arXiv:2611.28568v1 [math.DG] 21 Nov 2026

超可积系统与拖拉机联络

SIMON C. W. GOODWIN、A. ROD GOVER 和 JONATHAN M. KRESS

Abstract. 具有势函数的自然伪黎曼哈密顿量的二次运动常数，对应于具有多个 Killing 尺度的共形 Killing 张量。进一步发展这一对应关系，我们运用共形拖拉机演算以及二阶共形 Killing 方程的不变 BGG 延拓，建立了一个与维数无关（$n \geq 3$）的框架，用于研究二阶超可积系统。我们运用该框架，对任意维数下由成对共形相关的爱因斯坦度量所生成的某些自然哈密顿量族中的二阶极大超可积系统进行分类。作为特例，我们得到了伯特兰定理的二阶类比。

1. Introduction

对称性对于建立和理解物理模型至关重要。许多对力学理解影响深远的模型，往往具有大量守恒量。开普勒二体问题及其量子化形式——氢原子——具有一种额外的“隐藏”对称性，它由拉普拉斯–龙格–楞次矢量体现。对于经典哈密顿系统，隐藏对称性对应于高阶 Killing 张量；而这些张量也被认为是哈密顿–雅可比方程和薛定谔方程可分离所必需的 [23]。

一个哈密顿量 是对定义在辛流形 (N, ω) 上的光滑函数 $\mathcal{H}\colon N \to \mathbb{R}$ 的一种选取。由此，哈密顿方程由哈密顿向量场 $X_{\mathcal{H}} = \omega^{-1}(d\mathcal{H})$确定，而哈密顿方程的解是满足 $\dot{\gamma} = X_{\mathcal{H}} \circ \gamma$ 的积分曲线$\gamma\colon \mathbb{R} \to N$。

在流形 M 上的经典力学背景下，哈密顿量通常定义在 $N = T^*M$ 上，并配备典范辛形式 ω和泊松括号 $\{,\}$。此时，哈密顿方程便成为熟知的

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \quad \text{and} \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}, \tag{1.1}$$

其中，$q = (q_1, \ldots\ldots, q_n)$ 是 M上的坐标，而 $(q_1, \ldots\ldots, q_n, p_1, \ldots\ldots, p_n)$ 是 T^*M上的诱导坐标。我们将限定为如下形式的经典哈密顿量：

$$\mathcal{H}(q, p) = g_q^{-1}(p, p) + V(q),$$

2020 数学主题分类。主要分类 70H06；次要分类 53C18、53A55、70H33。本研究部分得到了新西兰皇家学会 Te Apārangi 的 Marsden 基金（资助编号 19-UOA-008 和 24-UOA-005）以及澳大利亚研究理事会（探索项目 DP190102360）的支持。
这项工作的部分内容是在第一作者访问悉尼新南威尔士大学以及第三作者访问奥克兰大学期间完成的；他们感谢各自东道主的热情款待。

对于 $q \in M$、 $p \in T_q^*M$，其中 g 是 M上的伪黎曼度量。若函数f: $T^*M \to \mathbb{R}$ 满足

$$\omega^{-1}(d\mathcal{H}, df) = \langle X_{\mathcal{H}}, df\rangle = \{\mathcal{H}, f\} = 0,$$

或者等价地， f 沿着哈密顿方程任一解的轨迹保持不变。若对于某个 $m \geq 1$，存在 $n+m$ 个运动常数 $f_1, \ldots, f_{n+m}$，且它们函数独立，即 $df_1, \ldots, df_{n+m}$在 T^*M的一个开稠密子集上线性无关，则哈密顿量 $\mathcal{H}$ 是超可积的。若哈密顿量 $\mathcal{H}$ 具有 $2n-1$ 个函数独立的运动常数，则称其为极大超可积；这是运动常数的最大数量，因为对于所有运动常数 f，都有 $\langle df, X_{\mathcal{H}}\rangle = 0$。若哈密顿量 $\mathcal{H}$ 具有 n 个两两对合的函数独立运动常数，则称其为刘维尔可积，也就是说 $\{f_i, f_j\} = 0$。不过，我们遵循 [34], 中的假设，该假设不要求超可积系统中的任何一组运动常数彼此对合。每个运动常数都将方程（1.1）的解限制在 T^*M中的一个超曲面上。因此， $2n-1$ 个函数独立的运动常数会将轨迹限制在一个一维嵌入子流形上，这意味着每个紧致连通正则公共等值集都是一个周期轨道。

极大超可积哈密顿系统的典型例子是各向同性谐振子，

$$\mathcal{H}^{HO}(q,p) = |p|^2 + \lambda r^2 + C, \tag{1.2}$$

以及开普勒-库仑系统

$$\mathcal{H}^{KC}(q,p) = |p|^2 + \frac{\lambda}{r} + C, \tag{1.3}$$

二者都定义在 $\mathbb{R}^n$ 的余切丛上，其平坦欧几里得度量为 $g_q^{-1}(p, p) = |p|^2$。两个哈密顿量都是径向对称的，也就是说，它们具有如下形式

$$\mathcal{H}(q,p) = |p|^2 + V(r). \tag{1.4}$$

对于任意具有形式 (1.4) 的哈密顿量，表示角动量的函数

$$L^{i,j}(q,p) = q_i p_j - q_j p_i, \quad i,j \in \{1, \ldots, n\}$$

都是运动常数。然而， $L^{i,\,j}$ 中至多有 $2n-3$ 个函数独立（见命题 6.4）。因此，加上哈密顿量本身，(1.4) 有 $2n-2$ 个函数独立的运动常数。具有 $2n-2$ 个函数独立积分的哈密顿量称为准极大超可积。函数 $L^{i,\,j}$ 关于动量呈线性，因此由平坦欧几里得度量的 Killing 向量诱导，见第 2.2 节。哈密顿量 (1.2) 和 (1.3) 还有由下列函数给出的额外函数独立的运动常数

$$f_j^{HO}(q,p) = p_j^2 + \lambda q_j^2 \quad \text{and} \quad f_j^{KC}(q,p) = \sum_{i=1}^{n}((q_i p_j - q_j p_i)p_i) - \frac{\lambda q_j}{2r},$$

分别地，因此它们具有 $2n-1$ 个函数独立的运动常数，从而成为最大超可积系统。这些运动常数关于动量是二次的，由秩二 Killing 张量或“隐藏对称性”诱导而来。如果一个哈密顿量具有 $2n-1$ 个函数独立的

