自旋轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚态中的高阶调制不稳定性：有限拉曼效应与分支分辨的谱重分布

Cui-CuiDing[1], Boris A. Malomed[2,3], 和 Qin Zhou[1,4*]
[1] School of Microelectronics, Wuhan Textile University, Wuhan 430200, China
[2] Department of Physical Electronics, School of Electrical Engineering, Faculty of Engineering, Tel Aviv University, Tel Aviv, Israel
[3] Instituto de Alta Investigación, Universidad de Tarapacá, Casilla 7D, Arica, Chile and
[4] State Key Laboratory of New Textile Materials and Advanced Processing, Wuhan Textile University, Wuhan 430200, China

arXiv:2611.28514v1 [cond-mat.quant-gas] 21 Nov 2026

我们研究了等相互作用的自旋轨道耦合（SOC）二元玻色–爱因斯坦凝聚体中的高阶调制不稳定性和非线性谱重分布。对于有限拉曼耦合，该系统不可积，并呈现非振荡和振荡两种不稳定性机制。拉曼耦合会重塑不稳定性带，并改变哪些谐波能够增长。直接数值模拟表明，这种重组会改变随后的非线性边带动力学。在零拉曼极限下，对于固定载波波数，SOC 会使连续谐波在不稳定性带和稳定性间隙之间移动。因此，它能够调控高阶不稳定性、不同的呼吸子分支以及频率跳跃序列。我们推导出载波和任意阶边带的精确代数系数，由此得到完整无限边带序列的精确几何功率谱，并对载波耗尽、方向不平衡和边带衰减作出统一描述，其中包括不稳定性增益与最小谱衰减率之间的精确关系。对于背景和调制波数相同的两个共存呼吸子分支，高增益分支的最大载波耗尽可能更小、高阶谱衰减可能更慢，方向不平衡也可能更弱。即使 k 和 k_L 均非零，当 SOC 引起的动量偏移补偿载波波数时，SOC 也能恢复对称边带谱。这些分析和数值结果阐明了 SOC 和拉曼耦合如何组织高阶不稳定性与非线性谱重分布，为研究多组分凝聚态中的相干非线性波动力学提供了统一框架。

I. 引言

调制不稳定性（MI）会放大光学、等离子体、流体和玻色-爱因斯坦凝聚体（BEC）中平面波背景上的微弱扰动 [1–4]。色散管理、非局域相互作用和耗散会改变调制不稳定性，而光学和流体系统还会呈现更复杂的不稳定性区域 [6–8, 10, 11]。除线性增长外，非线性耦合还会将功率从载波转移至边带，并生成局域结构 [5, 16]。阿赫迈德季夫呼吸子（AB）在空间上具有周期性、在时间上呈局域性，可作为描述相干调制不稳定性增长与衰减的精确解 [17, 18]。相关的功率交换与费米–帕斯塔–乌拉姆–津谷（FPUT）复现密切相关；在这一过程中，边带功率会返回载波 [15, 18–20]。高阶调制不稳定性涉及初始调制的高次谐波，这些谐波也位于不稳定性带内，并参与非线性演化。它们之间的非线性相互作用可产生多重呼吸子事件和谱级联 [21, 25]。

组分间耦合使矢量系统中的调制不稳定性动力学拥有更广泛的表现形式 [22–24]。Manakov系统支持非对称性AB谱和非简并呼吸子分支，而不稳定性带之间的稳定间隙可能导致频率跳跃 [17, 25]。自旋轨道耦合（SOC）将原子赝自旋与动量耦合起来，并为玻色-爱因斯坦凝聚体提供可调的单粒子色散 [27–30]。相关研究考察了螺旋自旋轨道耦合玻色–爱因斯坦凝聚体中的孤子和呼吸子 [37–39], ，以及耦合凝聚体中呼吸子相位和背景场的周期调制 [31]。针对有限拉曼耦合，Bhat等人分析了具有一般相互作用系数的调制不稳定性 [40], ，而Mithun和Kasamatsu研究了其非线性动力学 [41]。研究还探讨了具有螺旋自旋轨道耦合、剩余相互作用和开放系统动力学的凝聚体中的调制不稳定性 [42–44]。

本文考察自旋轨道耦合如何影响相等相互作用二元玻色–爱因斯坦凝聚体中的高阶调制不稳定性和非线性谱重分布。对于有限拉曼耦合，改变自旋轨道耦合强度会改变不稳定性谱，并决定给定调制的哪些谐波会失稳。在可积零拉曼极限下，固定载波波数而改变自旋轨道耦合，会使连续谐波在不稳定性带与稳定间隙之间移动，并改变可用的呼吸子分支。直
接模拟和精确多反常波解展示了这些由自旋轨道耦合引起的变化如何影响边带功率的再分布、非简并呼吸子激发和频率跳跃。

在零拉曼极限下，通过规范变换可将方程映射为马纳科夫系统。基本矢量AB的已知精确傅里叶谱要求对正边带 [17], 进行逐阶升阶求导，这使得对完整的

* qinzhou@whu.edu.cn

边带序列的直接分析变得复杂。我们通过推导无需依赖阶数的求导即可获得的精确代数系数，克服了这一局限。这些表达式为整个无限边带序列建立了精确的谱定律，从而统一解析描述载波耗尽、方向不平衡和谱衰减。具体而言，我们推导出了正、负边带共有的几何衰减率及其与阶数无关的不对称比的精确表达式，并建立了调制不稳定性增长率与最小谱衰减率之间的精确关系。此外，我们还获得了谱对称性、单侧谱和完全载波耗尽的解析条件。对两个共存反常波解的比较表明，增益较高的分支可能经历较小的最大载波耗尽，同时其高阶边带衰减更慢，方向不平衡也更弱。

本文安排如下。第二节介绍自旋轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚模型，分析有无拉曼耦合时的调制不稳定性，并给出高阶调制不稳定性相图。第三节比较零拉曼极限下的直接数值模拟与精确多反常波解，并考察有限拉曼耦合下的非线性动力学。第四节推导精确傅里叶谱，并分析载波耗尽、方向不对称性和谱衰减，以及它们与调制不稳定性增益之间的关系。第五节总结主要结果。

II. 模型、调制不稳定性与精确多呼吸子解

A. 自旋轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚系统

我们考虑具有等权 Rashba–Dresselhaus 自旋轨道耦合 [45, 46]的准一维二元玻色–爱因斯坦凝聚体。频率为 $\omega_\perp$的强横向谐振囚禁冻结了横向自由度，从而可采用有效的一维平均场描述。能量密度为 [47]

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_0 = \mathbf{\Psi}^\dagger \mathcal{H}_s \mathbf{\Psi} + \frac{g_{11}}{2}|\Psi_1|^4 + \frac{g_{22}}{2}|\Psi_2|^4 \\ + g_{12}|\Psi_1|^2|\Psi_2|^2,\end{aligned} \tag{1}$$

其中，$\mathbf{\Psi} = (\Psi_1, \Psi_2)^T$ 为自旋量序参量。单粒子哈密顿量为

$$\mathcal{H}_s = \frac{1}{2m}(p_x \mathbf{I} - k_L \boldsymbol{\sigma}_z)^2 + \Omega_R \boldsymbol{\sigma}_x + V(x)\mathbf{I}, \tag{2}$$

其中，$p_x = -i\hbar\partial_x$ 是纵向动量算符，m 是原子质量，$\boldsymbol{\sigma}_{x,\ z}$ 是泡利矩阵，$\mathbf{I}$ 是单位矩阵。这里，k_L 表征自旋轨道耦合强度，Ω_R 是两个赝自旋分量之间的拉曼耦合强度，而 $V(x)$是纵向外势。在全文中，我们考虑 $V(x) = 0$。有效的一维相互作用系数为 $g_{ij} = 2\alpha_{ij}\hbar\omega_\perp$，其中 α_{ij} 是相应的 s波散射长度。我们假设相等相互作用，$g_{11} = g_{22} = g_{12} = g$。

我们分别以 $a_\perp = \sqrt{\hbar/(m\omega_\perp)}$、$\omega_\perp^{-1}$ 、 $\hbar\omega_\perp$ 和 $(2|\alpha_{11}|)^{-1}$ 为长度、时间、能量和一维密度的单位。耦合参数重新标度为 $k_L \mapsto -a_\perp k_L/\hbar$ 和 $\Omega_R \mapsto \Omega_R/(\hbar\omega_\perp)$，无量纲量仍使用相同的符号。采用这些标度，并将恒定的 SOC 能量位移并入能量零点后，耦合的 Gross–Pitaevskii 方程写为 [47]

$$\begin{aligned} i\frac{\partial \Psi_1}{\partial t} =& -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} - ik_L\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \\ & - \sigma(|\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2)\Psi_1 + \Omega_R \Psi_2, \\ i\frac{\partial \Psi_2}{\partial t} =& -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} + ik_L\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \\ & - \sigma(|\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2)\Psi_2 + \Omega_R \Psi_1, \end{aligned} \tag{3}$$

其中 $\sigma = -\mathrm{sgn}(\alpha_{11})$，$\sigma = +1$ 和 -1 分别对应吸引相互作用和排斥相互作用。零拉曼极限下，系统是可积的，并具有下文所用的精确初等解和多 AB 解。

B. 有限拉曼耦合下的调制不稳定性

在参考文献 [40], 的调制不稳定性分析基础上，我们研究自旋轨道耦合和有限拉曼耦合如何决定不稳定谐波的分布，并构建相应的高阶调制不稳定性相图。这些相图揭示了下文所研究的非线性演化和呼吸子激发所对应的不稳定性区域。在零拉曼极限下，我们进一步将高阶调制不稳定性与精确多反常波解联系起来，并推导出基本呼吸子的精确傅里叶谱。在有限拉曼耦合的分析中，我们考虑具有零载波波数、两组分密度相等且处于同相的背景场，

$$\Psi_{10} = \Psi_{20} = \sqrt{N}\, e^{i\mu t}, \qquad \mu = 2\sigma N - \Omega_R, \tag{4}$$

其中 N 为每个组分的密度。

为考察该背景场的线性稳定性，我们引入小扰动，

$$\begin{aligned}\Psi_j = \Psi_{j0}\big[1 + p_j e^{-i(\omega x - \Omega t)} \\ + \chi_j^* e^{i(\omega x - \Omega^* t)}\big], \qquad j = 1, 2,\end{aligned} \tag{5}$$

其中，ω 为调制波数，Ω 为时间特征频率，p_j 和 χ_j 为小的复振幅。我们并不假设两个分量中的初始扰动相同：依赖于分量的系数 p_j 和 χ_j 允许其具有不同的振幅和相位。两个分量均属于同一正规模，共享 ω 和 Ω，而它们相对的扰动振幅和相位则由相应的特征向量决定。

