加权 3-集合打包的 $(3/2+\varepsilon)$-近似算法

Changjun Wang[a*] Daorong Yu[a†] Wei Yu[b‡]

[a]SKLMS，中国科学院数学与系统科学研究院，北京，中国[b]华东理工大学数学学院，上海，中国

arXiv:2611.28541v1 [cs.DM] 21 Nov 2026

摘要

对于每个固定的有理数 $\varepsilon > 0$，我们给出一种加权 3-集合打包的确定性 $(3/2+\varepsilon)$-近似算法，改进了 Tong 和 Xu（2026年）报告的 1.6908-近似算法。该算法分为两个阶段。首先，使用取整的 $12/7$ 幂势函数进行有界局部搜索。随后，组合相容交换，这些交换至多插入三个集合，并增加原始权重。分析将第一阶段留下的差距与第二阶段可获得的增益联系起来。我们证明了一个结构不等式，将比较打包的权重限制为 $3/2$ 乘以当前权重，再加上小规模交换收益总和的六分之一。每项收益都计入该交换必须删除的所有集合。通过贪心规则，可以获取足够的这些收益，从而得到近似保证。我们通过分析有限计算树，并对其深度有限所导致的误差取平均，从局部最优性推导出结构界。运行时间为 $n^{4^{O(1/\varepsilon)}}\mathrm{poly}(L)$，其中 n 是输入集合的数量，L 是输入编码长度。对于诱导 $K_{1,4}$-自由图中的最大权独立集，同样的近似保证也成立。

1 引言

加权 k-集合打包问题要求我们选择一组互不相交的集合，使其总权重最大。一个实例由有限基集 Z、显式列出的集合族 $\mathcal{F} \subseteq 2^Z$（其中每个 $S \in \mathcal{F}$ 都有 $|S| \le k$），以及权重 $w : \mathcal{F} \to \mathbb{Q}_{\ge 0}$ 组成。打包 是一个子族 $A \subseteq \mathcal{F}$，其中的集合两两不相交。对于任意 $Y \subseteq \mathcal{F}$，我们将 $w(Y) = \sum_{S\in Y} w(S)$ 记作.....，并寻求使 $w(A)$ 最大化的打包 A。在资源分配的解释中，每个元素是一种只能使用一次的资源，而每个集合是一种使用这些资源并获得相应权重的选择。等价地，该问题是在秩至多为 k 的超图中求最大权匹配。情形 $k = 3$ 的一个直接应用是基于环的肾脏交换。每个可行的交换环都涉及一组患者–捐赠者配对，并具有相应的收益。当只允许长度为二或三的环时，使不相交交换的总收益最大化，就是一个加权 3-集合打包问题 [3]。

情形 $k = 3$ 是图匹配之后第一个困难情形。加权 2-集合打包可以在多项式时间内求解，而

3-集合打包包含三维匹配，即使在单位权重下也是 NP 困难的。除非 $P = NP$ [5]，单位权重问题也不存在多项式时间近似方案。同时，大小至多为三的集合对冲突施加了有用的限制。任何一个集合至多与打包中的三个成员相交。这一限制使得我们能够通过小规模交换来改进打包的近似算法。

局部搜索从一个打包开始，插入一小族不相交集合，并删除与其相交的当前集合。对于单位权重，只要插入的集合数多于删除的集合数，交换就能改善目标函数。有界交换分析可追溯至 Hurkens 和 Schrijver [9],，而无权3-集合打包已知存在一个 $(4/3+\varepsilon)$-近似 [6, 7]。不等

*邮箱： wcj@amss.ac.cn。
†邮箱： yudaorong@amss.ac.cn。
‡邮箱： yuwei@ecust.edu.cn。

权重使这种比较更加困难。三个新集合的价值可能低于一个当前集合，而一次有用的交换可能需要在多个位置结合增益与损失。

早期算法通过增加总权重的交换来处理加权问题 [1, 4]。Berman [2] 引入了基于权重平方和的局部搜索，获得了一个 $((k+1)/2+\varepsilon)$-近似，从而为 $k=3$获得了一个 $(2+\varepsilon)$-近似。让较重的集合在搜索中发挥更大影响，使得证明更强的权重界成为可能。Neuwohner [11] 随后改进了这一保证。对于 $k=3$，Thiery 和 Ward [15] 通过分析常数规模的更大交换，达到了 1.786 的比率。Thiery 的分层分析 [16] 随后逼近 $\sqrt{3}$，并为平方权重局部搜索给出了一个匹配的限制。Tong和Xu [17] 通过增加一个恢复原始权重中增益的第二阶段，报告了 1.6908-近似。对于更大的 k，无权子程序 [12] 和有序局部搜索 [14] 带来了进一步改进。在困难性方面，Hazan、Safra 和 Schwartz [8] 证明，除非 $P=NP$，否则不存在 $\Omega(k/\log k)$ 的不可近似性界。Lee、Svensson 和 Thiery [10] 证明，除非 NP $\subseteq$BPP，否则不存在关于 k 线性的界。这些界针对的是不断增长的 k；我们关注的是固定情形 $k=3$。

采用幂势函数，为这样的第二阶段留下了机会。例如，一个权重为 16 的集合可以与三个两两不相交、权重各为 6 的集合相交。用后者替换前者，会使总权重从 16 增至 18，同时降低 $12/7$-幂势函数。因此，对于势函数而言局部最优的打包，在原始权重下仍可能存在有益的交换。要利用这一机会，我们需要一个界，将与最优打包之间的差距联系到这些剩余增益上。我们还必须考虑拟议交换之间的冲突，以及每次交换所删除集合的全部代价。

1.1 我们的结果

我们得到如下近似保证。按照惯例，对于这个最大化问题，ρ-近似算法返回的打包权重至少为最优解的 $1/\rho$ 倍。这里，n 表示输入集合的数量；在图扩展中，则表示图顶点的数量；L 表示二进制输入编码长度。

定理 1. 对于每个固定的有理数 $0<\varepsilon\le 1$，都存在一种确定性的$(3/2+\varepsilon)$-近似算法，可在 $n^{4^{O(1/\varepsilon)}}\,\mathrm{poly}(L)$时间内求解带权3-集合打包问题。第一阶段每次交换至多插入 $4^{\lceil 1/\varepsilon\rceil}-1$ 个集合；第二阶段则枚举 $O(n^3)$ 次插入，每次至多插入三个集合。对于诱导，4-自由图中的最大权独立集，同样的近似保证和运行时间界也成立。

第一阶段使用经过舍入的 $12/7$ 幂势函数。第二阶段冻结由此得到的打包，并按照增益从高到低依次考虑至多包含三个集合的所有正增益插入。当某个插入中的集合与此前接受的所有插入均不相交时，就接受该插入。对于每个固定的 ε，该算法都能在多项式时间内运行，但随着 ε 减小，第一阶段邻域会迅速增大。

两阶段设计以及将收益恢复视为打包问题的观点，建立在 Tong和Xu [17] 的工作之上。我们的主要贡献是一个结构不等式，它同时考虑当前权重和恢复可获得的增益。通过有限计算树构造的方法，可以从有界局部最优性推导出该不等式。其系数使贪心恢复规则能够证明改进比率。

1.2 两个阶段如何衔接

考虑具有正权重的预处理实例，并暂时忽略舍入。令A 为第一阶段打包，令 O 为一个最优打包，并从两者中移除公共集合。当 $a\in A$ 与 $o\in O$ 相交时，将它们连接起来。这个二分比较图的最大度数为三。每个 $o\in O$ 在 A中都有一个邻居，否则仅添加 o 就会使势函数得到改善。

将每个 $o \in O$ 分配给其在 A中的某个邻居。对于 $a \in A$，令 C_a 包含分配给a的集合。这些组划分了 O，且每组至多包含三个两两不相交的集合。插入 C_a 需要删除 A 中与 C_a的任一成员相交的每个集合。用$\mathcal{N}_A(C_a)$表示这个完整的删除邻域。因此，单独插入该组所带来的增益为 $w(C_a) - w(\mathcal{N}_A(C_a))$。对于一个固定的分配，将所有正的组增益相加。令$\mathcal{G}_w(A, O)$表示所有分配中此类总和的最大值。这些分配使我们能够在证明中比较这两个打包。第二阶段枚举所有小规模插入，因此其候选列表包含每个具有正增益的组。

对于整数 $H \geq 1$，我们证明，对至多插入 $4^H - 1$ 个集合保持局部最优性意味着

$$w(O) \leq \left(\frac{3}{2} + \frac{7}{8H}\right) w(A) + \frac{1}{6}\mathcal{G}_w(A, O).$$

附加项衡量比较打包为恢复阶段提供了多少增益。设 Δ 为该阶段接受的插入所申报的增益之和， B 为其输出。贪心选择给出

$$\mathcal{G}_w(A, O) \leq 9\Delta, \qquad w(B) \geq w(A) + \Delta.$$

因子 9 来自一次被接受的插入可能涉及的比较组数量。共享删除只会增加最终改进；完整论证见第3节。因此，

$$w(O) \leq \left(\frac{3}{2} + \frac{7}{8H}\right) w(A) + \frac{3}{2}\Delta \leq \left(\frac{3}{2} + \frac{7}{8H}\right) w(B).$$

乘积 $(1/6)\cdot\ 9 = 3/2$ 解释了结构界中的增益系数。选择$H = \lceil 1/\varepsilon \rceil$ 可为较小的舍入损失留出足够余量。

结构论证分为两部分。首先，我们将每个当前集合的幂权重拆分为转移给相邻比较集合的量和剩余量。在对这些量施加适当约束的条件下，我们通过将每个比较集合的代价归于当前集合，证明所需的权重界。代价减少六分之一的组，也必须预留其完整删除成本的六分之一。由此产生的减少量恰好是该组增益的六分之一。局部估计证明，这些代价总和不超过每个当前权重的 $3/2$倍。

其次，我们利用局部最优性构造所需的转移量。我们将比较图展开为树，从而可以沿分支递归计算增益。即使一个集合在树中有多个副本，一次有利的树交换也会在原图中产生一次有利的交换。这一观察给出了分支增益的界。在有限深度处停止递归，会使约束中留下少量缺口。我们通过加入下一层增益的一部分来弥补。按深度求和，这些补充量的总和至多为原始幂权重。对H 个深度取平均，得到项 $7/(8H)$。

指数 $12/7$ 是一个选择，使得本分析中的剩余信用量、Hölder界和阈值估计能够同时成立。其他指数也可能允许同样的保证；附录D中的例子仅排除了某些范围。附录C中的另一个例子表明，在这一框架下，若要保证涵盖第一阶段所有允许的选择，则保证不可能优于 $3/2$。第 7 节讨论了这些限制的适用范围。

第 2 节介绍模型和算法。第3节证明增益恢复界，并阐述其余证明内容。第 4 节和第 5 节建立结构界，并从局部最优性推导其假设。第 6 节完成近似和运行时间分析，第 7 节给出图扩展并讨论局限性。附录包含其余标量情形、导数计算和下界构造。

2 模型和算法

我们使用引言中定义的加权 3-集合打包实例 $(Z,\ \mathcal{F}\ w)$。因子$\rho \geq 1$ 表示返回的打包 B 满足 $w(O^\star) \leq \rho w(B)$，其中最优打包为 $O^\star$。

We 首先介绍交换的记号，然后说明算法的两个阶段 .

