变化造成的损害作出最优权衡。

经济学家将政策选择形式化为一个最优控制问题，包含以下组成部分：(1) 将温室气体排放和减排与大气中温室气体的累积及其导致的气温升高联系起来的方程；(2) 损害函数，以全球经济产出损失为依据，量化气温升高所造成的气候变化影响；(3) 减排成本函数，用于表示相对于既定基准排放轨迹而言，采取行动减少温室气体排放所需的成本。一个著名的例子是DICE（动态综合气候经济）模型（Nordhaus，2019年）。

将气候政策作为控制问题来研究，意味着规划者掌握的信息足以使优化成为可能，但不确定因素仍然很多。物理科学家开展了多模型集合分析。由于缺乏公认的气候模型，他们开发了多个模型，每个模型都假定某个不同的模型能够准确描述气候系统。他们对多模型集合中的各模型预测结果取平均。简单地取平均通常称为“模型民主”。加权平均则可称为贝叶斯模型平均；参见 Smith 等（2009年）。

经济学家估计了各种损害函数和减排成本函数。一般而言，经济学家并未通过取平均值来合并多个函数，从而开展最大化最小值分析。相反，每项研究都会指定一个参数函数族，并假定该设定是正确的。因此，每位研究者都假定状态空间是一个参数函数族。

2.2.1. 气候政策的极小化后悔分析

由于担忧将气候政策选择视为最优控制问题的研究可信度有限，Manski、Sanstad 和 DeCanio（2021）以及 DeCanio、Manski 和 Sanstad（2002）将气候建模中的不确定性界定为部分识别问题，由此产生了深度不确定性。研究者指出，人们对气候物理学、全球变暖造成的损害以及减排成本的了解并不完整，而且没有依据从已提出的多个模型中择一采用。这些文章提出采用极小化后悔决策准则来应对这种深度不确定性。他们基于 MMR 建立了气候政策成本效益分析的理论框架，并使用一个简单的示例性 IA模型进行计算应用；该模型假设正确的气候模型是气候科学文献中六个主要模型之一。

2.2.2. 状态空间隶属度与剩余状态分析

传统的 IA 分析假设人们对气候物理学和经济学有着不切实际的精确认识。上述 MMR 分析假设了一个稍大的状态空间，但并未声称其完全符合现实。没有理由认为，假设的状态空间中的六种气候模型之一就是正确的。人们还研究了许多其他气候模型，每种模型都会得出各自的预测。迄今提出的模型或许没有一种完全准确。

通过结合隶属度与剩余状态进行分析，规划者能够对当前认知作出更细致的表达。规划者可以为迄今提出的每个模型赋予一定的隶属度，而不必假定其中某个模型必然正确。允许真实情况存在于一个迄今尚未具体说明的剩余状态中，便可以纳入现有模型可能都不正确的可能性。

2.3. 模型不确定性下的货币政策选择

经济学家也将货币政策选择形式化为一个最优控制问题。在美国，美联储面临所谓的双重使命，即实现最大就业和物价稳定。宏观经济研究长期以来都用总经济活动（国内生产总值或失业）的偏离以及通货膨胀偏离目标水平所产生的二次损失来表述双重使命（例如，Barro和Gordon，1983年；Rogoff，1985年）。二次损失最小化被视为稳态附近社会福利最大化的一种近似（Woodford，2010年）。中央银行选择短期利率的路径，在满足宏观经济动态模型约束的条件下使预期损失最小化。

人们提出了许多经济模型，并用它们来评估政策；这些模型通常采用动态随机一般均衡（DSGE）模型的形式。自1996年起，美联储一直在使用并更新FRB/US模型，该模型被描述为一种DSGE模型的变体，能够“更灵活地应用优化理论”。[4] 每个此类模型，无论是否为DSGE模型，都代表状态空间中的一个不同点。FRB/US模型允许存在两种自然状态：一种是主体对未来结果形成模型一致预期，另一种是主体使用向量自回归来形成预期。

一些研究探讨了中央银行在制定货币政策时如何或应如何考虑模型不确定性，包括Levin和Williams（2003年）、Brock等人（2007a年）和Brock等人（2007b年）。为了解释美联储为何在20世纪70年代迟迟未实施低通胀政策，Cogley and Sargent（2005年）将中央银行建模为一名贝叶斯决策者，对三个可能的状态进行模型平均，并将其分别标记为Samuelson-Solow模型、Solow-Tobin模型和Lucas-Sargent模型。他们没有考虑残差状态。然而，分析时期从1960年开始，因此必须为每个状态指定截至1959年第四季度的先验分布，而那时有关Solow-Tobin模型和Lucas-Sargent模型的研究尚未开展。Cogley and Sargent承认了这一问题，并指定

[4] 参见 https://www.federalreserve.gov/econres/us-models-about.htm，访问于2026年10月3日 .

这两个模型的先验分布均为0.01。在当时，更恰当地说，这些模型应被视为残差状态空间中的元素。

Hansen and Sargent（2001a年、2001b年）对存在模型不确定性的货币政策采取了截然不同的方法。他们没有在假设单一模型正确的前提下应用最优控制理论，而是采用了基于单一近似模型、并对状态空间施加有界变动假设的鲁棒控制理论。具体而言，他们扩展了状态空间，纳入了 Cogley and Sargent（2005）后来称之为（第533页）“不可数的替代模型云”的内容，其相对于近似模型的熵有界。此外，Hansen and Sargent 采用了极小极大决策规则，从而免去了决策者为这一不可数模型云指定先验分布的需要。

3. 合理决策标准

我们考虑将 $[\mu(s), w(c, s); c \in C, s \in (U, r)]$ 映射为实值函数 $f(\cdot)$ 的决策准则。在隶属度和福利的值给定后，该函数表达了 C 上的偏好排序。决策者选择使 f 在 C 上达到最大值或最小值的行动，具体取决于该函数。本文的讨论假设偏好随 $f(\cdot)$ 的增加而提高。对于偏好随 $f(\cdot)$ 的增加而降低的情形，也可以用类似方式重新表述。