关于动量次数至多为二的运动常数，则称其为二阶最大超可积。动量中的守恒量为二次的超可积系统尤其重要；关于二维和三维中的二阶超可积性的完整综述，请参见论文系列 [18–22] 。之所以主要关注二次运动常数，很大程度上是因为它们与哈密顿–雅可比方程的可分离性有关 [5, 24]。

Bertrand [4] 的一个经典结果指出，在 $\mathbb{R}^3$ 上，形式为 (1.4) 且所有有界轨道都是闭合轨道的哈密顿量只有 (1.2) 和 (1.3)。它们也是 $\mathbb{R}^3$上形式为 (1.4) 的仅有的二阶极大超可积哈密顿量。这一结果表明，对极大超可积系统进行分类是有可能的。

1990 年，Evans [9] 对定义在 $\mathbb{R}^3$ 上且具有欧几里得度量的所有二阶极大超可积经典哈密顿量进行了分类。Evans 的论文是一个旨在分类三维中所有多重可分离势函数的研究计划的总结；该计划始于 1967 [33], ，其前身是二维情形的分类工作 [10, 37]。在 [9],中，Evans 证明了三维情形下二次超可积性与多重可分离性等价，因此得以对三维欧几里得空间中具有二次运动常数的极大超可积系统进行分类。

近年来，关于对维数为 $n \geq 4$ [27, 28] 的二阶极大超可积系统进行分类，已取得显著进展。本文证明了任意维数的共形平坦流形上一类广义哈密顿量中的二阶极大超可积系统的存在性与唯一性，并将伯特兰定理自然推广到范围广得多的一类势函数，这类势函数由爱因斯坦缩放因子参数化。为证明这些结果，我们运用源自共形几何与拖拉机演算的方法，重新表述了超可积系统、运动常数和函数独立性这些核心概念。我们认为，这或许能为任意维数的二阶极大超可积系统分类开辟新的方向。

在 $\mathbb{R}^n$中，通常的欧几里得度量 g_e 与另一个平坦度量共形相关，后者由 $r^{-4}g_e$ 给出。在我们的分析中，形式为 (1.4) 的哈密顿量的一个重要特征是，其势函数是 r^2 的函数； r^2是一个爱因斯坦缩放因子，即将底层爱因斯坦度量 g 与另一个爱因斯坦度量联系起来的共形因子。基于这一更一般的观点，我们证明了若干结果。

我们证明了与 (1.4) 类似的准极大超可积性。

定理 1.1 (定理 6.6)。 设 $(M, \boldsymbol{c})$ 为共形平坦且单连通。设$I_A = D_A\sigma$和 $J_A = D_A\tau$对于 σ, $\tau \in \Gamma(\mathcal{E}[1])$ 为线性无关的平行 *tractor*。设 $V\colon \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为光滑函数，并考虑哈密顿量

$$\mathcal{H}(q,p) = g_q^{-1}(p,p) + V\left(\frac{\tau}{\sigma}\right), \tag{1.5}$$

其中 $g = \sigma^{-2}\boldsymbol{g}$。则 $\mathcal{H}$ 具有 $2n-2$ 个函数独立的运动常数，即 $f_0 = \mathcal{H}$和 f_1，……， f_{2n-3}，它们由对于 g和 $\hat{}g = \tau^{-2}\boldsymbol{g}$ 为 *Killing* 的向量场诱导。

在第 7 节中，我们证明了族 (1.5) 中二阶最大超可积势的存在性；在第 8 节中，我们证明了这些系统的唯一性，从而完成了对伯特兰定理的推广。

定理 1.2 (推论 8.4**)**。 设 （M、 $\boldsymbol{c}$） 是一个维数为 $n \geq 3$ 的共形平坦、单连通流形。设 σ、 $\tau \in \Gamma$（$\mathcal{E}[1]$） 是近爱因斯坦尺度，并设 I_A、 J_A 是相应的平行 *tractor*。令 $s = \tau\sigma^{-1}$，并令 $\tilde{\sigma} = f\,(s)\,\sigma$，其中某个光滑的 f： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足 $\tilde{\sigma}$ 在 M 的一个开稠密子集上非零。假设由 I 和 J 张成的子空间是非退化的。那么，不失一般性地，我们考虑两种情形（见定理 *7.3*）。

假设 I 和 J 是零的，且 $I_A J^A = 1$。那么哈密顿量

$$\mathcal{H}(q,p) = g_q^{-1}(p,p) + \frac{1}{f(s)^2} = g_q^{-1}(p,p) + V(s), \tag{1.6}$$

其中 $g = \sigma^{-2}\boldsymbol{g}$ 和 $V(s) = f(s)^{-2}$，当且仅当 f 满足以下任一条件时，才是二阶最大超可积的：

$$v(s) = \frac{f(s)^4}{2}V''(s) = 0, \quad \textit{in which case} \quad V(s) = as + b$$

or

$$u(s) - sv(s) = -\frac{f(s)^4}{2}(2sV''(s) + 3V'(s)) = 0, \quad \textit{in which case} \quad V(s) = \frac{a}{\sqrt{|s|}} + b$$

设 $\iota = I_A I^A$ 和 $\jmath = J_A J^A$。假设 I 和 J 正交，且 ι、 $\jmath \in \{-1, +1\}$。那么哈密顿量

$$\mathcal{H}(q,p) = g_q^{-1}(p,p) + \frac{1}{f(s)^2} = g_q^{-1}(p,p) + V(s), \tag{1.7}$$

当且仅当 f 满足以下任一条件时，才是二阶最大超可积的：

$$u(s) = -\frac{f(s)^4}{2}(sV''(s) + 3V'(s)) = 0, \quad \textit{in which case} \quad V(s) = \frac{a}{s^2} + b$$

or

$$v(s) - \iota\jmath s u(s) = \frac{f(s)^4}{2}((\iota\jmath s^2 + 1)V''(s) + 3\iota\jmath s V'(s)) = 0, \quad \textit{in which case} \quad V(s) = a\frac{s}{\sqrt{|\iota\jmath s^2 + 1|}} + b.$$

我们研究运动常数的方法是借助共形 Killing 张量。虽然经典上对超可积系统的理解主要基于泊松结构，但我们转而采用共形 Killing 张量，从而能够将不变拖拉子演算及相关构造应用于超可积系统。

克尔 林方程 描述黎曼流形上秩为 ℓ的对称协变向量 s

$$\nabla^g_{(a} r_{b_1 \dots b_\ell)} = 0, \tag{1.8}$$

其中， ∇^g 是 g的列维-奇维塔联络。任何多项式运动常数的最高阶项都必须来自度量 g 的 Killing 张量（见第 3 节）。当哈密顿量具有非零势函数 V时，对运动常数的完整要求可以用共形几何的语言重新表述。对于形如 $\mathcal{H} = g^{-1} + V$的哈密顿量，其二次和线性运动常数分别与共形 Killing 向量和二阶共形 Killing 张量一一对应；其中，共形相关度量 g 和 Vg 都必须是 Killing 尺度，见第 4.3 节。