2.1 预处理与交换

丢弃零权重集合，并将每个正权重空集放入一个打包 P 中。这些空集可以包含在每个解中。如果没有剩余集合，则返回 P。否则，对剩余实例沿用 $\mathcal{F}$ w，该实例中的集合均非空且权重为正，并令 $n = |\mathcal{F}|$。令 L 为原始输入的二进制编码长度。我们分析缩减后的实例，并将 P 加入最终输出。这能保持任何不小于 1 的近似因子。

对于辅助权重 $v : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，使用加法记号 $v(Y) = \sum_{S \in Y} v(S)$。分析将使用通过对输入权重 w进行舍入得到的权重 v 。对于当前集合打包 A 和一个打包 $X \subseteq \mathcal{F} \setminus A$，定义

$$\mathcal{N}_A(X) = \{a \in A : a \cap S \neq \varnothing \text{ for some } S \in X\}, \qquad g_A^v(X) = v(X) - v(\mathcal{N}_A(X)).$$

该交换插入 X 并移除 $\mathcal{N}_A(X)$，从而得到打包 $(A \setminus \mathcal{N}_A(X)) \cup X$。因此，$g_A^v(X)$ 是总 v-权重的变化。用 $g_A = g_A^w$ 表示原始目标函数的变化。 X 中的每个集合至多包含三个元素，并且每个元素至多属于 A 的一个成员。因此， $|\mathcal{N}_A(X)| \leq 3|X|$。

对于 $p > 0$，令 $\Phi_p^v(Y) = \sum_{S \in Y} v(S)^p$。若打包 A 满足 b-局部最优，则称其相对于此势函数局部最优；这意味着对于每个打包 $X \subseteq \mathcal{F} \setminus A$ （其中 $|X| \leq b$），都有 $\Phi_p^v(X) \leq \Phi_p^v(\mathcal{N}_A(X))$。该条件表示，所有允许的交换都无法改善势函数。我们在

$$p = \frac{12}{7}, \qquad r = \frac{1}{p} = \frac{7}{12}$$

整个算法及其分析中使用。

对于作为集合族彼此不相交的打包 A、O，比较图的两侧分别为 A、O；当且仅当 $a \cap o \neq \varnothing$ 时， ao 是一条边。我们用 $a \sim o$ 表示邻接，用 $\mathcal{N}(u)$ 表示该图中任意顶点 u 的邻居集合。根据相同的元素计数论证，两侧的度都至多为三。记号 $\mathcal{N}_A(X)$ 也表示该图中 $X \subseteq O$ 的邻域。若两个打包共有一个子族 $C = A \cap O$，则 $O \setminus C$ 中没有集合与 C 中的成员相交。因此，移除公共成员不会改变任何 $X \subseteq O \setminus C$ 的删除邻域。在比较算法与最优解时，我们会用到这一观察。

2.2 幂局部搜索之后的收益恢复

第一阶段反复改进舍入后的幂势函数。舍入使势函数取整数值，并界定了迭代次数。第二阶段使用原始权重，相对于最终的第一阶段打包选择较小的改进。

对于有理精度参数 $0 < \varepsilon \leq 1$，设

$$\begin{aligned} H = \lceil 1/\varepsilon \rceil, \qquad b = 4^H - 1, \qquad M = \max_{S \in \mathcal{F}} w(S), \\ \tau = \frac{\varepsilon M}{30n}, \qquad Q(S) = \lfloor (w(S)/\tau)^p \rfloor . \end{aligned} \tag{1}$$

这里， H 是分析中使用的深度， b 是第一阶段插入界， τ 是舍入尺度。将 Q 加性地扩展到子族。第 6 节解释了为什么该尺度为舍入误差留出了足够空间，以及如何精确计算 Q 。对于 $\varepsilon > 1$，使用精度为 1 运行算法即可。

为了将整数势函数与分析联系起来，定义辅助权重

$$v(S) = \tau Q(S)^r \qquad (S \in \mathcal{F}).$$

算法 1 幂函数局部搜索与收益恢复

1 $A \leftarrow \varnothing$. 2 当某个打包 $X \subseteq \mathrm{F} \setminus A$, $1 \le |X| \le b$, 满足 $Q(X) > Q(\mathrm{N}_A(X))$ 时，执行 3 $A \leftarrow (A \setminus \mathrm{N}_A(X)) \cup X$. 4 结束 while；冻结 A. 5 列出所有满足 $1 \le |X| \le 3$ 且 $g_A(X) > 0$ 的打包 $X \subseteq \mathrm{F} \setminus A$。6 按 $g_A(X)$ 非递增顺序排列此列表；设置 $U \leftarrow \varnothing$, $\mathrm{R} \leftarrow \varnothing$。7 按此顺序遍历每个候选集合 X： 8 如果对所有 $S \in X, T \in U$ 均满足 $S \cap T = \varnothing$，则 $U \leftarrow U \cup X$，并令 $\mathrm{R} \leftarrow \mathrm{R} \cup \{X\}$。9 结束 for。10 返回 $B = (A \setminus \mathrm{N}_A(U)) \cup U$，以及 P。

由于 $v(S)^p = \tau^p Q(S)$，当且仅当交换增加 Φ_p^v时，它才会增加 Q 。因此，第一阶段也是对幂势函数 Φ_p^v进行的局部搜索。权重 v 仅用于分析；算法比较的是整数值 Q。

固定全序解决所有选择与平局问题，使该过程具有确定性。对于满足$Q(S) = 0$ 的集合，可以不将其纳入第一阶段插入；这些集合仍可用于恢复。在第二阶段，每个候选集合的增益都相对于同一个冻结打包 A进行衡量。所选插入必须两两不相交，但它们的删除邻域可以重叠。生成输出时，每个被删除的集合只删除一次。令

$$\Delta = \sum_{X \in \mathcal{R}} g_A(X) \tag{2}$$

表示单独计算的增益之和。重叠的删除可能使实际改进大于 Δ。按增益排序还可确保每个被拒绝的候选集合都与一个增益至少同样大的已接受候选项相交。这两点给出了下一节中的恢复界。

3 增益恢复与证明思路

现在，我们描述结构分析将带来的增益，并证明第二阶段能够恢复其中一个固定比例。这一步仅用到集合的大小和候选集合的排序。

3.1 对比较打包进行分组

设 A, O 是彼此不相交的打包，并假设每个 $o \in O$ 都有一个邻居属于 A。对于正比较权重，这可由单集合插入下的局部最优性推出。将每个 o 分配给 A 中一个与之相邻的成员。随后，分配给同一个当前集合的集合构成一组。每组至多包含三个集合，因此其规模与恢复过程所考虑的候选集合相同。

定义 1. 一个分配 π 将每个 $o \in O$ 映射到 A 中的一个邻居，并形成各组$C_a = \{o \in O : \pi(o) = a\}$。对于非负权重 v，定义分配增益 及其在所有分配中的最大值如下：

$$G_\pi^v = \sum_{a \in A} [v(C_a) - v(\mathcal{N}_A(C_a))]_+, \qquad \mathcal{G}_v(A, O) = \max_\pi G_\pi^v, \tag{3}$$

其中 $[x]_+ = \max\{x, 0\}$。

插入一个非空的 C_a 需要移除 A 中与其相交的每个集合。这包括 a，也可能包括其他当前集合。减去 $v(\mathcal{N}_A(C_a))$ 就是对所有这些删除的计入。正部保留那些能改善目标函数的组。分配用于组织证明。算法通过枚举输入中的小型打包来获得候选集合。

一个涉及共享删除的例子。令 $A=\{a_0,\ a_1,\ a_2\}$ 的权重分别为 1、4、4。对于 $i=1,\ 2$，令 C_i 包含三个权重为 2 的集合。这三个集合都与 a_i相交，且恰有一个还与 a_0相交。这六个比较集合两两不相交，且不存在其他相交关系。通过为比较图的每条边使用一个基本元素，可以将这些关联实现为大小至多为三的集合。任何非空的插入都会从 C_i 中移除 a_i，且 $3\cdot 2^{12/7}<4^{12/7}$。因此，A 在此实例的未舍入幂势函数下是局部最优的。每个完整组的增益为 $6-(4+1)=1$。两个组都可以被选中。它们声明的增益之和为 2，而由此产生的改进为 $12-(4+4+1)=3$，因为 a_0 只被移除一次。

3.2 贪心恢复界

L引理 1. 对于定义 *1* 中的任意比较打包 O，算法 *1* 满足

$$\mathcal{G}_w(A,O)\le 9\Delta,\qquad w(B)\ge w(A)+\Delta.$$

证明。 固定一个分配。每个正增益组都是恢复候选。将其增益分配给与它相交的第一个已接受候选项；若它本身被接受，则分配给它自身。这样的候选项必定存在，因为否则该组在被考察时就会被接受。候选集合的排序保证已接受候选项的增益至少与该组的增益相同。

比较组是打包 O 的子族，且使用两两不相交的基本元素。一个已接受候选项至多包含三个大小不超过三的集合。因此，它至多九个元素会与至多九个组相交。由此可得 $G_\pi^w\le 9\Delta$。对分配取最大值即可得到第一个不等式。

对于第二个不等式，已接受的插入构成一个打包 U，而$\mathcal{N}_A(U)$是它们的删除邻域之并。由于权重非负，

$$\begin{aligned} w(B)-w(A) &= w(U)-w(\mathcal{N}_A(U)) \\ &\ge \sum_{X\in\mathcal{R}}\big(w(X)-w(\mathcal{N}_A(X))\big)=\Delta. \end{aligned}$$

一次共享删除会在声明成本中计入多次，而在实际成本中只计入一次。

□

3.3 局部最优性所需的估计

暂且忽略舍入和公共成员。令 $\alpha_H=3/2+7/(8H)$。第 4 节和第 5 节将证明

$$w(O)\le \alpha_H w(A)+\frac{1}{6}\mathcal{G}_w(A,O)$$

只要 A 在大小至多为 4^H-1 的插入下，对于 $12/7$-幂势函数是局部最优的。由此，引理 1 给出

$$w(O)\le \alpha_H w(A)+\frac{3}{2}\Delta\le \alpha_H\big(w(A)+\Delta\big)\le \alpha_H w(B).$$

因此，接下来两节的任务是，用小组的增益来界定比较权重超出$\alpha_H w(A)$的部分。第4节通过对幂权重进行分解，确立这样的界。第5节从局部最优性构造该分解，误差为 $7/(8H)$。第6节通过纳入舍入和公共成员，完成近似证明。

4 混合充电不等式

本节的估计将算法的两个阶段联系起来。它用当前权重以及至多包含三个集合的组所能带来的增益，来界定比较打包的权重。我们首先假设幂权重存在一种适当的分解。第5节从局部最优性构造这一分解，同时略微增加当前预算。

设 A, O 是一个最大度数为三的有限简单二部图的两个部分，且 O 中没有孤立顶点。对于 $X \subseteq O$，令 $\mathcal{N}(X) \subseteq A$ 为其完整邻域。固定 $r = 7/12$。每个当前顶点 $a \in A$ 都有一个预算 c_a，分为转移给其邻居的转移量 F_{oa} 和剩余量 t_a，后者称为其剩余量。每个比较顶点 $o \in O$ 都有一个需求量 q_o。

在第 5 节的应用中，需求为 $q_o = v(o)^p$，其中 $p = 12/7$。当前预算由 $v(a)^p$ 加上非负量得到。这些增量使下述约束成立，其对最终权重界的影响则通过对深度取平均来控制。

我们首先处理满足以下条件的任意非负预算、需求、转移量和剩余量

$$c_a = t_a + \sum_{o \sim a} F_{oa}, \tag{4}$$

$$q_o \le \sum_{a \sim o} F_{oa} + \sum_{a \sim o} t_a - \max_{a \sim o} t_a. \tag{5}$$

因此，需求可以使用所有流入的转移量，以及除最大剩余量以外的所有邻接剩余量。等价地，剩余量的贡献为 $\min_{a \sim o} \sum_{b \sim o,\, b \neq a} t_b$。这种形式允许任意一个邻居充当父节点，并排除其剩余量，正如第 5 节的分支构造所需。