经典决策理论中基本上普遍接受的唯一合理性原则是，决策准则应当遵循弱支配。将这一思想扩展到我们的扩展框架中，如果 $f(\cdot)$ 满足以下要求，我们就说它遵循弱支配：

弱支配尊重原则（*RWD*）：设 $\mu(r) = 0$。考虑行动 (d, e)，使得对于所有满足 $\mu(s) > 0$ 的 $s \in U$，都有 $w(d, s) \geq w(e, s)$，且对于其中某个 s，也有 $w(d, s) > w(e, s)$。那么，$f(d) \geq f(e)$。■

此定义不适用于 $\mu(r) > 0$ 的情形。在对 [w(c, r) 一无所知的情况下，$c \in C$],，没有已知的行动对 (d, e) 满足前提 $w(d, r) \geq w(e, r)$。第5节将讨论 $\mu(r) > 0$ 且对状态 r 中的福利有部分了解的情形。

扩展框架中合理性的刻画，需要考虑决策准则应如何作为 μ 的函数发挥作用。启发式地说，我们希望隶属度较高的状态比隶属度较低的状态对选择产生更大的影响。问题在于如何将这一思想形式化。

我们认为，一个基本的合理性性质是：零隶属度状态中的福利不应影响选择。经典决策理论的状态空间 S 为 $[s \in U: \mu(s) = 1]$。对此进行扩展，今后我们令 $S \equiv [s \in U: \mu(s) > 0]$。我们用 U/S 表示 U 中隶属度为零的补集。我们提出如下合理性性质：

零隶属度状态无关性（*ISZM*）： 其他条件不变，$f(\cdot)$ 不随 $[w(\cdot, s), s \in U/S]$ 而变化。 ■

我们认为，固定 $[w(\cdot, s), s \in S]$ 并比较隶属度向量 $[\mu(s), s \in S]$ 变化时决策者所作出的选择，可以得到另一项乍看之下合理的性质。我们以一种特定方式将这一宽泛思想形式化：以决策者在已知某个状态 $t \in S$ 为真时所作出的选择作为基准。在这一假设情境下，理性决策者会选择 $C[W(t)] = \operatorname{argmax}_{c \in C} w(c, t)$ 中的一个元素，其中 $W(t) \equiv [w(c, t); c \in C]$。我们使用集合记号 C[W(t)]，而不是点记号 c[W(t)]，以表示 W(t) 可能包含多个极大元素。

考虑决策标准 $f(\cdot)$ 和隶属度向量 $[\mu(s)$，其中 $s \in S]$。使用 $f(\cdot)$ 表示所选行动为 $c[\mu(t), W(t), V(t)] \in$ 自变量取极大值的集合 $\cup_{c \in C} f[c; \mu(t), W(t), V(t)]$, 其中 $V(t) \equiv [\mu(s), w(c, s); c \in C, s \in S, s \neq t]$。我们称所选行动是自变量取极大值的集合中的一个元素，因为 f 可能有多个极大值点。现在固定 [W(t)，V(t)]，考察 $c[\mu(t), W(t), V(t)]$ 如何随标量 $\mu(t)$ 变化。我们提出

这一合理性性质。

对隶属度的尊重（*RDM*）：考虑任意 [t、μ(t)、W(t)、V(t)]，其中 μ(t) < 1。令 $\mu^{+}(t) > \mu(t)$。

A. 如果 c[μ(t)、W(t)、V(t)] ∈ C[W(t)],，那么 c[μ^{+}(t)、W(t)、V(t)] ∈ C[W(t)]。

B. 如果 c[μ^{+}(t)、W(t)、V(t)] ∉ C[W(t)],，那么 c[μ(t)、W(t)、V(t)] ∉ C[W(t)]。■

A部分和B部分在逻辑上等价，因为B部分是A的逆否命题表述。换言之，A部分表明，如果判据 f(·) 产生的选择在真实状态已知为 t 时将是最优的，那么在其他条件不变的情况下，如果 t 的隶属度更高，它也应产生这样的选择。

我们不主张RWD、ISZM和对隶属度的尊重（RDM）之外的性质也具有令人信服的合理性依据。其他性质是否会出现，我们暂不作定论。

4. 扩展著名的经典决策准则

三个著名的经典决策准则分别是主观期望福利最大化、最小最大遗憾和最大化最小值。在第一个准则中，决策者在经典状态空间 S 上赋予主观概率分布 π，依据 π 对依赖状态的福利取平均值，并最大化主观期望福利。该准则求解

(7) 最大化 $\sum_{s \in S} \pi(s) w(c, s)$。$c \in C$

MMR 和 MM 准则并不假定主观概率分布，它们是

(8) 最小 最大 [最大 w(d, s) − w(c, s)]。$c \in C$ $s \in S$ $d \in C$

(9) 最大化 最小值 w(c, s)。 c∈C s∈S

我们以一种简单的方式扩展这些准则，认为这值得研究。在每种情况下，我们都用福利与隶属度的乘积替代福利。我们以这种方式扩展经典准则，以形式化这样一个宽泛的观点：隶属度较高的状态对选择的影响应大于隶属度较低的状态。我们考察第3节的合理性性质是否成立。我们发现，对于判据（7）和（8）的扩展，这些性质确实成立。然而，判据（9）的扩展违反了 ISZM 和 RDM 性质。

本节中，我们维持条件 μ(r) = 0，将对 μ(r) > 0 情形的考察留到第5节。我们正式考虑全集 U 中的所有状态，而非具有正成员度的状态子集 S，但这对分析并无影响。

4.1. 成员度加权福利跨状态总和的最大化

撇开其在主观期望效用最大化的认知理论或公理化理论中的解释不谈，式（7）的代数结构是在各状态间最大化福利的加权和，其中所有权重均为非负，且至少有一个权重为正。我们用成员度权重替代主观概率权重，得到以下判据