一阶和二阶共形 Killing 张量及其 Killing 尺度是近期一篇论文的研究主题，[13]（以及 [11]中的扩展工作）。该论文使用共形不变拖拉子演算来延拓共形 Killing 方程。此外，作者还推导了代数公式，用于判断共形类中的某些度量是否为 Killing 尺度。

目前，这些方法要求 $(M,\ \boldsymbol{c})$ 是共形平坦的，因为在非平坦情形下，二阶 Killing 张量的完整延拓联络和分裂算子尚不为人所知。共形平坦情形是二阶超可积系统通常考虑的情形。在考虑所谓“丰足”的非退化二次超可积系统时，必须在共形平坦流形上 [27, 推论 5.10]。因此，限制在共形平坦情形是自然而然的，也符合当前超可积系统的研究框架。当然，人们已经在共形弯曲空间中构造了超可积系统 [17]；随着高阶 Killing 张量的 tractor 延拓取得进一步进展，我们的方法也可能拓展到这些情形。

我们的构造和计算大多是局部的，因此要求流形具有平凡的共形 holonomy；根据 Ambrose-Singer 定理，这一条件比共形平坦更强，可用于证明二次运动常数的全局存在性。然而，在证明唯一性时，我们构造了必须在局部满足的偏微分方程，从而得到与全局拓扑无关的超可积性障碍。我们注意到，如果 $(M,\ \boldsymbol{c})$ 共形平坦且单连通，那么它可共形浸入到符号为 $(P,\ Q)$ 的 Möbius 空间¨中（该映射称为发展映射）；在黎曼情形下，这个空间就是共形球 [29]。特别地，此时 $(M,\ \boldsymbol{c})$ 具有平凡的共形 holonomy。

本文的结构如下。在第 2 节中，我们介绍哈密顿力学和共形几何的必要背景知识。在第 3 节中，我们完整推导运动常数与共形 Killing 张量之间的关系。这些章节使我们的论述保持自洽，并采用共形几何中的语言和记号。在第 4 节中，我们给出共形 tractor 丛及其不变联络与微积分的标准构造。我们还总结了文献 [11,13] 中所需的结果。在第 5 节和第 6 节中，我们用 tractor 表述函数独立性，并证明第一个主要结果，即定理 1.1。在第 7 节中，我们证明，在定理 1.1 所导出的哈密顿量族中存在二阶极大超可积系统。在第 8 节中，我们证明第 7 节所构造的二阶极大超可积系统是唯一的，从而完成定理 1.2 的证明。在第 9 节中，我们讨论哈密顿量线性族，说明如何向此前推导出的哈密顿量中加入额外的势能项。最后，在第 10 节中，我们展示如何从 tractor 构造中提取以坐标表示的经典哈密顿量，并在 $\mathbb{R}^n$ 上计算具有平直度量和双曲度量的两个例子。

我们构造的超可积系统包括各向同性谐振子、

$$|p|^2 + \lambda r^2 + \frac{a_1}{q_1^2} + \cdots + \frac{a_n}{q_n^2},$$

开普勒系统

$$|p|^2 + \frac{\lambda}{r} + \frac{a_2}{q_2^2} + \cdots + \frac{a_n}{q_n^2},$$

以及 Evans 的第三势的高维推广 [9]

$$q_1^2|p|^2 + \frac{\lambda q_2}{\sqrt{q_2^2+q_1^2}} + a_3\frac{q_1^2}{q_3^2} + \cdots + a_n\frac{q_1^2}{q_n^2}.$$

这揭示了爱因斯坦尺度在构造超可积系统以及对其进行高维分类时的重要性。

2. Background

本节将介绍哈密顿力学，旨在讨论伪黎曼流形上的多项式超可积性以及共形几何。

贯穿始终 在本文中， M 将是一个维数为 $n \geq 3$ 的连通光滑流形 .

2.1. 上的辛几何 T^*M。： w 余切丛 T^*M是一个维数为 $2n$ 的光滑流形。在经典力学中， T^*M 通常被称为相空间， M 中的一点称为位置，通常记作 $q \in M$。余切向量称为（广义）动量，通常记作 $p \in T_q^*M$。给定一个坐标图 ϕ： $U \to \mathbb{R}^n$，我们将局部坐标记为（q_1，……， q_n） $= \phi$（q），这些坐标在 T^*M 上诱导出局部坐标（q_1，……， q_n， p_1，……， p_n），其中 $p = \sum_{i=1}^n p_i dq_i$。

T^*M [31]上存在一个典范辛形式，即 $\omega \in \Gamma(\bigwedge^2(T^*(T^*M)))$，其在局部坐标下表示为

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i.$$

令 f_1， f_2为定义在 T^*M 的开子集上的光滑函数。典范辛形式 ω 诱导出泊松括号，$\{f_1, f_2\} := \omega^{-1}(df_1, df_2)$，其定义域为 f_1， f_2 的公共定义域。在局部坐标中，该式为

$$\{f_1, f_2\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_1}{\partial p_i}\frac{\partial f_2}{\partial q_i} - \frac{\partial f_2}{\partial p_i}\frac{\partial f_1}{\partial q_i} \right). \tag{2.1}$$

实值光滑函数 $\mathcal{H}$ 定义在 T^*M 的开稠密子集上时，其哈密顿向量场为 $X_{\mathcal{H}} = \omega^{-1}(d\mathcal{H})$。根据构造，哈密顿量与光滑函数 f的括号为 $\{\mathcal{H}, f\} = X_{\mathcal{H}}(f)$，即 f沿着 $X_{\mathcal{H}}$的流的导数。

给定的函数 $\mathcal{H}$ 可以称为哈密顿量。于是，哈密顿力学研究由 $X_{\mathcal{H}}$的流所生成的动力学，该动力学由哈密顿方程控制，

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \quad \text{and} \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q},$$

轨迹和长期行为。哈密顿量的运动常数 是定义在 T^*M的开稠密子集上的一个函数 f，使得 $\{\mathcal{H}, f\} = X_{\mathcal{H}}(f) = 0$。运动常数为求解由哈密顿方程给出的运动方程提供第一积分。