令 $w_a = c_a^r$ 和 $w_o = q_o^r$，并将 w 加性地扩展到顶点集合。这些是与预算和需求量相关联的权重。分配为每个 $o \in O$选择一个邻居 $\pi(o)$，并构成 $C_a = \{o : \pi(o) = a\}$。根据定义 1，记

$$\mathcal{G} = \max_{\pi} \sum_{a \in A} [w(C_a) - w(\mathcal{N}(C_a))]_+.$$

定理 2. 在 (4)–(5)下，

$$w(O) \le \tfrac{3}{2} w(A) + \tfrac{1}{6} \mathcal{G}. \tag{6}$$

两个简单情形说明了这个界中的各项。如果所有转移量都为零，那么 $c_a = t_a$ 和 $q_o^r \le \frac{1}{2} \sum_{a \sim o} t_a^r$。对于三个邻接剩余量 $t_1 \ge t_2 \ge t_3$，这可由下式推出

$$(t_2 + t_3)^r \le t_2^r + (2^r - 1) t_3^r \le \tfrac{1}{2}(t_1^r + t_2^r + t_3^r).$$

第一个不等式成立，是因为 $(x+1)^r - x^r$ 对 $x \ge 1$递减。第二个不等式用到了 $t_1 \ge t_2$和 $2^r \le 3/2$。有两个邻居时，需求量至多为较小的剩余量；有一个邻居时，需求量为零。对 O 求和可得 $3w(A)/2$，因为每个当前顶点至多有三个邻居。

转移量可以支持更多比较权重。一个星图中有一个预算为 1、剩余量为 0 的当前顶点，以及三项大小为 $1/3$ 的转移量，可以支持三项大小为 $1/3$的需求。它们的总权重为 $3^{5/12} > 3/2$。这三个叶节点也构成一个组，其增益为 $3^{5/12} - 1$。(6) 的第二项记录恢复阶段的此类增益。

4.1 要证明的界

我们将选择一个分配和一组所有者 $S \subseteq A$，其组可获得折扣。对于这些组，我们计入比较权重的 $5/6$，并加上完整删除成本的 $1/6$。所需的界为

$$\sum_{a \notin S} w(C_a) + \tfrac{5}{6} \sum_{a \in S} w(C_a) + \tfrac{1}{6} \sum_{a \in S} w(\mathcal{N}(C_a)) \le \tfrac{3}{2} w(A). \tag{7}$$

其左侧恰好为

$$w(O) - \tfrac{1}{6}\sum_{a\in S}\bigl(w(C_a) - w(\mathcal{N}(C_a))\bigr).$$

被减去的总和至多为$\mathcal{G}$，因为先取正部再对分配取最大值只会使其增大。因此，(7) 蕴含定理 2。为证明这一点，我们将其电荷分配给当前顶点，并将每个 a 处的代价界定为 $3w_a/2$。

4.2 选择所有者并拆分比较权重

固定预算 c_a 和需求 q_o，并在所有满足 (4)–(5) 的分解中，使总转移量 $\sum_{oa} F_{oa}$ 最小。由于可行集非空且紧致，最小值存在。在最小值处，每个正转移量 F_{oa} 都来自与 o相邻的最大剩余量，且 o的需求约束取等。

为说明这一点，将 F_{oa} 减少一个较小的 $\delta > 0$，并将 t_a 增加 δ。a 处的预算保持不变。在其他每个比较邻居处，剩余量之和增加 δ，而其最大值至多增加 δ，因此需求约束仍然成立。在 o处，转移量与剩余量之和保持不变。如果 t_a 小于最大剩余量，就选择足够小的 δ，使最大值保持不变。如果需求约束有松弛，就选择小于该松弛量的 δ。这两种情况都能使总转移量减小，与极小性矛盾。

沿着最大的正转移量选择 $\pi(o)$；如果所有指向 o的转移量都为零，则沿着最大的剩余量选择。称 $\pi(o)$ 为 o的**所有者**。因此，所有者的剩余量始终是 o 的邻居中最大的。定义

$$P_o = \left(F_{o,\pi(o)} + \sum_{b\sim o,\, b\neq\pi(o)} t_b\right)^r, \qquad J_t(x) = (t+2x)^r - (t+x)^r. \tag{8}$$

项 P_o 使用所有者的转移量和可用的剩余量。函数 J_t 界定了来自另一个邻居的转移量所能支持的额外权重。更准确地说，

$$w_o \le P_o + \sum_{b\sim o,\, b\neq\pi(o)} J_{t_b}(F_{ob}). \tag{9}$$

事实上，对于一个非所有者转移量 $x = F_{ob} > 0$，P_o 中的量已经包含了 t_b，以及至少为 x的所有者转移量。由于 u^r 是凹函数，增加 x 使其值增加至多 $(t_b+2x)^r - (t_b+x)^r$。后续转移量的边际增量更小。将这些界求和即可证明 (9)。如果所有转移量都为零，则由 (5) 可得同一不等式。

4.3 局部费用和删除储备

添加零需求、零转移叶节点，直到每个当前顶点的度都为三。每个新叶节点都分配给它唯一的邻居。这不会改变$\mathcal{G}$。原本非空的组已经在其删除邻域中包含所有者，而原本为空的组即使收到权重为零的叶节点，增益仍然非正。我们在选择折扣之前进行此添加。

设 k_a 为 a 所拥有的比较顶点数量。恰当置入 $a \in S$ 当且仅当

$$\bigl[k_a = 2,\ c_a \ge (7/3)^{12/5} t_a\bigr] \quad \text{or} \quad \bigl[k_a = 3,\ c_a \ge (8/3)^{12/5} t_a\bigr],$$

其中 $c_a = t_a = 0$ left 为普通。我们将 S 已折扣 的所有者称为已折扣所有者，将其他所有者称为 普通所有者。设

$$(s_a, \lambda_a) = \begin{cases} (1, 1/2), & a \notin S, \\ (5/6, 7/24), & a \in S. \end{cases}$$

这里， s_a 是计入 C_a的比较电荷的比例。系数 λ_a 规定了剩余抵扣，用于在当前顶点之间重新分配代价，并在总和中抵消。下面的计算说明了该抵扣如何确定阈值。

对于每个由 a 拥有的比较顶点 o，向 a 收取 $s_a P_o$。对于 o 的每个其他邻居 b，向 a 提供 $\lambda_a t_b^r$ 的信用，并向 b 收取相同金额。此外，向 b 收取其增量 $s_a J_{t_b}(F_{ob})$。最后，为每个可能需要删除以用于折扣组的当前顶点预留其权重的六分之一。由此在 a 处得到的账目为

$$\begin{aligned} E_a = s_a \sum_{o \in C_a} P_o - \lambda_a \sum_{o \in C_a} \sum_{b \sim o,\, b \neq a} t_b^r \\ + \sum_{o \sim a,\, \pi(o) \neq a} \left(s_{\pi(o)} J_{t_a}(F_{oa}) + \lambda_{\pi(o)} t_a^r \right) \\ + \frac{w_a}{6} \left(\mathbf{1}_{a \in S} + \sum_{o \sim a,\, \pi(o) \neq a} \mathbf{1}_{\pi(o) \in S} \right). \end{aligned} \tag{10}$$

第一行在扣除剩余信用量后，向由 a 拥有的组收取代价。第二行支付 a 对由其他所有者拥有的组所作的贡献。第三行预留删除成本。即使多个关联都指向同一个组，它也会分别计算这些关联，因此可能多次预留一次删除的成本。

每个关联 ao 在 a 处称为一个槽位。若 $\pi(o) = a$，则该槽位归其所有者所有；否则称为非所有者槽位。填充后，每个当前顶点有三个槽位。表 1 列出了这些槽位根据式 (10) 前两行产生的代价。表中的普通或折扣状态始终指 o 的所有者。

表 1：删除储备之前的四种槽位费用。

位于 a 的槽位及所有者状态	E_a 中的代价
已拥有，普通	$P_o - \frac{1}{2}\sum_{b \sim o,\ b \neq a} t_b^r$
已拥有，已折扣	$\frac{5}{6} P_o - \frac{7}{24}\sum_{b \sim o,\ b \neq a} t_b^r$
非所有者，普通	$J_{t_a}(F_{oa}) + \frac{1}{2} t_a^r$
非所有者，已折扣	$\frac{5}{6} J_{t_a}(F_{oa}) + \frac{7}{24} t_a^r$

引理 2。 账目 (10) 满足 $E_a \le 3w_a/2$。

4.4 为什么剩余抵扣足以覆盖额外权重

我们在此针对一个已折扣且拥有全部三个槽位的当前顶点证明引理 2。这个情形展示了剩余抵扣与折扣阈值如何协同作用。

假设 $t_a > 0$，将预算除以 t_a，并将权重除以 t_a^r，归一化后的量仍使用相同的记号。于是 $t_a = 1$。记 x_1，x_2，x_3 为三个转移量，并记 $z = \sum_i x_i$，于是 $w_a = (1+z)^r$。由于 a 是所有者，每个外部剩余量都至多为 1。若槽位 i 上的两个外部剩余权重为 v_1，$v_2 \in [0,1]$（缺失邻居对应的值计为零），则时隙费用为

$$\tfrac{5}{6}(x_i + v_1^{12/7} + v_2^{12/7})^{7/12} - \tfrac{7}{24}(v_1 + v_2).$$

第一项是 $(x_i^{7/12}$、v_1、$v_2)$ 的 $12/7$-范数的倍数。因此，该表达式关于 $(v_1$、$v_2)$ 是凸的，并且在正方形的某个顶点处达到最大值。为了得到一个上界，我们可以将外部权重替换为 0 和 1。令 $j_i \in \{0、1、2\}$ 统计时隙 i处的 1 的数量，并令 $R = \sum_i j_i$。

所有时隙均已被占用，因此删除储备为 $w_a/6$。三个时隙费用的剩余额度为 $4w_a/3$。Hölder 不等式给出

$$\begin{aligned} E_a - \tfrac{1}{6}w_a &\le \tfrac{5}{6}\sum_{i=1}^{3}(x_i + j_i)^r - \tfrac{7}{24}R \\ &\le \tfrac{5}{6}\,3^{5/12}(z+R)^r - \tfrac{7}{24}R \le \tfrac{4}{3}(1+z+R)^r - \tfrac{7}{24}R, \end{aligned}$$

其中最后一步使用了 $3^{5/12} \le 8/5$。R 一项是由外部残差提供的额外预算，而 $7R/24$ 是分配给该预算的账目。为与限额 $4(1+z)^r/3$进行比较，对凹函数 u^r 在 $u = 1+z$处应用切线界：

$$\tfrac{4}{3}(1+z+R)^r - \tfrac{7}{24}R \le \tfrac{4}{3}(1+z)^r + \left[\tfrac{4}{3}r(1+z)^{-5/12} - \tfrac{7}{24}\right] R.$$

括号中的表达式当且仅当 $1+z \ge (8/3)^{12/5}$时非正。这正是使具有三个自有槽位的中心获得折扣的规则。因此，该账目足以覆盖由 R引起的全部增量。恢复预留量后得到 $E_a \le (4/3 + 1/6)w_a = 3w_a/2$。

作为数值示例，令所有三个槽位均取 $x_i = 5$ 和 $j_i = 1$。此时 $1+z = 16$ 高于阈值，而 $R = 3$ 产生账目 $7/8$。账目为

$$E_a = \frac{5}{2}6^{7/12} - \frac{7}{8} + \frac{1}{6}16^{7/12} \approx 7.075, \qquad \frac{3}{2}w_a = \frac{3}{2}16^{7/12} \approx 7.560.$$

具有两个自有槽位的折扣情形使用系数为 $7/6$ 的界，以替代 $4/3$。相同的切线计算给出其阈值 $(7/3)^{12/5}$。具有两个或三个自有槽位的普通中心，其预算低于相应阈值，并通过在这些有界范围内进行估计来处理。至多具有一个自有槽位的中心则直接处理。附录 A 给出了这些剩余标量情形以及关于 $t_a = 0$的极限论证。