(10) 最大值 ∑ μ(s)w(c, s)。 c∈C s∈U

如果 ∑ s∈U μ(s) 有限，则（10）与（7）之间的代数区别无关紧要。在此情况下，将（10）除以 ∑ s∈U μ(s)，并利用对于 s ∈ U/S 有 μ(s) = 0 这一事实，可得到（7），其中 π(s) ≡ μ(s)/[∑ s∈Sμ(s)]。如果 U 的基数为无限，且 ∑ s∈U μ(s) 为无限，则这种区别具有实质意义。此时，对于某些向量 [μ(s)、w(c, s)；c ∈ C、s ∈ U]，判据（10）是适定的，但对于其他向量则不是。当（10）适定时，贝叶斯学派可能倾向于将其解释为使用一个非正规先验来最大化期望福利。

考察判据（10）可知，它满足 RWD 性质和 ISZM 性质。下面我们将证明，该判据满足RDM性质。

RDM性质的证明：前提是，对于给定的状态 t，行动 c[μ(t)、W(t)、V(t)] 在 C 上使 w(·, t) 最大化。其他条件不变，将状态 t 的成员度从 μ(t) 提高到 $\mu^{+}(t)$，会使每个 $c \in C$ 在式 (10) 的总和中增加 $[\mu^{+}(t) - \mu(t)]w(c, t)$，其中 $\mu^{+}(t) - \mu(t) > 0$。因此，$[\mu^{+}(t) - \mu(t)]w(\cdot, t)$ 在 C[W(t)] 处达到最大值。由此可知，采用成员度 $\mu^{+}(t)$ 选择的行动 c[$\mu^{+}(t)$、W(t)、V(t)] 是 C[W(t)] 的一个元素。■

4.1.1. 基于样本数据的成员权重的贝叶斯更新

考虑一位决策者，他将样本数据作为其所掌握信息的一部分加以观察。在经典决策理论中，用于最大化主观期望福利的主观概率分布，是通过在观察样本数据之前指定分布 π(·)，并应用贝叶斯定理将先验分布更新为后验分布而得到的。令 ψ 表示样本数据，L(ψ|s) 表示 ψ 在状态 s 下的似然。s 的后验概率为 $\pi(s|\psi) = L(\psi|s)\pi(s)/[\sum_{t \in S} L(\psi|t)\pi(t)]$。

假设一位最大化成员度加权福利的决策者观察到了样本数据。这位决策者可能会如何行动？一种自然的可能性是，决策者仿效贝叶斯更新，以获得自然状态的后验隶属权重。将先验概率 π(·) 替换为先验隶属度权重 μ(·)，贝叶斯定理给出后验隶属权重 $\mu(s|\psi) = L(\psi|s)\mu(s)/[\sum_{t \in S} L(\psi|t)\mu(t)]$。若总和 $\sum_{t \in S} L(\psi|t)\mu(t)]$ 有限，则各状态的后验隶属权重之和为一。因此，事前为各状态赋予隶属度权重的决策者，事后会像贝叶斯决策者那样行动。

4.2. 成员权重最小最大遗憾

成员度加权的极小极大遗憾判据求解如下问题

(11) 最小化 最大化 [最大化 $\mu(s)w(d, s) - \mu(s)w(c, s)$]。 $c \in C\ s \in U\ d \in C$

等价地，该判据为

(11′) 最小 最大 $\mu(s)$ [最大 $w(d, s) - w(c, s)$]。 $c \in C\ s \in U\ d \in C$

后一种表达式将该判据解释为对遗憾而非福利加权。一个状态的隶属度越高，该状态越有可能成为加权遗憾达到最大值的状态。

当所有成员度为正的状态中，$\mu(s)$为常数时，判据 (11)-(11′) 会退化为经典MMR；否则则有所不同。因此，隶属度加权MMR通常不同于经典MMR。这与成员度加权福利跨状态总和的最大化形成对比，后者通常等价于经典期望效用最大化。

检查 (11)-(11′) 可知，该判据满足 RWD 和 ISZM 性质。下文将证明它满足 RDM性质。

RDM性质的证明：该性质的前提是，对于给定状态 t，行动 $c[\mu(t), W(t), V(t)]$ 在 C 上使 $w(\cdot, t)$ 最大化。因此，在此行动下，状态 t 的遗憾为零。因此，无论乘以何种成员度值，状态 t 的成员度加权遗憾都为零。其他条件不变时，成员度从 $\mu(t)$ 增加到 $\mu^{+}(t)$，会弱增状态 t 中除行动 $c[\mu(t), W(t), V(t)]$ 之外其他行动的遗憾，且不影响其他状态的遗憾。由此可知，在成员度为 $\mu^{+}(t)$ 时选出的行动 $c[\mu^{+}(t), W(t), V(t)]$ 是 $C[W(t)]$ 的一个元素。■

4.2.1. 基于样本数据的成员权重最小最大遗憾

再次考虑一位观察样本数据的决策者。贝叶斯决策理论设想在观察数据后选择一项行动，而瓦尔德统计决策理论则考虑事前选择

一种程序，在该程序中，决策将取决于尚未观测到的样本数据的实现。也就是说，决策者必须在看到数据之前确定一项决策规则。[5]

Wald理论属于频率学派统计理论的一般框架。频率学派理论的核心概念是数据在重复抽样中的分布。这是一个事前概念。在频率学派理论中，不会在观察到有限样本数据后评估统计程序。

对基于样本数据的MMR决策进行经典分析时，会以特定方式应用Wald理论来选择决策程序。它将判据（8）替换为

$$\min_{c(\cdot)\in\Gamma} \max_{s\in S} \max_{d\in C} \left(w(d,s) - E_s\{w[c(\psi),s]\} \right)。 \tag{8′}$$