将式（5）代入式（3），并仅保留线性项，可得到关于扰动振幅的四个齐次方程。要求存在非平凡解，可得色散关系 [40]

$$\Omega^4 - T\Omega^2 + D = 0, \tag{6}$$

其中

$$\begin{aligned} T &= \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{\omega^2}{2} - 4\sigma N\right) + \left(\frac{\omega^2}{2} - 2\Omega_R\right)^2 + 2k_L^2\omega^2, \\ D &= D_1 D_2 = \left[\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{\omega^2}{2} - 2\Omega_R\right) - k_L^2\omega^2\right] \\ &\quad \times \left[\left(\frac{\omega^2}{2} - 4\sigma N\right)\left(\frac{\omega^2}{2} - 2\Omega_R\right) - k_L^2\omega^2\right]. \end{aligned} \tag{7}$$

四个本征频率分支为

$$\Omega_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{T \pm \sqrt{\Delta_R}}{2}}. \tag{8}$$

其中 $\Delta_R = T^2 - 4D$。当至少一个分支的虚部非零时，就会发生调制不稳定性。所有分支均为实数的条件是

$$\Delta_R \geq 0, \qquad T \geq 0, \qquad D \geq 0.$$

最大调制不稳定性增长率，$G_{\max} = \max_{j=1,\ldots,4} |\text{虚部}\ \Omega_j|$，是

$$G_{\max} = \begin{cases} \sqrt{\max\left(0, \dfrac{\sqrt{\Delta_R} - T}{2}\right)}, & \Delta_R \geq 0, \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{D} - T}, & \Delta_R < 0, \end{cases} \tag{9}$$

其中，$\Delta_R < 0$ 意味着 $D > 0$。

图 1(a) 应结合方程（8）中的符号条件来解读。白色区域满足$G_{\max} = 0$，此时四个特征频率均为实数，对应稳定平面波；而彩色区域满足$G_{\max} > 0$，表现出调制不稳定性。曲线 $D_1 = 0$、$D_2 = 0$ 和 $\Delta_R = 0$ 标记了本征频率分支代数结构的变化。它们并非都代表稳定性边界，因为相邻区域可能均不稳定，但具有不同的特征频率结构。当 $\Delta_R < 0$ 时，四个特征频率构成一个复四元组，对应振荡型调制不稳定性。当 $\Delta_R > 0$ 和 $D < 0$ 时，一对特征频率为实数，另一对为纯虚数，对应指数增长（非振荡型）的调制不稳定性。此外，在 $\Delta_R > 0$、$D > 0$ 和 $T < 0$ 处也会出现不稳定结构，此时两对特征频率均为纯虚数。这种结构存在于完整图谱中，但图 1(b) 所示的 $k_L = 1.2$ 截线并未经过该结构。

图 1(a) 展示了 $N = \sigma = 1$ 和 $\Omega_R = 0.26$ 的调制不稳定性增益图。在图 1(b) 中沿 $k_L = 1.2$ 的截面直接呈现了不同的不稳定性类型：基频 $\omega_0 = 1$ 及其二次谐波位于复四元组区域（区域 I）中，三次谐波位于单虚数对区域（区域 II）中，而四次谐波是稳定的。因此，由同一基频调制产生的不同谐波可能具有不同的特征频率结构和不同类型的调制不稳定性。由此得到的高阶调制不稳定性相图如图 1(c) 所示，并在第 II D 节中进行了分析。

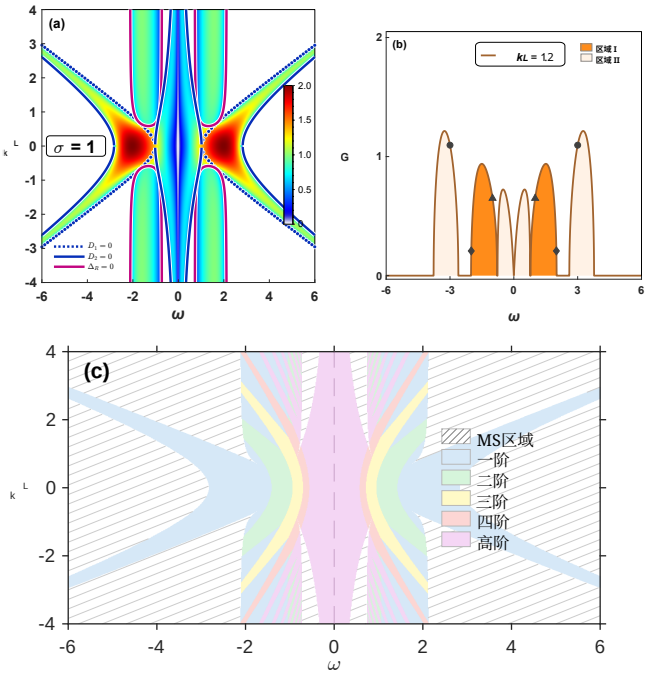

图 1. $N = \sigma = 1$、$\Omega_R = 0.26$ 和 $k_L = 0$ 对应的有限拉曼调制不稳定性结构。(a) (ω, k_L) 平面中的最大调制不稳定性增益。曲线标示 $D_1 = 0$、$D_2 = 0$ 和 $\Delta_R = 0$。(b) $k_L = 1.2$ 处的增益曲线；阴影区域表示相应的不稳定特征值结构，符号标示参考基频 $\omega_0 = 1$ 及其谐波。(c) (k_L, ω) 平面中的最高不稳定谐波指标 n；阴影线区域表示基频稳定。

C. 可积零拉曼极限与精确多反常波解

在零拉曼极限下，式 (3) 可通过规范变换映射为马纳科夫系统。一阶导数项类似于耦合光纤模型中的走离项 [26]，可通过分量依赖的规范变换消除。逆变换可恢复自旋轨道耦合依赖相位和有效波数。基本呼吸子解的形式为

$$\Psi_j = \Psi_{j0}\frac{\cosh(\Theta + i\vartheta_j)e^{i\theta_{1j}} + \varpi\cos(\Upsilon - i\upsilon_j)e^{i\theta_{2j}}}{\cosh\Theta + \varpi\cos\Upsilon}. \tag{10}$$

这里 Ψ_{j0} 是等密度的反向传播背景，

背景，

$$\Psi_{j0} = \sqrt{N}\exp[i(k_j x + \mu t)], \qquad k_1 = -k_2 = k,$$
$$\mu = 2\sigma N - \frac{k^2}{2} - k_L k. \tag{11}$$

有效背景波数为 $b_1 = -b_2 = k + k_L$。对于匹配的变换初始和边界数据，调制动力学仅通过它们的和依赖于 k 和 k_L。在固定载波波数k下，改变自旋轨道耦合强度会改变调制不稳定性带和可用的阿布洛维茨–拉迪克呼吸子分支，使指定调制的谐波进入或离开不稳定区域。

时间局域化和空间周期性由下式描述：

$$\Theta = \omega\tau_I t_1,$$
$$\Upsilon = \omega\left[x_1 + \left(\tau_R + \frac{\omega}{2}\right)t_1\right] + \arg\frac{2\tau_I}{2\tau_I - i\omega}, \tag{12}$$

其中 ω 是调制波数，$x_1 = x - x_{10}$、$t_1 = t - t_{10}$和 τ_R，τ_I 是 τ的实部和虚部。特征值 τ 满足

$$1 + \sigma\sum_{j=1}^{2}\frac{N}{(\tau + b_j)(\tau + \omega + b_j)} = 0. \tag{13}$$

其余参数和多阿布洛维茨–拉迪克呼吸子构造见附录 A。这些解描述了选定的相干调制不稳定性事件；宽带扰动可能导致更复杂的演化 [48]。

对于式 (11) 中的背景场，零拉曼调制不稳定性特征频率为

$$\Omega_{1,2,3,4} = \pm|\omega|\sqrt{\Lambda \pm \sqrt{\Delta}}, \tag{14}$$

其中 $b = k + k_L$ 和

$$\Lambda = b^2 - \sigma N + \frac{\omega^2}{4}, \qquad \Delta = -4\sigma N b^2 + N^2 + b^2\omega^2. \tag{15}$$

方程（13）对应的根为

$$\tau_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\Lambda \pm \sqrt{\Delta}} - \frac{\omega}{2}. \tag{16}$$

对于常规AB解，只有满足方程（13）且对两个分量均有 $(\tau + b_j)(\tau + b_j + \omega) \neq 0$ 的非实根才是允许的。

对于 $\omega > 0$，调制不稳定性特征频率与对应的AB特征值满足 $\Omega = \omega(\tau + \omega/2)$。由于 $\omega/2$ 为实数，调制不稳定性增长率为 $|\mathrm{Im}\ \Omega| = |\omega\tau_I|$。该增长率也决定了平面波背景附近呼吸子调制的指数增长和衰减。

D. 高阶调制不稳定性通道与相图

对于给定的基波数 $\omega > 0$，我们将最高不稳定谐波指标定义为

$$n = \max\{m \in \mathbb{N} : G_{\max}(m\omega) > 0\}, \qquad G_{\max}(\omega) > 0,$$

其中，$G_{\max}(m\omega)$ 是属于第 m 个谐波的四个分支中的最大调制不稳定性增长率。零增益带边缘不计入其中，且当基频稳定时，n 未定义。中间谐波可能位于稳定间隙中，因此 n 不必等于不稳定谐波的数量。它也不同于多AB阶数，后者统计呼吸子组分的数量；当某个谐波具有多个不稳定分支时，多AB阶数可能超过 n。此定义同样适用于图 1(c) 中的有限拉曼相图。

现在，我们考察排斥相互作用和吸引相互作用下，(b, ω) 平面中的零拉曼MI相图。我们固定载波波数为 $k = 0.2$，并改变自旋轨道耦合强度 k_L，这会使有效背景波数发生偏移，并改变哪些谐波会变得不稳定。

对于排斥相互作用（$\sigma = -1$），只有方程（14）中带内层负号的分支可能变得不稳定。调制不稳定性增益关于 $\omega = 0$ 对称，且 $k_L = -k$[图2(a)]。在 $m\omega$ 处计算色散关系后，当 m 次谐波满足以下条件时便会不稳定：

$$2\sqrt{\max(b^2 - 2N, 0)} < m\omega < 2|b|.$$

当基频不稳定时，不稳定谐波构成连续序列，其最高阶数为

$$n = \left\lceil \frac{2|b|}{\omega} \right\rceil - 1.$$

严格不等式排除了中性带边缘处的谐波。

对于图2(b)中的 $N = 1$和 $k_L = 1$，不稳定性条件变为 $0 < m\omega < 2.4$。当 $\omega = 1$时，前两个谐波不稳定，而所有更高阶谐波均稳定，因此得到 $n = 2$。在载波波数固定时，改变自旋轨道耦合强度会使谐波跨越不稳定性边界，从而导致图2(c)所示n发生阶梯式变化。

对于吸引相互作用（$\sigma = +1$），图3(a)中有两个存在不稳定分支的区域。对于与第 m阶谐波相关的阿布洛维茨–拉迪克呼吸子，其周期调制的相速度由 Υ =const 得到，为–（$\tau_R + m\omega/2$）。这里，τ、Λ和 Δ均在 $m\omega$处计算。在区域 I（$\Delta < 0$）中，两个非简并阿布洛维茨–拉迪克呼吸子分支具有相同的调制不稳定性增长率，且调制相速度 [49]方向相反。在区域 II（$\Delta > 0$）的不稳定部分，$\tau_R = -m\omega/2$，因此调制相速度消失。可能出现一个或两个不稳定分支；当$\Lambda \pm \sqrt{\Delta}$ 均为负时，两个增长率不同的分支共存。