指数 $p = 12/7$ 使剩余信用量、Hölder界和阈值估计能够相互协调。第 7 节将讨论分析结果对其他幂的结论。

4.5 对局部界求和

现在我们完成定理 2 的证明。在 $\sum_a E_a$ 中，每一笔剩余抵扣都会抵消另一个当前顶点处相应的支付。根据 (9)，剩余的主要费用和增量之和至少为 $\sum_o s_{\pi(o)}w_o$。

对于折扣组 C_a，E_a 中的储备包括 $w_a/6$。其他每个 $b \in \mathcal{N}(C_a)$ 都与某个 $o \in C_a$ 相邻，而该非所有者时隙会在 E_b 中为 $w_b/6$ 预留。因此，储备总量至少为 $\frac{1}{6}\sum_{a\in S} w(\mathcal{N}(C_a))$，即使多个关联为同一次删除预留也如此。因此，引理 2 给出

$$\sum_o s_{\pi(o)}w_o + \tfrac{1}{6}\sum_{a\in S} w(\mathcal{N}(C_a)) \le \sum_a E_a \le \tfrac{3}{2}w(A).$$

这就是 (7)，它蕴含所需的不等式 (6)。

5 从局部最优性到权重界

现在我们构造定理 2 所需的转移量和剩余量。出发点是，来自比较打包的每个小规模插入都具有非正的势增益。我们通过树上的递归表示这些增益，并利用局部最优性界定递归能够分配给每个当前集合的量。在固定深度处，对当前预算进行小幅增加即可使需求约束成立。这些增加量在所有深度上的总和是有界的，从而得到以下估计。

定理 3。 令 A 为具有 $A \cap O = \varnothing$ 的打包，令 v 为非负权重，并且对于每个 $o \in O$ 都有 $v(o) > 0$，令 $H \geq 1$ 为整数。设 $p = 12/7$ 和 $r = 7/12$。如果

$$\sum_{o \in X} v(o)^p \leq \sum_{a \in \mathcal{N}_A(X)} v(a)^p \quad \textit{for every } X \subseteq O \textit{ with } |X| \leq 4^H - 1, \tag{11}$$

then

$$v(O) \leq \alpha_H v(A) + \frac{1}{6}\mathcal{G}_v(A, O), \qquad \alpha_H = \frac{3}{2} + \frac{7}{8H}. \tag{12}$$

在本节中，记 $c_a = v(a)^p$ 和 $q_o = v(o)^p$。因此， c_a 是删除 a所损失的势函数，而 q_o 是插入 o所获得的势函数。每个 $o \in O$ 在 A中都有一个邻居，否则 $X = \{o\}$ 会违反 (11)。比较图两侧的最大度数均为三。以下所有构造都用于证明中，以比较 A和 O。

5.1 计算树与投影

比较图中可能包含环，因此，从不同邻居探索的交换可能会再次相遇。我们将图展开为一棵树，并允许同一个原图顶点有多个副本。这样一来，就可以合并这棵树的分支，同时跟踪每一项代价。

在一个连通分量中固定一个根。展开树中的一个顶点对应于一条从根出发且不会立即沿原边折返的游走。它的标签是该游走的最后一个顶点。该游走与它的前驱以及每条允许的一条边延伸相邻。因此，每个副本恰有一个邻居，其标签与原图中该副本标签相邻。特别地，对应于任意固定原图边 oa 的树边构成一个匹配。

树交换会选取有限多个比较副本，并删除它们所有相邻的当前副本。其增益等于这些副本的继承需求之和 q_o 减去该完整邻域中的继承代价之和 c_a 。每个副本只计一次。为了在原图中进行插入，我们按照每个标签出现的次数对副本分组。

引理 3. 对于任意整数 $b \geq 1$，一个包含至多 b 个比较副本的正增益树交换可产生一次插入 $X \subseteq O$，使势增益为正，且满足 $|X| \leq b$。

证明。 令 m_o 表示所选副本的数量，令 n_a 表示它们完整邻域中 a 副本的数量。对于每条原图中的边 oa，由匹配性质可知，每个所选的 o副本都有一个不同的 a 相邻副本。因此 $n_a \geq m_o$。

对于每个整数 $j \geq 1$，定义

$$I_j = \{o \in O : m_o \geq j\}, \qquad D_j = \{a \in A : n_a \geq j\}.$$

这些是两侧出现至少 j 次的标签。由前述不等式可得$\mathcal{N}_A(I_j) \subseteq D_j$。对每个副本中的每个标签各计一次，得到

$$\begin{aligned}\sum_{j \geq 1} \left(\sum_{o \in I_j} q_o - \sum_{a \in \mathcal{N}_A(I_j)} c_a \right) &\geq \sum_{j \geq 1} \left(\sum_{o \in I_j} q_o - \sum_{a \in D_j} c_a \right) \\ &= \sum_o m_o q_o - \sum_a n_a c_a > 0.\end{aligned}$$

所有求和项均为有限个，因此某个 I_j 的增益为正。由于 $I_j \subseteq O$，它是一个打包，其大小至多为 $\sum_o m_o \leq b$。 □

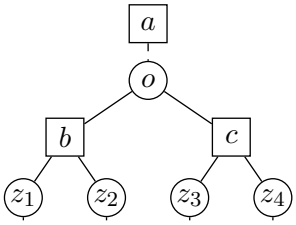


图 1：分支递归的一步。父节点成本 c_a 已支付。该分支各支付一次 c_b 和 c_c 。以z_1, z_2 为根的分支不包含 c_b，以 z_3, z_4 为根的分支不包含c_c。它们剩余的子树互不相交。展开树中的其他位置可能会重复出现这些标签。

5.2 分支增益与当前预算

考虑一个标签为 o 的比较副本，并指定一个标签为 a的当前父节点。假设已经支付了 a 的代价，我们评估 o 下方的一个分支。选择 o 可获得 q_o ，并要求我们为它的其他当前邻居支付代价。随后，可以通过这些已支付代价的邻居附加更多比较分支。非空分支包含 o，空分支的增益为零。

对于一条边 oa，令非负数 x_{oa}^h 表示至多经过h 个比较层时的这种条件增益。我们称这些数为消息。它们的递归关系为

$$x_{oa}^0 = 0, \qquad x_{oa}^{h+1} = \left[q_o - \sum_{b \in \mathcal{N}(o)\setminus\{a\}} \left(c_b - \sum_{z \in \mathcal{N}(b)\setminus\{o\}} x_{zb}^h \right) \right]_+ . \tag{13}$$

在深度为一时，这就是单独插入 o 所获得的增益（不计父节点成本）；若该增益为负，则取零。在更大的深度下，每个内层求和表示经由 b相连的分支所能获得的增益。所有这些分支只需支付一次代价 c_b 。正部也使空分支成为可能。

下一个引理将验证每条消息都由一个实际的树分支实现。随后，它将给出当前顶点的总入射增益的界。如果该增益超过其代价，那么合并这些分支并支付该代价，就会带来禁止的改进。

引理 4。 每个 x_{oa}^h 都是一个分支的条件增益，该分支至多有 $T_h = (4^h - 1)/3$ 个比较副本。消息关于 h单调不减，并且在 (11) 条件下，

$$\ell_a^h := \sum_{o \sim a} x_{oa}^h \le c_a \qquad (a \in A,\ 0 \le h \le H). \tag{14}$$

证明。 深度为零时，使用空分支。假设结论在深度为 h时成立。当 (13) 中的括号项为正时，选取 o，支付其非父节点邻居 b的代价，并附上它们的正增益深度为-h 的后代分支。每个附加分支均不包括其父节点已支付的代价b。其余顶点位于不同的子树中，因此增益之和等于显示的括号项。当括号项非正时，使用空分支。因此，除整个分支指定的父节点外，每个选取的比较副本的完整当前邻域都已支付。

至多有两个非父节点邻居 b，每个邻居至多还有两个比较邻居。因此

$$T_0 = 0, \qquad T_{h+1} = 1 + 4T_h, \qquad T_h = (4^h - 1)/3.$$

递推式关于右侧的每条消息均单调不减。从零开始，通过归纳法得到$0 \le x_{oa}^h \le x_{oa}^{h+1}$。

现在以一个当前副本 a 为展开树的根，并连接其至多三个深度为h 的分支。若 $\ell_a^h > c_a$，则在支付根的代价后，它们的并集具有正增益。其完整邻域已支付，且包含至多 $3T_h = 4^h - 1 \le 4^H - 1$ 个比较副本。引理 3 将会在原图中给出一次正增益插入，这与（11）矛盾。

□

5.3 补全需求约束

在深度 h处，选择 $F_{oa} = x^h_{oa}$ 会使每个当前顶点都留下剩余量 $t^h_a = c_a - \ell^h_a \geq 0$ 。这满足定理 2 的预算等式，但比较需求量仍可能超过其转移量与可用剩余量之和。我们通过在一条连接到剩余量最大的邻居的边上再取一个消息增量，来满足这一需求量。该邻居的剩余量正是需求约束中未计入的部分。新增的转移量需要额外预算 d^h_a。在 H个深度上的总和至多为原预算 c_a。

引理 5. 对于每个 $0 \leq h < H$，存在非负的剩余量 t^h_a、转移量 F^h_{oa} 和预算增量 d^h_a，使得

$$c_a + d^h_a = t^h_a + \sum_{o\sim a} F^h_{oa},$$
$$q_o \leq \sum_{a\sim o} F^h_{oa} + \sum_{a\sim o} t^h_a - \max_{a\sim o} t^h_a,$$

and

$$d^h_a \leq \ell^{h+1}_a - \ell^h_a, \qquad \sum_{h=0}^{H-1} d^h_a \leq c_a. \tag{15}$$

证明。令 $t^h_a = c_a - \ell^h_a$。对于每个 o，选择具有最大剩余量 t^h_a 的 $a_h(o) \in \mathcal{N}(o)$，并定义 e

$$u^h_o = x^{h+1}_{o,a_h(o)} - x^h_{o,a_h(o)}, \qquad F^h_{oa} = x^h_{oa} + \mathbf{1}\{a = a_h(o)\}u^h_o, \qquad d^h_a = \sum_{o:a_h(o)=a} u^h_o.$$

根据引理 4，这些量均非负。预算等式直接由定义得出。为验证需求约束，注意到

$$c_b - \sum_{z\in\mathcal{N}(b)\setminus\{o\}} x^h_{zb} = t^h_b + x^h_{ob}.$$

因此，递推式 (13) 对每个 $a \sim o$ 给出：

$$q_o \leq \sum_{b\in\mathcal{N}(o)\setminus\{a\}} (t^h_b + x^h_{ob}) + x^{h+1}_{oa}.$$

选择 $a = a_h(o)$。剩余量之和省略了最大的剩余量，而转移量之和包含增量 u^h_o。因此

$$q_o \leq \sum_{a\sim o} F^h_{oa} + \sum_{a\sim o} t^h_a - \max_{a\sim o} t^h_a.$$

对于固定的 a， d^h_a 对与 a 相邻的边上的非负增量的一个子集求和。因此

$$d^h_a \leq \sum_{o\sim a} (x^{h+1}_{oa} - x^h_{oa}) = \ell^{h+1}_a - \ell^h_a.$$

对深度求和会抵消中间负载。由于 $\ell^0_a = 0$ 和 $\ell^H_a \leq c_a$，这就证明了 (15)。

□

5.4 对深度取平均

完成的分解使我们能够在每个深度应用定理 2。凹性将它们有界的总预算增幅转化为量级为 $1/H$ 的平均权重增幅。

定理 3 的证明。 在深度 h 处，使用当前预算 $c_a + d_a^h$ 和需求量 q_o 应用定理 2。比较权重为 $q_o^r = v(o)$，当前权重为 $(c_a + d_a^h)^r$。增加当前权重只会降低每个组的增益，因为该权重计入其删除成本。因此，所得的最大分配增益至多为 $\mathcal{G}_v(A, O)$。我们得到

$$v(O) \le \frac{3}{2} \sum_a (c_a + d_a^h)^r + \frac{1}{6} \mathcal{G}_v(A, O) \qquad (0 \le h < H).$$

