arXiv:2611.28524v1 [q-fin.ST] 21 Nov 2026

通过基于Copula的半参数框架对加密货币的联合尾部风险与依赖性建模

Cathy W.S. Chen*[1]、Takaaki Koike[2],和 Aaron E. P. Lin[1]

[1]逢甲大学统计学系，台湾[2]一桥大学经济学研究科，日本

摘要

本研究提出一种贝叶斯基于Copula的二元半参数框架，用于联合预测风险价值（VaR）和预期损失（ES），同时对跨资产尾部依赖进行建模。边际动态采用四种ES-CAViaR 型模型进行设定，其中包括结合 Rogers-Satchell 和 Garman-Klass 波动率度量的扩展模型。为构造 Copula输入，我们使用标准化残差的经验秩；这些经验秩取决于边际参数，因此无需完全指定边缘分布，即可将边际尾部动态与依赖建模联系起来。研究考虑 Clayton 和 BB1 Copula，并采用自适应马尔可夫链蒙特卡罗方法进行估计和联合尾部风险预测。在 DCC-GARCH-t 数据生成过程下开展模拟研究，以评估所提框架的有限样本预测性能。使用比特币和以太坊数据，我们通过滚动窗口预测方案评估2020年至2025年的一步预测，并将所提模型与贝叶斯DCC-GARCH-N和DCC-GARCH-t 基准模型进行比较。滚动Copula估计还揭示了比特币与以太坊尾部依赖的时变不对称性：在大部分时期，下尾依赖均高于上尾依赖。所提框架在边际和联合尾部风险预测方面均表现出较强的竞争力。

关键词：风险价值、预期损失、ES-CAViaR、Copula、尾部依赖、半参数Copula推断、贝叶斯推断。

*通讯作者：Cathy W.S. Chen，电子邮箱：chenws@mail.fcu.edu.tw

1 引言

尾部风险在金融分析中至关重要，因为极端负向波动可能骤然出现并造成重大损失。风险价值（VaR）和预期损失（ES）是广泛用于量化尾部风险的指标。VaR刻画给定置信水平下的损失阈值，而ES则衡量下尾中超过该阈值的预期损失。ES与VaR互为补充：在相同置信水平下，它反映超过VaR水平的损失条件下的平均损失 α。ES关注分位数以外的尾部，能够反映极端损失的严重程度，并更全面地评估下行风险，尤其是在收益分布呈现厚尾或不对称时。鉴于VaR和ES的重要性，两者仍是巴塞尔协议III市场风险资本框架不可或缺的组成部分（巴塞尔银行监管委员会 2016年）。

针对单个资产和投资组合的 VaR 与预期损失建模方法大致可分为参数方法、半参数方法和非参数方法。参数方法通常通过 GARCH类模型指定条件收益分布，并在假定创新项分布的基础上，利用解析计算或基于似然的方法获得 VaR 和预期损失（Engle 1982；Bollerslev 1986）。半参数方法保留波动率或分位数动态的参数结构，同时在尾部行为建模方面提供更大的灵活性，从而避免对收益分布进行完整设定。一个具有代表性的例子是Engleand Manganelli（2004）提出的条件自回归风险价值（CAViaR）框架，该框架直接对条件分位数进行建模，但主要用于 VaR 预测。

为实现对 VaR 和预期损失的一致推断，ES-CAViaR 等扩展模型引入了额外的动态结构，将预期损失与 VaR 过程联系起来（Taylor 2019）。该框架得到进一步扩展，纳入已实现度量和其他协变量，以改进尾部风险预测（Chen et al. 2023、2024、2025）。尽管取得了这些进展，现有大多数方法仍聚焦于单个资产，并未明确考虑跨资产依赖。在实践中，极端损失往往会在多个资产之间同时发生，因此，联合建模尾部风险是一项重要任务。

金融资产会受到共同经济冲击和传染效应的影响，从而产生尾部依赖（LonginandSolnik 2001）。对不同资产的 VaR 和 ES 进行联合建模，可以捕捉极端共同变动，并提供更可靠的投资组合层面的风险评估，尤其是在市场压力时期。此类框架要求对跨资产尾部依赖进行明确设定。传统多元模型将依赖性嵌入动态相关性结构中，

例如 Engle （2002）提出的动态条件相关（DCC）模型、Tseand Tsui （2002）提出的具有时变相关性的多元 GARCH 模型，或采用厚尾扰动项的双变量非对称 GARCH 型模型（Choy, Chen and Lin 2014；Chen et al. 2019）。在这些设定中，条件方差和相关性共同决定依赖结构，但这可能不足以捕捉非线性依赖和极端依赖。通过基于 DCC 的形式，也可以进行多元半参数风险建模（Storti and Wang2025）。最近，Yang （2026）提出了一种动态联合估计方法，利用分位数回归和得分驱动动态对 CoVaR 和 CoES 进行估计，以评估系统性风险。

基于 copula 的模型为将边际动态与依赖结构分离提供了灵活的框架，从而能够更准确地刻画联合尾部风险，尤其是在存在非对称和厚尾行为的情况下。不同的 Copula 能够捕捉依赖性的不同特征，尤其是尾部特征。关于 Copula 的全面概述，读者可参阅 Nelsen (2006)；Joe (2014)。Clayton Copula 能够捕捉下尾依赖，而 Gumbel Copula 则强调上尾依赖；Student-t Copula 在两个尾部施加对称依赖。由于我们的主要兴趣在于通过风险价值和预期损失衡量下行风险，因此我们聚焦于下尾依赖。因此，Clayton Copula 为联合极端损失提供了简约的基准。为提高灵活性，我们还考虑了 BB1（Clayton-Gumbel）Copula（Joe andHu 1996；Joe1997），该 Copula 能够容纳非对称上下尾依赖。我们未纳入 Student-t Copula，因为其对称的尾部依赖结构无法直接针对本研究所强调的非对称下尾依赖。

我们构建了一个贝叶斯半参数双变量框架，联合建模边际尾部动态、跨资产尾部依赖以及 VaR-ES 风险预测。贝叶斯方法能够纳入先验信息，并生成后验模拟，从而有助于进行区间估计和预测推断。该框架纳入了四种 ES-CAViaR 型边际设定，并通过 Copula 将其关联起来，以捕捉资产间的非线性依赖和尾部依赖。Copula 参数通过基于经验分布构建的基于秩的准似然进行估计，从而降低对边际设定错误的敏感性。最终得到的复合伪后验提供了一个统一框架，用于估计边际尾部风险和依赖参数，同时量化参数不确定性。

半参数Copula推断通常以经验分布函数替代未知的边际变换（Genest 等（1995））；对于多元时间序列，Chen 和 Fan (2006研究了使用估计的标准化残差。相关的贝叶斯方法包括

高斯 copula 回归（Pitt 等（2006））、扩展秩似然（Hoff（2007）），以及使用贝叶斯指数倾斜经验似然对 copula 泛函进行推断（Grazian 和 Liseo（2017））。这些方法提供了有益的背景，但不能直接为我们的联合伪后验提供依据；在该伪后验中，经验残差秩取决于边际 VaR–ES 参数。我们将指定伪后验下的计算与精确贝叶斯推断或渐近校准推断的主张区分开来。

Ausin 和 Lopes （2010）通过联合估计边际参数和 Copula 参数，为 copula-GARCH 模型开发了完整的贝叶斯推断。我们的框架通过复合伪后验，将半参数 ES-CAViaR 边际建模与基于 copula 的依赖结构相结合，同时保留了彼此独立的边际成分和依赖成分。这一构造使该框架能够刻画边际尾部风险和跨资产尾部依赖，同时考虑参数不确定性。此外，ES-CAViaR 设定直接针对 VaR 和 ES 动态，因此尤其适用于联合尾部风险预测。

本研究旨在将半参数 ES-CAViaR 模型与基于 copula 的依赖结构相结合，构建一个灵活的框架，用于对多种资产的尾部风险进行联合建模和预测。主要贡献有三方面。

首先，我们将 ES-CAViaR 框架扩展至二元设定，并比较四种边际设定。其中包括 Taylor （2019）提出的基准 ES-CAViaR 模型、一种波动率标准化超越设定，以及两种纳入 Rogers-Satchell 和 Garman-Klass 波动率度量的扩展（Rogers 和 Satchell（1991）；Garman 和 Klass（1980）），以捕捉时变波动率和极端市场波动。我们还纳入采用正态和 Student-t 创新项的贝叶斯 DCC-GARCH 模型，作为外部参数化基准。

其次，我们采用 Clayton 和 BB1 Copula，在无需完全指定条件边际分布的情况下刻画跨资产尾部依赖。通过在滚动窗口上重新估计 Copula 参数，我们考察下尾和上尾依赖及其非对称性的演变。特别是，BB1 设定显示，下尾依赖始终高于上尾依赖。除边际 VaR和ES预测外，Copula 组件还能够预测同时 VaR 违约的概率，从而为联合下行风险提供额外评估。

第三，我们开发了一种基于马尔可夫链蒙特卡罗的序贯贝叶斯估计方法，将边际 VaR-ES 动态与基于 Copula 的依赖性相结合。边际参数通过非对称拉普拉斯工作似然进行估计，不受 Copula 伪似然的反馈影响，从而

保留边际 VaR-ES 估计准则。边际参数不确定性通过标准化残差的更新秩次进入 Copula 估计，使得依赖参数能够在每个预测起点重新估计。

本文其余部分安排如下：第2 节介绍模型设定，包括边际ES-CAViaR类模型和基于 copula 的依赖结构。第3节构建贝叶斯估计框架，并介绍预测评估标准。第4节报告一项模拟研究，该研究基于由 DCC-GARCH-t 模型生成的数据，并采用所提出的基于Copula的ES-CAViaR-st模型获得一步预测VaR和ES。第5节考察加密货币市场，包括数据描述、样本内估计和样本外预测表现评估。第6 节总结全文。

2 模型设定

我们考虑四种 ES-CAViaR 型设定，以刻画边际尾部风险动态并联合预测风险价值和预期损失，其中包括基准 ES-CAViaR 模型及其三个扩展模型。

2.1 边际设定

本研究扩展了四种 ES-CAViaR 型模型，以刻画边际尾部动态并联合预测风险价值和预期损失。具体而言，我们将 ES 动态中的超越分量重新定义为缩放超越比率，以改进对尾部行为的建模。下文中，$r_{i,t}$ 表示资产 i 在时间 t的对数收益率，即 $r_{i,t} = \{\log(P^{\mathrm{C}}_{i,t}) - \log(P^{\mathrm{C}}_{i,t-1})\} \times 100$，其中 $P^{\mathrm{C}}_{i,t}$ 表示资产 i 在时间 t的收盘价。此外，F_{t-1} 表示截至时间 $t-1$的过去信息。对于每个 i和 t，在给定 F_{t-1}的条件下，水平为 $\alpha \in (0,1)$ 的风险价值记为 $Q_{i,t}$，它是给定 F_{t-1}时$r_{i,t}$ 的 α-分位数，满足 $\mathbb{P}(r_{i,t} < Q_{i,t} \mid \mathrm{F}_{t-1}) = \alpha$。类似地，在给定 F_{t-1}的条件下，水平为$\alpha \in (0,1)$ 的预期损失记为 $e_{i,t}$，其定义为 $e_{i,t} = \mathbb{E}(r_{i,t} \mid r_{i,t} < Q_{i,t}, \mathrm{F}_{t-1})$。

ES-CAViaR 型模型 我们采用 Taylor (2019) 提出的 ES-CAViaR 模型作为联合 VaR 和 ES 动态的基准边际设定。对于资产 i，模型定义如下：

ES-CAViaR

$$
\begin{aligned}
Q_{i,t} &= \beta_{i,1} + \beta_{i,2} Q_{i,t-1} + \beta_{i,3} \left| r_{i,t-1} \right|, \\
e_{i,t} &= Q_{i,t} - w_{i,t}, \\
w_{i,t} &= \begin{cases} \gamma_{i,1} + \gamma_{i,2} \left(Q_{i,t-1} - r_{i,t-1} \right) + \gamma_{i,3} w_{i,t-1}, & \text{if } r_{i,t-1} \le Q_{i,t-1}, \\ w_{i,t-1}, & \text{otherwise.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

该模型及后续三个模型的参数约束详见下文参数约束与初始化一段。

为考虑市场波动率的差异，我们考察一种替代设定：使用近期条件波动率对风险价值超限进行标准化。同等幅度的风险价值超限，在市场平静时期和高度波动时期可能具有不同的含义。由此得到的ES-CAViaR-st模型为

ES-CAViaR-st

$$
\begin{aligned}
Q_{i,t} &= \beta_{i,1} + \beta_{i,2} Q_{i,t-1} + \beta_{i,3} \left| r_{i,t-1} \right|, \\
e_{i,t} &= Q_{i,t} - w_{i,t}, \\
w_{i,t} &= \begin{cases} \gamma_{i,1} + \gamma_{i,2} \dfrac{Q_{i,t-1} - r_{i,t-1}}{\sigma_{i,t-1}} + \gamma_{i,3} w_{i,t-1}, & \text{if } r_{i,t-1} \le Q_{i,t-1}, \\ w_{i,t-1}, & \text{otherwise.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

项$(Q_{i,\,t-1} - r_{i,\,t-1})/\sigma_{i,\,t-1}$ 衡量的是相对于近期市场波动率的风险价值违约幅度。我们使用指数加权移动平均递推式估计$\sigma_{i,\,t}$

$$
\sigma_{i,t}^2 = \lambda \sigma_{i,t-1}^2 + (1-\lambda) r_{i,t}^2, \qquad 0 < \lambda < 1,
$$

其中 λ 为平滑参数。按照标准RiskMetrics设定，在整个模拟和实证分析中，我们将$\lambda = 0.94$固定不变。

在第三个模型中，我们通过将$|r_{i,\,t-1}|$ 替换为基于开盘价、最高价、最低价和收盘价构建的日波动率代理指标，扩展了风险价值动态。与可能忽略大量日内价格波动的收盘到收盘收益率不同，这种基于区间的度量纳入了有关每日价格变动的额外信息。我们使用 Rogers-Satchell 度量构建$V_{i,\,t}$

（Rogers 和 Satchell（1991））。由此得到的 ES-CAViaR-v 设定为

ES-CAViaR-v

$$
\begin{aligned}
Q_{i,t} &= \beta_{i,1} + \beta_{i,2} Q_{i,t-1} + \beta_{i,3} \log(V_{i,t-1} + 1), \qquad (1)\\
e_{i,t} &= Q_{i,t} - w_{i,t},\\
w_{i,t} &= \begin{cases} \gamma_{i,1} + \gamma_{i,2} \dfrac{Q_{i,t-1} - r_{i,t-1}}{\sigma_{i,t-1}} + \gamma_{i,3} w_{i,t-1}, & \text{if } r_{i,t-1} \le Q_{i,t-1},\\ w_{i,t-1}, & \text{otherwise,} \end{cases}\\
V_{i,t} &= \log\left(\frac{P^{\mathrm{H}}_{i,t}}{P^{\mathrm{O}}_{i,t}}\right) \log\left(\frac{P^{\mathrm{H}}_{i,t}}{P^{\mathrm{C}}_{i,t}}\right) + \log\left(\frac{P^{\mathrm{L}}_{i,t}}{P^{\mathrm{O}}_{i,t}}\right) \log\left(\frac{P^{\mathrm{L}}_{i,t}}{P^{\mathrm{C}}_{i,t}}\right),
\end{aligned}
$$

其中 $P\mathrm{O}_{i,t}, P^{\mathrm{H}}_{i,t}, P^{\mathrm{L}}_{i,t}$ 和 $P^{\mathrm{C}}_{i,t}$ 分别表示每日开盘价、最高价、最低价和收盘价。

在第四个模型中，我们按照 Garman 和 Klass（1980），将 Garman-Klass 波动率度量作为风险价值协变量，参照 Chen、Lin 和 Asai（2026）。Garman-Klass 度量结合日内高低价区间和开收盘价变动的信息，捕捉每日价格波动的多个维度，并为尾部风险预测提供有参考价值的波动率输入。相应的 ES-CAViaR-R 设定为

ES-CAViaR-R

$$
\begin{aligned}
Q_{i,t} &= \beta_{i,1} + \beta_{i,2} Q_{i,t-1} + \beta_{i,3} \tilde{R}_{i,t-1}, \qquad (2)\\
e_{i,t} &= Q_{i,t} - w_{i,t},\\
w_{i,t} &= \begin{cases} \gamma_{i,1} + \gamma_{i,2} \dfrac{Q_{i,t-1} - r_{i,t-1}}{\sigma_{i,t-1}} + \gamma_{i,3} w_{i,t-1}, & \text{if } r_{i,t-1} \le Q_{i,t-1},\\ w_{i,t-1}, & \text{otherwise,} \end{cases}\\
\tilde{R}_{i,t} &= 0.511 \left\{ \log\left(\frac{P^{\mathrm{H}}_{i,t}}{P^{\mathrm{L}}_{i,t}}\right) \right\}^2 - 0.383 \left\{ \log\left(\frac{P^{\mathrm{C}}_{i,t}}{P^{\mathrm{O}}_{i,t}}\right) \right\}^2\\
&\quad - 0.019 \left[\log\left(\frac{P^{\mathrm{C}}_{i,t}}{P^{\mathrm{O}}_{i,t}}\right) \log\left(\frac{P^{\mathrm{H}}_{i,t} P^{\mathrm{L}}_{i,t}}{(P^{\mathrm{O}}_{i,t})^2}\right) - 2 \log\left(\frac{P^{\mathrm{H}}_{i,t}}{P^{\mathrm{O}}_{i,t}}\right) \log\left(\frac{P^{\mathrm{L}}_{i,t}}{P^{\mathrm{O}}_{i,t}}\right) \right].
\end{aligned}
$$

参数约束和初始化 在我们的下行风险分析中，$Q_{i,t}$ 表示负的下尾风险价值。我们对所有四种 ES-CAViaR 设定施加以下参数约束：

$$
\beta_{i,1} < 0, \quad 0 \le \beta_{i,2} < 1, \quad \beta_{i,3} < 0, \quad \gamma_{i,1} > 0, \quad \gamma_{i,2} > 0, \quad 0 < \gamma_{i,3} < 1.
$$