对于 $b^2 < N/2$，第 m 次谐波在以下情况下是不稳定的

$$0 < m\omega < 2\sqrt{b^2 + 2N}.$$

对于 $b^2 \geq N/2$，条件为

$$0 < m\omega < \sqrt{4N - \frac{N^2}{b^2}} \quad \text{or} \quad 2|b| < m\omega < 2\sqrt{b^2 + 2N}.$$

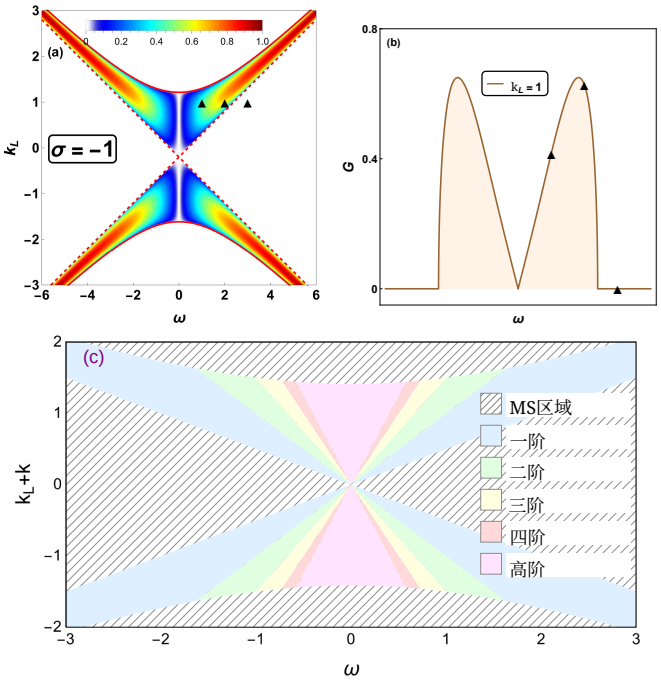

图2。排斥相互作用：(a) 调制不稳定性增益分布；(b) 代表性自旋轨道耦合参数下，增益随调制波数的变化，其中三角形标记 $\omega = 1$ 及其谐波；(c) $(k_L + k,\ \omega)$平面中的最高不稳定谐波指标 n，阴影线表示稳定基频。其他参数为 $N = 1$ 和 $k = 0.2$。

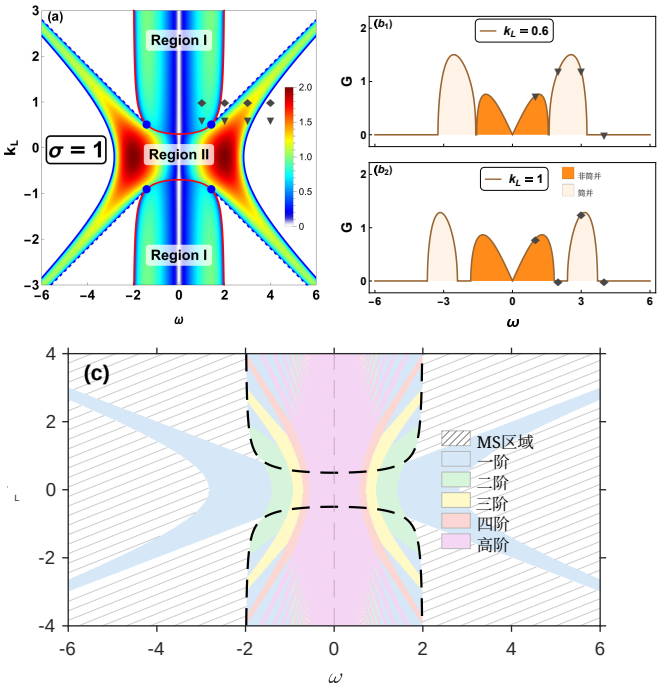

图3. 吸引相互作用：(a) 调制不稳定性增益分布；(b) 代表性自旋轨道耦合参数下，增益随调制波数的变化，三角形和菱形标记分别表示 $\omega = 1$及其谐波；(c) $(k_L + k,\ \omega)$ 平面上的最高不稳定谐波指标 n。区域 I 和 II 分别表示漂移非简并分支区间和静态调制分支区间；阴影线表示稳定基频，黑色虚线表示 $\Delta = 0$。其他参数为 $N = 1$ 和 $k = 0.2$。

在 $b^2 = N/2$ 处，只有中性点 $m\omega = \sqrt{2N}$ 将两个区间分隔开；对于$b^2 > N/2$，则会出现有限的稳定性间隙。因此，在载波波数固定时改变 SOC，可以将调制不稳定性频带分裂为两个彼此分离的区间。

在不稳定区域内，$\Delta = 0$将具有移动和静止调制相位的阿布洛维茨–拉迪克呼吸子分支分隔开来。该条件不同于 $b^2 > N/2$，后者决定是否存在有限的稳定性间隙。

图3(c)通过将不稳定性条件应用于每个谐波 $m\omega$得到。在吸引情形下，中间谐波可能处于稳定性间隙内，而更高阶谐波仍保持不稳定。这些稳定谐波不会通过线性调制不稳定性独立增长，但可以通过非线性混频获得谱功率。不稳定谐波的分离提供了第III节频率跳变示例背后的线性机制。黑色虚线曲线表示在基频波数处计算的 $\Delta = 0$。

图 4 展示了谐波分布如何随自旋轨道耦合强度变化。对于排斥相互作用，不稳定谐波连续排列，且 n 呈阶梯式变化。对于吸引相互作用，稳定区间使不稳定谐波变得不连续，且 n可能呈非单调变化。对于 $b^2 > N/2$，红色曲线统计稳定区间内的谐波数，

$$\sqrt{4N - \frac{N^2}{b^2}} < m\omega < 2|b|.$$

严格不等式排除了中性带边缘。

这些线性结果确定了哪些谐波能够通过调制不稳定性增长，但无法确定它们后续的非线性演化。第三节通过直接数值模拟和选定的精确多反常波解考察这种演化。

III. 非线性演化与多呼吸子动力学

A. 选定多呼吸子动力学的数值验证

在零拉曼极限下，我们将方程 (3) 的直接数值模拟与选定的精确多反常波解进行比较。比较考察呼吸子事件的数量、调制波数、局域化顺序以及谱再分布。多 AB 阶数M 表示呼吸子组分的数量，不一定等于最高不稳定谐波指标 n，因为一个谐波可以支持多个不稳定分支。

模拟从两个分量中相同的微弱相对

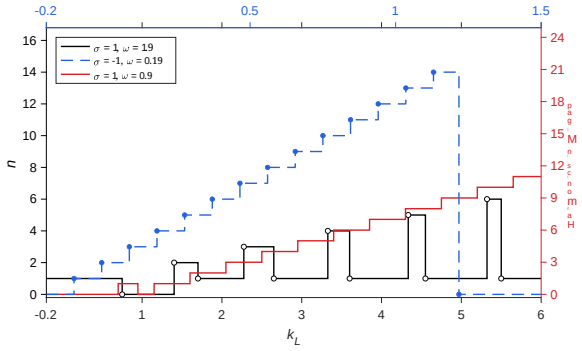

图 4. 最高不稳定谐波指标 n（左轴）和位于稳定性间隙内的谐波数量（右轴）随 k_L 的变化。黑色实线：吸引性，$\omega = 1.9$；蓝色虚线：排斥性，$\omega = 0.19$；红色实线：吸引性交互作用的间隙谐波计数，$\omega = 0.9$。在 n 曲线上标记的零值仅用于绘图，表示稳定基频；此处不赋予 n 任何数值。黑色/红色曲线使用下方的 k_L 轴，蓝色曲线使用上方的轴。其他参数为 $N = 1$ 和 $k = 0.2$。

调制开始，

$$\Psi_j(x,0) = [1 + \epsilon\cos(\omega x)]\Psi_{j0}(x,0), \qquad (17)$$

取 $\epsilon = 0.002$，并采用分步傅里叶法。初始调制激发基频，而更高次谐波由非线性演化产生，并可能位于稳定或不稳定的调制不稳定性区域。

数值初始条件与精确的多重阿基米德呼吸子轮廓不同，如图5–7中使用相同坐标轴范围的插图所示。对于每组比较，组成波数和分支均根据调制不稳定性分析选取，而空间和时间平移则用于定位各个呼吸子事件。因此，这里的比较仅针对选定的相干增长—衰减事件。它并未对宽带扰动下的长期调制不稳定性动力学作出一般性描述，因为这类动力学可能涉及可积湍流或孤子气体 [48]。

式（17）中的等密度反向传播背景和偶对称调制，使数值演化中出现 $\Psi_1(x,\ t) = \Psi_2(-x,\ t)$。因此，以下我们聚焦于$\Psi_1$ 分量。

对于排斥相互作用（$\sigma = -1$），图2中三角形标记的参数使 ω 和 2ω 不稳定，而 3ω 稳定。因此，$n = 2$，我们将模拟结果与一个包含调制波数 $\{\omega, 2\omega\}$的精确 $M = 2$ 多重阿基米德呼吸子解进行比较。

图5(a)和图5(c)表明，尽管初始剖面不同，精确解仍再现了数值双呼吸子局域化序列和空间调制。图5(b)展示了连续边带之间伴随发生的功率重新分配。在各个呼吸子的局域化时刻附近，图5(d)将数值谱与相应的基本呼吸子频谱进行了比较。这些比较共同支持了以下描述：利用调制不稳定性相图中确定的不稳定谐波来描述所选取的双呼吸子事件。

对于吸引相互作用（$\sigma = +1$），在载波波数固定时改变自旋轨道耦合，会改变哪些谐波和阿布洛维茨–拉迪克呼吸子分支处于不稳定状态。图3中标出的两个示例分别展示了同一谐波对应多个不稳定分支，以及跨越稳定区间的频率跳跃。

对于 $k_L = 0.6$ 图3(b_1)中的情况，基频 ω 支持两个增长率相等且调制相速度相反的不稳定分支。谐波 2ω 和 3ω 各支持一个调制相速度为零的不稳定分支。因此，$n = 3$，而所选精确解具有 $M = 4$ 个组分，其调制波数为 $\{\omega, \omega, 2\omega, 3\omega\}$。重复出现的 ω 表示基频处的两个不同分支。

图6表明，该精确四反常波解再现了数值模拟中观察到的呼吸子局域化序列、空间调制和边带功率再分配。面板(d)将组分局域化时刻附近的数值谱与完整多呼吸子解的傅里叶投影进行了比较。