对于 $c_a > 0$，凹函数 y^r 的切线界给出

$$\begin{aligned} \frac{1}{H} \sum_{h=0}^{H-1} (c_a + d_a^h)^r &\le c_a^r + \frac{r}{H} c_a^{r-1} \sum_{h=0}^{H-1} d_a^h \\ &\le \left(1 + \frac{r}{H}\right) c_a^r, \end{aligned}$$

其中，第二个不等式使用了（15）。如果 $c_a = 0$，则该界会在每个深度强制得到 $d_a^h = 0$，因此结论仍然成立。对 h 上述不等式取平均，并使用 $c_a^r = v(a)$ 和（3/2）$r = 7/8$。这给出

$$v(O) \le \frac{3}{2} \left(1 + \frac{r}{H}\right) v(A) + \frac{1}{6} \mathcal{G}_v(A, O) = \alpha_H v(A) + \frac{1}{6} \mathcal{G}_v(A, O),$$

如所需。 □

6 近似保证与运行时间

现在我们将结构界与算法的原始权重联系起来。第一阶段比较整数值 Q，结构分析使用幂权重，而第二阶段使用 w。辅助权重 v 将这三种视角联系起来。我们首先界定舍入造成的损失，然后在移除公共集合后与一个最优解进行比较。

6.1 舍入与分配增益

回忆一下第 2 节中引入的辅助权重 $v(S) = \tau Q(S)^r$，其中 $p = 12/7$ 和 $r = 7/12$。由于 $Q(S) \le (w(S)/\tau)^p < Q(S) + 1$ 且对每个 $Q \ge 0$都有 $(Q+1)^r - Q^r \le 1$，因此我们有

$$0 \le w(S) - v(S) \le \tau. \tag{16}$$

恒等式 $v(S)^p = \tau^p Q(S)$ 使第一阶段成为针对 v 的精确幂势能局部搜索。可以在此阶段省略满足 $v(S) = 0$ 的集合：从一次插入中移除这些集合，不会改变被插入集合的势函数贡献，而且只会降低其删除成本。因此，若涉及此类集合的操作能带来正改进，则意味着仅使用正-v 集合也能带来正改进。所有原始集合在第二阶段仍可用。

引理 6。 *对于任意打包 O，其作为一个族与 A 不相交，且其中每个成员都有一个邻居位于 A，*

$$\mathcal{G}_v(A, O) \le 9\Delta + 3n\tau.$$

证明。 对于任意分配组 C，

$$[v(C) - v(\mathcal{N}_A(C))]_+ \le [g_A(C)]_+ + \sum_{a \in \mathcal{N}_A(C)} (w(a) - v(a)).$$

一个当前集合至多出现在三个组删除邻域中，因为它在 O 中至多有三个邻居。对所有组求和，利用 (16)，并应用引理 1，即可得到每个分配对应的结论，进而得到它们的最大值对应的结论。 □

6.2 共同成员抵消与近似保证

设 $O^\star$ 是预处理实例上的一个最优打包，并令

$$C = A \cap O^\star, \qquad A_0 = A \setminus C, \qquad O_0 = \{o \in O^\star \setminus C : v(o) > 0\}.$$

根据单集合局部最优性，每个 $o \in O_0$ 在 A 中都有一个邻居。由于 $O^\star$ 是一个打包，不存在这样的邻居属于 C。因此，对每个 $X \subseteq O_0$,

$$\mathcal{N}_{A_0}(X) = \mathcal{N}_A(X), \qquad \mathcal{G}_v(A_0, O_0) = \mathcal{G}_v(A, O_0). \tag{17}$$

对于第二个等式，注意到在这两个比较图中，分配、非空组及其完整删除邻域均相同。 A 中被丢弃的顶点在 O_0中没有邻居。

第一阶段对 v是局部最优的。因此，对于每个满足 $|X| \le 4^H - 1$的 $X \subseteq O_0$ ，由 (17) 可得 $\Phi_p^v(X) \le \Phi_p^v(\mathcal{N}_{A_0}(X))$。这些正是定理 3 对 (A_0, O_0) 的假设。加回共同贡献后，得到

$$\begin{aligned} v(O^\star) &= v(C) + v(O_0) \\ &\le v(C) + \alpha_H v(A_0) + \tfrac{1}{6}\mathcal{G}_v(A_0, O_0) \\ &\le \alpha_H v(A) + \tfrac{1}{6}\mathcal{G}_v(A, O_0), \end{aligned}$$

其中， $\alpha_H \ge 1$ 和被丢弃的零-v 成员不产生任何贡献。这一步不要求 A_0在完整输入上是局部最优的。现在，由引理 6、(16) 以及 $w(B) \ge w(A) + \Delta$ 可得

$$\begin{aligned} w(O^\star) &\le v(O^\star) + n\tau \\ &\le \alpha_H v(A) + \tfrac{1}{6}\mathcal{G}_v(A, O_0) + n\tau \\ &\le \alpha_H w(A) + \tfrac{3}{2}\Delta + \tfrac{3}{2}n\tau \\ &\le \alpha_H w(B) + \tfrac{3}{2}n\tau. \end{aligned}$$

由于 $M \le w(O^\star)$，参数选择给出

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{20}\right) w(O^\star) \le \left(\frac{3}{2} + \frac{7\varepsilon}{8}\right) w(B).$$

对于 $0 < \varepsilon \le 1$，精确恒等式

$$\left(\frac{3}{2} + \varepsilon\right)\left(1 - \frac{\varepsilon}{20}\right) - \left(\frac{3}{2} + \frac{7\varepsilon}{8}\right) = \frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{20} \ge 0$$

证明了所需的比率。由于该比率至少为一，加入正权重空集的打包 P 后仍保持该比率。可以丢弃零权重集合。如果预处理后没有剩余集合，则返回 P 是最优的。对于 $\varepsilon > 1$，以精度一运行算法可得到因子 $5/2 \le 3/2 + \varepsilon$。

6.3 终止与位复杂度

每次改进移动都会使整数势函数至少增加一，并且

$$Q(S) \le (30n/\varepsilon)^{12/7}, \qquad Q(A) \le n(30n/\varepsilon)^{12/7}.$$

因此，第一阶段迭代次数至多为 $n(30n/\varepsilon)^{12/7}$ 。穷举扫描大小至多为 b 的插入，需要 $n^{\mathcal{O}(b)}\,\mathrm{poly}(L)$ 时间（固定 ε 时）。对每个候选集合进行不相交性测试、构造删除邻域并对整数贡献求和，均需多项式时间。第二阶段会枚举 $\mathcal{O}(n^3)$ 个候选集合，对其有理数增益排序，并在多项式时间内测试相容性。由于 $b = 4^{\lceil 1/\varepsilon \rceil} - 1$，总运行时间为 $n^{4^{\mathcal{O}(1/\varepsilon)}}\,\mathrm{poly}(L)$。

舍入后的贡献无需比较无理数幂。将 $w(S)/\tau = u/d$ 写成一个正有理数。对于整数 $z \ge 0$，

$$z \le (u/d)^{12/7} \quad \Longleftrightarrow \quad z^{7} d^{12} \le u^{12}.$$

通过对 z 进行二分搜索，使用整数运算计算 $Q(S)$。这些整数的编码长度为多项式级，第二阶段的有理数运算也具有多项式位复杂度。虚拟权重 v 从不实际计算。这证明了定理 1 中的运行时间界。接下来证明图扩展。

7 扩展与局限

同样的分析适用于更大的图类。随后我们讨论证明对指数选择的启示，以及两阶段方案的局限。

7.1 导出 $K_{1,4}$-自由图中的独立集

如果一个顶点没有四个两两不相邻的邻居，则称图是导出 $K_{1,4}$-自由的。加权 3-集合打包是此类图中最大权独立集问题的一个特例：为每个输入集合建立一个顶点，并在两个集合相交时连接对应的顶点。四个两两不相交的集合不可能都与一个大小至多为三的集合相交。接下来的证明表明，算法和分析只用到由此得到的、关于独立集冲突数的界。

定理 1 中图扩展的证明。 只需取 $0 < \varepsilon \le 1$；对于更大的 ε，以精度一运行。用独立集替代打包，并将 $\mathcal{N}_A(X)$ 定义为当前独立集 A 中 X 的邻居。丢弃权重为零的顶点，并直接处理剩余图为空的情形。采用相同的整数舍入和第一阶段搜索。在第二阶段，枚举增益为正且至多包含三个顶点的独立插入 X。若 U 是迄今为止已插入的集合，则当且仅当 $X \cap N_G[U] = \varnothing$ 时接受 X，其中 $N_G[U]$ 是闭邻域。这既能确保独立性，也能避免重复插入顶点。

对于两个不相交的独立集 A，O，每个顶点在另一侧至多有三个邻居；否则，这些邻居与该顶点会诱导出一个 $K_{1,4}$。因此，定理 2 适用于它们的比较图。引理 3 也适用，因为 O 的每个子集都是独立的，且每条比较边的提升构成一个匹配。度数上界为三，因此得到引理 4 中的分支大小估计。引理 5 的证明以及随后的平均论证使用相同的预算和消息。因此，定理 3 对这些独立集同样成立。

还需在图模型中确立恢复因子。对于任意独立比较集 O 和满足 $|X| \le 3$ 的候选集合 X，

$$|N_G[X] \cap O| \le 3|X| \le 9.$$

事实上，若 $x \in O$，则 $N_G[x] \cap O = \{x\}$；若 $x \notin O$，则它在 O 中至多有三个邻居。比较组是 O 的不相交子集。因此，已接受候选项至多阻挡九个组，其中阻挡也包括与之共享顶点的情形。引理 1 中的首个阻挡者收费论证给出 $\mathcal{G}_w \le 9\Delta$。已接受的插入彼此不相交且相互独立，因此，$w(B) - w(A) \ge \Delta$ 仍可通过对每次删除计数一次而得出。

最后，根据比较度数界，一个当前顶点至多属于三个组删除邻域。引理 6 和近似证明因此适用。由于最优解是独立的，公共顶点的抵消是有效的。整数势函数终止、精确比较和候选枚举具有相同的界。

□

7.2 指数与两阶段方案

选择指数 $12/7$，使得第4节中的剩余信用量、Hölder界和折扣阈值能够协同发挥作用。这一选择足以完成本证明；我们并未声称它是唯一可能的选择。附录D表明，将其替换为一个固定指数

$$0 < p < \log_{3/2} 2 \qquad \text{or} \qquad p \geq 1.83$$

即使经过相同的恢复阶段，也可能使近似比严格劣于 $3/2$。这些例子并不能证明两个界之间的每个指数都适用。我们的分析无法确定其他指数是否能得到相同的保证。

附录C中的另一种构造适用于每个幂 $p > 0$ 以及每个固定的第一阶段插入界。它给出了一个单位权重实例和一种允许的第一阶段执行，其输出的近似比恰为 $3/2$ ，且不存在正增益恢复候选。因此，在这一框架下，对所有允许的第一阶段选择都成立的保证不可能优于 $3/2$。这是该方案在允许的选择下所受的限制，并非该问题的困难性结果。它也为精确的 $3/2$ 保证，或对第一阶段选择施加更多条件的算法留下了空间。