递归从 $t = 2$ 开始，因为所有 ES-CAViaR 设定都依赖于滞后收益率$r_{i,t-1}$。给定 $Q_{i,1} < 0$，符号约束会以递归方式保持$Q_{i,t} < 0$。类似的约束也适用于

波动率扩展，其协变量均为非负数。我们将 $w_{i,\ 1} > 0$ 初始化；这与对 γ_i 的约束以及严格为正的尺度分母共同确保 $w_{i,\ t} > 0$，进而确保$e_{i,\ t} < Q_{i,\ t}$ 对 $t \geq 2$成立。条件 $0 \leq \beta_{i,\ 2} < 1$ 和 $0 < \gamma_{i,\ 3} < 1$ 分别控制风险价值和预期损失递归中的持续性。

2.2 Copula表示与条件秩伪观测

令 H_t 表示给定F_{t-1}时$(r_{1,t}, r_{2,t})'$的条件联合分布，其边缘分布连续，分别为$F_{1,t}$ 和$F_{2,t}$。根据Sklar定理,

$$H_t(x_1, x_2) = C_t\big(F_{1,t}(x_1), F_{2,t}(x_2)\big),$$

其中， C_t 是一个二元Copula。我们的边际模型指定条件VaR $Q_{i,t}$ 和预期损失 ES $e_{i,t}$，而不是完整的条件边缘分布。因此，我们根据变换残差在窗口内的经验秩构造Copula伪观测值。给定当前抽取的边际参数，定义

$$z_{i,t} = \frac{r_{i,t} - Q_{i,t}}{w_{i,t}}, \qquad w_{i,t} = Q_{i,t} - e_{i,t} > 0. \tag{3}$$

由于 $w_{i,t} > 0$，式（3）中的变换在给定F_{t-1}时严格递增。因此，$(r_{1,t}, r_{2,t})'$的条件Copula与$(z_{1,t}, z_{2,t})'$的条件Copula相同。

对于给定的滚动估计窗口，我们省略窗口索引，并令 t 表示窗口内的观测日期。我们假设采用以下工作表示：

$$F_{i,t}(x) = G_i\left(\frac{x - Q_{i,t}}{w_{i,t}}\right), \quad i = 1, 2, \qquad C_t(u_1, u_2) = C(u_1, u_2), \tag{4}$$

其中 G_1 和 G_2 是连续分布函数，其具体参数形式未作规定，而 C_t是$(r_{1、\ t}、\ r_{2、\ t})\ |\mathcal{F}_{t-1}$的Copula。在工作表示（4）下，变换后的残差在每个窗口内具有相同的条件边际分布，而其条件Copula在该窗口内保持不变。

由于 G_1 和 G_2 未作规定，我们使用标准化残差的经验秩构造Copula伪观测值：

$$z_{i,t}^{[j]} = \frac{r_{i,t} - Q_{i,t}^{[j]}}{Q_{i,t}^{[j]} - e_{i,t}^{[j]}}, \quad i = 1, 2, \quad t = 2, \ldots, n, \tag{5}$$

其中， $Q_{i\ t}^{[j]}$ 和 $e_{i\ t}^{[j]}$ 分别表示根据第 j 次 MCMC迭代的参数抽样值计算的条件VaR 和预期损失， n 表示滚动窗口样本量。相应的基于秩的

伪观测值计算如下

$$u_{i,t}^{[j]} = \frac{1}{n}\sum_{s=2}^{n}\mathbb{I}\left(z_{i,s}^{[j]} \le z_{i,t}^{[j]}\right), \quad i = 1,2, \quad t = 2,\ldots,n, \tag{6}$$

其中，$\mathbb{I}$为指示函数。注意，$u_{i,t}^{[j]} \in (0,\ 1)$。

不同于传统的条件概率积分变换（PIT）$F_{i,t}(r_{i,t} \mid \mathrm{F}_{t-1})$，后者要求完全指定条件边际分布函数，我们基于秩的伪观测值依赖于标准化残差的经验分布。这些伪观测值并非精确的条件PIT，但在以下工作假设下，即每个滚动估计窗口内标准化残差的分布保持近似稳定，可为Copula估计提供近似均匀的边际输入。这一构造避免了对完整条件收益分布施加参数化假设。由于标准化残差取决于边际参数，因此每当这些参数在贝叶斯估计过程中更新时，我们都会重新计算其经验秩。

2.3 Copula族

我们考虑使用Clayton和BB1 Copula来建模跨资产尾部依赖，尤其关注极端负收益的联合发生。这些Copula提供了尾部依赖的不同表示方式，使我们能够考察依赖不对称性如何影响同时 VaR 违约的预测。

Clayton Copula 对于 $u_1,\ u_2 \in (0,\ 1)$，Clayton Copula 为

$$C^{\text{Clayton}}(u_1,u_2 \mid \theta) = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}, \quad \theta > 0.$$

它具有下尾依赖，其特征由下尾依赖系数（尾部依赖系数）刻画

$$\lambda_L^{\text{Clayton}} = 2^{-1/\theta},$$

而其上尾依赖系数为零。Copula 参数与 Kendall τ 的关系为

$$\tau = \frac{\theta}{\theta+2}, \qquad \theta = \frac{2\tau}{1-\tau}. \tag{7}$$

对应的 Copula 密度为

$$c^{\text{Clayton}}(u_1,u_2 \mid \theta) = (1+\theta)(u_1u_2)^{-1-\theta}(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-2-1/\theta}.$$

BB1 Copula BB1 Copula 通过同时允许下尾依赖和上尾依赖，扩展了 Clayton 设定：

$$C^{\mathrm{BB1}}(u_1, u_2 \mid \theta, \delta) = \left[1 + \left\{(u_1^{-\theta} - 1)^{\delta} + (u_2^{-\theta} - 1)^{\delta}\right\}^{1/\delta}\right]^{-1/\theta},$$

其中 $\theta > 0$和 $\delta \geq 1$。其尾部依赖系数为

$$\lambda_L^{\mathrm{BB1}} = 2^{-1/(\delta\theta)}, \qquad \lambda_U^{\mathrm{BB1}} = 2 - 2^{1/\delta}.$$

当 $\delta = 1$时，BB1 Copula 简化为 Clayton Copula。BB1 设定能够更灵活地表示非对称尾部依赖。

为方便记号，定义

$$A = u_1^{-\theta} - 1, \quad B = u_2^{-\theta} - 1, \quad S = (A^{\delta} + B^{\delta})^{1/\delta}.$$

于是，BB1 Copula 的密度（Joe 2014，第 191 页）为

$$\begin{aligned} c^{\mathrm{BB1}}(u_1, u_2 \mid \theta, \delta) = {} & u_1^{-(\theta+1)} u_2^{-(\theta+1)} A^{\delta-1} B^{\delta-1} (A^{\delta} + B^{\delta})^{1/\delta - 2} \\ & \times (1 + S)^{-1/\theta - 2} \left[S(\delta\theta + 1) + \theta(\delta - 1)\right]. \end{aligned}$$

对联合尾部风险预测的启示 这些 Copula 之间的差异与同时发生 VaR 违约的预测相关。对于给定的风险水平 α，联合违约的条件概率为

$$p_t := \mathbb{P}(r_{1,t} \leq Q_{1,t}, r_{2,t} \leq Q_{2,t} \mid \mathcal{F}_{t-1}) = C_t(\alpha, \alpha; \psi), \tag{8}$$

其中 ψ 表示 Copula 参数。Clayton Copula 侧重于下尾依赖，而 BB1 Copula 则能为整体依赖结构提供额外的灵活性。比较这些设定，可以评估在建模尾部依赖时提高灵活性是否能够改善样本外联合尾部事件预测。

3 基于Copula的ES-CAViaR模型的贝叶斯推断

我们将非对称拉普拉斯（AL）边际工作似然与基于秩的 Copula 准则相结合。我们首先设定先验分布，然后介绍边际工作后验和条件 Copula 伪后验，最后说明马尔可夫链蒙特卡罗程序、滚动预测和样本外评估。

3.1 先验设定

令 $\boldsymbol{\vartheta} = (\boldsymbol{\beta}_1', \boldsymbol{\gamma}_1', \boldsymbol{\beta}_2', \boldsymbol{\gamma}_2', \psi')' = (\boldsymbol{\eta}', \psi')'$ 表示基于 Copula 的双变量 ES-CAViaR 框架中的未知参数完整向量，其中 $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\beta}_1', \boldsymbol{\gamma}_1', \boldsymbol{\beta}_2', \boldsymbol{\gamma}_2')'$ 汇集边际 VaR-ES 参数，依赖参数 ψ 在 Clayton Copula 中为 θ，在 BB1 Copula 中为 $(\theta, \delta)'$。对于 $i = 1, 2$，令 $\boldsymbol{\beta}_i = (\beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \beta_{i,3})'$ 和 $\boldsymbol{\gamma}_i = (\gamma_{i,1}, \gamma_{i,2}, \gamma_{i,3})'$ 表示资产 i的 ES-CAViaR 型模型中的参数向量。先验分布可分解为

$$\pi(\boldsymbol{\vartheta}) = \pi_C(\psi) \prod_{i=1}^{2} \pi_{\beta,i}(\boldsymbol{\beta}_i) \pi_{\gamma,i}(\boldsymbol{\gamma}_i).$$

边际动态 边际参数的先验分布设定为截断多元正态分布。对于每个 i,

$$\boldsymbol{\beta}_i \sim \mathrm{TN}_3\left(\boldsymbol{\mu}_{\beta,i}, \Sigma_{\beta,i}, \mathcal{B}\right), \qquad \boldsymbol{\gamma}_i \sim \mathrm{TN}_3\left(\boldsymbol{\mu}_{\gamma,i}, \Sigma_{\gamma,i}, \mathcal{G}\right),$$

其中，TN(·) 表示截断正态分布，参数为

$$\boldsymbol{\mu}_{\beta,i} = (\mu_{i,1}, \mu_{i,2}, \mu_{i,3})', \qquad \Sigma_{\beta,i} = \mathrm{diag}(\sigma_{i,1}^2, \sigma_{i,2}^2, \sigma_{i,3}^2),$$

$$\boldsymbol{\mu}_{\gamma,i} = (\eta_{i,1}, \eta_{i,2}, \eta_{i,3})', \qquad \Sigma_{\gamma,i} = \mathrm{diag}(\zeta_{i,1}^2, \zeta_{i,2}^2, \zeta_{i,3}^2).$$

此外，截断区域定义为

$$\mathcal{B} = \{\boldsymbol{\beta}_i : \beta_{i,1} < 0,\ 0 \le \beta_{i,2} < 1,\ \beta_{i,3} < 0\},$$
$$\mathcal{G} = \{\boldsymbol{\gamma}_i : \gamma_{i,1} > 0,\ \gamma_{i,2} > 0,\ 0 < \gamma_{i,3} < 1\}.$$

Clayton Copula 为进行贝叶斯推断，我们以 Kendall τ 为参数来表示 Clayton Copula，如公式（7）所定义。我们指定先验分布

$$\tau \sim \mathrm{Beta}(a_\tau, b_\tau), \qquad a_\tau, b_\tau > 0.$$

该先验分布确保 τ 位于 (0，1) 内，并且能够灵活设定对依赖性强度的先验信念。

BB1 Copula 对于 BB1 Copula，我们为依赖参数指定相互独立的对数正态先验：

$$\theta \sim \mathrm{Lognormal}(\mu_\theta, \sigma_\theta^2), \qquad \delta - 1 \sim \mathrm{Lognormal}(\mu_\delta, \sigma_\delta^2).$$

这些先验分布确保 $\theta > 0$ 和 $\delta > 1$，同时允许灵活地设定关于依赖结构的先验信念。

在 Chen 和 So （2006）的自适应马尔可夫链蒙特卡罗方法基础上，我们开发了一种改进的 Metropolis-Hastings（MH）抽样器，用于联合更新变换后的参数向量 $\phi = (\log \theta, \log(\delta - 1))'$。预热期过后，该抽样器结合了独立高斯提议和高斯随机游走提议。前者通过使用根据预热期抽样估计的协方差矩阵来处理后验依赖，后者则有助于进行局部探索。这一改进旨在改善后验混合。

3.2 伪后验设定

我们通过 Copula 对跨资产依赖进行建模，将单变量 ES-CAViaR 框架扩展至双变量半参数设定。对于每个边际分布，VaR 和 ES 动态均采用基于分位数回归的非对称拉普拉斯表示（Koenker 和 Bassett Jr 1978；Koenker 和 Machado 1999）的 ES-CAViaR 准似然进行估计。

定义检验损失函数

$$\rho_\alpha(v) = v\{\alpha - \mathbb{I}(v \le 0)\}, \quad v \in \mathbb{R}.$$

我们保留 ES-CAViaR 公式中的非对称拉普拉斯工作核（Taylor 2019）：

$$f_{i,t}(r_{i,t}; \boldsymbol{\eta}_i) = \frac{1-\alpha}{-e_{i,t}(\boldsymbol{\eta}_i)} \exp\left\{\frac{\rho_\alpha(r_{i,t} - Q_{i,t}(\boldsymbol{\eta}_i))}{\alpha e_{i,t}(\boldsymbol{\eta}_i)}\right\},$$
$$L_{M,i}(\boldsymbol{\eta}_i) = \prod_{t=2}^{n} f_{i,t}(r_{i,t}; \boldsymbol{\eta}_i),$$

其中 $(Q_{i,t}(\boldsymbol{\eta}_i), e_{i,t}(\boldsymbol{\eta}_i))'$ 遵循第 2.1 节所述的某种动态。

尽管从观测值的角度看，$f_{i,t}$ 是一个非对称拉普拉斯密度，但我们将其用作估计准则，而非对真实条件收益分布的假设。将其解释为联合风险价值–预期损失准则时，采用了条件均值为零的工作近似；要作精确解释，则需要 $\mathbb{E}[r_{i,t} | \mathbb{F}_{t-1}] = 0$。

对于依赖性部分，我们使用第2.2节中定义的基于秩的伪观测值。这些伪观测值取决于边际 ES-CAViaR 参数，并用于下文给出的 Copula 伪似然。

3.3 贝叶斯估计

令 $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\eta}_1', \boldsymbol{\eta}_2')'$ 表示边际 VaR-ES参数，并令 $\boldsymbol{\psi}$ 表示 Copula 参数。定义 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\eta}) = \{u_{i,t}(\boldsymbol{\eta}_i) : i = 1, 2, t = 2, \ldots, n\}$。边际工作似然和 Copula 伪似然定义如下：

$$L_M(\boldsymbol{\eta}) = \prod_{i=1}^{2} L_{M,i}(\boldsymbol{\eta}_i),$$
$$L_C(\boldsymbol{\psi}; \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\eta})) = \prod_{t=2}^{n} c\left(u_{1,t}(\boldsymbol{\eta}_1), u_{2,t}(\boldsymbol{\eta}_2); \boldsymbol{\psi}\right),$$

其中， c 表示选定的 Copula 密度。我们首先利用各自的工作似然和先验分布更新边际参数，以此进行贝叶斯估计：

$$\pi_M(\boldsymbol{\eta} \mid \boldsymbol{r}) \propto L_M(\boldsymbol{\eta})\pi_M(\boldsymbol{\eta}). \tag{9}$$

给定当前的边际参数抽样值，我们使用以下方法更新 Copula 参数：

$$\pi_C(\boldsymbol{\psi} \mid \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\eta})) \propto L_C(\boldsymbol{\psi}; \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\eta}))\pi_C(\boldsymbol{\psi}). \tag{10}$$

这两个后验分量定义了以下联合分布：

$$\pi_{\text{cut}}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\psi} \mid \boldsymbol{r}) = \pi_M(\boldsymbol{\eta} \mid \boldsymbol{r})\pi_C\left(\boldsymbol{\psi} \mid \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\eta})\right).$$

我们采用这种序贯贝叶斯方法，以避免 Copula 伪似然反馈至边际参数更新。ES-CAViaR模型通过非对称拉普拉斯工作似然估计条件VaR和预期损失，而无需指定完整的条件收益分布。相关工作准则为联合估计VaR和预期损失提供了依据，其适用条件由 Fissler 和 Ziegel (2016年) 和 Taylor (2019) 讨论。若允许基于秩的 Copula 准则影响边际估计，就会改变VaR-预期损失估计准则，并可能对依赖结构的错误设定产生敏感性。

这一问题在极低风险水平下尤为突出：此时，能够用于ES递归的风险价值违约次数很少，而Copula 伪似然则利用整个估计窗口的残差秩。因此，我们保留边际工作后验，同时允许边际参数不确定性通过更新后的残差秩进入Copula估计。在这一无反馈设定下，边际后验不取决于所选的Copula族，而Copula部分则决定相应的联合尾部事件概率预测。

3.4 预测程序

我们分别基于边际工作后验和条件 Copula 伪后验，使用马尔可夫链蒙特卡罗（MCMC）进行贝叶斯推断，对应方程（9）和（10）。

MCMC 估计与预测 在每次 MCMC 迭代中，我们使用当前的边际参数抽样值，重新计算第 2.2 节定义的基于秩的伪观测值，并用它们更新 Copula 参数。随后，我们得到一步预测VaR和ES。设N表示 MCMC 迭代的总次数。在每次迭代 $j = 1, \ldots, N$, 我们对 ES-CAViaR-st 设定执行以下五个步骤。

步骤 1. 更新 风险价值参数。 对于每项资产 $i = 1, 2$，使用 MH 步骤目标函数更新 $\boldsymbol{\beta}_i$ ng

$$\pi_M\left(\boldsymbol{\beta}_i \mid \boldsymbol{\gamma}_i^{[j-1]}, \boldsymbol{r}\right).$$

步骤 2. 更新预期损失参数。 对于每项资产 $i = 1,2$，使用 MH 步骤目标函更新 $\boldsymbol{\gamma}_i$ g

$$\pi_M\left(\boldsymbol{\gamma}_i \mid \boldsymbol{\beta}_i^{[j]}, \boldsymbol{r}\right).$$