在固定 $k = 0.2$ 和 $\omega = 1$的情况下，将 k_L 从0.6增大到1，会使 2ω 进入稳定性间隙，而 ω 和 3ω 在 [图3(b_2)]中仍保持不稳定。基频支持两个不稳定分支，3ω 支持一个。因此，$n = 3$，所选精确解具有 $M = 3$ 个组分，其调制波数为 $\{\omega, \omega, 3\omega\}$。稳定谐波 2ω 并不是一个独立的调制不稳定性呼吸子通道，但非线性混频仍可在该谐波处产生谱功率。

图7显示，所选的三反常波解再现了数值频率跳跃序列、空间调制和谱再分布。面板(d)将数值谱与完整多呼吸子解的傅里叶投影进行了比较。仅在面板(b)中隐藏了低于0.002的傅里叶振幅，因此即使不可见，也可能存在较弱的二次谐波分量。

这些零拉曼情形在所示时间区间内呈现出FPUT型复现。它们展示了自旋轨道耦合如何改变参与其中的谐波和不稳定分支，从而导致不同的呼吸子序列和谱再分布。

B. 有限拉曼耦合下的非线性演化

接下来，我们在此前关于自旋轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体中调制不稳定性动力学的研究基础上，考察有限拉曼耦合如何影响不稳定谐波及其非线性谱演化 [41]。我们通过直接数值模拟，将图1中的谐波不稳定性图与后续非线性动力学联系起来。

我们将式(17)中的余弦调制应用于式(4)中的同相背景场，取$\Omega_R = 0.26$, k_L =1.2, $k = 0$, $\sigma = N = \omega = 1$和 $\epsilon = 0.002$。这些参数对应于图1(b)中的增益曲线以及图1(c)中的相应点。

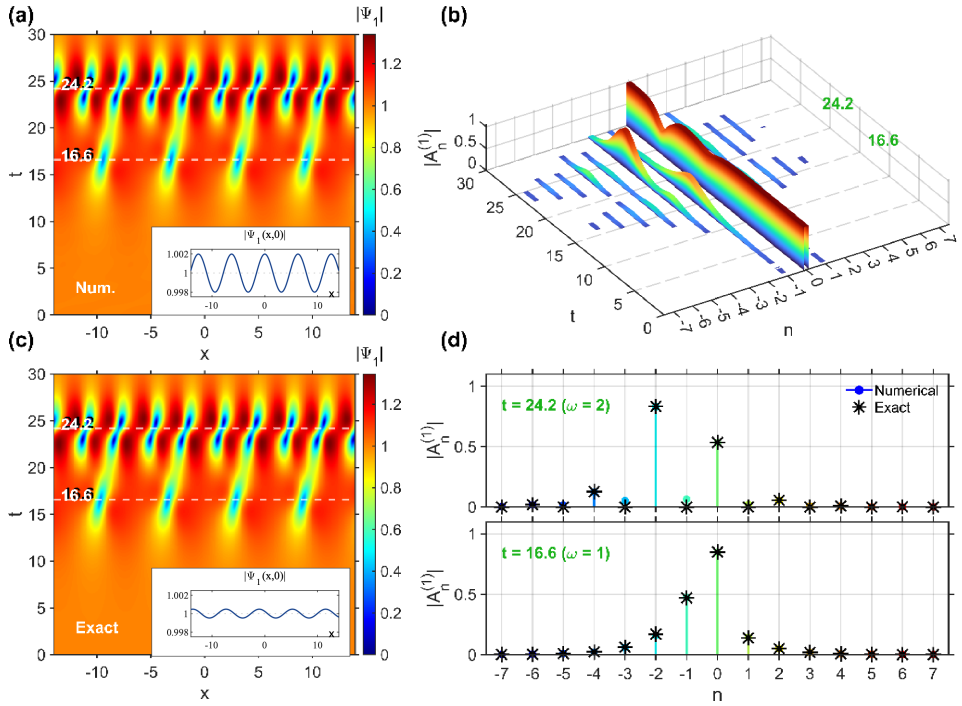

图 5. $k_L = 1$时的排斥相互作用（$\sigma = -1$），最高不稳定谐波指标为 $n = 2$。(a,c) 所选 $M = 2$ 多重AB激发 $\{\omega, 2\omega\}$的 $|\Psi_1|$ 数值演化与精确演化。(a)和(c)中的插图显示了 $|\Psi_1(x,0)|$，坐标轴范围相同，并放大显示背景振幅附近的竖直方向视图。(b) 时空傅里叶谱，显示了经由连续边带的级联。(d) 组分局域化时刻附近的数值谱及相应的基本AB谱基准。

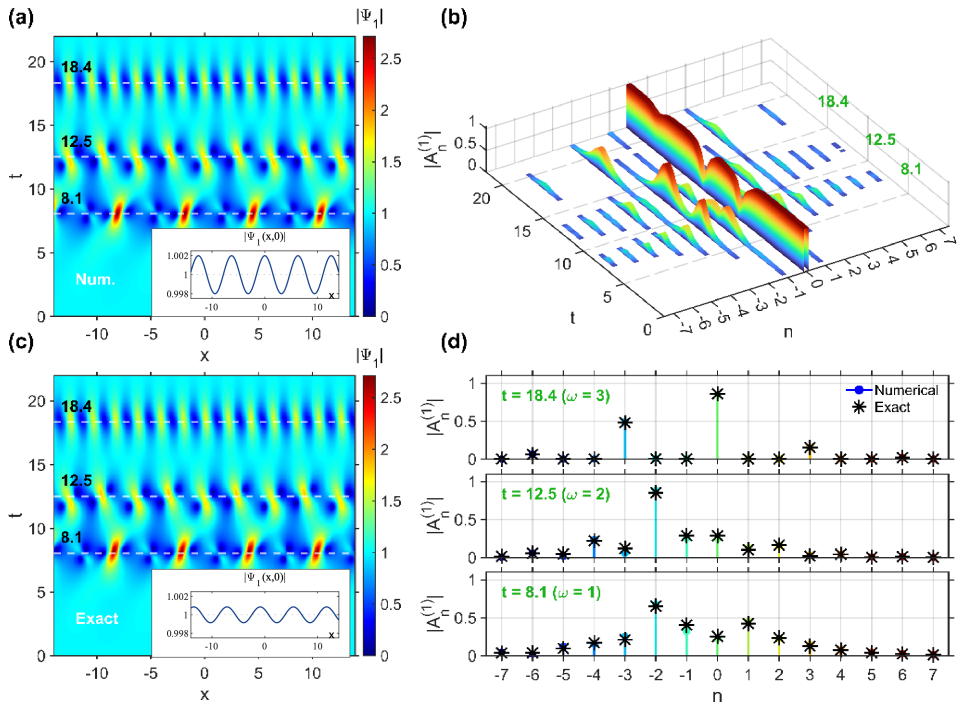

图 6. $k_L = 0.6$时的吸引相互作用（$\sigma = 1$），最高不稳定谐波指标为 $n = 3$。(a,c) 所选 $M = 4$ 多重AB激发 $\{\omega, \omega, 2\omega, 3\omega\}$的 $|\Psi_1|$ 数值演化与精确演化。(a)和(c)中的插图显示了 $|\Psi_1(x,0)|$，坐标轴范围相同，并放大显示背景振幅附近的竖直方向视图。(b) 时空傅里叶谱，显示了边带级联。(d) 组分局域化时刻附近的数值谱及所选多重AB解相应的傅里叶投影。

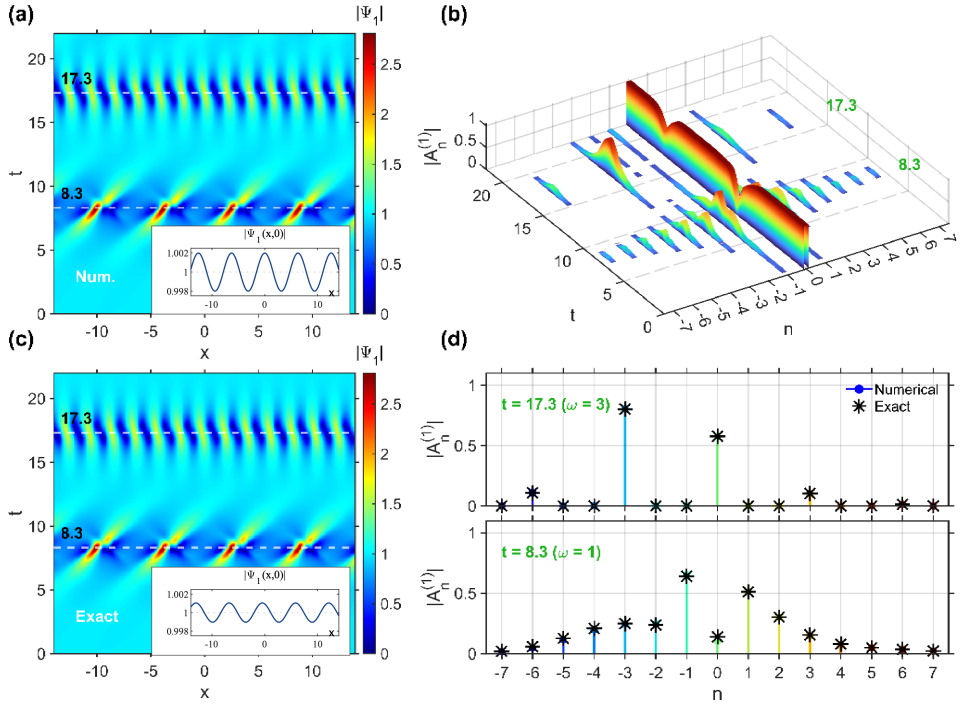

图7. 吸引相互作用（$\sigma = 1$）在 $k_L = 1$时的频率跳跃，最高不稳定谐波指标为 $n = 3$。(a、c) 所选 $M = 3$ 多重AB激发 $\{\omega, \omega, 3\omega\}$ 的 $|\Psi_1|$ 数值演化与精确演化。(a)和(c)中的插图显示了$|\Psi_1(x,\ 0)|$，坐标轴范围相同，并对背景振幅附近的区域进行了纵向放大。稳定性间隙中的 2ω 谐波并非独立的调制不稳定性呼吸子通道，尽管非线性混频可能会在该波数处留下非零傅里叶分量。(b) 显示相应边带再分配的时空傅里叶谱。(d) 组分局域化时刻附近所选多呼吸子解的数值谱及相应的傅里叶投影。

前三个谐波线性不稳定，而第四个谐波稳定。具体而言， 2ω 呈现振荡型调制不稳定性；而在图7的零拉曼频率跳跃示例中，它位于稳定区间内。这两个示例采用不同的载波波数和拉曼耦合；零拉曼情况下化简为 $b = k + k_L$ 的结果不适用于有限拉曼耦合。

图8展示了相应的直接数值演化。在所示区间内，场出现了反复的局域化事件，同时多个傅里叶边带持续被占据。尤其是，二次谐波如今成为一个独立不稳定的线性通道；这与图7所示零拉曼示例中二次谐波位于稳定性间隙内的情形形成对比。因此，所得演化展示了拉曼诱导的可用调制不稳定性通道重排所带来的非线性后果。