当前算法使用大邻域来减小深度误差。缩小这一邻域，或获得精确的多项式时间 $3/2$ 保证，都是值得进一步研究的方向。

致谢。 我们使用了包括 ChatGPT 和 Codex 在内的生成式人工智能工具，以协助进行探索性数学推理、证明检查，以及本稿件的起草与组织。作者对数学主张和论证的正确性、参考文献的精度，以及作品的原创性和最终呈现形式承担全部责任。

参考文献

[1] Esther M. Arkin 和 Refael Hassin。关于加权 k 集合打包的局部搜索。《运筹学数学》，23(3):640–648，1998。[2] Piotr Berman。一个用于无 d-爪图中最大权独立集的 $d/2$ 近似算法。载于算法理论——*SWAT 2000*，《计算机科学讲义》第 1851 卷，第 214–219 页。Springer，2000。[3] Péter Biró、David F. Manlove 和 Romeo Rizzi。有向图中的最大权环打包及其在肾脏交换项目中的应用。《离散数学、算法与应用》，1(4):499–517，2009。[4] Barun Chandra 和 Magnús M. Halldórsson。贪心局部改进与加权集合打包近似。《算法杂志》，39(2):223–240，2001。[5] Miroslav Chlebík 和 Janka Chlebíková。逼近有界优化问题变体的复杂性。《理论计算机科学》，354(3):320–338，2006。[6] Marek Cygan。通过有界路径宽度局部搜索改进三维匹配的近似。载于*FOCS*，第 509–518 页，2013。[7] Martin Fürer 和 Huiwen Yu。通过局部改进近似 k-集合打包问题。载于组合优化（*ISCO 2014*），《计算机科学讲义》第 8596 卷，第 408–420 页。Springer，2014。

[8] Elad Hazan、Shmuel Safra 和 Oded Schwartz。关于近似 k 集合打包的复杂性。《计算复杂性》，15(1):20–39，2006。[9] Cor A. J. Hurkens 和 Alexander Schrijver。关于任意 t 个集合均存在异代表系的集合系统的规模及其在打包问题启发式算法最坏情况比率中的应用。《*SIAM* 离散数学杂志》，2(1):68–72，1989。[10] Euiwoong Lee、Ola Svensson 和 Theophile Thiery。k-集合打包和 k-拟阵相交的渐近最优困难性。载于$STOC$，第 54–61 页，2025。[11] Meike Neuwohner。无 d-爪图中最大权独立集问题的改进近似算法。载于$STACS$，第 187 卷，第 53:1–53:20 页，2021。[12] Meike Neuwohner。突破加权 k-集合打包纯局部搜索的极限。载于离散算法研讨会，第 1090–1137 页，2023。[13] Meike Neuwohner。加权 k-集合打包局部搜索的极限。《数学规划》，206:389–427，2024。[14] Neta Singer 和 Theophile Thiery。通过有序局部搜索在多个拟阵上进行次模最大化，2026。arXiv 预印本。[15] Theophile Thiery 和 Justin Ward。最大权加权 k-集合打包的改进近似算法。载于*2023* 年 *ACM-SIAM* 离散算法年度研讨会论文集（*SODA*），第 1138–1162 页。工业与应用数学学会，2023。[16] Theophile François Thiery。独立系统的近似算法。博士论文，伦敦玛丽女王大学，2023 年 8 月。[17] Weitian Tong 和 Yao Xu。突破最大权 3-集合打包的 $\sqrt{3}$ 界，2026。URL `https://arxiv.org/html/2610.10036v1`。预印本，第 1 版，2026 年 10 月 7 日。

–

A 账目界的完整标量验证

我们证明引理 2，即定理 2 的证明中使用的界 $E_a \le 3w_a/2$ 。首先对局部参数进行归一化，然后验证折扣中心和普通中心两种情况，最后处理零残差。

A.1 归一化与局部参数

首先假设 $t_a > 0$。以 t_a 为单位衡量预算，以 t_a^r 为单位衡量权重。现在，待检查顶点处的剩余量为 1。

将三个相邻槽位编号，使所属比较顶点排在前面。设它们对应的归一化转移量为 x_1， x_2，$x_3 \ge 0$，并记

$$z = x_1 + x_2 + x_3.$$

归一化后的当前预算为 $1 + z$，其权重为 $(1 + z)^r$。

本文仅使用以下局部计数。在本附录中， k 表示自有槽位的数量；它不是输入集大小参数。

符号	本节中的含义
k	自有槽位的数量 , 从 0 到 3。
m	所有者已折扣的其他 $3 - k$ 个时隙的数量。
j_i	自有槽位 i 的外部剩余量之和，向下约减至 0、1、2。
$R = \sum_{i=1}^{k} j_i$	这些自有槽位中的外部剩余量总和。

下面说明为何外部剩余量可以约减为单位计数。对于一个自有比较顶点，另外两个剩余量至多为 1，因为其所有者具有最大剩余量。若它们的剩余权重（即其剩余量的 $7/12$ 次幂）为 v_1、$v_2 \in [0, 1]$，则该槽位的代价减去剩余抵扣后，形式如下

$$s_a \cdot (x_i + v_1^{12/7} + v_2^{12/7})^{7/12} - \lambda_a \cdot (v_1 + v_2).$$

第一项是 $(x_i^{7/12}$ 、 v_1、 $v_2)$ 的 $12/7$-范数的倍数，因此关于 v_1、 v_2 是凸函数。减去线性函数仍保持凸性。在正方形 $[0, 1]^2$ 上的最大值出现在角点。因此，为求上界，每个剩余量都可以替换为 0 或 1。它们的和为 j_i。

表 1 给出了原始变量中的四个账目项。归一化并进行角点约减后，一个自有项变为 $s_a($ $x_i + j_i)^r - \lambda_a j_i$，而一个非所有者项变为 $s_{\pi(o)} J_1(x_i) + \lambda_{\pi(o)}$。删除储备占当前权重的 $m/6$ ，若当前中心本身已折扣，则还要再占$1/6$ 。因此，剩余乘数为

$$\Lambda = \begin{cases} 3/2 - m/6, & \text{current center ordinary,} \\ 4/3 - m/6, & \text{current center discounted.} \end{cases} \tag{18}$$

具体的局部目标是

$$\text{sum of the three slot charges} \le \Lambda(1 + z)^r. \tag{19}$$

这是重新缩放后的引理 2。这些项是式 (10) 的归一化条目。

A.2 Hölder 与切线不等式

我们使用 Hölder 的显式形式

$$\sum_i b_i y_i^r \le \left(\sum_i b_i^{12/5} \right)^{5/12} \left(\sum_i y_i \right)^r. \tag{20}$$

它根据多个电荷的总预算将其合并为一个电荷。其系数是数值系数 b_i 的12/5范数。我们还使用切线界

$$(X+Y)^r \le X^r + rX^{-5/12}Y \qquad (X>0,\ Y\ge 0).$$

它控制添加剩余质量所造成的额外代价。

A.3 折扣中心

根据定义，已折扣中心拥有两个或三个顶点。首先，将拥有两个槽位的情形化归为具有折扣后的第三个所有者的情形。普通第三所有者的情形更简单：将该所有者可能拥有的删除储备移至左侧后，把该所有者从普通状态改为折扣状态，会使左侧所需的值增加

$$\frac{(1+z)^r - J_1(x_3)}{6} - \frac{5}{24} \ge 0.$$

根据 $J_t(x)$ 关于 t 的单调性（附录 B），我们有 $J_1(x) \le J_0(x) = (2^r-1)x^r$，因此$J_1(x) \le (2^r-1)x^r \le (1+z)^r/2$；折扣阈值给出 $(1+z)^r > 5/2$。对于后一个界，使用 $(7/3)^{7/5} > 5/2$。因此，只需证明具有折扣后的第三个所有者的情形。

只剩下两种配置：具有折扣后的第三个所有者的两个自有槽位情形，其中$\Lambda = 7/6$；以及三个自有槽位的情形，其中 $\Lambda = 4/3$。对于这些配置，我们将证明槽位费用至多为

$$\Lambda(1+z+R)^r - \frac{7}{24}R. \tag{21}$$

减去的部分恰好是相应的剩余抵扣。得到 (21) 后，由切线界可得

$$\Lambda(1+z+R)^r \le \Lambda(1+z)^r + \Lambda r(1+z)^{-5/12}R.$$

在这两种配置中，折扣阈值给出 $1+z \ge (2\Lambda)^{12/5}$，因此

$$\Lambda r(1+z)^{-5/12} \le r/2 = 7/24.$$

因此，剩余抵扣足以支付全部额外代价。这就证明了 (19)。

还需证明包络 (21)。

三**个自有槽位**。此处 $\Lambda = 4/3$。Hölder 不等式给出

$$\frac{5}{6}\sum_{i=1}^{3}(x_i+j_i)^r - \frac{7}{24}R \le \frac{5}{6}\,3^{5/12}(z+R)^r - \frac{7}{24}R \le \frac{4}{3}(1+z+R)^r - \frac{7}{24}R.$$

最后一个系数界由 $3^{5/12} \le 8/5$ 得出。第4节给出了此情形下完整的账目计算。

两个自有槽位。现在，第三个槽位有一个折扣所有者，因此有 $\Lambda = 7/6$。有用的非所有者界为

$$\frac{5}{6}J_1(x) + \frac{7}{24} \le \frac{5}{6}\cdot\frac{11}{20}(1+x)^r. \tag{22}$$

下面给出证明。除以 $5/6$ 后，不等式表示为

$$(1+2x)^r + \frac{7}{20} \le \frac{31}{20}(1+x)^r.$$

将 (20) 应用于 $1+2x$ 和 1。只需满足

$$2^r\left(1+(7/20)^{12/5}\right)^{5/12} \le 31/20.$$

对于精确证书，使用

$$2^r \le \frac{3}{2}, \qquad \left(\frac{7}{20}\right)^{12/5} \le \frac{81}{1000}, \qquad \left(\frac{1081}{1000}\right)^{5/12} \le \frac{31}{30}.$$

所得的界为（3/2）（31/30）$= 31/20$。此处及下文所使用的有理幂比较记录于附录 B.1。

利用（22）和 Hölder,

$$\begin{aligned}
&\frac{5}{6}\sum_{i=1}^{2}(x_i + j_i)^r + \frac{5}{6}J_1(x_3) + \frac{7}{24} - \frac{7}{24}R \\
&\quad\le \frac{5}{6}\left(2 + (11/20)^{12/5}\right)^{5/12}(1 + z + R)^r - \frac{7}{24}R \\
&\quad\le \frac{7}{6}(1 + z + R)^r - \frac{7}{24}R.
\end{aligned}$$

最后的系数界由（11/20）$^{12/5} \le 6/25$，以及（7/5）$^{12/5} \ge 56/25$.得到

我们已经完成了所有折扣中心。

A.4 普通中心

当前中心现在是普通中心。在上界计算中，自有槽位从不需要两个单位剩余量：将 $j_i = 2$ 替换为 $j_i = 1$ 不会降低其代价，因为

$$(x_i + 2)^r - (x_i + 1)^r \le 2^r - 1 \le 1/2.$$

因此，每个 j_i 现在都为 0 或 1，并且 $0 \le R \le k$。

在这种情况下，有用的非所有者估计为

$$\begin{array}{rcl} J_1(x) + 1/2 & \le & \frac{1}{2}(1 + 2x)^r, \\ \frac{5}{6}J_1(x) + \frac{7}{24} & \le & \frac{1}{3}(1 + 2x)^r. \end{array} \tag{23}$$

第一个是不等式的中点凹性。对于第二个，将其重排为

$$\frac{1}{2}(1 + 2x)^r + \frac{7}{24} \le \frac{5}{6}(1 + x)^r$$

并应用 (20)。所需的系数比较由下式得出

$$\frac{1}{2} + (2^r \cdot \tfrac{7}{24})^{12/5} \le \frac{1}{2} + (7/16)^{12/5} \le \frac{1}{2} + \frac{7}{50} = \frac{16}{25} \le (5/6)^{12/5}.$$