步骤 3. 重新计算基于秩的 Copula 输入。使用当前的边际参数抽样，
计算 $z_{i\,t}^{[j]}$，以及 $u_{i\,t}^{[j]}$，分别根据方程（5）和（6）计算。令

$$\boldsymbol{u}^{[j]} = \{(u_{1,t}^{[j]}, u_{2,t}^{[j]})' : t = 2, \ldots, n\}.$$

步骤 4. 更新 Copula 参数。使用以 ψ 为目标的 MH 步骤进行更新

$$\pi_C\left(\psi \mid \boldsymbol{u}^{[j]}\right).$$

步骤 5. 计 算一步预测VaR和ES。使用当前的边际参数 -
参数抽样值，计算

$$\begin{aligned}
Q_{i,n+1}^{[j]} &= \beta_{i,1}^{[j]} + \beta_{i,2}^{[j]} Q_{i,n}^{[j]} + \beta_{i,3}^{[j]} |r_{i,n}|, \\
e_{i,n+1}^{[j]} &= Q_{i,n+1}^{[j]} - w_{i,n+1}^{[j]}, \\
w_{i,n+1}^{[j]} &= \begin{cases} \gamma_{i,1}^{[j]} + \gamma_{i,2}^{[j]} \dfrac{Q_{i,n}^{[j]} - r_{i,n}}{\sigma_{i,n}} + \gamma_{i,3}^{[j]} w_{i,n}^{[j]}, & r_{i,n} \le Q_{i,n}^{[j]}, \\ w_{i,n}^{[j]}, & \text{otherwise.} \end{cases}
\end{aligned}$$

第 2.1 节中其他边际设定的预测值也以类似方式定义2.1。边际VaR和ES预测仅取决于边际参数抽样值，这些抽样值来自各自的工作后验分布。Copula 参数是在基于这些抽样值构造的基于秩的伪观测值条件下估计的。因此，Copula似然不会影响边际VaR和ES的估计，而边际参数不确定性则会影响跨资产依赖的估计。

令 $\mathcal{J}_{\text{ret}} \subseteq \{1, \ldots\ldots, N\}$ 表示经过预热期和稀疏抽样后保留的迭代索引集合，并令 $K = |\mathcal{J}_{\text{ret}}|$。对于每项资产 $i = 1, 2$，一步预测VaR和ES预测值为

$$\widehat{Q}_{i,n+1} = \frac{1}{K} \sum_{j \in \mathcal{J}_{\text{ret}}} Q_{i,n+1}^{[j]}, \qquad \widehat{e}_{i,n+1} = \frac{1}{K} \sum_{j \in \mathcal{J}_{\text{ret}}} e_{i,n+1}^{[j]}.$$

联合VaR违约概率预测除边际VaR和ES预测外，我们还构造了(8)的一步预测联合VaR违约概率预测值，定义如下：

$$\widehat{p}_{n+1} = C(\alpha, \alpha; \widehat{\psi}), \qquad \alpha = 0.01, \tag{11}$$

其中，$\widehat{\psi}$ 表示根据当前滚动估计窗口得到的Copula 参数后验均值；对于 Clayton Copula，$\psi = \theta$，对于 BB1 Copula，$\psi = (\theta, \delta)'$。所得概率量化了两项资产同时发生VaR违约的预测可能性，并为评估联合尾部事件预测的表现提供了依据。

3.5 预测评估

对于每个样本外日期 $t = n + 1, \ldots\ldots, n + T$，预测值使用从 $t - n$ 到 $t - 1$ 的观测值。

边际分布和联合违约率对于风险价值预测准确性的评估，通常采用违约率（VRate）来评估单个资产。对于每个 i，VRate 定义为

$$\text{VRate}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=n+1}^{n+T} I_{i,t}, \quad \text{where} \quad I_{i,t} = \mathbb{I}(r_{i,t} \le \widehat{Q}_{i,t}).$$

正确的条件分位数意味着，对于 $i = 1, 2$，边际违约概率为 α。

虽然VRate评估边际VaR覆盖率，但它无法描述两种资产之间同时发生的尾部事件。因此，我们报告联合违反率

$$V_{12} = \frac{1}{T} \sum_{t=n+1}^{n+T} J_t, \quad \text{where} \quad J_t = I_{1,t} I_{2,t}.$$

该数值衡量比特币和以太坊同时发生1%风险价值违约的观测频率。我们将观测到的联合违反率 V_{12} 与平均预测概率进行比较

$$\frac{1}{T}\sum_{t=n+1}^{n+T}\widehat{p}_t, \tag{12}$$

其中每个 $\widehat{p}_t$ 表示使用 Copula 参数的后验均值计算得到的联合VaR违规概率，如方程（11）所定义。

我们通过将观测到的违约率与名义水平 $\alpha = 0$进行比较，评估边际VaR校准。01。对于同时 VaR 违约，我们将观测到的联合违反率V_{12} 与平均预测概率（12）进行比较。这些数值接近，表明联合概率预测的平均校准效果良好。补充材料中提供了更正式的校准检验。

比较预测评估 对于观测收益率 y 和预测值 $e < q < 0$，回想$\rho_\alpha(u) = u\{\alpha - \mathbb{I}(u < 0)\}$。我们考虑以下评分函数：

$$\begin{aligned}
S_{\mathrm{QS}}(q; y) &= \rho_\alpha(y - q),\\
S_{\mathrm{ALS}}(q, e; y) &= -\log\left(\frac{1-\alpha}{-e}\right) - \frac{\rho_\alpha(y-q)}{\alpha e},\\
S_{\mathrm{FZ}}(q, e; y) &= \frac{\mathbb{I}(y \le q)(y-q)}{\alpha e} + \frac{q}{e} + \log(-e) - 1,\\
S_{\mathrm{FZG}}(q, e; y) &= q\{\mathbb{I}(y \le q) - \alpha\} - y\mathbb{I}(y \le q)\\
&\quad + \frac{\exp(e)}{1+\exp(e)}\left\{e - q + \frac{\mathbb{I}(y \le q)(q-y)}{\alpha}\right\} - \log\{1+\exp(e)\} + \log 2.
\end{aligned}$$

分位数评分（QS）用于评估边际VaR预测（Giacomini 和 Komunjer 2005）。非对称拉普拉斯对数评分（ALS）对应于边际工作似然；要使联合VaR–ES一致性成立，还需满足零条件均值条件（Taylor 2019）。FZ 和 FZG 评分属于一致的联合VaR–ES评分函数这一类（Fissler 和 Ziegel 2016；Fissler 等人 2016；Patton 等人 2019）。

为了评估同时 VaR 违约的预测概率，我们采用伯努利对数评分（Gneiting和Raftery 2007）：

$S_{\mathrm{Bern}}(\, p, q_1, q_2;\, y_1, y_2) = -\mathbb{I}(y_1 \le q_1,\, y_2 \le q_2)$ 对数 $p - \{1 - \mathbb{I}(y_1 \le q_1,\, y_2 \le q_2)\}$ 对数$(1-p)$。

对于每种评分 $\mathrm{m} \in$ {QS，ALS、FZ、FZG}，我们报告资产特定平均评分

$$\frac{1}{T}\sum_{t=n+1}^{n+T} S_{\mathrm{m}}(\widehat{Q}_{i,t}, \widehat{e}_{i,t}; r_{i,t}), \qquad i = 1, 2,$$

与 th QS 中省略了 ES 参数。对于伯努利评分，我们还报告平均评分 e

$$\frac{1}{T}\sum_{t=n+1}^{n+T} S_{\text{Bern}}\left(\widehat{p}_t, \widehat{Q}_{1,t}, \widehat{Q}_{2,t}; r_{1,t}, r_{2,t}\right).$$

根据相应评分规则，平均得分越低，预测性能越好。这些得分用于评估通过序贯贝叶斯框架获得的样本外预测。更正式的比较回测见补充材料。

4 模拟研究

本研究将非对称拉普拉斯密度用作工作似然而非完全指定的收益率分布。因此，任何模拟研究都需要外部指定参数化的数据生成过程（DGP），所得结论也取决于具体的设计。Gerlach 等人采用了类似策略 (2011)，他们使用参数化 GARCH 模型生成的数据评估 CAViaR 估计。

基于这一背景，我们开展模拟研究，以考察当真实 DGP 与拟合模型不同时，所提出的基于 Copula 的 ES-CAViaR 框架能否恢复一步前瞻尾部风险度量和联合短缺概率。我们从 DCC-GARCH-t 模型生成双变量收益率。对于资产 $i = 1,\ 2$，其 DCC-GARCH-t 的收益率过程为

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_t &= \boldsymbol{\mu} + \mathbf{a}_t, \quad \mathbf{a}_t = D_t \varepsilon_t, \\
\varepsilon_t &= s_\nu \mathbf{X}_t, \quad \mathbf{X}_t \mid \mathcal{F}_{t-1} \sim t_{2,\nu}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_t), \quad s_\nu = \sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}}, \quad \nu > 2, \\
h_{ii,t} &= \omega_i + \alpha_i a_{i,t-1}^2 + \beta_i h_{ii,t-1}, \quad i = 1, 2, \\
\mathbf{R}_t &= (1-\kappa_1-\kappa_2)\bar{\mathbf{R}} + \kappa_1 \mathbf{R}_{t-1,M} + \kappa_2 \mathbf{R}_{t-1}, \\
\boldsymbol{\mu} &= (\mu_1, \mu_2)', \quad D_t = \operatorname{diag}\left(\sqrt{h_{11,t}}, \sqrt{h_{22,t}}\right), \quad \bar{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{13}$$

其中，$\mathbf{R}_t$ 表示时变条件相关矩阵，$\bar{\mathbf{R}}$ 表示其无条件相关目标，而$\mathbf{R}_{t-1,\,M}$ 表示根据最近的$M = 4$标准化创新项计算得到的局部相关矩阵。在（13）中，我们用$t_{2,\,\nu}(\mathbf{0},\ \mathbf{R}_t)$表示二元 Student-$t$分布，其 ν 自由度为，位置参数为零，尺度矩阵为$\mathbf{R}_t$。模拟中使用的真实参数值列于表1。

令 T_ν 表示自由度为 ν、位置参数为零且尺度为单位值的单变量 Student-t 分布的累积分布函数，并令$T_{2,\,\nu}(x_1,\ x_2;\ \rho)$表示相应的双变量 Student-$t$

表 1：模拟研究中 DCC-GARCH-t 模型的真实参数值。

μ_1	μ_2	ω_1	α_1	β_1	ω_2	α_2	β_2	$(\kappa_1,\ \kappa_2,\ \rho)$	ν
0.08	0.02	0.25	0.07	0.80	0.15	0.02	0.70	(0.05, 0.60,0.65)	7

具有尺度矩阵的分布

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}, \qquad \rho \in (-1, 1).$$

那么，DCC-GARCH-t 设定下的边际条件风险价值为 $Q_i^{\text{DCC-}t,\ t} = \mu_i + \sqrt{h_{ii,\ t}}\, s_\nu T_\nu^{-1}(\alpha)$，$i = 1,\ 2$。因此，真实的联合短缺概率（8）变为

$$p_t^{\text{DCC-}t} := \mathbb{P}\left(r_{1,t} \le Q_{1,t}^{\text{DCC-}t},\, r_{2,t} \le Q_{2,t}^{\text{DCC-}t} \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) = C^t(\alpha, \alpha; \nu, \rho_t), \tag{14}$$

其中

$$C^t(u_1, u_2; \nu, \rho_t) = T_{2,\nu}\left(T_\nu^{-1}(u_1), T_\nu^{-1}(u_2); \rho_t\right)$$

是相关参数为 $\rho_t \in (-1,\ 1)$、自由度为 $\nu > 0$ 的 Student-t Copula。

我们使用 1,000 个观测值进行估计，其规模与实证应用中使用的观测滚动窗口相近。对于每个模拟样本，我们直接根据数据生成过程计算真实的一步超前 1% 风险价值、预期损失以及联合短缺概率。随后，我们将其与采用 Clayton Copula 设定的 ES-CAViaR-st 模型给出的相应预测值进行比较。我们将该实验重复 $N_s = 200$ 次。

由于 DCC-GARCH-t 模型的结构参数在基于 copula 的 ES-CAViaR-st 设定中没有直接对应项，因此直接比较参数估计值并不合适。相反，我们评估估计的风险价值、预期损失和联合VaR违规概率相对于各次重复实验对应的真实值的准确性。对于第 $k = 1, \ldots, N_s$ 次重复实验，令 $Q_{i,k}^0$和 $e_{i,k}^0$ 分别表示资产 $i = 1, 2$ 的真实一步预测风险价值和预期损失，并令 p_k^0 表示真实的联合短缺概率。我们省略共同的预测日期 $n + 1$。相应的预测值为 $\widehat{Q}_{i,k}$、$\widehat{e}_{i,k}$、$i = 1,2$ 和 $\widehat{p}_k$。对于这五个目标，分别用 x_k^0 和 $\widehat{x}_k$ 表示其在第 k 次重复实验中的真实值和预测值。我们报告偏差、平均绝对误差（MAE）、均方根

表2：DCC-GARCH-t数据生成过程下基于Clayton Copula的ES-CAViaR-st模型模拟结果（200次重复实验）。

数量	Bias	MAE	RMSE	平均绝对相对误差 (%)
资产1风险价值	-0.022	0.340	0.467	9.759
资产1预期损失	0.280	0.513	0.653	11.751
资产2风险价值	0.009	0.160	0.205	8.674
资产2预期损失	0.106	0.254	0.315	10.994
联合概率	0.729E−3	1.125E−3	1。300E−3	35.947

注：偏差定义为预测值减去复制特定真实值。

平方误差（均方根误差）和平均绝对相对误差（平均绝对相对误差）的定义如下：

$$\text{Bias} = \frac{1}{N_s}\sum_{k=1}^{N_s}(\widehat{x}_k - x_k^0), \qquad \text{MAE} = \frac{1}{N_s}\sum_{k=1}^{N_s}|\widehat{x}_k - x_k^0|,$$

$$\text{RMSE} = \left[\frac{1}{N_s}\sum_{k=1}^{N_s}(\widehat{x}_k - x_k^0)^2\right]^{1/2}, \qquad \text{MARE} = \frac{1}{N_s}\sum_{k=1}^{N_s}\left|\frac{\widehat{x}_k - x_k^0}{x_k^0}\right| \times 100.$$

请注意，MARE 衡量的是平均绝对预测误差相对于各次重复实验对应真实量的比例，并以百分比表示。

结果汇总于表2中，表明在数据生成过程下，拟合的基于Copula的ES-CAViaR-st模型表现良好。由于偏差定义为拟合预测值减去复制特定真实值，因此，−0。022和0。009的风险价值偏差分别表明，资产1的预测值略微偏低，而资产2的预测值略微偏高。相应的风险价值平均绝对相对误差分别为9。759%和8。674%。相比之下，两个资产的预期损失偏差均为正，分别为0。280和0。106，这表明模型产生了更高的预期损失预测值，因此低估了预期尾部损失的幅度。预期损失的平均绝对相对误差分别为11。751%和10。994%，也略高于相应的风险价值预测值。

对于联合短缺概率，0.729×10^{-3}的正偏差表明，相对于数据生成过程所隐含的概率，预测值平均偏高。联合概率预测的平均绝对相对误差（MARE）高达35.947%，这表明，即使边际VaR和ES预测相对准确，在模型设定错误的情况下，也未必能确保联合尾部风险预测同样准确。

5 实证研究

5.1 数据、模型与贝叶斯估计

数据描述 为考察加密货币市场的联合尾部风险，我们使用 R 中的 *quantmod* 软件包，从 Yahoo Finance 获取比特币和以太坊的每日价格数据。相应的代码分别为 BTC-USD 和 ETH-USD。这两种加密货币全天候连续交易，包括周末和节假日。Yahoo Finance 使用协调世界时（UTC）记录加密货币每日价格，每个每日观测值覆盖 UTC 时间 00:00 至 24:00。我们根据每日观测日期对齐两个序列，并保留两种资产均有观测值的日期。下载的数据集不含缺失的每日观测值，因此无需插补。我们使用未经调整的 OHLC 价格，包括收盘价（Close），而非调整后价格（Adjusted）。与股票不同，加密货币不会发生需要进行价格调整的传统公司行动，例如股票分割或股息。

样本期间为2018年1月至2025年7月，包含比特币–以太坊双变量序列的2,769个每日观测值。我们将样本划分为两个部分：2018年1月至2019年12月的初始估计期，包含730个观测值；以及2020年1月至2025年7月的样本外期，包含2,039个观测值。我们采用730个观测值的滚动估计窗口，在整个样本外期生成一步预测。

我们选择这一样本期间，旨在涵盖加密货币市场发展的不同阶段，包括2017年后交易活动的迅速扩张，以及随后波动率和市场压力加剧的时期。样本外期涵盖了2020年3月新冠疫情引发的市场动荡，这场动荡导致传统金融市场和加密货币市场的价格大幅下跌；之后还包括2022年5月的Terra-Luna崩溃和2022年11月的FTX 崩溃。这些事件为评估不同风险价值和预期损失模型在市场条件变化下的预测表现提供了适当背景。通过评估这一时期的预测值，我们考察所提出的模型在持续且严重的市场压力下捕捉联合尾部风险的能力。

从图1（展示了比特币和以太坊的日收益率、Rogers-Satchell波动率和Garman-Klass波动率）中，我们观察到两种加密货币均存在显著的波动率聚集现象以及波动率升高的时期。表3报告了比特币和以太坊的汇总统计量，包括日收益率序列$r_{i,t}$、Rogers-Satchell波动率序列$V_{i,t}$（定义见方程（1））以及˜Garman-Klass波动率序列R_{i}（$_t$ 定义见方程（2））。比特币和以太坊的收益率均