2.2. 多项式函数。 设 $v \in \Gamma(S^\ell(TM))$为一个对称逆变张量场。定义一个光滑函数 $\tilde{v}\colon T^*M \to \mathbb{R}$，如下:

$$\tilde{v}(q,p) = v_q(p,\dots,p) = \sum_{i_1\dots i_\ell \in \{1,\dots,n\}} v^{i_1\cdots i_\ell}(q)\, p_{i_1}\cdots p_{i_\ell}, \tag{2.2}$$

对于每个 $q \in M$和 $p \in T_q^*M$。或者简写为 $\tilde{v}(q,\ p) = v(q)$，其中 $\ell = 0$。在 M上的局部坐标中，函数 $\tilde{v}$是关于动量 p_1，……，p_n的 ℓ次齐次多项式，其系数关于 q光滑。给定一个齐次多项式函数，便可定义一个对称张量 v，使得 $\tilde{v}$ 就是给定的多项式。

因此，我们得到 ℓ 次齐次多项式函数与 ℓ阶对称逆变张量之间的一个线性同构。进而可将其扩展为代数同构：对称代数 $S(TM)$（配备对称积）与 T^*M 上的多项式函数代数（配备逐点乘法）之间存在代数同构。

设 $f,\ g$是 M上的光滑函数，并设 $v,\ u \in \Gamma(TM)$。假设在局部坐标 $u = \sum_{i=1}^n u^i \frac{\partial}{\partial q^i}$和 $v = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial q^i}$中。那么我们有 $\{\tilde{f},\tilde{g}\} = 0$,

$$\{\tilde{v},\tilde{f}\} = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial q^i} = \widetilde{v(f)}, \quad \text{and} \tag{2.3}$$

$$\{\tilde{v},\tilde{u}\} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(v^i \frac{\partial u^j}{\partial q^i} p_j - u^i \frac{\partial v^j}{\partial q^i} p_j \right) = \widetilde{[v,u]}, \tag{2.4}$$

其中 $[,]$表示 M上的向量场的李括号。因此，配备李括号的 $\Gamma(TM)$与配备泊松括号的 T^*M 上的齐次一次多项式函数之间存在李代数同构。

在经典力学中，通常允许 M 上的函数存在奇点（例如式 (1.3)）。为避免重复说明，我们始终允许光滑函数（包括多项式函数的函数系数）和张量场定义在 M的一个开稠密子集上，并将这一假设纳入诸如 $\Gamma(TM)$和$C^\infty(M)$这样的记号中。

2.3. 对称舒滕伴随量。 泊松代数是一个三元组 $(A,\cdot\ \{,\})$，其中 $(A,\cdot)$ 是一个结合实代数，$(A,\{,\})$ 是一个李代数，并且满足以下莱布尼茨性质

$$\{x\cdot y, z\} = x\cdot\{y,z\} + \{x,z\}\cdot y$$

T^*M 上的多项式函数空间具有泊松代数结构，其中乘积是逐点乘法，括号是泊松括号。根据 (2.1)，该括号运算保持多项式性。

空间 $S(TM)$ 还具有泊松代数结构，其乘积由对称积给出，记作 $v \vee u$，括号运算为（对称）*Schouten* 伴随量，其特征由下式给出

(1) 若 $f,\ g \in C^\infty(M)$，则 $\{f,g\} = 0$；(2) 若 $u \in \Gamma(TM)$ 且 $f \in C^\infty(M)$ 是一个函数，则 $\{u,f\} = u(f) = df(u)$；(3) 若 $u,\ v \in \Gamma(TM)$，则 $\{u,v\}$是 u和 v的李括号，

(4) 若 u，v，$w \in \Gamma(S(TM))$，则

$$\{u, v \vee w\} = \{u, v\} \vee w + \{u, w\} \vee v.$$

若 M 配备了无挠仿射联络，则 $v \in \Gamma(S^\ell_1 TM)$ 与 $w \in \Gamma(S^\ell_2 TM)$ 的（对称）*Schouten* 伴随量 由下式给出（见 [35]）

$$\{v, w\}^{a_1 \cdots a_\ell} = \ell_1 v^{c(a_{\ell_2+1} \cdots a_\ell} \nabla_c w^{a_1 \cdots a_{\ell_2})} - \ell_2 w^{c(a_{\ell_1+1} \cdots a_\ell} \nabla_c v^{a_1 \cdots a_{\ell_1})} \in \Gamma(S^\ell(TM)), \tag{2.5}$$

其中 $\ell = \ell_1 + \ell_2 - 1$。

命题 2.1。泊松代数（$\Gamma(S(TM))$ $\vee, \{,\}$）与 T^*M 上多项式函数构成的泊松代数同构，后者配备逐点乘法和泊松括号。该同构通过取相应的多项式给出，如（2.2）所示。

证明。(2.3) 和 (2.4) 中的计算表明，对于 $\mathcal{E} \oplus TM$ 的截面，括号保持不变，其中 $\mathcal{E} = M \times \mathbb{R}$。$\mathcal{E} \oplus TM$ 的截面在运算 $\vee$ 和线性组合下生成 $\Gamma(S(TM))$，因此 $v \mapsto \tilde{v}$ 可扩展为泊松代数同构。□

鉴于这一同构，我们将省略记号 $\tilde{v}$，并在不会引起混淆时用同一符号 v 指代张量和函数。

2.4. 共形几何。我们通过共形几何研究运动常数和超可积性。若存在某个光滑正函数 Ω，使得 $\hat{}g = \Omega^2 g$，则流形 M 上的两个度量 g 和 $\hat{}g$ 称为共形相关。共形相关度量的等价类 $\boldsymbol{c} = [g]$ 称为共形类，而二元组 $(M, \boldsymbol{c})$ 是一个共形流形。下一节所依据的参考文献是 [7]。

设 $(M, \boldsymbol{c})$ 为一个共形流形。记 ∇^g 为 $g \in \boldsymbol{c}$的列维-奇维塔联络。设 $g, \hat{}g \in \boldsymbol{c}$ 和 $\Omega > 0$ 满足 $\hat{}g = \Omega^2 g$。$\omega \in \Gamma(\mathcal{E}_a)$ 和 $v^a \in \Gamma(\mathcal{E}^a)$ 的共形变换律为

$$\nabla^{\hat{g}}_a \omega_b = \nabla^g_a \omega_b - \Upsilon_a \omega_b - \omega_a \Upsilon_b + \Upsilon^c \omega_c g_{ab}, \quad \nabla^{\hat{g}}_a v^b = \nabla^g_a v^b + \Upsilon_a v^b - v_a \Upsilon^b + \Upsilon_c v^c \delta_a{}^b, \tag{2.6}$$