The 中间一个和最后一个不等式在附录 B.1 中都有精确的有理幂证书。

设 β_i 为 (23) 中非所有者时隙的系数：对于普通所有者为 $1/2$，对于折扣所有者为 $1/3$。Hölder 将三个时隙费用合并为上界

$$L\left(z + R + \frac{3-k}{2}\right)^r - \frac{R}{2}, \tag{24}$$

其中

$$L = \left(k + \frac{3-k-m}{2} + \frac{m}{2}\cdot(2/3)^{12/5}\right)^{5/12}, \qquad \Lambda = \frac{3}{2} - \frac{m}{6}. \tag{25}$$

下文将采用两种基本方法，将此界与可用预算进行比较。

端点比较。 对于固定的平移量 $b \ge 1$ 和常数 C，差值 $L(z+b)^r - \Lambda(z+1)^r - C$ 在紧区间上的最大值出现在某个端点处。当 $L \le \Lambda$ 时，其导数非正。否则，导数至多改变一次符号，且由负变正，因此最大值出现在某个端点处。导数的计算见附录 B。对于 $0 \le b < 1$，当 $L \le \Lambda$ 且 C 非负时，差值非正；若 $L > \Lambda$，则差值递增。因此，该不等式要么直接成立，要么归结为检查上端点。

每个自有槽位均有一个单位时的边际比较。 若 $R = k$，所有自有项都具有 $(1 + x_i)^r$ 的形式。令 $\Phi(z)$ 表示下式的最大可能值

$$\sum_{i\le k}(1 + x_i)^r + \sum_{i>k}\beta_i(1 + 2x_i)^r, \qquad x_1 + x_2 + x_3 = z.$$

所需的界为 $\Phi(z) - k/2 \le \Lambda(1 + z)^r$。

在满足 $z > 0$ 的最大化分配中，每个自有槽位都接收正流量。其初始边际速率为 r，而其他槽位的起始速率至多为 r；所有速率都随流量增加而降低。如果在最大化分配中 $x_i > 0$，则称该槽位处于活动状态。将每个活动项写成 $b_i(x_i + d_i)^r$。对于自有槽位，$b_i = 1$ 且 $d_i = 1$；对于非所有者时隙，$b_i = 2^r\beta_i$ 且 $d_i = 1/2$。定义

$$\ell = \left(\sum_{i\text{ active}} b_i^{12/5}\right)^{5/12}, \qquad d = \sum_{i\text{ active}} d_i.$$

因此，$\ell \le L$ 且 $d \ge k$。相等边际速率给出

$$\Phi'(z) = r\ell(z + d)^{-5/12}. \tag{26}$$

为了解释该公式，注意到相等的导数使得 $x_i + d_i$ 与 $b_i^{12/5}$ 成正比，而它们的和为 $z + d$。严格凹性保证了唯一最大化分配。当正坐标发生变化时，新坐标恰好具有现有的边际速率，因此单侧导数相等。坐标至多有三个。因此，导数公式不仅可以在每个变化之间的区间上积分，也可以跨越这些变化进行积分。

因此，只需验证

$$\ell^{12/5} \le \Lambda^{12/5}\frac{z + d}{z + 1}. \tag{27}$$

那么 $\Phi'(z) \le \Lambda r(z+1)^{-5/12}$。从零开始积分即可证明所需的界，因为 $\Phi(0)-k/2 = \Lambda$.

没有自有槽位： $k = 0$。 这里 $\Lambda = \sum_i \beta_i \ge 1$ 和 $\beta_i \le 1/2$。加权凹性给出

$$\sum_i \beta_i(1 + 2x_i)^r \le \Lambda\left(1 + \frac{2\sum_i \beta_i x_i}{\Lambda}\right)^r \le \Lambda(1 + z/\Lambda)^r \le \Lambda(1 + z)^r.$$

一个自有槽位： $k = 1$。分别对于 $m = 0$，1、2，

m	0	1	2
Upper bound on $L^{12/5}$	2	$\frac{17}{10}$	$\frac{7}{5}$
Λ	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{6}$

这里，$(2/3)^{12/5} \le 2/5$ 给出了所述上界。对于每一列 $L \le \Lambda$：前两列分别使用 $2 < (3/2)^2$ 和 $17/10 < (4/3)^2$；对于第三列，由伯努利不等式可得 $(7/6)^{12/5} \ge 1 + (12/5)(1/6) = 7/5$。若 $R = 0$，则 (24) 直接给出所需结论。若 $R = 1$，则使用边际比较：$\ell \le L \le \Lambda$ 和 $d \ge 1$ 证明 (27) 对每个 z 都成立。

两个自有槽位，普通第三所有者： $k = 2$，$m = 0$。这里 $L = (5/2)^{5/12} \le 3/2 = \Lambda$，因为 $(5/2)^5 \le (3/2)^{12}$。对于 $R = 0$，包络立即证明了目标。对于 $R = 1$，2，它与 $\Lambda(1 + z)^r$ 的差随 z 递减，因此只需检查 $z = 0$。加权算术—几何平均不等式给出，对于$R = 1$，2，

$$(5/2)^{5/12}(R + 1/2)^r - R/2 \le \frac{5}{12}\cdot\frac{5}{2} + \frac{7}{12}(R + 1/2) - \frac{R}{2} = \frac{4}{3} + \frac{R}{12} \le \frac{3}{2}.$$

两个自有槽位，折扣后的第三个所有者： $k=2,\ m=1$。这种情形需要单独进行端点估计。这里 $\Lambda=4/3$ 和 $L^{12/5}=2+(2/3)^{12/5}/2$。由于当前中心是普通的，其归一化预算满足

$$1+z\le(7/3)^{12/5}.$$

在本段中，仅将上端点称为

$$T=(7/3)^{12/5}.$$

因此 $0\le z\le T-1$。

对于 $R=0,\ \mathbf{1}$，端点比较适用。在 $z=0$ 处，令 $u=(2/3)^{12/5}\le 2/5$，则 $L^{12/5}=2+u/2\le 11/5$。由加权算术—几何平均不等式可得

$$L(R+1/2)^r-R/2\le\frac{5}{12}\cdot\frac{11}{5}+\frac{7}{12}(R+1/2)-\frac{R}{2}=\frac{29}{24}+\frac{R}{12}\le\frac{31}{24}<\frac{4}{3}.$$

在另一个端点处，有理数界

$$L\le\frac{140}{101},\qquad 7<T\le\frac{153}{20},\qquad 6^{5/12}\ge 2$$

可由附录 B.1 中的整数幂证书推出。对于 $0\le R\le 1$，$f(R)=L(T-1/2+R)^r-R/2$ 的导数为负：由于 $L<7/5$ 且 $T-1/2>6$，

$$f'(R)\le\frac{7}{5}\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}<0.$$

因此只需验证 $R=0$。在 $\mathbf{1}$ 处的切线界给出

$$\frac{L(T-1/2)^r}{T^r}\le\frac{140}{101}\left(1-\frac{7}{24T}\right)\le\frac{140}{101}\left(1-\frac{7}{24}\cdot\frac{20}{153}\right)=\frac{61810}{46359}<\frac{4}{3}.$$

这就证明了两个上端点比较，无需进行数值近似。

对于 $R=2$，两个自有槽位都包含一个单位剩余量。粗略包络在$z=0$处损失过多，因此改用边际比较。现在 $z+1\le T<8$ 和 $\Lambda^{12/5}\ge 28/15$；后者由 $(4/3)^{12}\ge(28/15)^5$ 得出。活跃槽位可能性只有两种：

Third slot active?	$\ell^{12/5}$	d
No	2	2
Yes	$2+\frac{1}{2}(2/3)^{12/5}$	$\frac{5}{2}$

对于第一行，(27) 的右侧至少为

$$\frac{28}{15}\left(1+\frac{1}{8}\right)=\frac{21}{10}>2.$$

对于第二行，它至少为

$$\frac{28}{15}\left(1+\frac{3}{16}\right)=\frac{133}{60}>2+\frac{1}{2}(2/3)^{12/5}.$$

对于最后一个严格不等式，可以使用 $(2/3)^{12/5}\le 2/5$，得到 $2+(2/3)^{12/5}/2\le 11/5<133/60$。两行都满足测试。

三个自有槽位： $k=3$。此处 $L=3^{5/12}$，$\Lambda=3/2$，以及

$$0\le z\le T-1,\qquad T=(8/3)^{12/5}.$$

对于每个 $R\in\{0,1,2,3\}$，端点比较将所需不等式归结为在$z=0$ 和 $z=T-1$处的取值。在 $z=0$ 处，加权算术—几何平均不等式给出，对每个 $0\le R\le 3$，

$$3^{5/12}R^r-R/2\le\frac{5}{12}\cdot 3+\frac{7}{12}R-\frac{R}{2}=\frac{5}{4}+\frac{R}{12}\le\frac{3}{2}.$$

对于上端点，使用精确的界

$$L\le\frac{19}{12},\qquad T\le\frac{32}{3},\qquad T-1>6,\qquad 6^{5/12}\ge 2.$$

前两个由附录 B.1 证明；第三个由 $T>(8/3)^2=64/9>7$ 得出。因此，对于 $R\ge 0$，$f(R)=L(T-1+R)^r-R/2$ 递减，因为

$$f'(R)\le\frac{19}{12}\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-\frac{11}{288}<0.$$

还需检验 $R=0$。同样使用 1 处的切线，

$$\frac{L(T-1)^r}{T^r}\le\frac{19}{12}\left(1-\frac{7}{12T}\right)\le\frac{19}{12}\left(1-\frac{7}{12}\cdot\frac{3}{32}\right)=\frac{2299}{1536}<\frac{3}{2}.$$

因此，所有四个上端点都满足该界。

A.5 恢复缩放与零残差

将局部界乘以 t_a^r，恰好得到引理 2 中的账户界。这是证明中唯一使用的重新缩放。

若 $t_a=0<c_a$，自有比较顶点的所有其他剩余量也为零，因为其所有者的剩余量最大。在当前顶点处，将人工残差设为 $\epsilon>0$、预算设为 $c_a+\epsilon$，应用局部不等式；保持所有实际转移和其他剩余量不变，并令 ϵ 趋于零。中心的折扣状态最终会保持不变；相邻所有者的折扣状态则作为局部界的任意固定输入。每个账户条目都趋于其所需值。若 $c_a=t_a=0$，所有转移量和账户中的所有条目均为零。

至此，引理 2 得证，从而定理 2 的证明也告完成。

B 导数与常数检验

本附录记录了第4节和附录 A 中使用的导数论证。

仅残差界。对于 $0<x\le 1$ 和 $0<r<1$，定义

$$h(x)=\frac{(1+x)^r-1}{x^r}.$$

微分得到

$$h'(x)=rx^{-r-1}\bigl(1-(1+x)^{r-1}\bigr)\ge 0.$$

因此 $h(x)\le h(1)=2^r-1$，从而证明了第4节开头所用的余项不等式。此外，$\lim_{x\downarrow 0}h(x)=0$。

增量的单调性。对于 $x,\ t>0$,

$$\frac{\partial J_t(x)}{\partial t} = r\big((t+2x)^{r-1} - (t+x)^{r-1}\big) \le 0.$$

连续性将这一单调性扩展到 $t=0$ 或 $x=0$。特别是,

$$J_1(x) \le J_0(x) = (2^r-1)x^r.$$

端点比较。对于 $b \ge 1$, 令

$$D(z) = L(z+b)^r - \Lambda(z+1)^r - C,$$

其中 $L,\ \Lambda > 0$ 且 $C \ge 0$。 $D'(z)$ 的符号与下式的符号相同:

$$\frac{L}{\Lambda}\left(\frac{z+b}{z+1}\right)^{r-1} - 1.$$

由于 $(z+b)/(z+1)$ 是非增的, 且 $r-1<0$, 因此该表达式是非减的。因此, D' 的符号只能由负变正, 所以 D 在紧区间上的最大值出现在端点处。