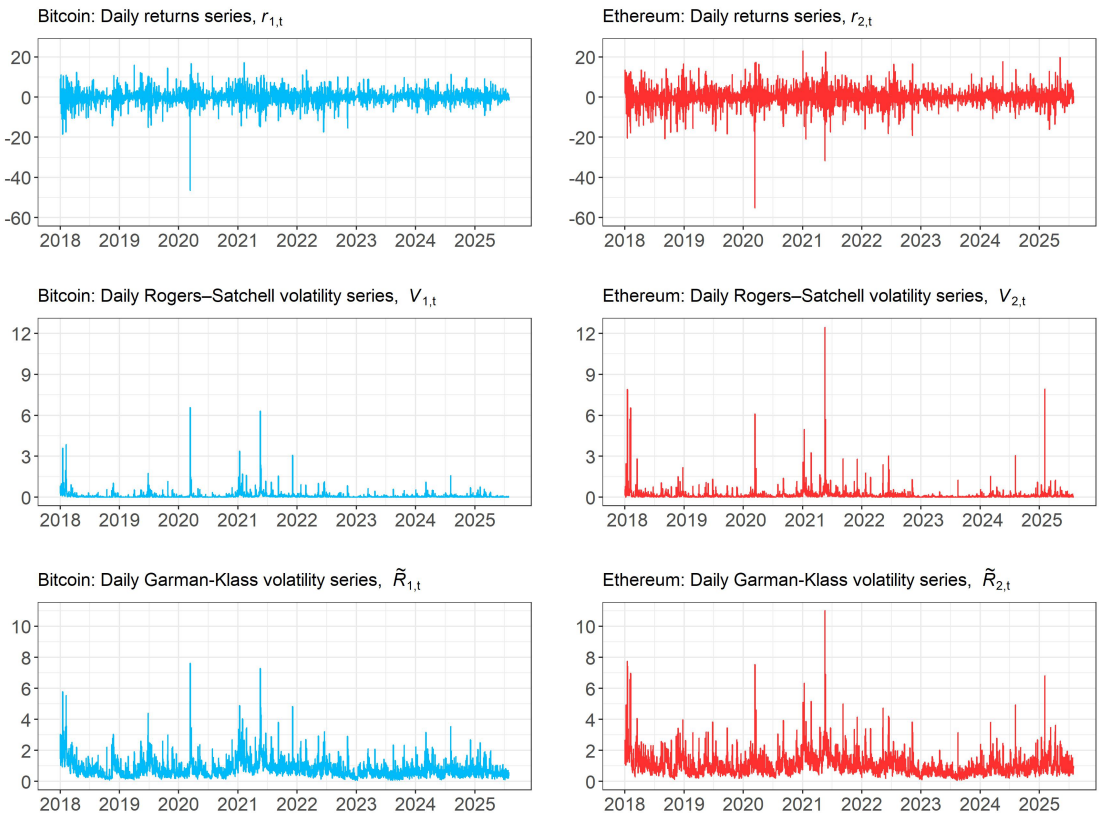

图1：比特币和以太坊的日收益率、Rogers-Satchell波动率和Garman-Klass波动率时间序列图。

表现出负偏度和尖峰厚尾，表明其显著偏离正态性，并促使我们采用半参数CAViaR型模型。Rogers-Satchell波动率$V_{i、t}$和Garman-˜Klass波动率 $R_{i均t}$ 呈现出显著变化，反映了加密货币市场的高波动率。

图2 展示了比特币和以太坊从2018年1月至2025年7月的标准化价格时间序列。在主要市场阶段，这两种资产表现出强烈的共同变动，同时在极端价格变动的幅度和时机上也呈现出明显差异，尤其是在波动率加剧的时期。这些特征表明，依赖结构可能是时变且非对称的，尤其是在尾部。因此，后续使用基于 copula 的模型，这类模型能够灵活捕捉超越线性相关性的跨资产依赖。

图 3 展示了比特币和以太坊日收益率的散点图，以及它们在单位正方形上的经验秩变换。原始收益率呈现出强烈的正关联，

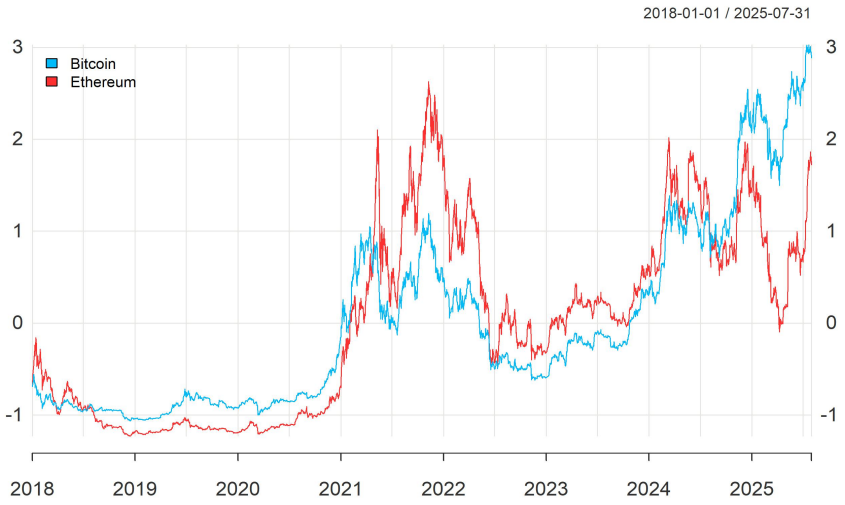

图2：比特币和以太坊的标准化价格时间序列。

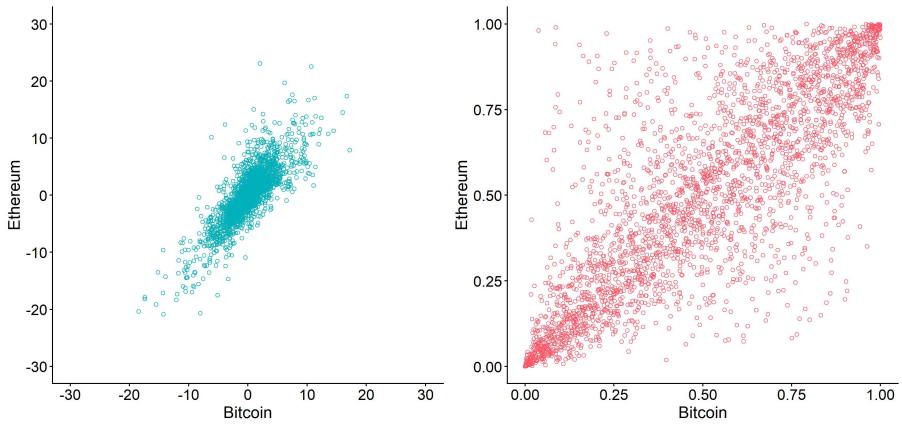

图3：比特币和以太坊日收益率的散点图（左）及其在单位正方形上的经验秩变换（右）。

而经验秩则更清晰地展现了它们的依赖模式。观测值集中在左下角附近，表明存在联合下尾关联，因此有必要在实证分析中通过基于 Copula 的框架研究尾部依赖。

竞争模型 在所提出的基于 Copula 的 ES-CAViaR 框架中，我们使用 Clayton 和 BB1 Copula 对比特币与以太坊之间的尾部依赖进行建模。每个 Copula 均与四种边际设定相结合：(i) Taylor (2019) 提出的 ES-CAViaR模型；(ii) ES-CAViaR-st 模型，其中超越项按条件波动率进行标准化；(iii) ES-CAViaR-v 模型，该模型纳入了 Rogers–Satchell 波动率度量；以及 (iv)

表 3：比特币和以太坊收益率及波动率指标的汇总统计量 es.

资产	时期	序列	样本 Size	Min.	Max.	Mean	Std.	偏度	超额峰度 峰度
资产1：比特币									
	Full	$r_{1,t}$	2769	-46.4730	17.1821	0.0759	3.4874	-0.96	14.30
		$V_{1,t}$	2769	0.0000	6.5880	0.1073	0.2861		
		$\tilde{R}_{1,t}$	2769	0.0735	7.6206	0.8266	0.6211		
	样本内	$r_{1,t}$	730	-18.4582	16.0042	-0.0927	3.9362	-0.25	3.03
		$V_{1,t}$	730	0.0000	3.8708	0.1219	0.2963		
		$\tilde{R}_{1,t}$	730	0.0968	5.7895	0.8672	0.6902		
	样本外	$r_{1,t}$	2039	-46.4730	17.1821	0.1363	3.3110	-1.36	21.66
		$V_{1,t}$	2039	0.0000	6.5880	0.1021	0.2823		
		$\tilde{R}_{1,t}$	2039	0.0735	7.6206	0.8120	0.5940		
资产2：以太坊									
	Full	$r_{2,t}$	2769	-55.0732	23.0695	0.0573	4.5387	-0.89	11.11
		$V_{2,t}$	2769	0.0000	12.4483	0.1812	0.5082		
		$\tilde{R}_{2,t}$	2769	0.0774	11.0103	1.0860	0.7882		
	样本内	$r_{2,t}$	730	-20.6860	16.6150	-0.2417	4.9587	-0.39	2.25
		$V_{2,t}$	730	0.0000	7.8950	0.2032	0.5642		
		$\tilde{R}_{2,t}$	730	0.1249	7.7490	1.1382	0.8405		
	样本外	$r_{2,t}$	2039	-55.0732	23.0695	0.1643	4.3749	-1.12	16.14
		$V_{2,t}$	2039	0.0000	12.4483	0.1733	0.4864		
		$\tilde{R}_{2,t}$	2039	0.0774	11.0103	1.0673	0.7679		

注：$r_{i,t} = [\log(P_{i,t}) - \log(P_{i,t-1})] \times 100$，其中 $P_{i,t}$ 表示时间 t的收盘价。
Rogers-Satchell波动率 $V_{i,t}$经过变换和重新缩放后表示为 $\log(V_{i,t} + 1) \times 100$。
Garman-Klass波动率 $\tilde{R}_{i,t}$ 经过~~变换后表~~示为 $\sqrt{\tilde{R}_{i,t}} \times 1000$。

纳入 Garman–Klass波动率度量的 ES-CAViaR-R 模型。

作为比较，我们纳入两个外部参数多元基准模型，即 DCC-GARCH-t，如第 4 节所述，以及 DCC-GARCH-N。重要的是，我们在贝叶斯框架下对所有竞争设定（包括两个 DCC-GARCH基准模型）进行估计和预测。我们使用马尔可夫链蒙特卡罗方法获得后验参数估计值，并在统一的滚动窗口设计和样本外评估期下，构建相应的一步预测风险价值、预期损失和联合短缺概率预测。因此，该比较在所提出的模型与外部基准模型之间保持了一致的贝叶斯预测框架。

DCC-GARCH-N 基准保留了 DCC-GARCH- 的条件方差和相关性动态t，但将式（13）中的创新项设定替换为

$$\varepsilon_t \mid \mathcal{F}_{t-1} \sim \mathrm{N}_2(\mathbf{0}, \mathbf{R}_t).$$

在这一高斯设定下，边际条件VaR为

$$Q_{i,t}^{\mathrm{DCC-N}} = \mu_i + \sqrt{h_{ii,t}}\,\Phi^{-1}(\alpha), \quad i = 1, 2,$$

且式（8）中的联合短缺概率变为

$$p_t^{\mathrm{DCC-N}} = C^{\mathrm{Ga}}(\alpha, \alpha; \rho_t) = \Phi_2\left(\Phi^{-1}(\alpha), \Phi^{-1}(\alpha); \rho_t\right), \tag{15}$$

其中 $\rho_t = (\mathbf{R}_t)12$, C^{Ga}表示高斯 copula， Φ表示标准正态累积分布函数，而 $\Phi_2(\cdot,\cdot;\,\rho)$ 表示相关系数为 ρ 的二元标准正态累积分布函数。

对于两个 DCC-GARCH 基准模型，贝叶斯后验估计决定了相应模型隐含风险价值、预期损失及联合超越概率表达式中使用的条件方差和相关性预测。我们分别使用式（14）和式（15）构建联合概率预测。

贝叶斯估计 我们进行 20,000 次 MCMC 迭代，将前 8,000 次作为预热期丢弃，之后每隔四次保留一次抽样，从而得到 3,000 个后验抽样。对于 Clayton Copula，我们采用高斯随机游走 MH（RWMH）算法处理 Kendall τ $\tau = \theta/(\theta + 2)$，并在预热期内自适应调整提议尺度，此后保持固定。落在范围 (0,1) 之外的提议点将被拒绝。

对于边际参数向量 β_i 和 γ_i $i = 1$，2，我们在预热期采用自适应高斯 RWMH 算法。预热期结束后，我们分别以 0.8 和 0.2 的概率混合使用独立核 MH（IKMH）和 R WMH更新。独立核成分采用高斯提议，其均值向量和协方差矩阵根据预热期抽样进行估计，以考虑每个参数块内参数之间的后验依赖。

我们对 BB1 Copula 采用相同的混合抽样方案，在变换尺度 $\phi = (\log\,\theta,\ \log(\delta - 1))'$上联合更新依赖参数。独立提议利用预热期抽样估计其均值向量和协方差矩阵，而随机游走提议的协方差矩阵在预热期结束后保持不变。更多实施细节见补充材料。

通过轨迹图和自相关函数评估收敛性与混合情况。补充材料中报告的相应诊断图显示，链稳定，混合情况良好，且没有明显趋势。

表 4：Clayton 和 BB1 Copula 下 ES-CAViaR-v 边际分布及 Copula 参数的伪后验摘要。

		Clayton			BB1		
收益序列	参数	Mean	2.5%	97.5%	Mean	2.5%	97.5%
比特币	$\beta_{1,1}$	-0.3814	-0.5834	-0.2338	-0.3850	-0.5957	-0.2377
	$\beta_{1,2}$	0.9266	0.8953	0.9491	0.9259	0.8937	0.9479
	$\beta_{1,3}$	-1.5639	-1.9405	-1.1490	-1.5756	-1.9557	-1.1789
	$\gamma_{1,1}$	0.2065	0.0147	0.4913	0.2023	0.0120	0.4847
	$\gamma_{1,2}$	0.1664	0.0051	0.4499	0.1575	0.0047	0.4269
	$\gamma_{1,3}$	0.1744	0.0054	0.4923	0.1671	0.0062	0.4652
以太坊	$\beta_{2,1}$	-0.0789	-0.1070	-0.0560	-0.0794	-0.1092	-0.0565
	$\beta_{2,2}$	0.9797	0.9747	0.9839	0.9797	0.9745	0.9839
	$\beta_{2,3}$	-0.8578	-1.0379	-0.6813	-0.8575	-1.0285	-0.6781
	$\gamma_{2,1}$	0.2567	0.0203	0.5769	0.2532	0.0231	0.5610
	$\gamma_{2,2}$	0.1594	0.0067	0.4473	0.1620	0.0080	0.4380
	$\gamma_{2,3}$	0.1940	0.0069	0.5156	0.1947	0.0106	0.4876
Copula	θ	1.5479	0.9777	2.1456	1.2353	0.7854	1.7425
	δ	–	–	–	1.1427	1.0275	1.3633

5.2 结果与讨论

后验汇总 ES-CAViaR-v 和 ES- CAViaR-R 模型的伪后验参数汇总见表 4 和5，其余设定的结果则见补充材料。两个模型均表现出持续的风险价值动态，这反映在 $\beta_{i,}2$ 的后验估计值相对较大。在 Clayton Copula 下，ES-CAViaR-v 和 ES-CAViaR-R 的 θ 后验均值分别为 1.5479 和 2.1804，表明后者设定隐含的下尾依赖更强。在 BB1 Copula 下，相应的后验均值为 $(\theta, \delta)' = (1.2353, 1.1427)'$ 和 $(1.3865, 1.3455)'$，表明不同边际设定下估计的依赖结构有所变化。Copula 参数的后验区间考虑了边际参数的不确定性，因为每次马尔可夫链蒙特卡罗抽样时都会重新计算标准化残差 $z_{i,t}$ 的秩。当 $\delta = 1$ 时，BB1 Copula 会退化为 Clayton Copula。ES-CAViaR-R 下 δ 的后验均值高于 ES-CAViaR-v 下的对应值，表明其偏离 Clayton Copula 的程度更大。

边际性能评估 表 6 报告了比特币和以太坊的边际1%风险价值违约率。基于 Copula 的 ES-CAViaR 设定在比特币上的违约率为 0.883%– 0.932%，在以太坊上则为 0.932% 和 1.128%。比特币的违约率均低于名义水平，而以太坊的违约率则分布在名义水平两侧。对于比特币，基准设定和

表 5：Clayton 和 BB1 Copula 下 ES-CAViaR-R 边际分布及 Copula 参数的伪后验摘要。

		Clayton			BB1		
收益序列	参数	Mean	2.5%	97.5%	Mean	2.5%	97.5%
比特币	$\beta_{1,1}$	-0.6342	-0.8931	-0.3930	-0.6399	-0.8945	-0.4080
	$\beta_{1,2}$	0.8055	0.7551	0.8569	0.8044	0.7534	0.8532
	$\beta_{1,3}$	-0.8664	-1.0797	-0.6805	-0.8678	-1.0899	-0.6895
	$\gamma_{1,1}$	0.1622	0.0084	0.4291	0.1603	0.0077	0.3982
	$\gamma_{1,2}$	0.1773	0.0059	0.4647	0.1787	0.0089	0.4750
	$\gamma_{1,3}$	0.1652	0.0079	0.4419	0.1700	0.0087	0.4294
以太坊	$\beta_{2,1}$	-0.0043	-0.0172	-0.0001	-0.0039	-0.0151	-0.0001
	$\beta_{2,2}$	0.9728	0.9642	0.9794	0.9729	0.9646	0.9796
	$\beta_{2,3}$	-0.2531	-0.3312	-0.1886	-0.2523	-0.3308	-0.1872
	$\gamma_{2,1}$	0.2955	0.0274	0.6199	0.2835	0.0236	0.5876
	$\gamma_{2,2}$	0.1766	0.0087	0.4746	0.1787	0.0092	0.4814
	$\gamma_{2,3}$	0.2133	0.0097	0.5264	0.2096	0.0103	0.5431
Copula	θ	2.1804	1.4575	2.9516	1.3865	0.8343	2.0588
	δ	–	–	–	1.3455	1.1123	1.6818