其中 $\Upsilon_a = \Omega^{-1} \nabla_a \Omega$。任意高秩张量丛的变换律都可由上述结果推得。特别地，对于一个 n-形式，$\omega \in \Gamma(\Lambda^n T^*M)$，

$$\nabla^{\hat{g}}_a \omega = \nabla^g_a \omega - n \Upsilon_a \omega.$$

因此，我们将定向线丛 $\mathcal{E}[-2n] = (\Lambda^n T^*M)^2$称为权重为 $-2n$的共形密度丛，并将定向根 $\mathcal{E}[w] = \mathcal{E}[-2n]^{\frac{w}{-2n}}$称为任意 $w \in \mathbb{R}$对应的权重为 w 的共形密度丛。由于密度丛是定向的，因此它们有一个由正元素构成的射线子丛，记作 $\mathcal{E}_+[w]$。于是

$$\nabla^{\hat{g}}_a \sigma = \nabla^g_a \sigma + w \Upsilon_a \sigma \tag{2.7}$$

对于密度 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{E}[w])$。对于任意向量丛 $\mathcal{B}$，我们定义 $\mathcal{B}[w] = \mathcal{B} \otimes \mathcal{E}[w]$。张量化权重会改变变换律。对于截面 $k_a \in \Gamma(\mathcal{E}_a)$，

$$\nabla^{\hat{g}}_{(a} k_{b)} = \nabla^g_{(a} k_{b)} - 2\Upsilon_{(a} k_{b)} + \Upsilon^c k_c g_{ab},$$

而对于截面 $k_a \in \Gamma(\mathcal{E}_a[2])$，

$$\nabla^{\hat{g}}_{(a} k_{b)} = \nabla^g_{(a} k_{b)} + \Upsilon^c k_c g_{ab},$$

这表明共形 *Killing* 算子 $k_b \mapsto \nabla_{(a}k_{b)_0}$ 是共形不变的，也就是说它不依赖于度量 $g \in \boldsymbol{c}$，因此我们从联络中省略 g。

任意度量 $g \in \boldsymbol{c}$ 都确定了（伪）黎曼密度 $\sigma^g \in \Gamma(\mathcal{E}[-2n])$（见 [32,命题 2.44]）；在可定向邻域内，它是体积形式的平方。因此，我们称 $\sigma = (\sigma^g)^{-1/2n} \in \mathcal{E}_+[1]$ 为对应于$g \in \boldsymbol{c}$的尺度密度。对应于 g 的尺度密度 σ 相对于 g的列维-奇维塔联络是平行的。

若 $\hat{}g = \Omega^2 g$，则尺度密度之间满足关系 $\Omega\hat{}\sigma = \sigma$。由此可知，共形度量 $\boldsymbol{g} := \sigma^2 g = \hat{}\sigma^{2\hat{}} g$ 是共形不变的。此外，

$$\nabla^g_a \boldsymbol{g} = (\nabla^g_a \sigma) g + (\nabla^g_a g)\sigma = 0$$

对任意 $g \in \boldsymbol{c}$均成立。因此，今后我们将使用 $\boldsymbol{g}_{ab} \in \mathcal{E}_{(ab)}[2]$ 和 $\boldsymbol{g}^{ab} \in \Gamma(\mathcal{E}^{(ab)}[-2])$来升降指标。

度量 $g \in \boldsymbol{c}$ 与处处非零的尺度密度 $\sigma \in \mathcal{E}_+[1]$一一对应，二者由 $g = \sigma^{-2}\boldsymbol{g}$联系。我们也将考虑带有零点的尺度密度 $\sigma \in \mathcal{E}[1]$，并假设 $M \setminus \mathcal{Z}(\sigma)$在 M中稠密。在这种情况下，度量 $g = \sigma^{-2}\boldsymbol{g}$定义在 $M \setminus \mathcal{Z}(\sigma)$上。这种密度称为尺度。

共形 Killing 算子定义于 $k_{a_1\cdots a_\ell} \in \Gamma(\mathcal{E}_{(a_1\ldots a_\ell)_0}[2\ell])$ b y

$$\nabla_{(a_0}k_{a_1\ldots a_\ell)_0} = 0 \tag{2.8}$$

并且是共形不变的。(2.8) 的解称为共形 *Killing* 张量。秩一共形 Killing 张量称为共形 *Killing* 向量。共形 Killing 向量是无穷小共形变换，与黎曼几何中的 Killing 向量十分相似。

若 $r_{a_1\cdots a_\ell} \in \Gamma(\mathcal{E}_{(a_1\ldots a_\ell)}[2\ell])$，则利用共形度量升起每个指标，可得到一个无权的 $r^{a_1\cdots a_\ell} \in \Gamma(\mathcal{E}^{(a_1\ldots a_\ell)})$，继而对应于 T^*M 上的多项式函数，见第 2.2 节。在不会引起混淆的情况下，我们将对加权张量、无权张量以及 T^*M 上的多项式函数使用相同的符号。

设 $r \in \Gamma(S^\ell(TM))$。那么 r 是度量 $g \in \boldsymbol{c}$ 的 *Killing* 张量 当且仅当

$$\nabla^g_{(a}r_{a_1\ldots a_\ell)} = 0.$$

若 r 是 $g \in \boldsymbol{c}$的 Killing 张量，则 r的无迹部分，

$$k_{a_1\ldots a_\ell} = r_{(a_1\ldots a_\ell)_0}$$

是一个共形 Killing 张量。自然会问，共形 Killing 张量何时是 $\boldsymbol{c}$中某个度量的 Killing 张量的无迹部分。论文 [13] 研究了二阶共形 Killing 张量的这一问题。沿袭该论文，我们给出以下定义。

定义 2.2. 设 $k_{a_1\ldots a_\ell} \in \Gamma(\mathcal{E}_{(a_1\ldots a_\ell)_0}[2\ell])$ $(\ell \geq 2)$ 是一个秩为 ℓ 的共形 Killing 张量，$\sigma \in \Gamma(\mathcal{E}[1])$ 是一个尺度，$g = \sigma^{-2}\boldsymbol{g}$ 是定义在 $M \setminus \mathcal{Z}(\sigma)$ 上的度量。
(a) 若 σ 是 k 的强 Killing 尺度，则 k 是 g 的 Killing 张量；(b) 若存在 r 这个 g 的 Killing 张量，使得 k 是 r 的无迹部分，则 σ 是 k 的 Killing 尺度。(c) 设 $k_a \in \Gamma(\mathcal{E}_a[2])$ 是一个共形 Killing 向量。若 k 是 g 的 Killing 向量，则 σ 是 k 的 Killing 尺度。