这里，$c(\cdot): \Psi \to C$ 是一个统计决策函数，它将样本数据映射为所选行动，而 Ψ 是潜在数据实现值的样本空间。Wald提出，用$c(\cdot)$在状态s下跨样本的频率学派期望福利来测量其表现；也就是说，$E_s\{w[c(\psi),s]\} \equiv \int w[c(\psi),s]dQ_s$，其中$Q_s$ 是状态s下的抽样分布。

将隶属度加权MMR自然推广到含有样本数据的情形时，可将 (11′) 替换为

[5] 这种事前视角适用于以下应用场景：在观察数据之前，必须先实际选择一个决策程序并作出承诺。

(11′′) $\underset{s\in U}{\text{极大}}\ \underset{d\in C}{\text{极小}}\ \mu(s)\,(\max w(d,s) - E_s\{w[c(\psi),s]\}).\ c(\cdot)\in\Gamma$

与Wald理论的事前视角一致，该判据不使用观测到的样本数据来更新隶属度函数。它考虑的是在观测数据之前选择决策程序。

4.3. 隶属度加权最大最小准则

隶属度加权最大最小准则解决以下问题

(12) $\underset{c\in C}{\text{最大化}}\ \underset{s\in U}{\text{最小化}}\ \mu(s)\,w(c,s)$。

经典最大最小准则（9）的这一扩展似乎类似于将（7）和（8）扩展为（10）和（11-11′），但它具有不同的性质。判据（12）满足RWD性质，但有时不满足ISZM性质或RDM。

如果对于所有$c \in C$和$s \in U$，$w(c,s) > 0$，则扩展MM准则不满足ISZM性质。考虑任意状态s_0，其满足$\mu(s_0) = 0$，以及任意另一个状态s_+，其满足$\mu(s_+) > 0$。于是，对于每个行动c，$\mu(s_0)w(c,s_0) = 0$，且$\mu(s_+)w(c,s_+) > 0$。因此，在U上的最小隶属度加权福利等于零。这表明，具有零隶属度的状态与选择有关。事实上，如果存在此类状态，则所有行动都能解决扩展MM问题。

与上述情况相反，如果对于所有 $c \in C$ 以及某个具有正隶属度的状态，$w(c,s) < 0$，则扩展MM准则满足ISZM性质。再次考虑任意状态 s_0，其 $\mu(s_0) = 0$，以及任意另一个状态 s_+，其 $\mu(s_+) > 0$。于是，对于每个行动 c，$\mu(s_0)w(c,s_0) = 0$，且 $\mu(s_+)w(c,s_+) < 0$。因此，U 中的最小成员度加权福利为负值，并且出现在具有正隶属度的状态中。这表明，零隶属度的状态与选择无关。

一个例子足以表明，扩展MM准则可能违反RDM性质。在此例中，我们假设对于所有 $c \in C$ 和 $s \in U$，$w(c, s) < 0$，从而确保ISZM性质。回顾该性质的A部分：如果 $c[\mu(t)、W(t)、V(t)] \in C[W(t)]$, ，那么 $c[\mu^{+}(t)、W(t)、V(t)] \in C[W(t)]$。

示例：假设 C 和 U 都是二元的，分别为 $C = \{c, c'\}$ 和 $U = \{s, s'\}$。进一步假设：

$$\rho(s)w(c', s) < \rho(s)w(c, s) < \rho(s')w(c, s') < \rho(s')w(c', s').$$

那么，c 是唯一的成员度加权最大最小选择；如果已知真实状态为 s，c 也是唯一的最优行动。因此，条件A的前提成立。然而，将 $\rho(s)$ 增加到 $\rho^{+}(s)$ 可能会导致

$$\rho(s')w(c, s') < \rho^{+}(s)w(c', s) < \rho^{+}(s)w(c, s) < \rho(s')w(c', s').$$

那么，c 的最差状态是 s′，此时成员度加权福利为 $\rho(s')w(c, s')$。c′ 的最差状态是 s，此时加权福利为 $\rho^{+}(s)w(c', s)$。后者大于前者，因此现在 c′ 是成员度加权最大最小选择，这违反了A部分的结论。■

4.4. 示例：疾病状况不确定时，在监测与积极治疗之间进行临床选择

为使上述抽象分析更具体，我们现在考察一个重要的临床决策问题：疾病状况不确定时，在监测与积极治疗之间进行选择。早期对这一问题的研究，在假设状态空间为单元素集合、且临床医生知道具有特定观测属性的患者客观患病概率的情况下，确定了最优治疗（Pauker and Kassirer，1975，1980；Phelps and Mushlin，1988）。近期研究则考察了最小最大遗憾治疗，并假设状态空间为区间，且临床医生能够界定客观患病概率的范围（Manski，2018）。

在此，我们将前述分析扩展到允许患病概率的可能取值在状态空间中的隶属度有所不同的情形。我们考察隶属度加权最大化主观期望福利和最小最大遗憾。鉴于第4.3节中发现的令人难以接受的性质，我们不考察隶属度加权最大化最小值准则，因为

在下文中，第4.4.1节概述了已知患病概率时最优决策的简单分析。第4.4.2节考察了在放宽这一假设时的决策。第4.4.3节讨论了实践中隶属度的具体设定。

4.4.1. 最优治疗选择

对于某种特定疾病，有两种护理方案，分别记为 A 和 B。方案 A 是监测，方案 B 是积极治疗。A 是非侵入性的，B 是侵入性的。临床医生必须选择其中一种治疗。[6]

临床医生在不知道患者患病状态的情况下选择治疗方案；患者患病时 $y = 1$，未患病时 $y = 0$。患者已观察到自身的健康状况和人口统计属性，为简化符号表示，我们不再明确列出这些属性。理想情况下，临床医生能够获知客观患病概率 $p \equiv P(y = 1)$。

设采用方案 $c \in \{A, B\}$ 时的患者预期福利具有已知形式 $U(c, y)$；因此，每种方案的期望福利可能因疾病是否发生而异。通常可以合理地假设，疾病发生时积极治疗更好，而疾病未发生时监测更好。也就是说，