采用两种 Copula 的 ES-CAViaR-st 设定所得违约率均最接近 1%，为 0.932%。对于以太坊，两种 ES-CAViaR-R 设定最接近名义水平，违约率为 0.932%。DCC-GARCH-N 的相应违约率为 1.667% 和 1.717%，DCC-GARCH-t 的则为 1.226% 和 1.373%。因此，所有提出的设定所得经验违约率都比任一基准更接近名义水平。

图 4 和5 分别展示了采用 Clayton 和 BB1 Copula 的比特币与以太坊一步预测 1% 风险价值和预期损失预测值，并与 DCC-GARCH 基准模型进行对比。两种 Copula 的预测模式相似，在 2020 年初新冠肺炎疫情引发的市场动荡期间，下行风险显著上升。这一时期 VaR-ES 差距大幅扩大，以太坊尤为明显，表明风险价值之外的预期损失严重程度更高。在四种边际设定中，ES-CAViaR 通常产生最大的差距，而 ES-CAViaR-st、ES-CAViaR-v 和 ES-CAViaR-R 得出的估计则较为温和。风险价值违约以圆点标示，主要发生在市场波动率较高的时期。

2020年3月12日，在新冠肺炎金融动荡期间，市场大幅下跌，为不同模型对极端损失的响应差异提供了一个显著例证。当日，标准普尔500指数触发了熔断机制，而比特币和以太坊也经历了大幅下跌。在两种加密货币均出现风险价值违约后，DCC-GARCH-t于2020年3月13日产生了异常大的负预期损失预测值，比特币和以太坊分别达到 −63.142和 −77.562，

表6：2020–2025年比特币和以太坊的边际1% VaR违反率。

		比特币		以太坊	
Copula	边际模型	违反次数	违反率（%）	违反次数	违反率（%）
Clayton	ES-CAViaR	19	0.932	23	1.128
	ES-CAViaR-st	19	0.932	23	1.128
	ES-CAViaR-v	18	0.883	22	1.079
	ES-CAViaR-R	18	0.883	19	0.932
BB1	ES-CAViaR	19	0.932	23	1.128
	ES-CAViaR-st	19	0.932	23	1.128
	ES-CAViaR-v	18	0.883	22	1.079
	ES-CAViaR-R	18	0.883	19	0.932
DCC-GARCH-N		34	1.667	35	1.717
DCC-GARCH-*t*		25	1.226	28	1.373

注： 样本外期包含 $T = 2039$ 天，因此在名义1%水平下，预期违约次数为20.4。违反次数表示VaR违约次数，VRate表示相应的违约率。

而基于Copula的ES-CAViaR模型则生成了不那么极端的预测值，且在不同边际设定下表现出程度各异的持续性。由于两种加密货币在随后几天均未经历同等严重的损失，DCC-GARCH-t预测值在这一事件期间显得尤为保守，凸显了不同模型对极端市场冲击的敏感性差异。

表 7 报告了比特币和以太坊边际VaR和ES预测的样本外平均评分规则损失。对于比特币，Clayton ES-CAViaR-R的分位数得分和FZG损失最低，而DCC-GARCH-*t* 的ALS和FZ损失最低。在所提出的模型中，Clayton ES-CAViaR-R在所有四种评分规则下表现最佳。对于以太坊，BB1 ES-CAViaR-v在所提出的模型中，分位数得分、ALS、FZ和FZG损失最低。对于给定的边际设定，Clayton和BB1结果之间的差异通常很小。对于比特币，所有八种所提出的模型在全部四种评分规则下均优于DCC-GARCH-N；在FZG方面，DCC-GARCH-*t* 表现最佳，而DCC-GARCH-*t* 的ALS和FZ损失最低。对于以太坊，DCC-GARCH-*t* 在所有四种评分规则下的损失均最低。

尽管 QS 是一种适用于分位数预测的一致评分函数，但较低的 QS 损失并不一定意味着 VaR违约率更接近名义水平。作为一种非对称加权绝对误差，QS 取决于两侧预测误差的幅度

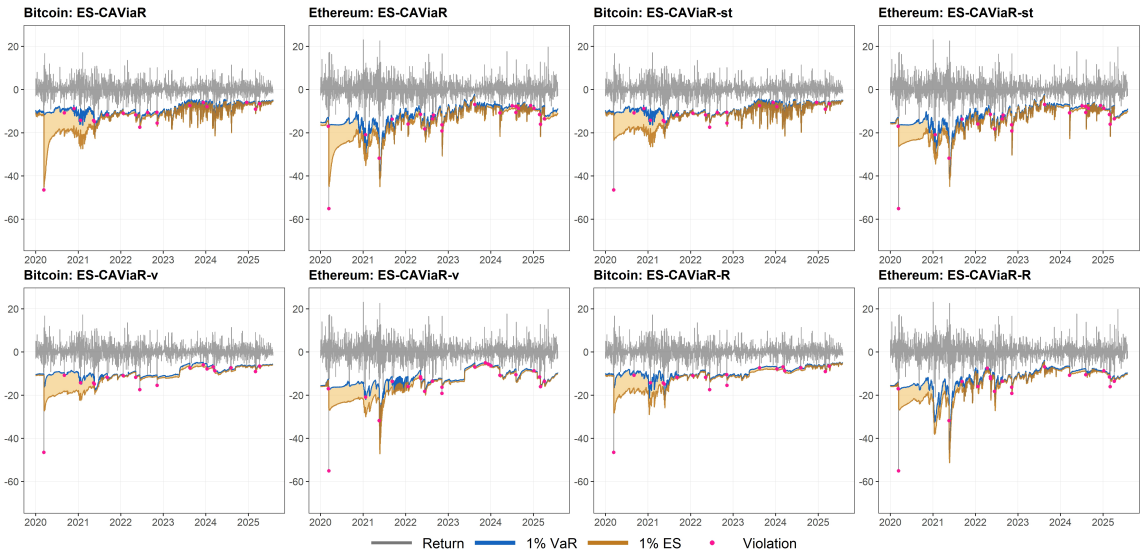

图4：在由 Clayton Copula 连接的四种 ES-CAViaR模型下，比特币和以太坊的日收益率以及一步期 1% 风险价值和预期损失预测值。阴影区域表示 VaR-ES差距，圆点表示风险价值违约。

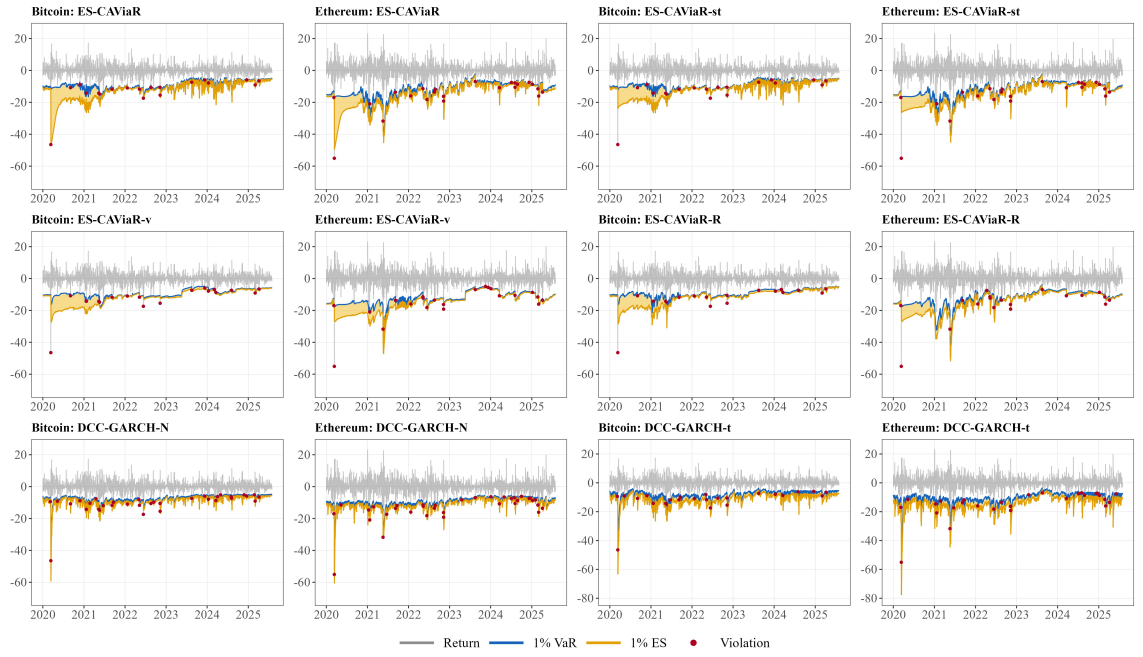

图5：在四种基于Copula的ES-CAViaR模型和两个DCC-GARCH基准模型下，比特币和以太坊的一步期 1% 风险价值和预期损失预测值。阴影区域表示风险价值–预期损失差距，圆点表示VaR违约。

表7：2020–2025年比特币和以太坊边际VaR和ES预测的样本外平均评分规则损失。

Copula	边际模型	比特币（BTC）				以太坊（ETH）			
		VaR	VaR和ES			VaR	VaR和ES		
		QS	ALS	FZ	FZG	QS	ALS	FZ	FZG
Clayton	ES-CAViaR	13.076	357.071	255.096	82.214	17.786	391.465	289.804	87.468
	ES-CAViaR-st	13.076	357.023	254.999	82.212	17.847	392.311	290.597	87.653
	ES-CAViaR-v	12.985	358.302	256.162	82.157	17.625	385.711	283.801	86.798
	ES-CAViaR-R	12.666	354.398	252.308	81.808	17.638	387.429	285.708	86.945
BB1	ES-CAViaR	13.085	357.399	255.407	82.224	17.833	392.235	290.571	87.578
	ES-CAViaR-st	13.077	357.061	255.039	82.213	17.846	392.271	290.573	87.643
	ES-CAViaR-v	12.973	358.209	256.069	82.145	17.618	385.570	283.650	86.791
	ES-CAViaR-R	**12.666**	354.422	252.340	**81.807**	17.678	387.764	286.052	86.984
DCC-GARCH-N		13.247	363.328	260.601	82.434	17.519	390.093	287.466	86.700
DCC-GARCH-*t*		13.024	**353.624**	**251.163**	82.232	**16.960**	**376.947**	**274.560**	**86.216**

注： QS评估VaR，而ALS、FZ和FZG则联合评估VaR与预期损失。得分分别针对每项资产按时间取平均值，并乘以100；数值越低表示预测表现越好。对于每项资产和评分规则，粗体表示所有模型中的最低得分，而下划线表示两类Copula族中八个所提出模型的最低得分。

预测分位数，而不是直接衡量其与名义违约率之间的偏差。例如，DCC-GARCH-N对比特币和以太坊产生的VaR违约率分别为1.667%和1.717%，显著高于名义1%水平，同时仍保持相对具有竞争力的QS损失。同样，尽管违约率分别为1.226%和1.373%，高于名义1%水平，DCC-GARCH-*t* 却分别取得了比特币的最低ALS和FZ损失，以及以太坊四项评分规则损失中的最低值。这些发现凸显了将评分规则表现与经验违约率结合进行评估的重要性。

联合表现评估 图 6 展示了四个基于Clayton Copula的ES-CAViaR模型下同时发生1%风险价值违约的一步预测概率。这些概率通过使用相应的滚动参数点估计值，在方程（ $(0.01,0.01)$ 处计算Clayton Copula获得，如方程（11）所定义。

尽管边际设定存在差异，四个模型均呈现出相似的时间模式：2020—2021年新冠肺炎时期的联合尾部事件概率相对较高，随后在2022年下半年大幅下降。这一下降可能反映了

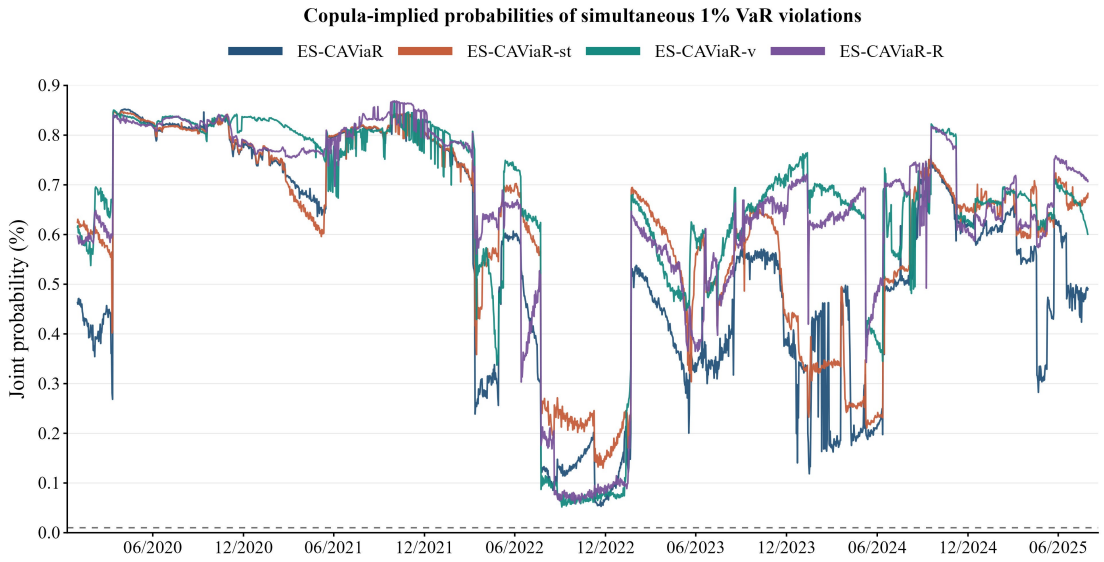

图6：四种基于Clayton Copula的ES-CAViaR模型下同时发生1%风险价值违约的预测概率。虚线表示独立性假设下的联合短缺概率（0.01%）。

比特币与以太坊之间下尾依赖的变化，而不仅仅是各自市场风险的降低。随后，预测概率在2023—2024年期间上升，并且总体上持续显著高于独立性基准0.01%，这表明独立性假设会低估联合下行风险。这些发现表明跨资产尾部依赖随时间变化，并凸显了超越边际VaR和ES预测对联合尾部风险进行建模的重要性。

图 7 展示了四种ES-CAViaR设定下Clayton Copula 参数 θ_t 以及BB1 Copula 参数 $(\theta_t, \delta_t)'$ 的滚动后验估计。对于Clayton Copula， θ_t 值越大表示下尾依赖越强，其中 $\theta_t = 0$。5、4和5分别对应下尾尾部依赖系数0。250、0。841和0。871。估计结果表明，2020—2021年下尾依赖较强，2022—2023年依赖性较弱，并在2024—2025年间偶有增强。相比之下，BB1 Copula允许存在非对称尾部依赖，其中 θ_t 和 δ_t 共同决定下尾依赖，而 δ_t 控制上尾依赖。时变的BB1参数估计反映了依赖强度和非对称性的变化，因此比Clayton设定更加灵活。四种ES-CAViaR设定的参数估计呈现大体相似的时间变化模式，不过估计值大小存在差异，这表明边际设定会影响所估计的依赖结构。

图8 展示了 BB1 Copula 隐含的下尾和上尾尾部依赖系数。两个系数

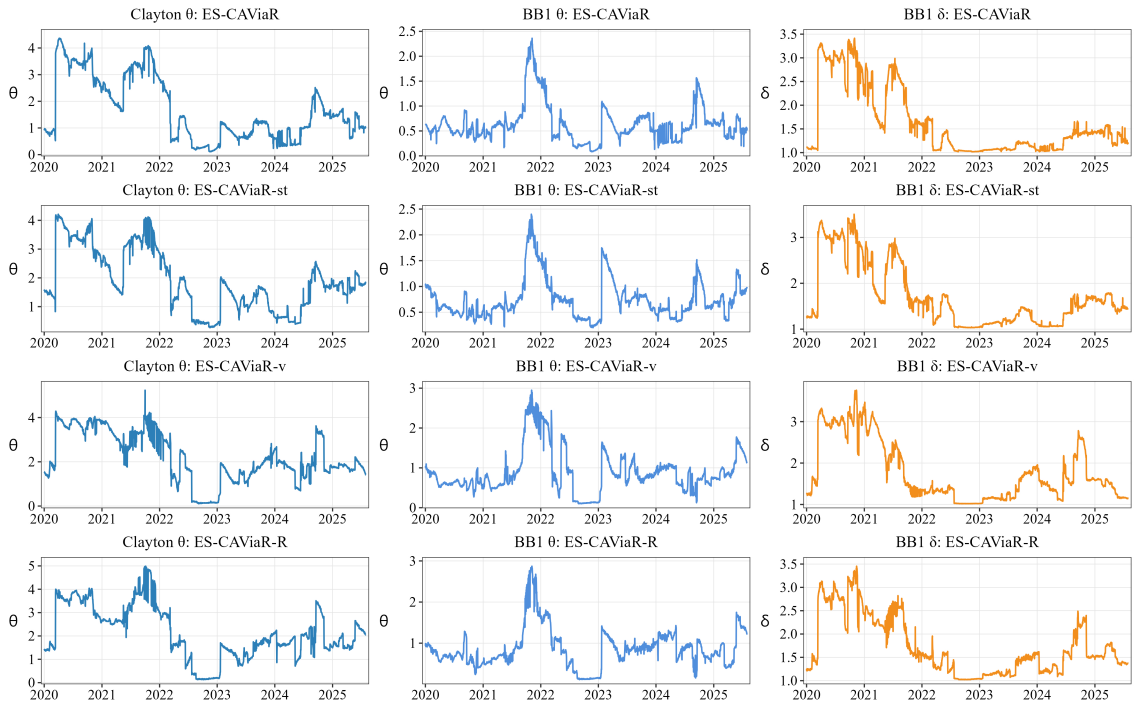

图7：在采用包含730个观测值的滚动窗口时，四种 ES-CAViaR 设定下 Clayton 参数 θ_t 和 BB1 参数（θ_t，δ_t）在2,039个一步预测起点上的滚动后验估计。