本文主要关注一阶共形 Killing 向量和二阶共形 Killing 张量。

3. Constants of Motion and Conformal Geometry

3.1. 运动常数。设 g 是 M 上的一个伪黎曼度量，其逆为 $g^{-1} \in \Gamma(S^2(TM))$。我们将考虑以下形式的哈密顿量

$$\mathcal{H}(q,p) = g_q^{-1}(p,p) + V(q), \tag{3.1}$$

其中 $V\colon\ M \setminus S \to \mathbb{R}$ 是一个光滑函数，称为势函数。奇异集 S 必须包含在有限个维数小于 n 的适当嵌入子流形的并集中。

若函数 $f\colon\ T^*M \to \mathbb{R}$ 满足 $\{\mathcal{H}, f\} = 0$，则称其为 $\mathcal{H}$ 的运动常数或第一积分。多项式运动常数的阶数就是其多项式次数。线性和二次运动常数分别指一阶和二阶运动常数。

多项式运动常数构成 $S(TM)$ 的一个泊松子代数，这可由莱布尼茨性质和雅可比恒等式推出。

假设 $\mathcal{H}$ 中的势函数为零，即 $\mathcal{H} = g^{-1}$。那么， $X_{\mathcal{H}}$的轨迹是底流形 $[1, §45.D]$上的测地线。令 $r \in \Gamma(S^\ell(TM))$，则有

$$\{g^{-1}, r\} = 2\nabla^{(a} r^{a_1 \dots a_\ell)}, \tag{3.2}$$

由 (2.5) 得，其中 ∇是 g的列维-奇维塔联络。这就是 $S^\ell(TM)$截面上的 Killing 算子。

命题 3.1。 设 g是 M上的伪黎曼度量。若 $r \in \Gamma(S^\ell(TM))$，则

$$\{g^{-1}, r\} = 0$$

当且仅当 r 是 g的秩为 ℓ的 ***Killing*** 张量。

当 $\mathcal{H}$ 具有非零势函数时，括号中会多出一项，

$$\{\mathcal{H}, r\} = \{g^{-1}, r\} + \{V, r\}. \tag{3.3}$$

右侧各项的阶分别为 $\ell + 1$ 和 $\ell - 1$。因此，$\{\mathcal{H}, r\} = 0$ 当且仅当 $\{g^{-1}, r\}$ 和 $\{V, r\}$ 均为零。第一个条件是 r 为 g 的 Killing 张量，第二个条件可转化为关于 Vg的 Killing 方程。因此，我们有

命题 3.2。 设 $(M, \boldsymbol{c})$ 是一个共形流形，且 $\mathcal{H}(q,p) = g^{-1} + V$对某个 $g \in \boldsymbol{c}$ 成立，并且 V 是一个在开稠密集上非零的势函数。如果 $\ell \in \mathbb{N}$ 且$r \in \Gamma(S^\ell(TM))$，那么

$$\{\mathcal{H}, r\} = 0 \tag{3.4}$$

当且仅当 r 是关于 g 和度量 Vg的秩为 ℓ 的 ***Killing*** 张量

证明。在 V 有定义且不为零的地方，我们有

$$\big\{g^{-1}, r\big\} = \{VV^{-1}g^{-1}, r\} = V\{(Vg)^{-1}, r\} + (Vg)^{-1}\{V, r\}. \tag{3.5}$$

根据 $\{,\}$的莱布尼茨法则。因此，我们得到以下等价关系，

$$\{g^{-1}+V,r\}=0 \iff \left\{g^{-1},r\right\}=0=\{V,r\} \iff \left\{g^{-1},r\right\}=0=\left\{(Vg)^{-1},r\right\}.$$

根据命题 3.1，最后一个等式等价于 r 对 g 和 Vg而言是 Killing。 □

3.2. **二次守恒量**。 对于 $\ell=2$，将讨论范围限制在形式为 (3.4) 的运动常数上过于严格，因为这要求 r 同时是 g 和 Vg的 Killing 张量。对此条件的一种自然放宽是要求 Vg 是共形 Killing 张量 $k_{ab}=r_{(ab)_0}$的 Killing 尺度，因此， Vg 的实际 Killing 张量可能与 r相差一个迹项。本节将共形 Killing 张量和 Killing 尺度与形式为 $\mathcal{H}=g^{-1}+V$的哈密顿量的二阶运动积分联系起来。注意，截面 $k_{ab}\in\Gamma(\mathcal{E}_{(ab)}[4])$具有正确的权重，升高指标后可得到无权张量场 $k^{ab}\in\Gamma(S^2(TM))$。因此，我们将升高指标，并利用命题 2.1 将 $k_{ab}\in\Gamma(\mathcal{E}_{(ab)}[4])$与 T^*M上的二阶函数联系起来。

二阶运动常数的形式为 $f(q,\ p)=r_q^2(p,\ p)+r_q^1(p)+U(q)$。展开 $\{\mathcal{H},f\}=0$并按阶分组，得到

$$\{\mathcal{H},f\}=\left\{g^{-1},r^2\right\}+\left\{g^{-1},r^1\right\}+(\left\{V,r^2\right\}+\left\{g^{-1},U\right\})+\left\{V,r^1\right\}=0$$

将二阶项和零阶项相加，得到 $\{\mathcal{H},r^1\}=\{g^{-1},r^1\}+\{V,r^1\}=0$，因此 r^1 是线性运动常数。所以我们分别考虑 r^1 和 r^2+U。因此，我们用术语二次运动常数 来指称形如$f(q,\ p)=r_q(p,\ p)+U(q)$的运动常数

定理 3.3。 设（$M,\boldsymbol{c}$）是一个共形流形，并设 $\mathcal{H}\left(q,p\right)=g_q^{-1}\left(p,p\right)+V\left(q\right)$，其中 $g\in\boldsymbol{c}$ 和 $V\in C^\infty\left(M\right)$ 满足 V 在某个开稠密集上非零。若 $k_{ab}\in\Gamma\left(\mathcal{E}_{(ab)_0}[4]\right)$，则存在 U, $T\in C^\infty(M)$ 使得

$$\{\mathcal{H},k+Tg^{-1}+U\}=0, \tag{3.6}$$

当且仅当 k 是共形 *Killing* 张量，且 g 和$\hat{}g=Vg$ 是 k的 *Killing* 尺度。

若(3.6) 成立，则 $r_{ab}=k_{ab}+T\sigma^4g_{ab}=k_{ab}+T\sigma^2\boldsymbol{g}_{ab}$ 是 g 的 *Killing* 张量，且$\hat{}$
$r_{ab}=k_{ab}+(VT-U)\hat{}\sigma^4\hat{}g_{ab}=k_{ab}+(VT-U)\hat{}\sigma^2\boldsymbol{g}_{ab}=k_{ab}+\frac{VT-U}{V}\sigma^2\boldsymbol{g}_{ab}=r_{ab}-\frac{U}{V}\sigma^4g_{ab}$