(13) $U(B,1) > U(A,1)$，$U(A,0) > U(B,0)$。

我们假设，所选择的护理方案不会影响疾病是否发生；因此，患者的患病概率就是 p，而不是护理方案的函数 $p(c)$。治疗选择仍然很重要，因为它会影响疾病的严重程度以及患者经历副作用的情况。积极治疗能减轻疾病的严重程度，因此有益；但如果它会导致监测时不会出现的副作用，则有害。

[6] 假设在这些选项之间进行选择，就意味着不允许对单个患者进行随机治疗选择。这也不允许在卫生规划者治疗一组观察特征相同的患者、并且能够将一部分患者分配给每种治疗时进行多样化。Manski（2009年）研究了这些情形。

令临床医生知晓 [p、U(·, ·)] ，并使期望福利最大化。那么，最优决策为

(14) 若 $p\cdot U(A, 1) + (1 - p)\cdot U(A, 0) \geq p\cdot U(B, 1) + (1 - p)\cdot U(B, 0)$，则选择 A；
若 $p\cdot U(B, 1) + (1 - p)\cdot U(B, 0) \geq p\cdot U(A, 1) + (1 - p)\cdot U(A, 0)$，则选择 B。

该决策可使患者预期福利达到最优

(15) $\max [p\cdot U(A, 1) + (1-p)\cdot U(A, 0), p\cdot U(B, 1) + (1 - p)\cdot U(B, 0)].$

当不等式 (13) 成立时，最优决策很容易刻画。令 $p^{\#}$ 表示使选项 A 和 B 的期望福利相同的 p 的阈值。该值为

(16) $$p^{\#} = \frac{U(A, 0) - U(B, 0)}{[U(A, 0) - U(B, 0)] + [U(B, 1) - U(A, 1)]}$$

当 $p \leq p^{\#}$ 时，选项 A 为最优；当 $p \geq p^{\#}$时，选项 B 为最优。

一个有助于简化分析的情形是，积极治疗能够消除疾病，也就是说，$U(B, 0) = U(B, 1)$。[7] 令 U_B 表示积极治疗下的福利。此时，(13)–(16) 可简化为

(17) $U(A, 0) > U_B > U(A,1)$。

(18) 若 $p\cdot U(A, 1) + (1 - p)\cdot U(A, 0) \geq U_B$，则选择 A；
若 $U_B \geq p\cdot U(A, 1) + (1 - p)\cdot U(A, 0)$，则选择 B。

[7] 例如，积极治疗可能是通过手术切除局部肿瘤，而该肿瘤可能（$y = 1$）是恶性的，也可能不是（$y = 0$）。假设只要癌症存在，手术就总能将其消除。那么，手术就能消除疾病。由于手术具有侵入性且成本高昂，其实施会对福利产生负面的副作用，而且无论是否存在癌症，这种影响都相同。

(19) $\max [p \cdot U(A, 1) + (1 - p) \cdot U(A, 0), U_B]$。

$$(20) \qquad p^{\#} = \frac{U(A,0) - U_B}{U(A, 0) - U(A, 1)}.$$

如果将福利的位置和尺度标准化，令 $U(A, 0) = 1$ 且 $U(A, 1) = 0$，则可进一步简化。[8] 于是 $1 > U_B > 0$。当 $1 - p \geq U_B$ 时，临床医生选择 A；当 $U_B \geq 1 - p$ 时，选择 B。最优福利为 $\max (1 - p, U_B)$。临界患病概率为 $p^{\#} = 1 - U_B$。下文我们假设积极治疗能够消除疾病，并以这种方式将监测的福利标准化。

4.4.2. 不知道患病概率时的治疗选择

不知道 p 是小于还是大于阈值 $p^{\#} = 1 - U_B$ 的临床医生，面临着模糊性下的决策问题。主观期望福利最大化 (7) 很简单，因为期望福利关于 p 呈线性。因此，临床医生的行为仿佛主观平均概率 $\int p_s d\pi(s)$ 就是真实的 p 值。如果 $\sum_{s \in U} \mu(s)$ 有限，那么成员度加权福利跨状态总和的最大化同样简单。此时，将 (10) 除以 $\sum_{s \in U} \mu(s)$，并利用 $\mu(s) = 0$ 对于 $s \in U/S$ 成立这一事实，可得出 (7)，其中 $\pi(s) \equiv \mu(s)/[\sum_{s \in S} \mu(s)]$。因此，使成员度加权福利最大化的治疗选择是 B，当

$$(21) \quad \sum_{s \in S} \mu(s)(1 - p_s) \leq U_B$$

如果相反的不等式成立，选项 A 将使成员度加权福利最大化。

[8] 这种标准化方法用于卫生经济学关于生活质量的研究，其中福利值 1 被解释为完美健康，而值 0 则表示健康状况差到使一个人在生存与死亡之间无差别。

Manski（2018）研究了经典MMR决策：临床医生知道 p 落在区间 $p_m < 1-U_B < p_M$内，其中 $p_m \equiv \min s \in S\ p_s$ 且 $p_M \equiv \max s \in S\ p_s$。推导很简单。如果 $p_s > 1 - U_B$，选择 A 就是在状态 s 下犯错，会产生遗憾 $p_s - (1 - U_B)$。最大遗憾为 $p_M - (1-U_B)$，发生在 p 取其可能的最大值时。如果 $p_s < 1 - U_B$，选择 B 就是错误的，会产生遗憾 $(1 - U_B) - p_s$。最大遗憾为 $(1 - U_B) - p_m$，发生在 p 取其最小值时。因此，当 $(1 - U_B) - p_m < p_M - (1 - U_B)$ 时，使最大遗憾最小化的治疗选择是 B；等价地，当 $(p_m + p_M)/2 > 1 - U_B$ 时也是如此。对称地，当 $(p_m + p_M)/2 < 1 - U_B$ 时，A 使最大遗憾最小化。MMR 等于 $\min\{p_M - (1 - U_B), (1 - U_B) - p_m\}$。