有限拉曼示例表明，拉曼耦合可以重排不稳定的谐波通道，从而改变随后的谱演化。具体而言，在零拉曼频率跳跃状态下稳定的谐波，在有限拉曼耦合下会成为独立不稳定的线性调制不稳定性通道。这一比较阐明了拉曼耦合如何改变线性调制不稳定性谱与非线性边带动力学之间的关系。

有限拉曼系统不可积，因此

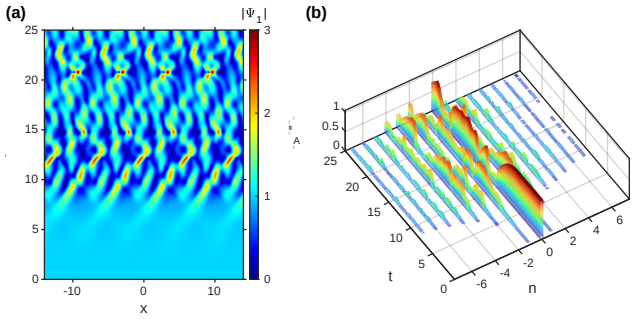

图8. 吸引相互作用下的有限拉曼非线性演化（$\sigma = 1$），对应 $\Omega_R = 0.26$、 $k = 0$、 $k_L = 1.2$ 和 $N = \omega = 1$，其中 $\epsilon = 0.002$。（a） $|\Psi_1|$ 在 $0 \le t \le 25$下的直接数值演化。（b） Ψ_1对应的离散空间傅里叶振幅。仅为便于观察，在面板（b）中抑制了低于 2×10^{-3} 的振幅。

我们不将图8中观察到的局域化事件与精确的多重阿基米德螺旋分解联系起来。因此，我们转而研究可积零拉曼极限；在该极限下，精确的阿基米德螺旋谱使我们能够定量分析增益、载波耗尽、边带不对称性和高阶频谱重分布。

IV. 精确的 AB 谱与分支分辨的谱重分布

A. 精确傅里叶谱及其谱特征

现在，我们推导可积零拉曼极限下基本阿基米德螺旋的精确傅里叶谱。通过规范变换，零拉曼模型可映射为 Manakov 系统，但变换回原始的自旋轨道耦合-玻色–爱因斯坦凝聚场后，会恢复依赖于自旋轨道耦合的载波相位和有效波数。因此，Manakov 谱无法直接给出自旋轨道耦合-玻色–爱因斯坦凝聚系统完整的实验室坐标系谱。

文献 [17], 给出了马纳科夫呼吸子的傅里叶谱，但正阶系数是通过依赖阶数的导数来表示的。这种形式未能提供统一的闭式表达式，无法直接揭示任意高阶边带的衰减规律。本文通过对正阶系数采用外极点表示、对负阶系数采用内极点表示，克服了这一局限。由此得到的频谱明确适用于每一个边带阶数，并且在变换回原始场后仍保留自旋轨道耦合的依赖关系。

对于反向传播的零拉曼背景，$b_1 = -b_2 = b = k + k_L$。因此，在载波波数 k固定时，自旋轨道耦合强度通过有效背景波数b改变相对于载波的频谱。在 b固定时，自旋轨道耦合会改变载波相位，但不会改变包络谱本身。

将基本呼吸子写为

$$\Psi_j(x,t) = \Psi_{j0}(x,t)\mathcal{R}_j(x,t), \qquad j = 1, 2, \tag{18}$$

归一化复傅里叶系数为

$$A_n^{(j)}(t) = \frac{1}{L}\int_0^L \mathcal{R}_j(x,t)e^{-in\omega x}\,dx. \tag{19}$$

其中， n 表示边带阶数。基于外部极点和内部极点表示的留数计算给出了精确系数

$$A_n^{(j)}(t) = -2i\tau_I \mathcal{L}_1^{(j)}(t)\mathbb{Z}_1(t)^{|n|}, \qquad n \le -1, \tag{20}$$

$$A_n^{(j)}(t) = -2i\tau_I \mathcal{L}_2^{(j)}(t)\mathbb{Z}_2(t)^{-n}, \qquad n \ge 1, \tag{21}$$

and

$$A_0^{(j)}(t) = 1 - 2i\tau_I\left[\mathcal{L}_1^{(j)}(t) + \frac{\mathcal{P}_3^{(j)}(t)}{\mathcal{Q}_2^*(t)}\right]. \tag{22}$$

$\mathbb{Z}_{1,\ 2}$ 和 $\mathcal{L}_{1\ 2}^{(j)}$ 的定义见附录 B。正阶系数的外部极点形式消除了参考文献 [17] 中使用的依赖于阶数的导数。这些公式给出了无限边带序列中每个分量的精确复系数。相应的归一化功率频谱为

$$|A_{\pm n}^{(j)}(t)|^2 = \frac{S_j(t)}{2}\left[1 \pm a_j(t)\right]\left[1 - q(t)\right]q(t)^{n-1}, \qquad n \ge 1. \tag{23}$$

方程（23）中的三个量定义为

$$\begin{aligned} S_j(t) &\equiv \sum_{n\neq 0}|A_n^{(j)}(t)|^2 = 1 - |A_0^{(j)}(t)|^2, \\ a_j(t) &\equiv \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[|A_n^{(j)}(t)|^2 - |A_{-n}^{(j)}(t)|^2\right]}{S_j(t)}, \\ q(t) &\equiv |\mathbb{Z}_1(t)|^2 = |\mathbb{Z}_2(t)|^{-2}. \end{aligned} \tag{24}$$

其中， S_j 是从载波转移的总功率， a_j衡量两个谱方向之间的不平衡，而 q 给出相邻边带阶数之间的功率比。因此，方程（23）精确描述了载波耗尽、边带方向不平衡以及所有高阶边带的几何衰减。

对于图 9，我们还使用

$$\kappa(t) = -\frac{1}{2}\ln q(t), \qquad R^{(j)}(t) = \sqrt{\frac{1 + a_j(t)}{1 - a_j(t)}}. \tag{25}$$

在 AB 中心， q 达到最大值，频谱也最宽，因此 $\kappa_{\min} = \kappa(0)$。 $\kappa_{\min}$ 和 $R^{(j)}(0)$ 分别表征最小边带衰减和中心时刻方向不平衡。

B. 共存的呼吸子分支中的增益–耗尽排序

调制不稳定性增益描述弱调制的初始增长，而载波耗尽则衡量完整 AB 事件期间的非线性功率传递。比较这两个量，可以检验线性调制不稳定性增益能否预测后续非线性演化的强度及其频谱分布。

对于吸引相互作用（$\sigma = +1$），以下开区间内共存着两个规则的基本 AB 分支

$$0 < \omega^2 < 2N, \qquad \frac{|\omega|}{2} < |b| < \frac{N}{\sqrt{4N - \omega^2}}. \tag{26}$$

我们在相同的背景参数 N、 b 和相同的调制波数 $\omega > 0$ 下比较这两个分支。事件中心对齐于 $t = 0$。我们根据它们的调制不稳定性增益，将这两个分支分别记为 H 和 L，

$$G_\alpha = |\omega\,\mathrm{Im}\,\tau_\alpha|, \qquad \alpha = H, L.$$

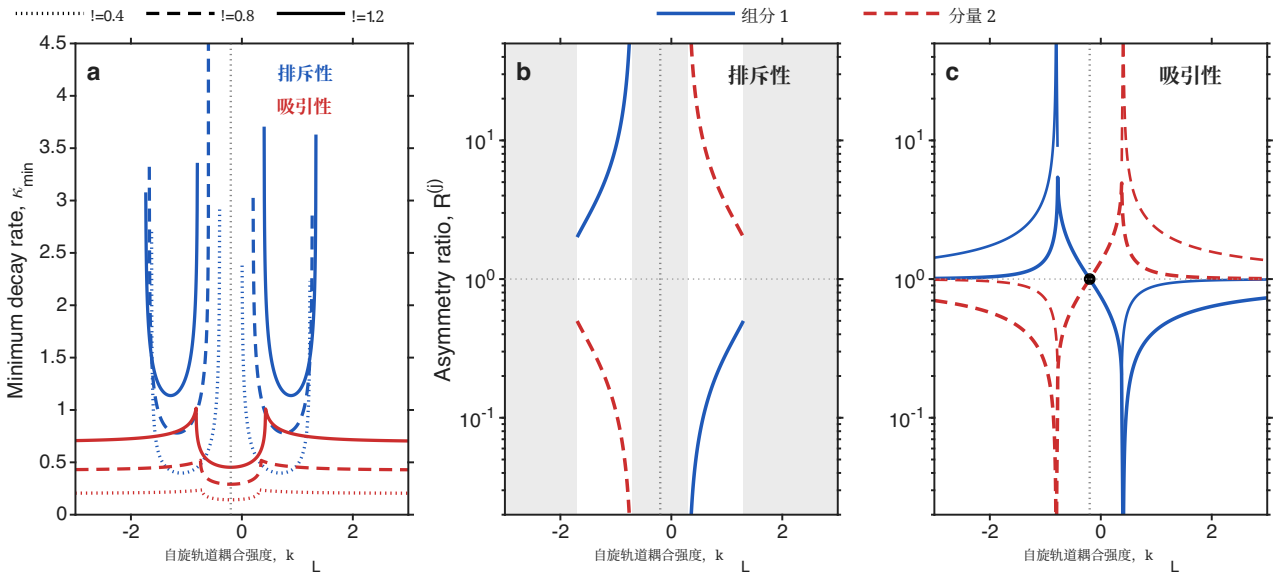

图 9. 解析谱特征随自旋轨道耦合参数 k_L 的变化，针对 $N = 1$ 和 $k = 0.2$。(a) $\omega = 0.4, 0.8, 1.2$ 时的最小衰减率 $\kappa_{\min}$。(b,c) 排斥性和吸引相互作用下，$\omega = 1$ 处的中心时刻不对称比 $R^{(j)}(0)$。(a) 中蓝色和红色分别表示两种相互作用符号；(b,c) 中蓝色和红色分别表示分量 1 和 2，线型用于区分其余情况。(b) 中的灰色区域表示基本稳定性间隙；(c) 中的黑点表示 $b = k + k_L = 0$ 和 $R^{(j)} = 1$。图中仅显示增长最快的正则分支。

它们的精确谱满足

$$\begin{aligned} &G_H > G_L > 0, \qquad S_{j,H}(0) < S_{j,L}(0), \\ &q_H(0) > q_L(0), \qquad |a_{j,H}(0)| < |a_{j,L}(0)|, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \tag{27}$$

对于每个分支，载波耗尽在事件中心达到最大值，因此$S_{j,\ \alpha}(0)$ 是整个 AB 事件期间的最大耗尽。因而，高增益分支产生的最大载波耗尽更小，尽管其高阶边带衰减得更慢，并且在两个频谱方向之间分布得更加均匀。因此，线性调制不稳定性增益并不能决定最大载波耗尽和转移的边带总功率。这一结果说明，必须超越线性增益谱来分析共存的呼吸子分支的非线性谱特性。