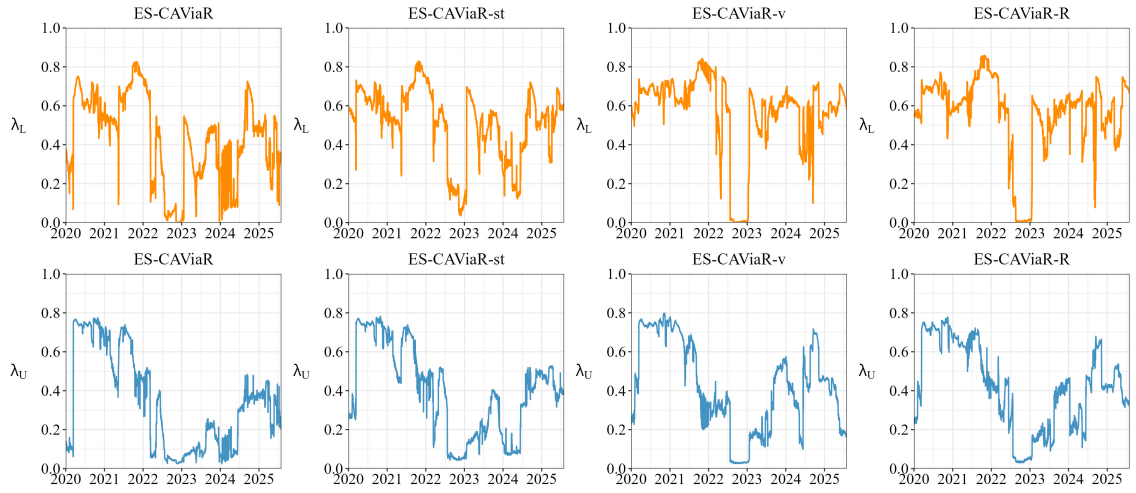

图8：在2,039个一步预测中，四种 ES-CAViaR 设定下 BB1 Copula 所隐含的下尾和上尾依赖系数的滚动估计值。每个预测起点均使用包含730个观测值的滚动窗口重新估计所有模型参数。

在2020—2021年处于较高水平（约为0.7–0.8），但在2022—2023年间显著下降，在所有四种设定下均趋近于零。这一时期恰逢加密货币市场发生重大动荡，

表8：2020–2025年样本外联合尾部事件预测评估。

Copula	边际模型 联合违约		V_{12} (%)	均值 $\hat{p}_t$(%)	观测值 −预测值	$\bar{S}_{\text{Bern}}$
Clayton	ES-CAViaR	13	0.638	0.558	0.080	4.046
	ES-CAViaR-st	13	0.638	0.620	0.018	**3.987**
	ES-CAViaR-v	14	0.687	0.661	0.026	4.161
	ES-CAViaR-R	13	0.638	0.653	**-0.015**	4.032
BB1	ES-CAViaR	13	0.638	0.457	0.180	4.114
	ES-CAViaR-st	13	0.638	0.530	0.107	4.018
	ES-CAViaR-v	14	0.687	0.580	0.106	4.159
	ES-CAViaR-R	13	0.638	0.572	0.066	4.034
DCC-GARCH-N		24	1.177	0.446	0.731	6.977
DCC-GARCH-t		19	0.932	0.557	0.375	5.452

注： 观测到的联合违约率 V_{12}和平均预测概率均乘以 100 后显示。Obs. – Pred. 报告观测率与预测率之间的有符号差值，单位为百分点。Bern. score 为 $100\bar{S}_{\text{Bern}}$，即伯努利对数评分的均值乘以 100。在全部十个模型中，粗体和下划线分别表示按 Obs. – Pred. 的绝对差值及 Bern. score 本身排名的最佳值和次佳值。排名依据未四舍五入的数值。

包括 2022年5月的 Terra-Luna 崩溃和 2022年11月的 FTX 崩溃。从 2023 年起，两个尾部呈现不同的变化：下尾依赖通常高于上尾依赖，表明在样本后期，比特币与以太坊之间的共同暴跌关系强于共同暴涨关系。这凸显了 BB1 Copula 捕捉时变非对称尾部依赖的能力，不过，这种额外的灵活性并不一定能转化为更准确的联合下行风险预测。

表8 评估了对同时发生的1%风险价值违约的预测。基于Copula的ES-CAViaR模型得出的联合违约率为0.638%–0.687%，平均预测概率为0.457%–0.661%。Clayton ES-CAViaR-R的一致性最佳，观测违约率为0.638%，平均预测概率为0.653%，差异为 −0.015个百分点。按绝对差异排名，Clayton ES-CAViaR-st位居第二，且伯努利评分最低，为3.987。按未四舍五入的伯努利评分，BB1 ES-CAViaR-R位居第二，略优于Clayton ES-CAViaR-R。在八种所提出的模型中，伯努利评分介于3.987至4.161之间，而DCC-GARCH-N为6.977，DCC-GARCH-t为5.452。八种模型中，观测联合违约率与平均预测概率之间的绝对差异也都小于任一基准模型。特别是，DCC-GARCH-N预测的平均概率为0.446%，远低于其观测联合违约率1.177%。这些结果为

表9：2020–2025年联合1% VaR超越事件的伯努利对数评分及相对于 DCC-GARCH-t 的差异。

Copula	边际分布	$\bar{S}_{\text{Bern}}$	$\Delta^{A,\text{DCC-}t}_{\text{Bern}}$	95% BB置信区间	
				下限	上限
Clayton	ES-CAViaR	4.046	**−1.406**	−2.906	−0.053
	ES-CAViaR-st	3.987	**−1.465**	−2.953	−0.136
	ES-CAViaR-v	4.161	−1.291	−2.813	0.147
	ES-CAViaR-R	4.032	**−1.420**	−2.977	−0.009
BB1	ES-CAViaR	4.114	−1.338	−2.848	0.038
	ES-CAViaR-st	4.018	**−1.434**	−2.920	−0.091
	ES-CAViaR-v	4.159	−1.293	−2.814	0.160
	ES-CAViaR-R	4.034	−1.418	−2.981	0.013
DCC-GARCH-N		6.977	**1.525**	0.426	2.817
DCC-GARCH-t		5.452	–	–	–

注：所有评分、差异和区间均乘以 100。较低的伯努利评分表示更好的预测性能。我们用 $\Delta^{A,\text{DCC-}t}_{\text{Bern}}$ 表示相对于 DCC-GARCH-t 的均值损失差异；正值表示 DCC-GARCH-t 表现更优。95% 置信区间采用配对平稳区块自助法计算，平均区块长度为 12，重抽样样本数为 20,000。粗体表示其区间不包含零的差异。

所提出的半参数框架中的联合尾部事件概率预测提供了描述性证据。

为评估联合事件预测比较中的不确定性，表 9 报告了相对于 DCC-GARCH-t 的伯努利评分差异，以及 95% 的平稳区块自助法置信区间（Politis 和 Romano 1994*a*）。八种贝叶斯 Copula 设定的均值伯努利损失均低于 DCC-GARCH-t。其中，三种 Clayton 设定和 BB1-ES-CAViaR-st 的评分差异的 95% 置信区间不包含零。这些结果支持所提出的 Copula 模型，但并不能证明存在唯一优越的设定。更多不确定性评估见补充材料。

6 结论与未来研究

本研究构建了一种贝叶斯基于Copula的二元半参数框架，将边际VaR和ES预测与跨资产尾部依赖结合起来。与传统参数化多元模型不同，该方法无需完全设定联合收益分布。通过基于秩的标准化残差，将ES-CAViaR边际动态与Clayton和BB1 Copula相结合，该框架能够对

边际尾部风险度量以及同时发生VaR违约的条件概率进行一步预测。贝叶斯估计程序能够纳入模型参数的后验不确定性。

一项重要贡献是通过引入波动率标准化的超越项和替代性的基于区间的波动率度量，对 ES-CAViaR 框架进行了扩展。这些修改使边际VaR和ES动态能够对近期市场波动率和极端损失作出不同响应。所提出的框架还将边际VaR和ES预测的评估与联合尾部事件概率的评估区分开来，从而为边际和联合尾部风险预测提供互补信息。

对2020年至2025年的比特币和以太坊进行的实证分析显示，不同资产和评估标准下的预测表现存在差异。对于比特币而言，根据评分规则的选择，Clayton ES-CAViaR-R 和 DCC-GARCH-t 的边际损失最低；而对于以太坊，在全部四种评分规则下，DCC-GARCH-t 的损失均最低。在同步VaR违约概率预测方面，Clayton ES-CAViaR-st的平均伯努利评分最低。使用未四舍五入的评分时，BB1 ES-CAViaR-st排名第二。Clayton ES-CAViaR-R在观测到的联合违约率与平均预测概率之间保持最小的绝对差异。在所报告的评估中，全部八个拟议模型的伯努利评分均低于两个DCC-GARCH基准模型。由于不同模型发布的VaR阈值可能存在差异，因此这些伯努利评分比较应结合边际预测评估作描述性解读。在DCC-GARCH-t 数据生成过程下进行的模拟研究进一步表明，准确估计联合尾部事件概率比估计边际VaR和ES更具挑战性。

滚动Copula估计揭示了不同市场状况下依赖性的显著变化，包括新冠肺炎时期以及2022年至2023年的加密货币市场动荡。BB1 Copula能够适应非对称上下尾依赖，但与相应的Clayton 设定相比，其额外的灵活性并未使平均伯努利评分一致降低。这些发现表明，边际动态和依赖结构设定的选择应反映预测目标，而不应仅仅取决于模型复杂性。

本分析聚焦于比特币和以太坊，并在每个滚动估计窗口内将 Copula 参数设为常数。未来研究可将该框架扩展至更多资产和投资组合，纳入显式时变的 Copula 参数，并探讨其他依赖结构。进一步的扩展还可考虑系统性风险度量，以及对联合尾部风险不确定性进行后验预测评估。

致谢

作者衷心感谢主编、副主编和各位审稿人所做的细致评审、提出的深刻见解和建设性建议，这些意见大幅提升了稿件的质量与清晰度。Cathy W. S. Chen 的研究获台湾国家科学及技术委员会资助（NSTC 115-2123-M-035-001）。Takaaki Koike 获日本学术振兴会（JSPS）科研费资助，项目编号为 JP24K00273 和 JP26K21178。

参考文献

Andrews, D. W. K. (1991), '异方差与自相关一致的协方差矩阵估计', *Econometrica* **59**(3), 817–858.

Ausin, M. C. and Lopes, H. F. (2010), '通过 Copula 描述时变联合分布', 计算统计与数据分析 **54**(11),2383–2399.

巴塞尔银行监管委员会 (2016年), '市场风险最低资本要求'.**网址：** *https://www.bis.org/publications/201601-standards-minimum-capital-requirements-market-risk*

Bollerslev, T. (1986), '广义自回归条件异方差', *Journal ofEconometrics* **31**(3), 307–327.

Chen, C. W. S.、Chen, P. H. 和 Hsu, Y. L.（2025），"加密货币市场中风险价值和预期损失的贝叶斯预测：非线性半参数框架"，*AppliedStochastic Models in Businessand Industry***41**(1)，e2926。

Chen, C. W. S.、Hsu, H. Y. 和 Watanabe, T.（2023），"已实现波动率 CAViaR模型的尾部风险预测"，*Finance Research Letters***51**，103326。

Chen, C. W. S.、Koike, T. 和 Shau, W. H.（2024），"通过纳入隔夜信息，利用半参数回归模型进行尾部风险预测"，*Journal of Forecasting* **43**(5)，1492–1512。

Chen, C. W. S.、Lin, A. E. P. 和 Asai, M.（2026），《结合地缘政治叙事与基于区间的波动率进行贝叶斯尾部风险预测》，*ComputationalEconomics* 。

Chen, C. W. S. 和 So, M. K. P.（2006），《论一种阈值异方差模型》，*InternationalJournal of Forecasting***22**(1)，73–89。

Chen, C. W. S., Than-Thi, H., So, M. K. P. 和 Sriboonchitta, S.（2019），《基于二元滞回自回归模型及GARCH误差和时变相关性的分位数预测》，*Applied Stochastic Models in Businessand Industry***35**(6)，1301–1321。

Chen, X. 和 Fan, Y.（2006），《Copula设定错误下半参数Copula多元动态模型的估计与模型选择》，*JournalofEconometrics***135**(1– 2)，125–154。

Choy, S. T. B., Chen, C. W. S. 和 Lin, E. M. H.（2014），《具有厚尾和动态条件相关性的二元非对称GARCH模型》，*Quantitative Finance* **14**(7)，1297–1313。

Engle, R.（2002），《动态条件相关：一类简单的多元广义自回归条件异方差模型》，*Journal ofBusiness & Economic Statistics***20**(3)，339–350。

Engle, R. F. (1982)，《基于英国通货膨胀方差估计的自回归条件异方差》，*Econometrica: JournaloftheEconometric Society* **50**(4)，987–1007。

Engle, R. F. 和 Manganelli, S. (2004)，《Caviar：基于回归分位数的条件自回归风险价值》，*Journal of Business& EconomicStatistics* **22**(4)，367–381。

Fissler, T. 和 Ziegel, J. F. (2016)，《高阶可诱导性与Osband原理》，*The Annalsof Statistics***44**(4)，1680–1707。

Fissler, T.、Ziegel, J. F. 和 Gneiting, T. (2016)，《预期损失与风险价值可联合诱导：对回测的启示》，*Risk* 第58–61页。

URL：*https://www.risk.net/risk-management/2439862/expected-shortfall-is-jointly-elicitable-with-value-at-risk-implications-for-backtesting*

Garman, M. B. 和 Klass, M. J.（1980），《基于历史数据估计证券价格波动率》，商业期刊**53**(1), 67–78.

Genest, C.、Ghoudi, K. 和 Rivest, L.-P.（1995），《多元分布族中依赖参数的半参数估计程序》，*Biometrika* **82**(3)，543–552。

Gerlach, R. H.、Chen, C. W. S. 和 Chan, N. Y. C.（2011），《金融市场风险价值的贝叶斯时变分位数预测》，*Journal ofBusiness & Economic Statistics***29**，481–492。

Giacomini, R. 和 Komunjer, I.（2005），《条件分位数预测的评估与组合》，*Journal of Business & EconomicStatistics* **23**(4)，416–431。

Gneiting, T. 和 Raftery, A. E.（2007），《严格适当的评分规则、预测与估计》，*Journal of the American statisticalAssociation* **102**(477)，359–378。

Grazian, C. 和 Liseo, B.（2017），《半参数 copula 模型中的近似贝叶斯推断》，《贝叶斯分析》 **12**(4)，991–1016。

Hoff, P. D.（2007），《扩展用于半参数 Copula估计的秩似然》，*TheAnnalsofAppliedStatistics* **1**(1)，265–283。

Joe, H.（1997），多元模型与多元依赖概念，CRC 出版社。Joe, H.（2014），使用 *Copula* 进行依赖建模，CRC 出版社。

Joe, H. and Hu, T.（1996），‘最大无穷可分分布混合所构成的多元分布’，《多元分析杂志》**57**(2)，240–265。

Koenker, R. and Bassett Jr, G.（1978），‘回归分位数’，*Econometrica* 第33–50页。

Koenker, R. and Machado, J. A.（1999），‘分位数回归的拟合优度及相关推断过程’，《美国统计学会杂志》**94**(448)，1296–1310。

Longin, F. and Solnik, B.（2001），‘国际股票市场的极端相关性’，《金融学杂志》**56**(2)，649–676。

Nelsen, R. B.（2006），*Copula*入门（第*2*版），施普林格。

Newey, W. K. and West, K. D.（1987），‘一种简单的半正定异方差和自相关稳健协方差矩阵’，*Econometrica* **55**(3)，703–708。

Nolde, N. 和 Ziegel, J. F.（2017），‘可 elicitation 性与回测：银行监管的视角’，《应用统计年鉴》**11**(4)，1833–1874。

Patton, A. J., Ziegel, J. F. 和 Chen, R.（2019），《预期损失（及风险价值）的动态半参数模型》，计量经济学杂志 **211**(2)，388–413。

Pitt, M., Chan, D. 和 Kohn, R.（2006），《高斯 copula 回归模型的高效贝叶斯推断》，*Biometrika***93**(3)，537–554。

Politis, D. N. 和 Romano, J. P. (1994*a*)，《平稳自助法》，《美国统计学会杂志》**89**(428), 1303–1313。

Politis, D. N. 和 Romano, J. P. (1994*b*)，《平稳自助法》，《美国统计学会杂志》**89**(428), 1303–1313。

Politis, D. N. 和 White, H. (2004)，《依赖自助法的自动区块长度选择》，计量经济学评论 **23**(1), 53–70。

Rogers, L. C. G. 和 Satchell, S. E. (1991)，《根据最高价、最低价和收盘价估计方差》，应用概率年刊 **1**(4), 504–512。

Storti, G. 和 Wang, C. (2025)，《用于风险预测的半参数动态条件相关框架》，*Quantitative Finance***25**(1), 31–49。

Taylor, J. W. (2019), '基于非对称拉普拉斯分布的半参数方法预测风险价值和预期损失', *Journal of Business & EconomicStatistics***37**(1), 121–133.

Tse, Y. K. and Tsui, A. K. C. (2002), '具有时变相关性的多元广义自回归条件异方差模型', *Journal of Business& Economic Statistics***20**(3), 351–362.