对隶属度加权MMR进行最小化可扩展这一推导。令 S_B 为满足 $p_s > 1 - U_B$ 的 S 的子集。在任何此类状态下选择处理 A 都是错误的，其隶属度加权遗憾为 $\mu(s)[p_s - (1 - U_B)]$。S_B 中的最大遗憾为 $\max_{s \in S(B)} \mu(s)[p_s - (1-U_B)]$。对称地，令 S_A 为满足 $p_s < 1 - U_B$ 的 S 的子集。在任何此类状态下选择 B 都是错误的，其加权遗憾为 $\mu(s)[(1 - U_B) - p_s]$。S_A 中的最大遗憾为 $\max_{s \in S(A)} \mu(s)[(1 - U_B) - p_s]$。因此，使最大遗憾最小的治疗选择为 B，当

(22) $\text{最大值}_{s \in S(A)}\ \mu(s)[(1 - U_B) - p_s] \leq \text{最大值}_{s \in S(B)}\ \mu(s)[p_s - (1 - U_B)]$.

如果相反的不等式成立，则选项 A 可使最大遗憾最小化。

使加权最大遗憾最小化的治疗选择，可能与使经典最大遗憾最小化的治疗选择相同，也可能不同。如果隶属度在各状态下保持不变，这两种选择显然一致。否则，加权 MMR 选择取决于 [μ(s) 与 p_s] 在各状态下的联合变异。

4.4.3. 在临床实践中指定隶属度

在实践中确定隶属度需要临床判断。这必然取决于所考虑的医疗情境。关于贝叶斯治疗选择的文献假定

临床医生会对患病概率设定先验主观分布，并在随机试验和观察性数据收集获得样本数据后对其进行更新。我们认为，贝叶斯治疗选择的倡导者应当愿意考虑对患病概率设定先验隶属度，并使用贝叶斯定理对其进行更新，正如第4.1.1节所述。

医学中的统计分析主要采用频率学派而非贝叶斯学派的概念。在计算患病概率的置信区间时，普遍做法是将 p 的状态空间取为整个 [0, 1] 区间，而非其中某个子集。我们尚无现成的解释来说明这种做法。根据我们对临床医生的非正式观察，他们很少认为患病概率的所有取值都同样可能。或许临床医生会希望为所有患病概率指定正隶属度，但我们推测，他们很少会为所有 $p \in [0, 1]$ 指定相同的隶属度，也很少会对属性不同的患者指定相同的隶属度。

5. 残余状态具有正隶属度时的分析

现在，我们将分析范围扩展到残余状态具有正隶属度的情形。我们发现，加权极大极小准则（12）有时不满足第3节的合理性性质。因此，我们重点考察主观期望福利最大化和最小最大遗憾的加权扩展（10）和（11）-(11′)。

经典决策理论将所有不确定性都视为对真实自然状态缺乏了解。对于每个可能的状态 s，福利向量 $[w(c, s),\ c \in C]$ 是已知的。我们不能同样假定剩余状态下的福利向量是已知的。若果真如此，r 就会标记一个普通状态。将 r 加入全集 U 后，分析仍将保持不变。剩余状态下决策的难点本质上在于 $[w(c, r),\ c \in C]$ 并非已知。

我们在《引言》中指出，不完全契约经济理论的研究试图通过对剩余状态下的福利指定一个主观概率分布来应对这一问题。这里我们采用较弱的假设：$[w(c, r),\ c \in C]$ 属于 $R^{|C|}$ 中一个指定的非单元素子集，我们将其记为 Ω。

从贝叶斯分析的角度来看，Ω 可以被视为一个形状未指定的主观分布的支集。当 Ω 是 $R^{|C|}$ 的真子集时，决策者面临的是“部分已知的未知”问题。[9]

5.1. 成员度加权福利跨状态总和的最大化

将判据（10）扩展到 μ(r) > 0 的情形，可以直接得出：当

$$(23)\qquad \sum_{s \in U} \mu(s)w(c, s) + \mu(r)\omega(c, r) \geq \sum_{s \in U} \mu(s)w(d, s) + \mu(r)\omega(d, r), \quad \text{all } \omega \in \Omega,$$

或者等价地，当

$$(23')\qquad \sum_{s \in U} \mu(s)[w(c, s) - w(d, s)] \geq \mu(r)[\omega(d, r) - \omega(c, r)], \quad \text{all } \omega \in \Omega.$$

此外，如果对于某个 ω ∈ Ω 不等式是严格的，则行动 c 应严格优于行动 d。

如果（i）ω(d, r) − ω(c, r) 随ω变化得足够大，并且（ii）μ(r) 足够大，则行动 c 和 d 不存在确定性偏好排序。在这种情况下，想要最大化成员度加权福利的跨状态总和的决策者无法做到这一点。决策者必须采用某种模糊性下的选择方法。

[9] 为了恢复将所有不确定性都表述为对真实自然状态缺乏知识的经典做法，可以将每个 ω ∈ Ω 视为索引一个不同的标记状态。这样一来，就不会使用剩余状态这一概念。相反，标记状态集将从 U 扩展为 (U, Ω)。我们不采取这种做法，因为这要求为 Ω的每个元素分别赋予一个隶属度。如果正如 Machina（2003年）所写，剩余状态是“一个最终兜底状态，其标签类似于‘上述均非’，且结果定义得非常含糊”，那么我们发现很难设想如何进行这种处理。我们承认，决策者也可能发现，很难将隶属度 μ(r) 与我们所设想的单一剩余状态联系起来。

5.2. 成员权重最小最大遗憾

将剩余状态纳入MMR决策非常直接。只需将（11′）扩展为

(24 μ [−] μ [ω − ω] .) 最小 最大 { 最大 (s) 最大 w(d, s) w(c, s), (r) 最大 最大 (d, r) (c, r)} c C s U d C d C