是$\hat{}g$的 *Killing* 张量。

证明。 我们首先展开括号，

$$\{\mathcal{H},k+Tg^{-1}+U\}=\{g^{-1}+V,k+Tg^{-1}+U\}=\{g^{-1},r\}+\{V,r\}+\{g^{-1},U\},$$

其中 $r=k+Tg^{-1}$。按各阶项整理可得

$$\{\mathcal{H},k+Tg^{-1}+U\}=0 \iff \{g^{-1},r\}=0=\{V,r\}+\{g^{-1},U\} \tag{3.7}$$

然后我们计算

$$\begin{aligned}\{g^{-1},r\}&=\{V(Vg)^{-1},r\}\\&=V\{\hat{g}^{-1},r\}+\hat{g}^{-1}\{V,r\}\\&=V(\{\hat{g}^{-1},r\}-\{\hat{g}^{-1},U\hat{g}^{-1}\})+\hat{g}^{-1}\{V,r\}+V\{\hat{g}^{-1},U\hat{g}^{-1}\}\end{aligned}$$

$$= V(\{\hat{g}^{-1}, r - U\hat{g}^{-1}\}) + \hat{g}^{-1}\{V, r\} + V\hat{g}^{-1}\{V^{-1}g^{-1}, U\}$$
$$= V(\{\hat{g}^{-1}, r - U\hat{g}^{-1}\}) + \hat{g}^{-1}\left(\{V, r\} + \{g^{-1}, U\}\right).$$

因此，在 t 上在 $\hat{g}$ 非奇异且 V 非零的开稠密集上，我们有 t

$$\{g^{-1}, r\} = 0 = \{V, r\} + \{g^{-1}, U\} \iff \{g^{-1}, r\} = 0 = \left\{\hat{g}^{-1}, r - U\hat{g}^{-1}\right\} \tag{3.8}$$

因此，T 和 U 的存在性意味着，对于 g 存在 Killing 张量 $r = k + Tg^{-1}$，并且对于 $\hat{g}$ 存在 $\hat{r} = r - U\hat{g}^{-1} = k + (VT - U)\hat{g}^{-1}$，所以 g 和 $\hat{g}$ 都是 Killing 尺度。

反之，如果 k 的 Killing 尺度为 g 和 $\hat{g}$，对应的 Killing 张量为 $r = k + Tg^{-1}$ 和 $\hat{r} = k + \hat{T}\hat{g}^{-1}$，那么取 $U = VT - \hat{T}$ 可得

$$\left\{g^{-1}, r\right\} = 0 = \left\{\hat{g}^{-1}, k + \hat{T}\hat{g}^{-1}\right\} = \left\{\hat{g}^{-1}, r - U\hat{g}^{-1}\right\}$$

因此，根据 (3.7) 和 (3.8)，$\{\mathcal{H}, k + Tg^{-1} + U\} = 0$。 □

在固定能量下，$\mathcal{H}$ 的轨迹 $\mathcal{H} = g^{-1} + V = E$ 经过重新参数化后是 Jacobi 度量 $g_J = (E - V)g$ 的测地线。因此，度量 Vg 可以称为零能量的 Jacobi 度量（差一个符号）。这种从 $\mathcal{H}$ 到哈密顿量 $\hat{\mathcal{H}} = (Vg)^{-1}$ 的变换称为 *Stäckel* 变换 [5]。

推论 3.4. 设 $(M, \boldsymbol{c})$ 为一个共形流形，$\sigma \in \Gamma(\mathcal{E}[1])$ 为一个尺度因子，V 为一个势函数，且 $\mathcal{H} = g^{-1} + V$，其中 $g = \sigma^{-2}\boldsymbol{g}$。那么，对于 $\mathcal{H}$ 的二次运动常数，模去常值函数和 $\mathcal{H}$ 的常数倍后所得空间，与满足 g 和 Vg 均为 *Killing* 尺度的秩二共形 *Killing* 张量空间之间，存在一个 $\mathbb{R}$-线性同构。

证明。设 $f(q, p) = r_q(p, p) + U(q)$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个运动常数。$\{\mathcal{H}, f\}$ 中的三阶项为 $\{g^{-1}, r\}$，因此 r 是一个 Killing 张量。于是 $k_{ab} = r_{(ab)_0}$ 是一个共形 Killing 张量，并且存在函数 T, U，使得 $k + Tg^{-1} + U$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个运动常数。我们将这个从运动常数到共形 Killing 张量的线性映射称为 Φ。

在定理 3.3 的证明中，我们证明了，如果 $r = k + Tg^{-1}$ 和 $\hat{r} = k + \hat{T}\hat{g}^{-1}$ 是 $\mathcal{H}$ 的二次运动常数。这表明 Φ 是满射。

Φ 的核由形如 $Tg^{-1} + U$ 的运动常数组成。于是

$$0 = \left\{\mathcal{H}, Tg^{-1} + U\right\} = g^{-1}\left\{g^{-1}, T\right\} + (T\left\{V, g^{-1}\right\} + \left\{g^{-1}, U\right\}).$$

由于 $\{g^{-1}, T\} = 0 \iff d_aT = 0$ 和 M 是连通的，我们得出 $T = C_1 \in \mathbb{R}$。这给出

$$0 = \left\{\mathcal{H}, Tg^{-1} + U\right\} = \{\mathcal{H}, T\mathcal{H} + (U - TV)\} = \{\mathcal{H}, (U - TV)\} = \left\{g^{-1}, (U - TV)\right\}$$

同理，我们得出 $U - TV = C_2 \in \mathbb{R}$。因此，

$$Tg^{-1} + U = T\mathcal{H} + \tilde{U} = C_1\mathcal{H} + C_2$$

因此，Φ 的核由常值函数和 $\mathcal{H}$ 张成。 □

4. Tractors

这里我们给出共形流形 $(M,\ \boldsymbol{c})$ 的标准共形 tractor 丛的构造。参见 [2,7,39]。

4.1. 共形托克。 我们首先需要曲率的共形分解。设 $g\in\boldsymbol{c}$，并令 $R_{ab}{}^{c}{}_{d}$ 为其黎曼曲率张量，定义为 $R_{ab}{}^{c}{}_{d}v^{d}=2\nabla_{[a}\nabla_{b]}v^{c}$。该曲率张量具有对称性 $R_{abcd}=-R_{bacd}=-R_{abdc}$，且满足 Bianchi恒等式$R_{[abc]d}=0$。我们可以将 R 分解为迹部分和无迹部分,

$$R_{abcd}=W_{abcd}+2\boldsymbol{g}_{c[a}\mathsf{P}_{b]d}+2\boldsymbol{g}_{d[b}\mathsf{P}_{a]c}.$$