Yang, Y.（2026），《使用基于非对称拉普拉斯分布的动态半参数方法预测系统性风险度量》，国际预测学杂志**42**(3)，989–1007。

补充材料：

“基于Copula的半参数框架下的联合尾部风险与依赖性建模

加密货币的基于Copula的半参数

框架”

本文档分为两个部分。第 S.1 节详细介绍所提出的基于Copula的ES-CAViaR模型的贝叶斯估计程序和MCMC实现。随后，S.2 节给出补充回测结果，包括针对风险价值、预期损失和联合短缺概率预测值的正式比较回测和校准回测。

S.1 贝叶斯估计

我们采用分块Metropolis-Hastings（MH）算法进行后验模拟。对于边际动态，我们分别更新参数向量 β_i 和 γ_i, $i = 1, 2$。对于BB1 Copula，我们联合更新变换后的参数向量

$$\phi = (\log\theta, \log(\delta - 1))' .$$

这些参数块共用相同的自适应马尔可夫链蒙特卡罗程序。在下文的描述中，ξ表示正在更新的参数块，即边际分布更新中的 β_i 或 γ_i，以及 BB1 Copula 中的 ϕ。令 d 表示 ξ的维度。

在第 j次迭代中，令 $\xi^{[j-1]}$表示参数块的当前值，ξ_j^*表示其提议值。在预热期，我们使用自适应随机游走 MH（RWMH）更新，提议分布为

$$\xi_j^* \sim \mathrm{N}_d\left(\xi^{[j-1]}, \Sigma_j\right),$$

其中，Σ_j表示第 j次迭代开始时采用的自适应提议协方差矩阵。我们在预热期调整提议步长和协方差结构，此后固定提议协方差矩阵。

预热期结束后，我们以 0.8 和 0.2 的概率分别选用独立核 MH（IKMH）和 RWMH 更新。提议分布为

$$\begin{aligned} \text{IKMH:} \quad & \xi_j^* \sim \mathrm{N}_d\left(\widehat{\mu}, \widehat{\Sigma}\right), \\ \text{RWMH:} \quad & \xi_j^* \sim \mathrm{N}_d\left(\xi^{[j-1]}, \Sigma_{\mathrm{RW}}\right). \end{aligned}$$

其中，$\widehat{\boldsymbol{\mu}}$和 $\boldsymbol{\Sigma}$ 分别是根据该区块的预热期抽样估计得到的均值向量和协方差矩阵。预热期结束后，两者均保持固定。矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{RW}}$ 表示在预热期结束时固定的提议协方差矩阵。

令 $q(\cdot \mid \widehat{\boldsymbol{\mu}}, \boldsymbol{\Sigma})$ 表示高斯独立提议的密度。令 π_j 表示第 j 次迭代时 $\boldsymbol{\xi}$ 的目标密度。两种更新对应的接受概率为

$$P_{I,j} = \min\left\{1, \frac{\pi_j(\boldsymbol{\xi}_j^*)}{\pi_j(\boldsymbol{\xi}^{[j-1]})} \frac{q(\boldsymbol{\xi}^{[j-1]} \mid \widehat{\boldsymbol{\mu}}, \widehat{\boldsymbol{\Sigma}})}{q(\boldsymbol{\xi}_j^* \mid \widehat{\boldsymbol{\mu}}, \widehat{\boldsymbol{\Sigma}})}\right\},$$
$$P_{R,j} = \min\left\{1, \frac{\pi_j(\boldsymbol{\xi}_j^*)}{\pi_j(\boldsymbol{\xi}^{[j-1]})}\right\}.$$

我们采用与所选提议核对应的接受概率。如果提议被接受，则设为 $\boldsymbol{\xi}^{[j]} = \boldsymbol{\xi}_j^*$。否则，保留 $\boldsymbol{\xi}^{[j]} = \boldsymbol{\xi}^{[j-1]}$。

Clayton Copula 更新 对于 Clayton Copula，在整个后验模拟过程中，我们对 Kendall τ $\tau = \theta/(\theta + 2)$ 使用高斯随机游走 Metropolis–Hastings 算法。在第 j 次迭代时，我们提出

$$\tau_j^* \sim \mathrm{N}(\tau^{[j-1]}, s_j^2),$$

其中 s_j 表示提议步长。我们在预热期内调整 s_j，之后将其固定。对于落在 (0,1) 之外的提议，直接拒绝而不重新抽样。

S.1.1 后验汇总与马尔可夫链蒙特卡罗诊断

后验汇总 ES-CAViaR 和 ES-CAViaR-st 的后验汇总分别列于表 S.1和 S.2中。

MCMC 收敛诊断 我们使用保留抽样的轨迹图和自相关函数（ACF）来评估 MCMC 的收敛性和混合情况，结果见图 S.1–S.8。图中未见明显趋势或混合不佳的迹象，表明收敛性令人满意，且对后验分布进行了充分探索。

表 S.1：Clayton 和 BB1 Copula 下 ES-CAViaR 设定的边际分布与 Copula 参数的伪后验摘要。

		Clayton			BB1		
收益序列	参数	Mean	2.5%	97.5%	Mean	2.5%	97.5%
比特币	$\beta_{1,1}$	-0.8569	-1.1539	-0.6042	-0.8578	-1.1567	-0.6058
	$\beta_{1,2}$	0.7888	0.7394	0.8385	0.7891	0.7402	0.8404
	$\beta_{1,3}$	-0.3093	-0.3647	-0.2386	-0.3066	-0.3595	-0.2384
	$\gamma_{1,1}$	0.1579	0.0069	0.4167	0.1609	0.0082	0.4195
	$\gamma_{1,2}$	0.1664	0.0072	0.4266	0.1638	0.0108	0.4111
	$\gamma_{1,3}$	0.1619	0.0080	0.4469	0.1647	0.0082	0.4574
以太坊	$\beta_{2,1}$	-0.0054	-0.0205	-0.0001	-0.0052	-0.0213	-0.0001
	$\beta_{2,2}$	0.9801	0.9711	0.9863	0.9799	0.9712	0.9860
	$\beta_{2,3}$	-0.0723	-0.1059	-0.0493	-0.0731	-0.1077	-0.0500
	$\gamma_{2,1}$	0.2411	0.0136	0.5655	0.2403	0.0140	0.5608
	$\gamma_{2,2}$	0.3576	0.1025	0.6241	0.3564	0.0988	0.6179
	$\gamma_{2,3}$	0.2454	0.0129	0.5779	0.2438	0.0138	0.5823
Copula	θ	1.0664	0.3551	2.0714	0.6397	0.1901	1.4760
	δ	–	–	–	1.2631	1.0306	1.7120

表 S.2：ES-CAViaR- st 规格下 Clayton 和 BB1 Copula 的边际分布与 Copula 参数的伪后验摘要。

		Clayton			BB1		
收益序列	参数	Mean	2.5%	97.5%	Mean	2.5%	97.5%
比特币	$\beta_{1,1}$	-0.8643	-1.1535	-0.6142	-0.8600	-1.1512	-0.6040
	$\beta_{1,2}$	0.7868	0.7398	0.8350	0.7878	0.7390	0.8378
	$\beta_{1,3}$	-0.3116	-0.3624	-0.2421	-0.3102	-0.3647	-0.2395
	$\gamma_{1,1}$	0.1845	0.0087	0.4473	0.1840	0.0094	0.4451
	$\gamma_{1,2}$	0.1855	0.0094	0.4770	0.1728	0.0078	0.4620
	$\gamma_{1,3}$	0.1744	0.0051	0.4548	0.1718	0.0068	0.4626
以太坊	$\beta_{2,1}$	-0.0046	-0.0173	-0.0001	-0.0047	-0.0175	-0.0001
	$\beta_{2,2}$	0.9785	0.9697	0.9851	0.9783	0.9693	0.9852
	$\beta_{2,3}$	-0.0800	-0.1158	-0.0535	-0.0808	-0.1198	-0.0540
	$\gamma_{2,1}$	0.3625	0.0650	0.6996	0.3598	0.0538	0.6705
	$\gamma_{2,2}$	0.2393	0.0126	0.5985	0.2325	0.0166	0.5655
	$\gamma_{2,3}$	0.3250	0.0210	0.7746	0.3098	0.0206	0.7553
Copula	θ	2.0147	1.3192	2.7913	1.1590	0.5872	1.8762
	δ	–	–	–	1.4040	1.1309	1.7782