问题（24）扩展了最大化遗憾所涉及的空间，将 r 纳入其中。在考虑 r 时，遗憾是在Ω 可行福利函数的空间上进行最大化的。

其他条件不变，问题（24）的结果取决于 μ(r) 和 Ω。如果 μ(r) 较小，或者Ω 中的福利向量意味着较小的遗憾，则最大遗憾出现在如第4节中对 U 的最大化过程中。此时，剩余状态的存在不会影响决策。若 μ(r) 与Ω 上的最大遗憾的乘积较大，则最大遗憾出现在对 Ω 的最大化过程中。此时，剩余状态中各行动的遗憾变化决定了 MMR 行动。

5.3. 有界变动假设

其他条件不变，ω(d, r) – ω(c, r) 在可行福利函数空间 Ω 中的变动幅度，决定了将分析扩展到剩余状态是否会影响决策，以及如何影响决策。为说明这一点，我们在包含两个备选方案 e 和 f 的决策问题背景下，考察这一差值的有界变动假设。为便于阐述，假设在主观期望福利最大化和最小最大遗憾这两种方法的成员资格加权扩展下，e 在带标签状态全集中弱优于 f。有界变动假设如下：

(25) $\delta_{(fe)l} \le \omega(f, r) - \omega(e, r) \le \delta_{(fe)u}$, all $\omega \in \Omega$,

对于某些已知常数 $\delta_{(fe)l}$ 和 $\delta_{(fe)u}$，其中 $\delta_{(fe)l} < \delta_{(fe)u}$

5.3.1. 成员度加权福利跨状态总和的最大化

由于 e 是带标签状态全集中的弱偏好行动，(10) 意味着 $\sum_{s \in U}\mu(s)[w(e, s) - w(f, s)] \geq 0$。(23′) 意味着，如果 $\sum_{s \in U} \mu(s)[w(e, s) - w(f, s)] \geq \mu(r)\delta_{(fe)u}$，那么在存在剩余状态的情况下，e 仍然是弱偏好的；如果 $\sum_{s \in U} \mu(s)[w(e, s) - w(f, s)] \leq \mu(r)\delta_{(fe)l}$，则 f 是弱偏好的。当 $\mu(r)\delta_{(fe)l} < \sum_{s \in U} \mu(s)[w(e, s) - w(f, s)] < \mu(r)\delta_{(fe)u}$ 时，e 和 f 不存在确定性偏好排序。

5.3.2. 成员权重最小最大遗憾

有界变动假设 (25) 意味着，在存在剩余状态的情况下，e 的最大遗憾为

$$\max \{ \max_{s \in U} \mu(s)[w(f, s) - w(e, s)], \mu(r)\delta_{(fe)u}\}.$$

注意到，(25) 可改写为

(25′) $$-\delta_{(fe)u} \leq \omega(e, r) - \omega(f, r) \leq -\delta_{(fe)l}, \quad \text{all } \omega \in \Omega,$$

在存在剩余状态的情况下，f 的最大遗憾为

$$\max \{ \max_{s \in U} \mu(s)[w(e, s) - w(f, s)], -\mu(r)\delta_{(fe)l}\}.$$

由于 e 是带标签状态全集中的弱偏好行动，(11′) 意味着

$$\max_{s \in U} \mu(s)[w(f, s) - w(e, s)] \leq \max_{s \in U} \mu(s)[w(e, s) - w(f, s)].$$

因此，除非 $\mu(r)\delta_{(fe)u}$ 过大，否则在存在剩余状态的情况下，e 仍然是弱偏好行动。

具体而言，如果满足以下条件，则优先
选择 f:

$$\mu(r)\delta_{(fe)u} > \max\{\max_{s \in U} \mu(s)[w(e, s) - w(f, s)], -\mu(r)\delta_{(fe)l}\}$$

否则，行动 e 是弱优选的。

5.3.3. 将预防原则视为有界变动假设

Grant 和 Quiggin（2013年）描述了一个决策问题，其中隐含地对剩余状态中的福利作出了有界变动假设。他们考察了两个行动之间的选择，这两个行动可能引出所谓的预防原则：相对于“会受到不利意外影响”的选项，该原则偏向于“安全选项”。他们阐述如下（第751页）：

> “当决策者（例如监管者）面临备选方案之间的选择时，预防原则便有其适用理由：其中一个备选方案所导致的结果，其相关状态空间要素已得到充分理解；而另一个备选方案所导致的结果，则在很大程度上取决于‘未知的未知’。如果大多数意外都令人不快，那么仅基于已知风险的风险分析将低估第二类选择的成本。”

在我们的框架中，假设行动 e 在带标签状态全集中是弱偏好的，但会“受到不利意外影响”，而行动 f 是“安全选项”。这表明，$\delta_{(fe)l}$ 为非负数，且$\delta_{(fe)u}$ 相对较大。于是，在采用隶属度加权最大化主观期望福利时，若 $\mu(r)\delta_{(fe)l}$ 超过带标签状态全集中的福利成员度加权差异，则行动 f 是弱偏好的——也就是说，预防原则适用。类似地，在采用成员权度最小最大遗憾时，如果剩余状态中行动 e 的加权最大遗憾 $\mu(r)\delta_{(fe)u}$超过带标签状态全集中行动 f 的加权最大遗憾，则预防原则适用。

在环境政策的公众讨论中，对预防原则的宽泛定性引用已十分常见，例如欧盟委员会发布的一份声明（2000年）便是如此。人们尤其普遍担忧，未来的全球变暖程度可能超过气候政策分析中所考虑的所有气候模型的预测。

如果这种担忧是有根据的，那么我们在第2.2节讨论的气候政策MMR研究就过于乐观了。更现实的做法，是在这些研究的状态空间中增添一个剩余状态；在该状态下，其中比较的每项政策所带来的福利都低于在所考虑的所有已标记状态下的福利。在此背景下，安全选项可能是积极减少温室气体排放的政策。面临不利意外的政策，则可能是逐步减少排放的政策。