图 10(a) 展示了在整个共存区域内，调制不稳定性增益与最大载波耗尽呈现相反的排序：高增益分支从载波转移的功率更少。在 $|b| = N/\sqrt{4N - \omega^2}$ 处，两个 AB 分支合并，这解释了图 10(a) 中耗尽曲线和增益曲线的趋同。图 10(b) 显示，其高阶边带衰减仍然较慢，且方向不平衡较弱。因此，边带分布更宽并不意味着总载波耗尽更多。

C. 高阶边带衰减与方向不对称性

精确的傅里叶系数区分出两个不同的特征：功率随边带阶数增加而衰减，以及正阶与负阶边带之间的不平衡。前者由极点模决定，或者等价地由 q 和κ决定；后者则取决于分量和分支相关的留数振幅。

1. *Geometric Sideband Decay*

精确系数对边带阶数的依赖呈几何级数关系。对于正则基本阿布拉莫维奇-布雷瑟解，负阶和正阶边带分别包含因子 $\mathbb{Z}_1^{|n|}$ 和 $\mathbb{Z}_2^{-n}$。它们的留数前因子可能不同，但 $|\mathbb{Z}_1| < 1 < |\mathbb{Z}_2|$ 和 $|\mathbb{Z}_1\mathbb{Z}_2| = 1$ 意味着两组边带具有相同的指数衰减率：

$$\begin{aligned} |A^{(j)}_{\pm n}(t)| &\propto e^{-\kappa(t)n}, \qquad n \geq 1, \\ \kappa(t) &= -\ln|\mathbb{Z}_1(t)| = \ln|\mathbb{Z}_2(t)| > 0. \end{aligned} \tag{28}$$

较小的 κ因此对应于高阶边带上更宽的分布。在AB中心处，$\Theta = 0$，频谱最宽，且 κ 达到其最小值$\kappa_{\min}$。因此，极点模给出

$$|\tau_I| = \frac{|\omega|}{2\sinh(\kappa_{\min})}. \tag{29}$$

在非零 ω 固定时，式（29）表明，调制不稳定性增益越大，$\kappa_{\min}$ 就越小，因此条件高阶边带分布越宽。正如第 IV B 节所强调的，这种关系定义了转移功率在不同边

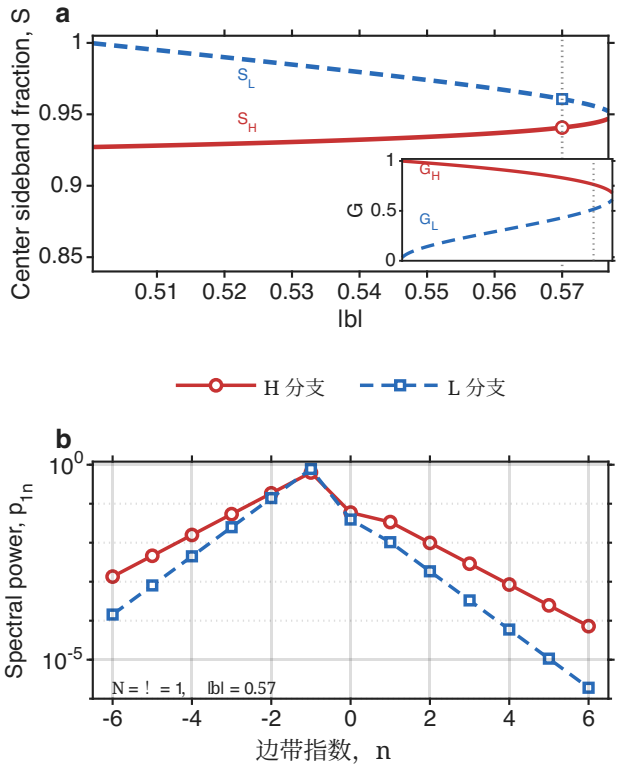

图10. 吸引相互作用下两个共存的呼吸子分支的增益和载波耗尽，以及 $N=\omega=1$。(a) 最大载波耗尽 $S_{j,\ H/L}(0)$ 随 $|b|$ 的变化；插图显示对应的调制不稳定性增益 $G_{H/L}$。(b) 事件中心处的分量1功率谱 $p_{1n}=|A_n^{(1)}\ 0\ |^2$ $b=(\ )$，对 0.57 应于 。

带阶数之间的分布方式，但并不能确定总载波耗尽量 S_j。

图9(a)显示了固定 k时，k_L 变化下 $\kappa_{\min}$ 的情况。在零拉曼问题中，这等价于扫描有效背景波数 $b=k+k_L$，这解释了关于 $k_L=-k$的对称性。因此，在固定载波波数 k 时改变自旋轨道耦合参数 k_L，会使制备态经过不同的允许分支，并改变相对于载波的对应频谱。对于排斥相互作用，接近调制不稳定性边界时会出现 $G\to 0$ 和 $\kappa_{\min}\to\infty$。对于吸引相互作用，尖点 $k_L^c=-k\pm N/\sqrt{4N-\omega^2}$ 出现在 $\Delta=0$处，此处分支根相遇，且图9(a)所示的正则分支发生变化。与图10的比较进一步说明，为什么必须将高阶尾部宽度与总载波耗尽区分开来。

2. *Directional Asymmetry and Branch Symmetry*

尽管正阶和负阶边带具有相同的几何衰减率，但它们的振幅不一定相等。对于正则基本阿布拉莫维奇-布雷瑟解，它们的振幅

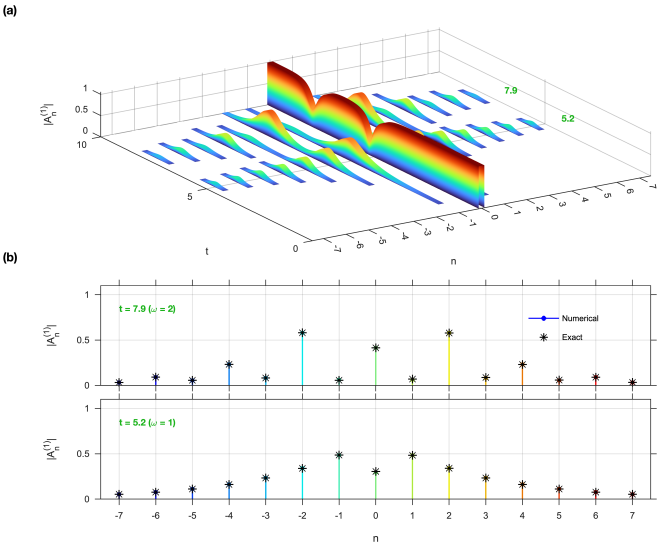

图11. 在 $b=k+k_L=0$ 处、取 $k=-0.2$、$k_L=0.2$ 和 $\omega=1$ 时吸引相互作用下的对称呼吸子谱。正阶和负阶边带具有相等的功率，表明当有效平移波数为零时，自旋轨道耦合诱导的方向不对称性消失。

比值与边带阶数无关 n:

$$R^{(j)}(t)=\left|\frac{A_n^{(j)}(t)}{A_{-n}^{(j)}(t)}\right|=\left|\frac{\mathcal{L}_2^{(j)}(t)}{\mathcal{L}_1^{(j)}(t)}\right|,\qquad n\geq 1. \tag{30}$$

方向不对称性由分支特征值和有效背景波数通过留数振幅共同决定。对于反向传播的零拉曼背景，$b_j=\pm(k+k_L)$ 和 $b_1=-b_2$，因此相应的对称相关分支满足 $R^{(1)}(k_L)=R^{(2)}-k_L-2k$。

在 $\Delta<0$ 区域内，两个非简并分支具有相等的调制不稳定性增益，并满足 $\tau_b=-\omega-\tau_a^*$。分量交换将分支 a 映射到分支 b，反之亦然，从而得到

$$R_a^{(1)}R_b^{(2)}=1,\qquad R_b^{(1)}R_a^{(2)}=1.$$

对于在该对称变换下保持不变的静态调制分支，该关系简化为 $R^{(1)}R^{(2)}=1$。在 $b=0$，即 $k_L=-k$ 时，两个分量互为对称对应，初等阿布拉莫维茨-贝特谱呈对称分布，其中 $R^{(j)}=1$。

图11展示了对称谱。对于$k=-0.2$、$k_L=0.2$和 $\omega=1$，正阶与负阶边带的功率相等，这与两个分量均满足 $R^{(j)}=1$ 一致。

此例直接证实了上述对称关系：一旦 b消失，每个分量中两个谱方向所携带的功率便相等。

精确系数还揭示了两种特殊的中心时刻构型。当j分量完全耗尽时，$S_j(0)=1$，等价地，$A_0^{(j)}(0)=0$。当 $a_j(0)=\pm 1$时，会出现单边频谱；在这种情况下，

所有边带都会在一个谱方向上消失，并且$R^{(j)}(0)$趋于无穷大或零。这些构型是一般精确谱的特殊结果，且仍须满足基本呼吸子的特征方程和正则性条件。

图9(b)和图9(c)总结了这些中心时刻的非对称关系。在图9(b)的灰色区间内，所绘分支不存在有限增益正则阿布洛维茨–拉迪克呼吸子，因此相应的阿布洛维茨–拉迪克呼吸子不对称比未定义。这并不意味着在一般非线性演化中，同一傅里叶谐波必定消失，因为非线性混频仍可能使该谐波得到激发。同样，图9(c)不应被解读为某个阿布洛维茨–拉迪克呼吸子分支在整个 k_L范围内连续延伸：外侧的 $\Delta < 0$ 区域包含两个增益相等的非简并漂移分支，而中央的 $\Delta > 0$ 区域则显示增长最快的正则静态调制分支。

V. 结论

我们研究了具有相等相互作用的自旋轨道耦合二元玻色–爱因斯坦凝聚体中的高阶调制不稳定性和非线性频谱重分布。对于有限拉曼耦合，该系统不可积，且调制不稳定性谱包含不同的非振荡和振荡不稳定区。拉曼耦合改变了调制不稳定性带的连通性以及可实现的谐波通道。直接数值模拟证实，这种重排会改变后续的非线性边带动力学。

在零拉曼极限下，这些方程与马纳科夫系统通过规范变换相关，而逆变换则恢复自旋轨道耦合依赖相位和有效波数。在固定载波波数 k 时，改变自旋轨道耦合强度会改变 $b = k + k_L$，并使连续谐波在调制不稳定性频带和稳定性间隙之间移动。这为调控高阶调制不稳定性、阿布洛维茨–拉迪克呼吸子分支和频率跳跃序列提供了手段。精确多反常波解和数值模拟进一步展示了由此产生的相干演化和 FPUT 型复现。

从已知的马纳科夫阿布洛维茨–拉迪克呼吸子谱出发，我们无需依赖阶数的微分运算，便推导出了载波和任意阶边带的精确代数系数。所得几何功率谱涵盖完整的无限边带序列，并统一描述了载波耗尽、方向不平衡和谱衰减。我们还确立了调制不稳定性增益与谱衰减之间的精确关系，表明高增益分支可能出现较弱的最大载波耗尽，而其高阶边带衰减较慢，方向不平衡也较弱。