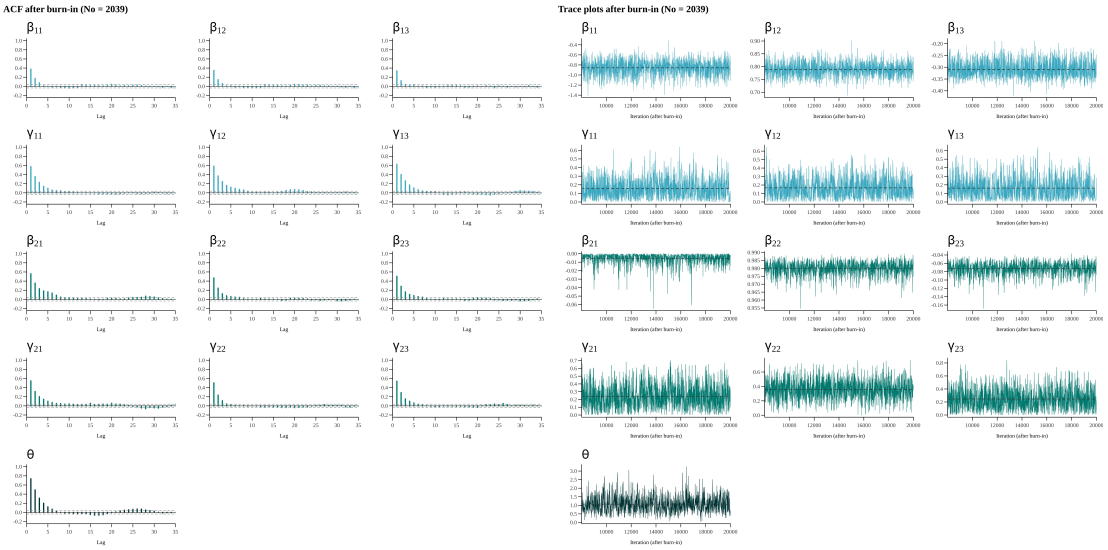

图 S.1：Clayton Copula 下 ES-CAViaR模型的 MCMC 抽样的自相关函数和轨迹图。

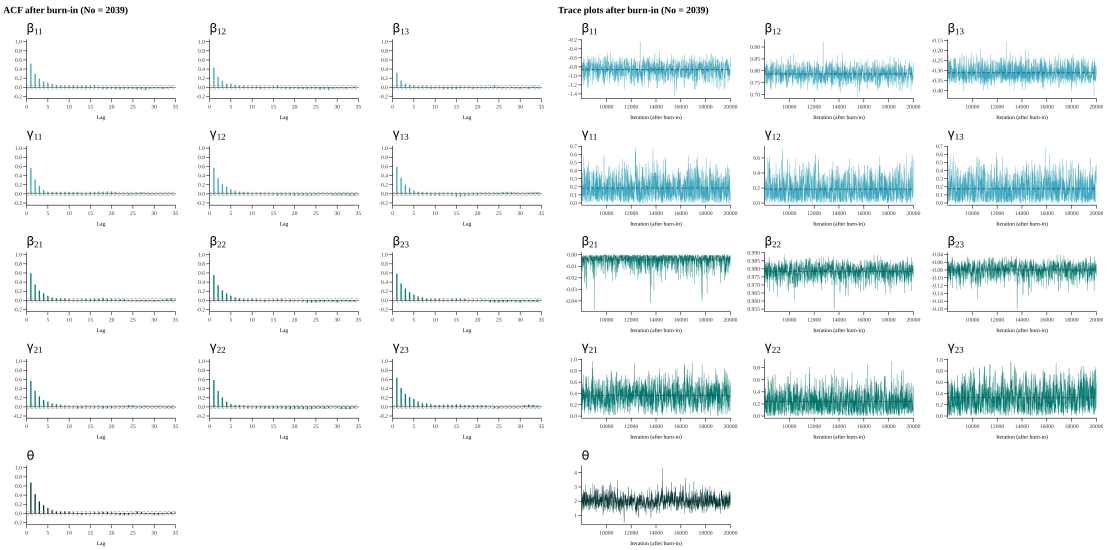

图 S.2：Clayton Copula 下 ES-CAViaR-st模型的 MCMC 抽样的自相关函数和轨迹图。

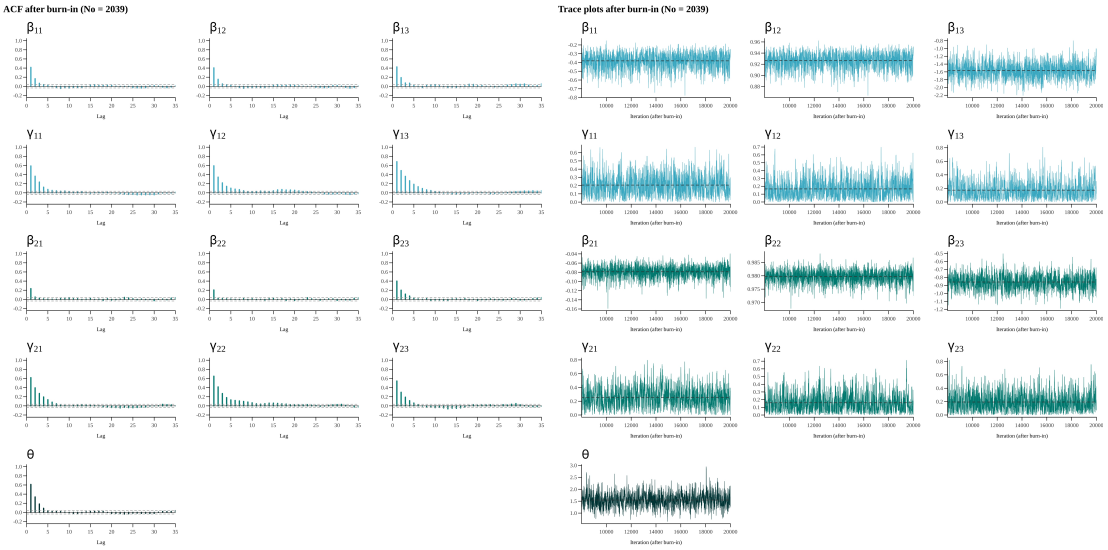

图 S.3：Clayton Copula 下 ES-CAViaR-v 模型的 MCMC 抽样自相关函数和轨迹图。

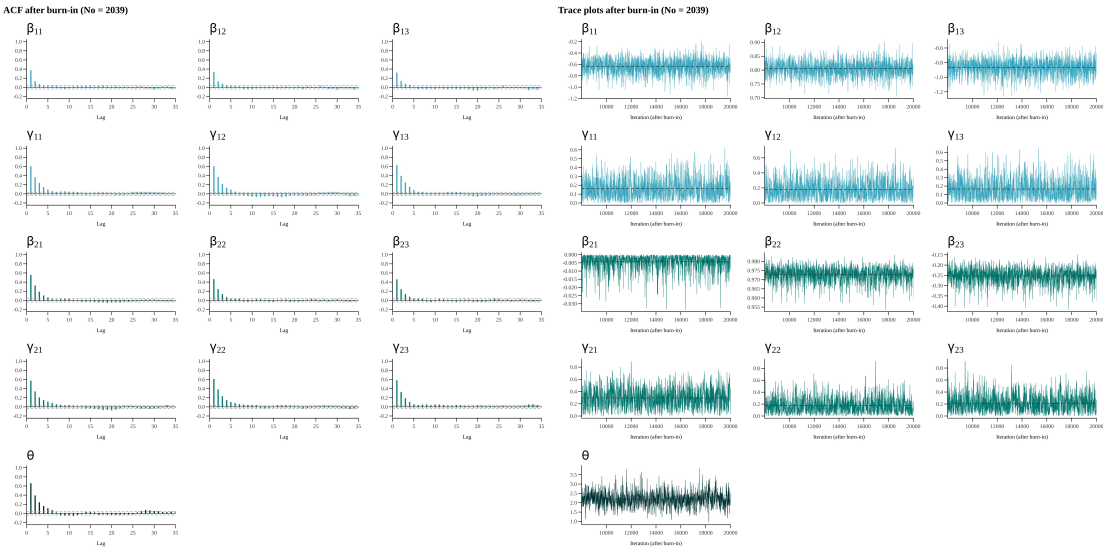

图 S.4：Clayton Copula 下 ES-CAViaR-R 模型的 MCMC 抽样自相关函数和轨迹图。

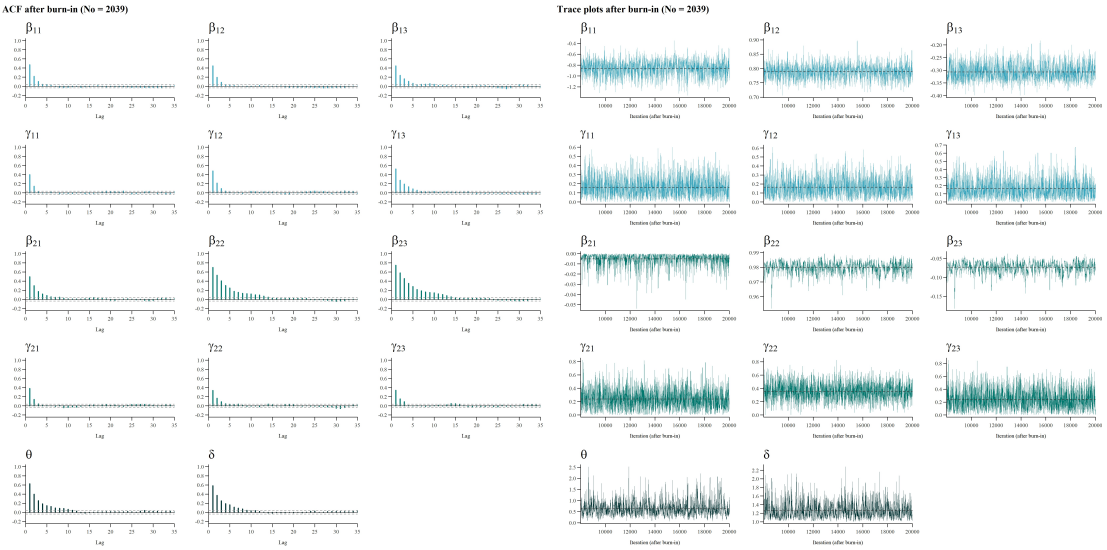

图 S.5：BB1 Copula 下 ES-CAViaR模型的 MCMC 抽样自相关函数和轨迹图。

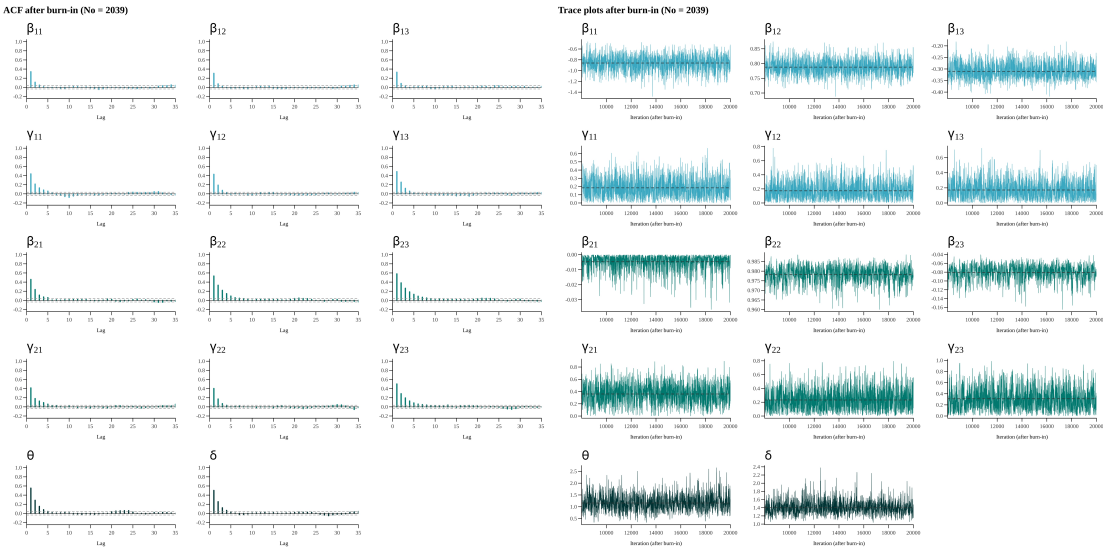

图 S.6：BB1 Copula 下 ES-CAViaR-st模型的 MCMC 抽样自相关函数和轨迹图。

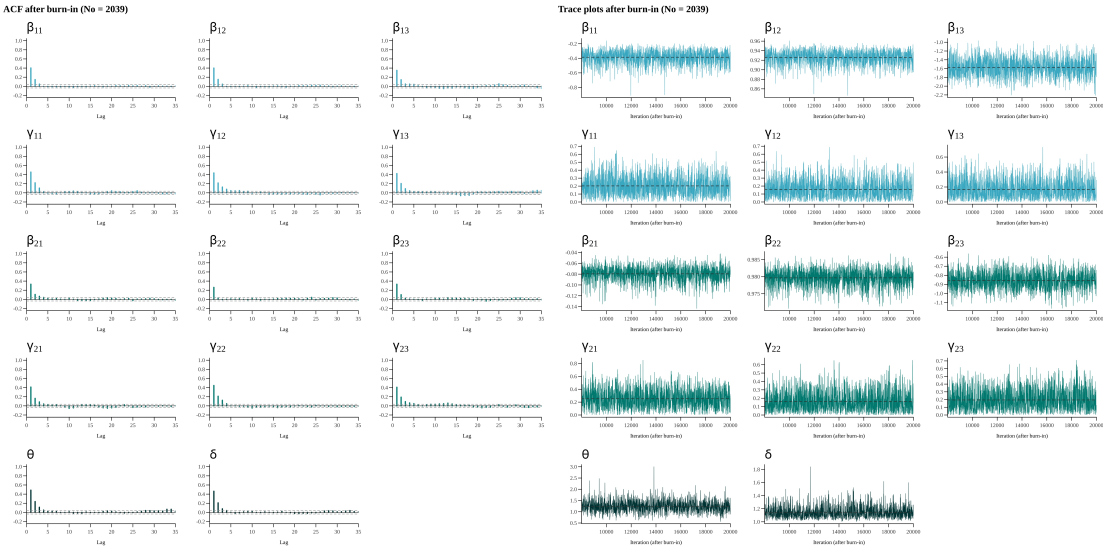

图 S.7：采用 BB1 Copula 的 ES-CAViaR-v 模型下 MCMC 抽样的自相关函数和轨迹图。

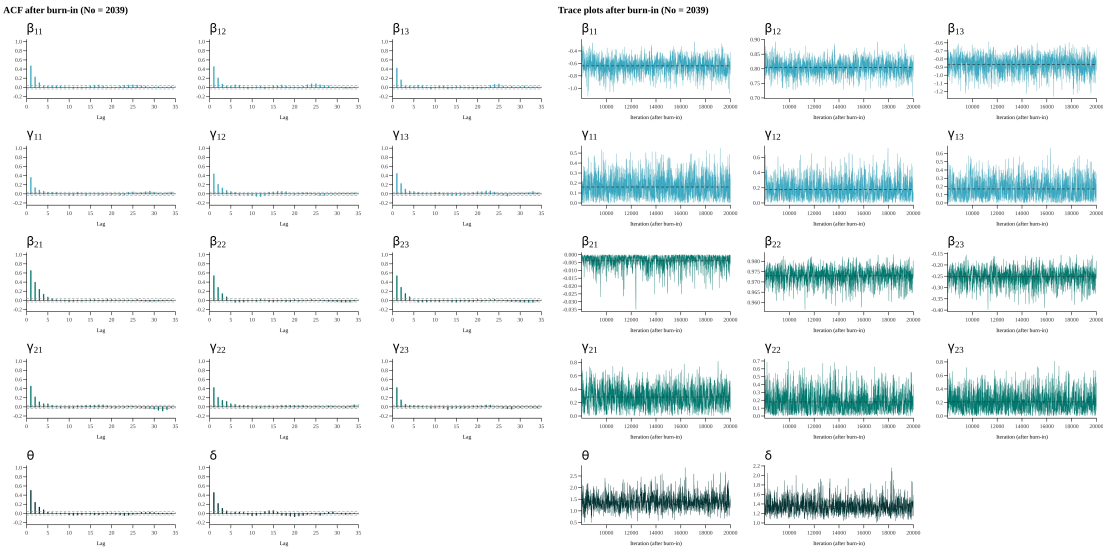

图 S.8：采用 BB1 Copula 的 ES-CAViaR-R 模型下 MCMC 抽样的自相关函数和轨迹图。

S.2 补充回测

我们通过预测校准评估以及频率学派回测（包括校准和比较回测），补充正文中的预测摘要。

S.2.1 预测校准评估

令 $I_{i,t} = \mathbb{I}(r_{i,t} < \hat{Q}_{i,t})$，$i = 1, 2$ 和 $J_t = I_{1,t} I_{2,t}$。我们使用以下方法评估联合校准：

$$V_{12} = \frac{1}{T} \sum_{t=n+1}^{n+T} (J_t - \hat{p}_t), \qquad V_{i|j} = \frac{1}{T} \sum_{t=n+1}^{n+T} I_{j,t} \left(I_{i,t} - \frac{\hat{p}_t}{\alpha} \right),$$

其中，i，$j = 1, 2$ 和 $\hat{p}_t$ 表示联合短缺概率的预测值。负值表示预测过高，正值则表示预测过低。

在联合校准条件下，四种超越结果（1，1）、（1，0）、（0，1）和（0，0）的预测概率分别为 $\hat{p}_t$、$\alpha - \hat{p}_t$、$\alpha - \hat{p}_t$ 和 $1 - 2\alpha + \hat{p}_t$，其中，第一个参数中的 1 表示比特币的风险价值超越，第二个参数表示以太坊的风险价值超越。我们根据这些概率生成 20,000 条模拟序列，以构建 V_{12}、$V_{1|2}$ 和 $V_{2|1}$ 的 95% 预测区间。这些区间量化了在给定估计预测概率条件下的抽样不确定性。

表S.3 报告了联合及条件超越校准矩，以及 95% 预测区间和稳态区块自助法置信区间（Politis 和 Romano 1994*b*）。所有八种基于 copula 的设定，其联合校准矩 V_{12} 均落在各自的预测区间内，表明没有明确证据否定联合校准。其条件校准矩通常也落在相应的预测区间内，只有 BB1 与 ES-CAViaR 结合时，出现了在比特币困境条件下对以太坊超越事件预测不足的情况。

相比之下，两个 DCC-GARCH 基准模型的联合校准矩和条件校准矩均落在其预测区间之外，表明它们对联合尾部事件存在系统性低估。对于 V_{12}，DCC-GARCH-N 的自助法置信区间也不包含零。总体而言，这些发现有力支持所提出的基于 Copula 的框架在联合尾部风险校准方面优于 DCC-GARCH 基准模型，尽管仍可观察到一些条件校准差异。

表 S.3：1% 水平下的联合风险价值超越校准矩，含 95% 区间，2020–2025 年。

Copula	边际分布	N_{12}	$\sum \hat{p}_t$	V_{12} (%) 值	95%后验预测区间	95% BB置信区间	$V_{1\|2}$ (%) 值	95%后验预测区间	95% BB置信区间	$V_{2\|1}$ (%) 值	95%后验预测区间
Clayton	ES-CAViaR	13	11.4	0.080	[−0.312, 0.325]	[−0.246, 0.458]	0.063	[−0.193, 0.190]	[−0.203, 0.340]	0.131	[−0.194, 0.192]
	ES-CAViaR-st	13	12.6	0.018	[−0.325, 0.361]	[−0.306, 0.395]	−0.002	[−0.199, 0.191]	[−0.264, 0.264]	0.096	[−0.198, 0.192]
	ES-CAViaR-v	14	13.5	0.026	[−0.317, 0.369]	[−0.292, 0.376]	0.007	[−0.191, 0.178]	[−0.180, 0.188]	0.074	[−0.192, 0.181]
	ES-CAViaR-R	13	13.3	−0.015	[−0.310, 0.377]	[−0.345, 0.364]	0.083	[−0.191, 0.179]	[−0.129, 0.329]	0.071	[−0.195, 0.177]
BB1	ES-CAViaR	13	9.3	0.180	[−0.261, 0.327]	[−0.144, 0.556]	0.175	[−0.196, 0.202]	[−0.084, 0.466]	**0.230**	[−0.196, 0.202]
	ES-CAViaR-st	13	10.8	0.107	[−0.285, 0.352]	[−0.225, 0.479]	0.102	[−0.209, 0.205]	[−0.151, 0.372]	0.187	[−0.202, 0.201]
	ES-CAViaR-v	14	11.8	0.106	[−0.286, 0.351]	[−0.205, 0.461]	0.078	[−0.203, 0.193]	[−0.102, 0.257]	0.141	[−0.201, 0.192]
	ES-CAViaR-R	13	11.7	0.066	[−0.278, 0.360]	[−0.264, 0.441]	0.148	[−0.205, 0.193]	[−0.060, 0.398]	0.136	[−0.205, 0.196]
DCC-GARCH-N		24	9.1	**0.731**	[−0.250, 0.290]	[0.285, 1.226]	**0.491**	[−0.209, 0.214]	[0.187, 0.818]	**0.514**	[−0.208, 0.214]
DCC-GARCH-t		19	11.4	**0.375**	[−0.312, 0.326]	[−0.018, 0.816]	**0.230**	[−0.221, 0.211]	[−0.001, 0.471]	**0.279**	[−0.212, 0.211]

注：所有校准矩均乘以 100。我们用 N_{12} 表示观测到的联合超越次数，以及 $\sum_t \hat{p}_t$ 预期联合违约次数。PPI 表示基于 20,000 次模拟的 95% 预测区间。

BB CI 表示 Politis 和 Romano (1994*b*) 的 95% 平稳区块自助法百分位区间，使用 20,000 个重抽样样本，平均区块长度为 12，按 Politis 和 White (2004) 选取。粗体值位于 PPI 之外。

S.2.2 频率学派回测

尽管我们提出的方法采用贝叶斯框架，但我们还提供了频率学派检验，以评估预测值的可靠性。

校准回测 我们首先应用异方差和自相关稳健（HAC）Wald 检验，考察校准矩是否等于零。HAC 协方差估计量考虑了这些矩中的异方差和序列依赖；参见 Newey 和 West(1987)；Andrews (1991）。我们检验的假设如下：

$$H_{0,\mathcal{J}} : \mathbb{E}[\boldsymbol{g}_{\mathcal{J},t}] = \mathbf{0}, \qquad H_{1,\mathcal{J}} : \mathbb{E}[\boldsymbol{g}_{\mathcal{J},t}] \neq \mathbf{0},$$

其中 J ∈{{1}、{1、2}、{3}、{3、4}、{1、2、3、4、5}} 是索引集，$\boldsymbol{g}_{\mathcal{J}、t}$ 是

$$\boldsymbol{g}_t = \begin{pmatrix} V_{\mathrm{VaR}}(\widehat{Q}_{1,t}; r_{1,t}) \\ V_{\mathrm{ES}}(\widehat{Q}_{1,t}, \widehat{e}_{1,t}; r_{1,t}) \\ V_{\mathrm{VaR}}(\widehat{Q}_{2,t}; r_{2,t}) \\ V_{\mathrm{ES}}(\widehat{Q}_{2,t}, \widehat{e}_{2,t}; r_{2,t}) \\ V_C(\widehat{p}_t, \widehat{Q}_{1,t}, \widehat{Q}_{2,t}; r_{1,t}, r_{2,t}) \end{pmatrix}, \qquad t = n+1, \ldots, n+T,$$

$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$对于预测组合（$Q_{1,t}$、$\widehat{e}_{1,t}$、$Q_{2,t}$、$\widehat{e}_{2,t}$、$\widehat{p}_t$）′，这里，对于一个实现值 y和一对风险价值–预期损失预测值（q、e），

$$V_{\mathrm{VaR}}(q; y) = \mathbb{I}(y \le q) - \alpha,$$
$$V_{\mathrm{ES}}(q, e; y) = e - q + \frac{1}{\alpha}(q - y)\mathbb{I}(y \le q),$$

是Fissler 和 Ziegel (2016年)；Nolde 和 Ziegel (2017) 的风险价值和预期损失识别函数；此外，对于预测概率 p （边际阈值同时违约 q_1和 q_2），定义

$$V_C(p, q_1, q_2; y_1, y_2) = \mathbb{I}(y_1 \le q_1,\, y_2 \le q_2) - p.$$

因此，每个 $\mathcal{J}$ 分别对应比特币风险价值、比特币风险价值–预期损失、以太坊风险价值、以太坊风险价值–预期损失以及五个条件的合并检验。这些检验基于 Wald 检验统计量，其渐近服从自由度为 $|\mathcal{J}|$的卡方分布；详情参见 Nolde 和 Ziegel (2017)。

表 S.4 报告了边际VaR和风险价值–预期损失校准的基于 HAC 的 Wald 检验 p 值。所有单项资产特定检验均未在 5% 显著性水平下拒绝所提出的设定。对于五矩联合检验，只有 ES-CAViaR-R 设定显示出校准违背的证据。DCC-GARCH-N 未通过四项资产特定检验，而 DCC-GARCH-t 未显示校准违背。

比较回测 我们还根据 Nolde 和 Ziegel （2017）的方法，基于 Diebold-Mariano 检验统计量开展比较回测。表S.5 报告了相对于 DCC-GARCH-t 基准的 HAC标准化得分差异，其中正值表示基准表现更优。粗体表示双侧 p 值低于 0.05，说明有证据拒绝得分差异平均为零这一原假设。对于比特币，在四种评分规则下，所提出的设定均未显示出具有统计显著性的差异。对于以太坊，若干 ALS 和 FZ 比较结果有利于 DCC-GARCH-t。结果表明，所提出的模型在边际预测方面仍具有竞争力，但并未始终优于 DCC-GARCH-t。

表 S.4：风险价值和预期损失校准的 HAC Wald 检验 p 值。

		比特币		以太坊		合并
Copula	边际模型	VaR	(风险价值, 预期损失)	VaR	(风险价值, 预期损失)	五阶矩
Clayton	ES-CAViaR	0.754	0.892	0.601	0.564	0.164
	ES-CAViaR-st	0.754	0.739	0.601	0.354	0.082
	ES-CAViaR-v	0.572	0.525	0.734	0.505	0.422
	ES-CAViaR-R	0.582	0.685	0.754	0.214	**0.012**
BB1	ES-CAViaR	0.754	0.869	0.601	0.534	0.085
	ES-CAViaR-st	0.754	0.740	0.601	0.353	0.088
	ES-CAViaR-v	0.572	0.529	0.734	0.512	0.203
	ES-CAViaR-R	0.582	0.682	0.754	0.204	**0.010**
DCC-GARCH-N		**0.019**	**0.033**	**0.013**	**0.017**	0.066
DCC-GARCH-*t*		0.360	0.592	0.148	0.337	0.466

注：粗体表示 $p < 0.05$。

表 S.5： 相对于 DCC-GARCH-*t* 基准的有符号 HAC标准化得分差异 k.

		比特币（BTC）				以太坊（ETH）			
Copula	边际模型	QS	ALS	FZ	FZG	QS	ALS	FZ	FZG
Clayton	ES-CAViaR	0.130	0.777	0.879	−0.044	1.334	**2.466**	**2.556**	1.610
	ES-CAViaR-st	0.127	0.730	0.818	−0.046	1.441	**2.485**	**2.560**	1.682
	ES-CAViaR-v	−0.087	0.963	1.018	−0.164	1.086	1.534	1.598	0.920
	ES-CAViaR-R	−0.696	0.143	0.210	−0.783	0.937	1.702	1.787	1.003
BB1	ES-CAViaR	0.153	0.855	0.953	−0.021	1.426	**2.556**	**2.642**	1.678
	ES-CAViaR-st	0.129	0.739	0.827	−0.045	1.448	**2.487**	**2.564**	1.688
	ES-CAViaR-v	−0.115	0.940	0.996	−0.188	1.078	1.510	1.573	0.910
	ES-CAViaR-R	−0.699	0.148	0.216	−0.786	1.007	1.759	1.844	1.070
DCC-GARCH-N		1.107	1.578	1.514	0.813	1.655	1.900	1.841	1.196
DCC-GARCH-*t*		–	–	–	–	–	–	–	–

注：负值表示行模型更优。粗体表示双侧 p 值低于 0.05。