6. 结论

我们认为，以状态空间中的隶属度作为概念上的合理方式来推广经典决策理论，是值得采用的。我们再次强调，这一概念与贝叶斯决策理论中的主观概率分布有实质区别，但二者并不矛盾。贝叶斯理论在经典状态空间的元素上赋予主观分布，而其中每个元素的隶属度均为一。隶属度表达了一种不同的观点：决策者可能希望以定量方式表达对状态空间构成的不确定性。主观概率与隶属度在数学上的区别在于，前者之和必须为一，而后者则不必如此。

我们认为，首要的未决问题在于，现实中的决策者在实践中会在多大程度上认为隶属度是一个有用的概念。为探究这一问题，我们计划开展实证研究。我们将尝试从现实中的决策者那里 eliciting 隶属度，并了解他们会如何在现实情境中使用这些隶属度。我们还将尝试了解决策者如何结合理论与实证证据来形成隶属度。除其他目标外，我们尤其想了解，决策者是否会以贝叶斯方式利用样本数据更新隶属度，或者采用频率学派统计理论的事前框架；按照该框架，样本数据不应影响隶属度。

~~参考文献~~

Barro, R. and D. Gordon（1983年），《自然率模型中的货币政策积极理论》，《政治经济学杂志》，91，589-610。Brock, W., S. Durlauf, J. Nason, and G. Rondina（2007a年），《作为政策指引的简单规则与最优规则》，《货币经济学杂志》，54，1372-1396。Brock, W., S. Durlauf, and K. West（2007b年），《模型不确定性与政策评估：一些理论与实证》，《计量经济学杂志》，136，629-664。Cogley, T. and T. Sargent（2005年），《美国通货膨胀的征服：学习与对模型不确定性的稳健性》，《经济动态评论》，8，528-563。DeCanio, S., C. Manski, and A. Sanstad（2022年），《气候建模与代际贴现存在深度不确定性时的极小最大遗憾气候政策》，《生态经济学》，201，https://doi.org/10.1016/j.ecolecon.2022.107552。Dominitz, J. and C. Manski（2026），《关于人工超级智能的决策理论视角：应对预测与治疗选择中的缺失数据问题》，《理论与决策》，https://doi.org/10.1007/s11238-026-10150-7。欧盟委员会（2000年），《委员会通过关于预防原则的通告》，https://ec.europa.eu/commission/presscorner/detail/en/ip_00_96，访问日期：2026年11月9日。

Grant, S. 和 J. Quiggin（2013年），《未意识情境下的归纳推理》，《经济理论》，54，717- 755。

Hansen, L 和 Sargent（2001a年），《承认宏观经济理论中的模型设定错误，《经济研究 *f* 经济动态，4，519-535。

Hansen, L. 和 T. Sargent（2001b年），《稳健控制与模型不确定性，《美国经济评论》，91，60-66。

Hart, O. 和 J. Moore（1999 66，115138 ），《不完全合同的基础》，《经济研究评论》，-。

Hausman, J.（1978年），“计量经济学中的设定检验”，《计量经济学》，46，1251-1271。

Karni, E. 和 M. Viero（2017年），“对未意识的意识：面对无知的决策理论”，《经济理论杂志》，168，301-328。Levin, A. 和 J. Williams（2003年），“采用竞争性参照模型的稳健货币政策”，《货币经济学杂志》，50，945-975。Machina, M.（2003年），“世界状态与决策理论状态”，载于 D. Meyer（编），《风险经济学》，第2章，卡拉马祖：厄普约翰就业研究所。

Manski, C. (2009), “歧义下的多样化处理”，《国际经济评论》，50，1013- 1041。

Manski, C. (2011), “现实主义理性”，《理论与决策》，71，195-210。Manski, C. (2013),《不确定世界中的公共政策：分析与决策》，马萨诸塞州剑桥：哈佛大学出版社。Manski, C. (2018), “针对医疗决策和个性化风险评估的可信生态推断”，《数量经济学》，9，541-569。Manski, C. 和 J. Pepper (2013), “ 威慑与死刑：利用重复横截面进行部分识别分析 ”，《定量犯罪学杂志》，29，123-141。Manski, C. 和 J. Pepper (2018), “携枪权法律如何影响犯罪率？运用有界变差假设应对模糊性”，《经济学与统计学评论》，100，页码232- 44。Manski, C. A. Sanstad, 和 S. DeCanio (2021), “应对气候建模和政策分析中的部分识别问题”，《美国国家科学院院刊》，118，doi:10.1073/pnas.2022886118。Maskin, E. 和 J. Tirole (1999), “不可预见的意外情况与不完全合同”，《经济研究评论》，66，83-114。Nordhaus, W.(2019), “气候变化：经济学面临的终极挑战”，《美国经济评论》，109，1991-2014。Pauker, S. 和 J. Kassirer (1975), “治疗决策：成本效益分析”，《新英格兰医学杂志》，293，229-234。Pauker, S. 和 J. Kassirer (1980), “临床决策的阈值法”，《新英格兰医学杂志》，302，1109-1117。Phelps C. 和 A. Mushlin (1988), “运用医学决策理论聚焦技术评估”，《医学决策》，8，279-289。Rogoff, K. (1985), “对中间目标承诺的最优程度”，《经济学季刊》，100，1169-1189。Savage, L. (1954),《统计学基础》，纽约：威利出版社。Smith, R.、C. Tebaldi、D. Nychka 和 L. Mearns，“气候模型集合中不确定性的贝叶斯建模”，《美国统计学会杂志》，104，97-116。Woodford (2010), “最优货币稳定政策”，载于B. Friedman和M. Woodford（编）《货币经济学手册》，第3卷（723-828），阿姆斯特丹：爱思唯尔。Zadeh, L. (1965), “模糊集”，《信息与控制》，8，338-353。