若 $0 \le b < 1$ 且 $L \le \Lambda$, 则可直接得到 $D(z) \le 0$。若 $0 \le b < 1$ 且 $L > \Lambda$, 则 $D'(z) > 0$, 因此只需检查上端点。这些情形用于附录 A.4。

B.1 精确常数证书

为完整起见, 下表验证了上文使用的有理幂界。每一行的右栏都是一个等价的不等式, 两边均为有理数的整数次幂; 通分后即可得到一个整数比较。因此, 验证过程不需要对无理数进行任何近似。

使用的界	整数幂证书
$2^{7/12} \le 3/2$	$2^{19} \le 3^{12}$
$(7/3)^{7/5} > 5/2$	$(7/3)^7 > (5/2)^5$
$3^{5/12} \le 8/5$	$3^5 \le (8/5)^{12}$
$(7/20)^{12/5} \le 81/1000$	$(7/20)^{12} \le (81/1000)^5$
$(1081/1000)^{5/12} \le 31/30$	$(1081/1000)^5 \le (31/30)^{12}$
$(11/20)^{12/5} \le 6/25$	$(11/20)^{12} \le (6/25)^5$
$(7/5)^{12/5} \ge 56/25$	$(7/5)^{12} \ge (56/25)^5$
$(7/16)^{12/5} \le 7/50$	$(7/16)^{12} \le (7/50)^5$
$(5/6)^{12/5} \ge 16/25$	$(5/6)^{12} \ge (16/25)^5$
$(2/3)^{12/5} \le 2/5$	$(2/3)^{12} \le (2/5)^5$
$(5/2)^{5/12} \le 3/2$	$(5/2)^5 \le (3/2)^{12}$
$(2/3)^{12/5} \le 189/500$	$(2/3)^{12} \le (189/500)^5$
$(2189/1000)^{5/12} \le 140/101$	$(2189/1000)^5 \le (140/101)^{12}$
$(7/3)^{12/5} > 7$	$7^7 > 3^{12}$
$(7/3)^{12/5} \le 153/20$	$(7/3)^{12} \le (153/20)^5$
$6^{5/12} \ge 2$	$6^5 \ge 2^{12}$
$(4/3)^{12/5} \ge 28/15$	$(4/3)^{12} \ge (28/15)^5$
$3^{5/12} \le 19/12$	$3^5 \le (19/12)^{12}$
$(8/3)^{12/5} \le 32/3$	$(8/3)^{12} \le (32/3)^5$

特别地，双占用槽系数的界可由下式推出

$$L^{12/5} = 2 + \tfrac{1}{2}(2/3)^{12/5} \le 2 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{189}{500} = \tfrac{2189}{1000} \le (140/101)^{12/5}.$$

因此，上述端点估计仅用到了凹性和这些有理数界。它们不依赖数值优化或对实参数的搜索。

C 两阶段方案的局部性下界

以下构造采用了有界交换局部搜索中熟知的高围长障碍 [9, 13]。我们将其详细说明，以表明增益恢复阶段并不能消除这一障碍。它给出的是在某种允许的执行顺序下的局限性，而不是近似困难性结果，也不是对所有可能枢轴规则都成立的下界。

命题1. 对于任意固定的插入界 $b \ge 3$ 和任意幂 $p > 0$，都存在一个单位权重的3-集合打包实例，其允许的第一阶段执行过程所得输出在增益恢复阶段后保持不变，且权重恰为最优解的 $2/3$ 。采用取整的第一阶段势函数时，同样的结论也成立。

证明. 取一个围长大于 b的有限简单三正则图 $H = (V, E)$。对于每个顶点与边的关联，引入一个基本元素 (v, e)。对于 $v \in V$ 和 $e = uv \in E$，定义

$$A_v = \{(v, e) : e \ni v\}, \qquad O_e = \{(u, e), (v, e)\}.$$

令 $A = \{A_v : v \in V\}$ ，并令 $O = \{O_e : e \in E\}$，且将每个集合的权重设为 1。 A 和 O 都是打包，其集合的大小分别为 3 和 2。它们的冲突图是 H 的关联图。

每个非空的 $X \subseteq O$ （其中 $|X| \le b$ ）都对应于 H 中的一个边导出森林。若它有 $c_X \ge 1$ 个非空连通分量，则

$$|\mathcal{N}_A(X)| = |X| + c_X > |X|.$$

所有单位权重都具有相同的正 p 幂贡献。因此，这类插入都无法提升第一阶段的势函数。由于 $b \ge 3$，恢复阶段的每个候选集合也都有严格为负的原始权重增益。某个允许的执行过程先将 A 的所有成员作为单元素集合插入，然后在 A 处停止；恢复阶段不会改变它。对于舍入后的势函数，所有集合仍具有相同的正整数贡献，因此论证完全相同。

为确定最优解，考虑一个包含以 $T \subseteq V$ 为索引的当前集合的打包。这些选择排除的边集合数量为

$$3|T| - |E(H[T])| \ge \tfrac{3}{2}|T|.$$

因此，其总基数至多为 $|T| + |E| - \frac{3}{2}|T| \le |E|$。所以， O是最优的，并且正则性给出

$$\frac{w(\mathrm{OPT})}{w(A)} = \frac{|E|}{|V|} = \frac{3}{2}.$$

□

对于每个固定的精度，该命题都适用，因为此时算法 1 的插入界是一个常数。对于这一两阶段框架中所有允许的第一阶段选择，它排除了严格低于 $3/2$ 的统一保证。它并未排除精确的 $3/2$ 保证、采用更大或不同邻域的算法，或通过对枢轴规则施加额外要求而获得更强保证的可能性。

D 其他幂指数的反例

我们证明，即使经过恢复阶段，某些幂指数仍然不成立。将 $12/7$ 替换为固定的$p > 0$，同时保持插入界 $b = 4^{\lceil 1/\varepsilon \rceil} - 1$ 和恢复阶段不变。我们首先分析未舍入势函数 $\Phi_p(Y) = \sum_{S \in Y} w(S)^p$，并在最后讨论舍入。

D.1 小幂指数： $0 < p < \log_{3/2} 2$

取一个有理数

$$\frac{3}{2} < \beta < \min\{2, 2^{1/p}\}.$$

取一个有限简单三正则二分图，其两侧为 A, O，且围长大于 $2\max\{b, 3\}$。这类图可以具有任意大的围长；这是局部搜索下界 $[9, 13]$ 的标准高围长情形。将每个顶点表示为与其关联的三条边所组成的集合，因此两侧都是打包，且邻接对应于相交。为 A 中的集合赋予权重 1，为 O 中的集合赋予权重 β。正则性给出 $|A| = |O|$。

对于每个非空 $X \subseteq O$ 且满足 $k = |X| \le \max\{b,3\}$ 的集合， $X \cup \mathcal{N}_A(X)$ 上的图是一个具有 $3k$ 条边的森林。因此

$$|\mathcal{N}_A(X)| \ge 2k + 1.$$

由于 $\beta^p < 2$ 和 $\beta < 2$,

$$\Phi_p(X) < 2k < \Phi_p(\mathcal{N}_A(X)), \qquad w(X) < 2k < w(\mathcal{N}_A(X)).$$

因此， A 既不允许进行势函数改进，也不存在正增益恢复候选。

一种允许的执行过程通过优先进行单元素插入来构建 A，然后返回$B = A$。然而，

$$\frac{w(\mathrm{OPT})}{w(B)} \ge \frac{w(O)}{w(A)} = \beta > \frac{3}{2}.$$

差距仅取决于 p，而非插入界。这排除了对允许的第一阶段选择都统一成立的保证。

D.2 大幂指数： $p \ge 1.83$

从七个不相交星图开始。特定中心的权重为 1，有三个叶节点，各自的权重为 0.5479。其余六个中心的权重均为 1.01，且各有三个叶节点，权重分别为

$$0.64236, \qquad 0.505, \qquad 0.505.$$

所有有限小数均表示精确的有理数。

添加三个互不相交的集合 d_1、d_2、d_3，每个集合的权重为 0.548。每个 d_j 都与特定中心、其第 j 个叶节点以及外部中心 $2j-1$ 和 $2j$ 的重叶节点相交，除此之外没有其他相交。这些相交关系可以用大小至多为三的集合来实现：对特定中心、第 j 个叶节点和 d_j 形成的每个三角形，使用一个基本元素；对指定交图中的每条其余边，分别使用一个独立元素。每个顶点至多使用三个元素。

设 A 为七个中心， $D = \{d_1、d_2、d_3\}$。每个非中心集合恰好与一个中心相交。相对于其中心的幂，外部中心处的替代项至多贡献

$$0.636^p + 2(1/2)^p,$$

而那些 特定中心处的 e 至多贡献 $3(0.548)^p$。直接计算可得

$$0.636^{1.83} + 2(1/2)^{1.83} < 1, \qquad 3(0.548)^{1.83} < 1.$$

要在端点进行精确有理数验证，请使用

$$(159/250)^{183} < (43685/100000)^{100}, \qquad (1/2)^{183} < (28127/100000)^{100},$$

$$(137/250)^{183} < (33264/100000)^{100}.$$

清除分母后，这些都是整数比较。取 100 次方根可得，外部总和小于 $99939/100000 < 1$，特殊中心总和小于 $99792/100000 < 1$。这两个表达式都随 p递减。因此，每个中心贡献的幂都严格大于其替代项的任意打包所贡献的幂。若 $b \geq 7$，则插入所有缺失的中心会改善除 A 以外的每一种打包。因此，每次第一阶段执行最终都会得到 A。

在恢复阶段，任一中心处的三个外部叶节点的增益为

$$0.64236 + 2(0.505) - 1.01 = 0.64236,$$

而 D 的增益为

$$3(0.548) - 1 = 0.644.$$

涉及多个中心的候选集合都没有正增益：其插入权重至多为 3(0.64236) <2，而删除成本至少为 2。在仅涉及特定中心的候选集合中，D 的增益最大，且是唯一的。因此，贪心过程会首先接受 D 。

这会阻塞全部三个特殊叶节点和全部六个重型外部叶节点。每个外部中心处剩余的两个叶节点的权重之和等于该中心的权重，因此不会再接受其他相容的正增益候选项。因此

$$w(B) = 6(1.01) + 3(0.548) = 7.704.$$

全部二十一个原始叶节点构成一个打包 O 其中

$$w(O) = 3(0.5479) + 6\big(0.64236 + 2(0.505)\big) = 11.55786.$$

因此

$$\frac{w(\mathrm{OPT})}{w(B)} \geq \frac{w(O)}{w(B)} = \frac{3}{2} + \frac{31}{128400}.$$

舍入及其后果。对于 $Q_p(S) = \lfloor (w(S)/\tau)^p \rfloor$，两种构造仍然有效。对于固定的 p 和 ε，上述严格势比较具有正裕量。取足够多的不相交副本，可以在不改变权重或 b 的情况下减小 $\tau = \varepsilon M/(30n)$。每个所需的比较只涉及有界数量的集合，因此其裕量乘以 τ^{-p} 后最终会超过加性舍入误差。因此，第一阶段的论证仍然成立。恢复阶段使用原始权重；其行为不变，并且涉及不同副本的候选集合根据上述相同的界具有负增益。

对于充分小的 ε，我们有 $b \geq 7$。当 $\varepsilon < \beta - 3/2$ 时，第一个构造违反目标保证；当 $\varepsilon < 31/128400$ 时，第二个构造违反目标保证。因此，对于每个固定的精度和每个允许的第一阶段顺序都有效的保证要求

$$\log_{3/2} 2 \leq p < 1.83.$$

这些示例并未证明在整个该区间内的充分性。