有效背景波数 b 决定相对于载波的频谱，而 k 和 k_L 提供了不同的实验室控制参数。特别是，即使两个参数均不为零，$k_L = -k$也能产生具有 $b = 0$ 的对称谱。多阿布洛维茨–拉迪克呼吸子结果描述由指定周期扰动产生的相干态；宽带噪声驱动动力学可能涉及其他非线性过程。

致谢

本研究得到国家自然科学基金委员会（项目编号：12505006、12675003、11975172 和 12381240286）的资助。

附录 A：可积自旋轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚极限下的精确多反常波解

在本文所考虑的可积极限下，即$V(x) = 0$ 和 $\Omega_R = 0$，基于方程 (3) 的自旋轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚模型存在精确多反常波解。这里，M 表示呼吸子组分的数量，而非第 II D 节中定义的最高不稳定谐波指标 n。每个组分 $s = 1, \ldots, M$由调制波数 ω_s 和一个满足方程 (13) 在 $\omega = \omega_s$处条件的可容许非实特征值 τ_s 指定，同时还须满足方程 (16) 后所述的正则性条件。我们定义$\widetilde{\tau}_s \equiv \tau_s + \omega_s$，并用 x_{s0} 和 t_{s0} 表示其空间平移和时间平移。各分量的背景波数为 $b_1 = -b_2 = b = k + k_L$。该构造包含基本情形 $M = 1$。

为完整起见，这里给出式（10）中基本呼吸子所涉及的辅助参数。令$\widetilde{\tau} \equiv \tau + \omega$,

$$
\begin{aligned}
&\vartheta_j = \frac{\vartheta_{1j} - \vartheta_{2j}}{2}, \qquad \upsilon_j = \log \frac{|\tau + b_j|}{|\widetilde{\tau} + b_j|},\\
&\varpi = \left| \frac{2\tau_I}{2\tau_I - i\omega} \right|, \qquad \theta_{1j} = \frac{\vartheta_{1j} + \vartheta_{2j}}{2},\\
&\theta_{2j} = \arg \frac{\tau^* + b_j}{\widetilde{\tau} + b_j},\\
&\vartheta_{1j} = \arg \frac{\tau^* + b_j}{\tau + b_j}, \qquad \vartheta_{2j} = \arg \frac{\widetilde{\tau}^* + b_j}{\widetilde{\tau} + b_j}.
\end{aligned}
\tag{A1}
$$

对于一个 M呼吸子解，我们写作

$$
\Psi_j[M] = \Psi_{j0} \frac{\det(\boldsymbol{M}^{(j)})}{\det(\boldsymbol{M})}, \qquad j = 1, 2, \tag{A2}
$$

其中 Ψ_{j0} 是平面波背景，见式（11）。 $M \times M$矩阵 $\boldsymbol{M}$和 $\boldsymbol{M}^{(j)}$ 定义为

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{M} = (m_{r,s})_{1 \le r,s \le M},\\
&\boldsymbol{M}^{(j)} = \left(m_{r,s}^{(j)} \right)_{1 \le r,s \le M},
\end{aligned}
\tag{A3}
$$

具有矩阵元

$$
\begin{aligned}
&m_{r,s} = \boldsymbol{u}(s) \mathbb{M}(r,s) \boldsymbol{v}(r),\\
&m_{r,s}^{(j)} = \boldsymbol{u}(s) \widetilde{\mathbb{M}}_j(r,s) \boldsymbol{v}(r).
\end{aligned}
\tag{A4}
$$

向量 $\boldsymbol{u}(s)$ 和 $\boldsymbol{v}(r)$，以及矩阵 $\mathbb{M}(r,\ s)$ 和 $\mathbb{M}_j(r,\ s)$，表示为

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}(s) = (\varphi_s^*, \widetilde{\varphi}_s^*), \qquad \boldsymbol{v}(r) = (\varphi_r, \widetilde{\varphi}_r)^T,\\
&\mathbb{M}(r,s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_s^* - \tau_r} & \frac{1}{\tau_s^* - \widetilde{\tau}_r} \\ \frac{1}{\widetilde{\tau}_s^* - \tau_r} & \frac{1}{\widetilde{\tau}_s^* - \widetilde{\tau}_r} \end{pmatrix},\\
&\widetilde{\mathbb{M}}_j(r,s) = \boldsymbol{D}_{j,s}^{(+)}\, \mathbb{M}(r,s)\, \boldsymbol{D}_{j,r}^{(-)},\\
&\boldsymbol{D}_{j,s}^{(+)} = \mathrm{diag}(\tau_s^* + b_j, \widetilde{\tau}_s^* + b_j),\\
&\boldsymbol{D}_{j,r}^{(-)} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\tau_r + b_j}, \frac{1}{\widetilde{\tau}_r + b_j}\right).
\end{aligned} \tag{A5}$$

相应的特征函数为

$$\begin{aligned}
\varphi_s(x,t) &= \exp\left\{ i\tau_s \left[(x - x_{s0}) + \frac{1}{2}\tau_s (t - t_{s0}) \right] \right\},\\
\widetilde{\varphi}_s(x,t) &= \exp\left\{ i\widetilde{\tau}_s \left[(x - x_{s0}) + \frac{1}{2}\widetilde{\tau}_s (t - t_{s0}) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{A6}$$

附录 B：精确傅里叶谱的推导

式（18）中的周期调制具有有理形式

$$\mathcal{R}_j = 1 - 2i\tau_I \frac{\mathcal{P}_1^{(j)} + \mathcal{P}_2^{(j)} e^{i\omega x} + \mathcal{P}_3^{(j)} e^{-i\omega x}}{\mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2 e^{i\omega x} + \mathcal{Q}_2^* e^{-i\omega x}}. \tag{B1}$$

时间依赖系数为

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_1^{(j)} &= \frac{e^{\Theta}}{\tau + b_j} + \frac{e^{-\Theta}}{\tau + b_j + \omega},\\
\mathcal{P}_2^{(j)} &= \frac{e^{i\Phi}}{\tau + b_j + \omega}, \qquad \mathcal{P}_3^{(j)} = \frac{e^{-i\Phi}}{\tau + b_j},\\
\mathcal{Q}_1 &= 2\cosh\Theta, \qquad \mathcal{Q}_2 = \frac{2\tau_I}{2\tau_I - i\omega} e^{i\Phi},
\end{aligned} \tag{B2}$$

其中 $\Theta = \omega\tau_I t$，$\Phi = \omega\ (\tau_R + \omega/2)\ t$，且 $b_1 = -b_2 = b = k + k_L$。

令 $\mathbb{Z} = e^{i\omega x}$，可将傅里叶积分转换为沿单位圆的围道积分。分母多项式为 $\mathcal{Q}_2\mathbb{Z}^2 + \mathcal{Q}_1\mathbb{Z} + \mathcal{Q}_2^*$，其根为

$$\mathbb{Z}_{1,2} = \frac{-\mathcal{Q}_1 \pm \mathcal{D}}{2\mathcal{Q}_2}, \qquad \mathcal{D} = 2\sqrt{\cosh^2\Theta - \varpi^2}, \tag{B3}$$

其中 $\varpi = 2|\tau_I|/\sqrt{4\tau_I^2 + \omega^2} < 1$。对于正规 AB，$|\mathbb{Z}_1| < 1 < |\mathbb{Z}_2|$ 和 $|\mathbb{Z}_1\mathbb{Z}_2| = 1$。

定义

$$\mathcal{L}_{1,2}^{(j)} = \frac{\mathcal{P}_1^{(j)} + \mathcal{P}_2^{(j)}\mathbb{Z}_{1,2} + \mathcal{P}_3^{(j)}\mathbb{Z}_{1,2}^{-1}}{\mathcal{D}}. \tag{B4}$$

对于 $n \le -1$，原点是正则的，内部极点 $\mathbb{Z}_1$ 给出公式 (20)。对于 $n \ge 1$，内部围道计算在原点处包含一个依阶极点。相反，从外部极点 $\mathbb{Z}_2$ 计算围道可直接得到公式 (21)，无需计算阶数随 n 增长的导数。对于 $n = 0$，原点和内部极点给出公式 (22)。

等效载波表达式

$$A_0^{(j)} = 1 - 2i\tau_I \left[\mathcal{L}_2^{(j)} + \frac{\mathcal{P}_2^{(j)}}{\mathcal{Q}_2} \right]$$

提供了代数一致性检查。

分量范数守恒和单位模时间远场意味着

$$\frac{1}{L}\int_0^L |\mathcal{R}_j(x,t)|^2\, dx = 1.$$

因此，帕塞瓦尔恒等式给出 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_n^{(j)}|^2 = 1$，由此得到 $S_j = 1 - |A_0^{(j)}|^2$。随后，方程（20）和（21）给出方程（23）中的几何功率谱。

附录 C：增益–耗尽排序的证明

对于式（26）中的两个分支，定义

$$r_\alpha = \sqrt{\frac{\omega^2}{4} + [\mathrm{Im}\,\tau_\alpha]^2}, \qquad \alpha = H, L.$$

共存条件意味着 $r_H > r_L > |b| > |\omega|/2$。在事件中心，精确系数给出

$$q_\alpha(0) = \frac{r_\alpha - |\omega|/2}{r_\alpha + |\omega|/2}, \qquad |a_{j,\alpha}(0)| = \frac{2|b| r_\alpha}{b^2 + r_\alpha^2}.$$

第一个表达式随 r_α增加，而第二个在 $r_\alpha > |b|$ 时减小。结合 $\mathrm{Im}\ \tau_H > \mathrm{Im}\,\tau_L$，这些关系确立了式（27）中的增益、衰减因子和不平衡排序。

对于任一分支，对式（22）中的精确载波系数求导表明，$S_{j,\alpha}(t)$ 随$|t|$减小。因此，$S_{j,\alpha}(0)$ 是完整 AB 事件期间的最大耗尽量。直接代入可得

$$\begin{aligned}
S_{j,L}(0) - S_{j,H}(0) = \frac{|\omega|(r_H - r_L)(N - \omega^2/2)^2}{N[b^2 + N - \omega^2/2 + r_H r_L]}\\
\times \frac{1}{r_H r_L - b^2 + \omega^2/2 + (|\omega|/2)(r_H + r_L)} > 0,
\end{aligned} \tag{C1}$$

开放共存域中的每个因子均为正，这证明了调制不稳定性增益与最大载波耗尽的排序相反。在下边界 $|b| = |\omega|/2$，低增益分支变为奇异分支，并脱离正则有限增益 AB 族。在上边界$|b| = N/\sqrt{4N - \omega^2}$，两个分支在 $\Delta \to 0$ 处合并，且它们之间的差异消失。

[1] V. E. Zakharov 和 L. A. Ostrovsky, 《调制不稳定性: 开端》, Physica D 238, 540 (2009)。[2] H. Segur 和 D. M. Henderson, 《重新审视调制不稳定性》, Eur. Phys. J. Spec. Top. 147, 25 (2007)。[3] P. J. Everitt, M. A. Sooriyabandara, M. Guasoni, P. B. Wigley, C. H. Wei, G. D. McDonald, K. S. Hardman, P. Manju, J. D. Close, C. C. N. Kuhn, S. S. Szigeti, Y. S. Kivshar 和 N. P. Robins, 《玻色–爱因斯坦凝聚体中调制不稳定性的观测》, Phys. Rev. A 96, 041601 (2017)。[4] S. R. Otajonov, E. N. Tsoy 和 F. K. Abdullaev, 《二维玻色–爱因斯坦凝聚体中的调制不稳定性与量子液滴》, Phys. Rev. A 106, 033309 2022( )。[5] A. E. Kraych, P. Suret, G. El 和 S. Randoux, 《光纤中局部诱导调制不稳定性的非线性演化》, Phys. Rev. Lett. 122, 054101 (2019)。[6] A. Armaroli, G. Dujardin, A. Kudlinski, A. Mussot, S. D. Bievre 和 M. Conforti, 《随机色散管理光纤链路中的调制不稳定性》, Phys. Rev. A 108, 023510 (2023)。[7] C. B. Tabi, H. Tagwo, C. G. Latchio Tiofack 和 T. C. Kofan´e, 《弱非局部双折射光纤中的纯四次调制不稳定性》, Opt. Lett. 47, 5557 (2022)。[8] C. Kharif, R. A. Kraenkel, M. A. Manna 和 R. Thomas, 《风与耗散作用下深水中的调制不稳定性》, Journal of Fluid Mechanics 664, 138 (2010)。[9] W.-R. Sun 和 B. A. Malomed, 《次谐波调制不稳定性》, Physics Reports 1139, 1 (2025)。[10] A. M. Perego, F. Bessin 和 A. Mussot, 《调制不稳定性的复杂性》, Phys. Rev. Research 4, L022057 (2022)。[11] G. Vanderhaegen, C. Naveau, P. Szriftgiser, A. Kudlinski, M. Conforti, A. Mussot, M. Onorato, S. Trillo, A. Chabchoub 和 N. Akhmediev, 《光学与流体力学中的“非凡”调制不稳定性》, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 118, e2019348118 (2021)。[12] K. K. Ndebele, C. B. Tabi, C. G. L. Tiofack 和 T. C. Kofan´e, 《七阶自陡峭与自频移作用下光纤的高阶色散和非线性效应》, Phys. Rev. E 104, 044208 (2021)。[13] A. Choudhuri 和 K. Porsezian, 《色散与非克尔非线性对高阶非线性薛定谔方程调制不稳定性的影响》, Phys. Rev. A 85, 033820 (2012)。[14] P. Gao, C. Liu, L.-C. Zhao, Z.-Y. Yang 和 W.-L. Yang, 《用于定量描述受扰平面波动力学的修正线性稳定性分析》, Phys. Rev. E 102, 022207 (2020)。[15] O. Kimmoun, H. C. Hsu, H. Branger, M. S. Li, Y. Y. Chen, C. Kharif, M. Onorato, E. J. R. Kelleher, B. Ki-bler, N. Akhmediev 和 A. Chabchoub, 《调制不稳定性与移相费米-帕斯塔-乌拉姆复现》, Sci. Rep. 6, 28516 (2016)。[16] S. A. Chin, O. A. Ashour 和 M. R. Beli´c, 《阿赫梅季耶夫呼吸子的剖析: 级联不稳定性、首次形成时间与费米-帕斯塔-乌拉姆复现》, Phys. Rev. E 92, 063202 (2015)。[17] S.-C. Chen, C. Liu, X. Yao, L.-C. Zhao 和 N. Akhmediev, 《阿赫梅季耶夫马纳科夫系统中的呼吸子和费米-帕斯塔-乌拉姆复现, Phys. Rev. E 104, 024215 (2021). [18] D. Pierangeli, M. Flammini, L. Zhang, G. Marcucci, A. J. Agranat, P. G. Grinevich, P. M. Santini, C. Conti, and E. DelRe, 《费米-帕斯塔-乌拉姆-津古复现及其精确动力学的观测》, Phys. Rev. X 8, 041017 2018( ). [19] H. M. Yin and K. W. Chow, 共振三波相互作用中的费米-帕斯塔-乌拉姆-津古复现及级联机制, Phys. Rev. E 107, 064215 (2023). [20] A. Chowdury, B. J. Eggleton, and D. T. H. Tan, 超富硅氮化物布拉格光栅中的调制不稳定性、费米-帕斯塔-乌拉姆复现和图样形成的理论研究, 《纳米光子学》14, 2267 (2025). [21] M. Erkintalo, K. Hammani, B. Kibler, C. Finot, N. Akhmediev, J. M. Dudley, and G. Genty, 非线性光纤光学中的高阶调制不稳定性, Phys. Rev. Lett. 107, 253901 (2011). [22] L. Liu, W.-R. Sun, and B. A. Malomed, 具有相干耦合的多组分系统中零波数增益下的怪波形成与调制不稳定性, Phys. Rev. Lett. 131, 093801 (2023). [23] E. B. Madimabe, C. B. Tabi, C. G. L. Tiofack, and T. C. Kofan´e, 具有光子自旋-轨道耦合的矢量激子-极化激元凝聚体中的调制不稳定性, Phys. Rev. B 107, 184502 (2023). [24] S. Mossman, S. I. Mistakidis, G. C. Katsimiga, A. Romero-Ros, G. Biondini, P. Schmelcher, P. Engels, and P. G. Kevrekidis, 排斥性双组分玻色–爱因斯坦凝聚体中的调制不稳定性非线性阶段, Phys. Rev. Lett. 135, 113401 (2025). [25] S.-C. Chen, C. Liu, and N. Akhmediev, 马纳科夫方程的高阶调制不稳定性与多重阿赫迈季耶夫呼吸子: 跨越不稳定性带之间稳定间隙的频率跳变, Phys. Rev. A 107, 063507 2023( ). [26] Y. Sun et al., 光纤中的多模孤子: 综述, Photonics Research 12, 2581 (2024). [27] Y.-J. Lin, K. Jim´enez-Garc´ıa, and I. B. Spielman, 自旋轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚态, 《自然》471, 83 (2011). [28] I. B. Spielman. 超冷中性原子的光诱导规范场, 《冷原子与分子评论》1, 145 (2013). [29] N. Goldman, G. Juzeliunas, P. ¨Ohberg, and I. B. Spiel-man, 超冷原子的光诱导规范场, 《物理学报告》77, 126401 (2014). [30] H. Zhai, 具有自旋轨道耦合的简并量子气体: 综述, 《物理学报告》78, 026001 (2015). [31] F.-Y. Liu and Q. Zhou, 双组分玻色–爱因斯坦凝聚体中呼吸子和怪波的相位与背景周期调制, 《混沌》36, 013125 (2026). [32] H. Sakaguchi and B. Li, 光学晶格中含自旋轨道耦合的Gross-Pitaevskii方程的涡旋晶格解, Phys. Rev. A 87, 015602 (2013). [33] H. Sakaguchi, B. Li, and B. A. Malomed, 在自由空间中自吸引自旋轨道耦合玻色–爱因斯坦凝聚体内二维复合孤子的形成, Phys. Rev. E 89, 032920 (2014). [34] Y.-C. Zhang, Z.-W. Zhou, B. A. Malomed, and H. Pu, 无需基态的三维自由空间稳定孤子

：具有自旋轨道耦合的自陷玻色–爱因斯坦凝聚体，Phys. Rev. Lett. 115, 253902 (2015). [35] H. Sakaguchi, B. Li, E. Ya. Sherman, and B. A. Malomed，自由空间中二维自旋轨道耦合自吸引玻色–爱因斯坦凝聚体中的复合孤子，Romanian Reports in Physics 70, 502 (2018). [36] C. S. Chisholm, S. Hirthe, V. B. Makhalov, R. Ramos, R. Vatr´e, J. Cabedo, A. Celi, and L. Tarruell，通过自旋轨道耦合玻色–爱因斯坦凝聚体中的激发探测超固性，Science 391, 480–484 (2026). [37] C.-C. Ding, Q. Zhou, and B. A. Malomed，螺旋自旋轨道耦合诱导的超高振幅佩雷格林孤子，Phys. Rev. Research 6, L032036 (2024). [38] C.-C. Ding, Q. Zhou, and B. A. Malomed，螺旋自旋轨道耦合在玻色–爱因斯坦凝聚体中产生的拍频条纹孤子，Phys. Rev. E 111, 044203 (2025). [39]C.-C. Ding, Q. Zhou, and B. A. Malomed，螺旋自旋轨道耦合诱导的空间周期调制下的多极孤子和呼吸子，Physica D 486, 135063 (2026). [40] I. A. Bhat, T. Mithun, B. A. Malomed, and K. Porsezian，二元自旋轨道耦合玻色–爱因斯坦凝聚体中的调制不稳定性，Phys. Rev. A 92, 063606 (2015). [41] T. Mithun and K. Kasamatsu，与自旋轨道耦合玻色–爱因斯坦凝聚体相关的调制不稳定性非线性动力学，Journal of Physics B: 原子、分子与光学物理52, 045301 2019( )。[42]C. B. Tabi、E. Wamba、E. Nare 和 T. C. Kofan´e，《双组分玻色-爱因斯坦凝聚体调制不稳定性中自旋轨道耦合与残余原子间相互作用的相互影响》，Phys. Rev. E 107, 044206 (2023). [43] C. B. Tabi、P. Otlaadisa 和 T. C. Kofan´e，《具有螺旋状及拉什巴–德레스尔豪斯混合自旋轨道耦合的二维玻色–爱因斯坦凝聚体的调制不稳定性》，Physics Letters A 449, 128334 (2022). [44] P. Otlaadisa、C. B. Tabi 和 T. C. Kofan´e，《螺旋状自旋轨道耦合开放玻色–爱因斯坦凝聚体中的调制不稳定性》，Phys. Rev. E 103, 052206 (2021). [45] Y. A. Bychkov 和 E. I. Rashba，《反转层中载波的振荡效应与磁化率》，Journal of Physics C: 固体物理 17, 6039 (1984). [46] G. Dresselhaus，《闪锌矿结构中的自旋轨道耦合效应》，Phys. Rev. 100, 580 (1955). [47] V. Achilleos、D. J. Frantzeskakis、P. G. Kevrekidis 和 D. E. Pelinovsky，《自旋轨道耦合玻色–爱因斯坦凝聚体中的物质波亮孤子》，Phys. Rev. Lett. 110, 264101 (2013). [48] P. Suret、S. Randoux、A. Gelash、D. Agafontsev、B. Doyon 和 G. El，《孤子气体：理论、数值模拟与实验》，Phys. Rev. E 109, 061001 (2024). [49] C. Liu、S.-C. Chen、X. Yao 和 N. Akhmediev，《马纳科夫方程的调制不稳定性与非简并阿赫მედиев呼吸子》，Chinese Physics Letters 39, 094201 2022( ).