由于我们使用共形度量降低了 c指标，上述恒等式两边都是权重为二的张量。无迹部分 W_{abcd} 称为*Weyl*曲率，它在共形变换下不变，并且具有与 R_{abcd} 相同的对称性,此外还满足 $W_{ab}{}^{a}{}_{d}=0$。张量 P_{bd} 称为共形*Schouten*曲率，且具有对称性。我们记 $\mathsf{J}=\mathsf{P}_{b}{}^{b}$，并有以下恒等式

$$\mathrm{Ric}_{bd}=R_{ab}{}^{a}{}_{d}=(n-2)\mathsf{P}_{bd}+\mathsf{J}\boldsymbol{g}_{bd}\quad\text{and}\quad\mathrm{Sc}=R_{ab}{}^{a}{}_{d}g^{bd}=2(n-1)\sigma^{2}\mathsf{J}.$$

在度量 $\hat{}g\ =\ \Omega^{2}g$ 发生变化时，Weyl曲率保持不变，而 Schouten 按如下方式变换

$$\hat{\mathsf{P}}_{ab}=\mathsf{P}_{ab}-\nabla_{a}\Upsilon_{b}+\Upsilon_{a}\Upsilon_{b}-\tfrac{1}{2}g_{ab}\Upsilon_{c}\Upsilon^{c}.$$

考虑共形1密度丛的喷射丛 $\mathcal{J}^{k}(\mathcal{E}[1])$。通过泰勒级数，我们可以得到所有 $\mathcal{J}^{k}(\mathcal{E}[1])$ 的喷射正合列。 $\mathcal{J}^{1}(\mathcal{E}[1])$ 的正合列为

$$0\longrightarrow\mathcal{E}_{a}[1]\longrightarrow\mathcal{J}^{1}(\mathcal{E}[1])\longrightarrow\mathcal{E}[1]\longrightarrow 0. \tag{4.1}$$

我们写作 $\mathcal{J}^{1}(\mathcal{E}[1])=\mathcal{E}[1]\dot{+}\mathcal{E}_{a}[1]$，以反映上述正合列给出的 $\mathcal{J}^{1}(\mathcal{E}[1])$ 的滤过。如第 2.4 节所述，选取度量 $g\in\boldsymbol{c}$ 可在 $\mathcal{E}[1]$ 上给出一个联络。 $\mathcal{E}[1]$ 上的联络等价于上述正合列的一个分裂，其中 $j^{1}_{q}(\sigma)\ \in\mathcal{J}^{1}(\mathcal{E}[1])_{q}$ 映射到 $\nabla_{a}\sigma\in\mathcal{E}_{a}[1]_{q}$。 $\mathcal{J}^{2}(\mathcal{E}[1])$ 处的正合列为

$$0\longrightarrow\mathcal{E}_{(ab)}[1]\longrightarrow\mathcal{J}^{2}(\mathcal{E}[1])\longrightarrow\mathcal{J}^{1}(\mathcal{E}[1])\longrightarrow 0 \tag{4.2}$$

共形度量给出了 $\mathcal{E}_{(ab)}[1]$ 的不变量分解，将其分为迹部分和无迹部分， $\mathcal{E}_{(ab)}[1]=\mathcal{E}_{(ab)_{0}}[1]\oplus\mathcal{E}[-1]\otimes\boldsymbol{g}_{ab}$。随后，共形余托克丛 定义为商丛

$$\mathcal{E}_{A}=\mathcal{T}^{*}=\frac{\mathcal{J}^{2}(\mathcal{E}[1])}{\mathcal{E}_{(ab)_{0}}[1]}.$$

根据拖拉机丛的这一定义，可以立即得到一个二阶算子：由二阶喷射算子 $j^{2}(q\mapsto\sigma)=(q\mapsto j^{2}_{q}(\sigma))$ 与到上述商空间的投影复合而成。拖拉机丛的定义由一个正合列刻画

$$0\longrightarrow\mathcal{E}_{(ab)_{0}}[1]\longrightarrow\mathcal{J}^{2}(\mathcal{E}[1])\longrightarrow\mathcal{E}_{A}\longrightarrow 0,$$

其左侧由近爱因斯坦算子不变地分裂,

$$AE(\sigma)_{ab}=\nabla_{(a}\nabla_{b)_{0}}\sigma+\mathsf{P}_{(ab)_{0}}\sigma.$$

这将 $\mathcal{E}_A$ 识别为 $\mathcal{J}^2(\mathcal{E}[1])$ 中 AE 的核，见 [2]。对正合列 (4.2) 取商可得 tractor正合序列，

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}[-1] \longrightarrow \mathcal{E}_A \longrightarrow \mathcal{J}^1(\mathcal{E}[1]) \longrightarrow 0$$

这意味着不变滤过 $\mathcal{E}_A = \mathcal{J}^1(\mathcal{E}[1]) + \mathcal{E}[-1] = \mathcal{E}[1] + \mathcal{E}_a[1] + \mathcal{E}[-1]$。选择一个度量 $g \in \boldsymbol{c}$ 后，会诱导向量丛的同构 $\mathcal{E}_A \cong \mathcal{E}[1] \oplus \mathcal{E}_a[1] \oplus \mathcal{E}[-1]$，其形式为

$$j^2_q(\sigma) \mapsto (\sigma, \nabla_a\sigma, -\frac{1}{n}(\Delta\sigma + \mathsf{J}\sigma)). \tag{4.3}$$

在尺度 $g \in \boldsymbol{c}$下工作时，我们通常根据其分量将一个 tractor $U_A \in \Gamma(\mathcal{E}_A)$ 写成 $U_A \overset{g}{=} (\sigma, \mu_a, \rho)$。在标度变换 $\hat{}g = \Omega^2 g$ 下，分量变换为

$$U_A \overset{g}{=} (\sigma, \mu_a, \rho) \overset{\hat{g}}{=} (\sigma, \mu_a + \sigma\Upsilon_a, \rho - \Upsilon^b\mu_b - \tfrac{1}{2}\sigma\Upsilon^b\Upsilon_b), \tag{4.4}$$

其中 $\Upsilon_a = \Omega^{-1}\nabla_a\Omega$。存在一个典范嵌入 $\mathcal{E}[-1] \to \mathcal{E}_A$，我们用典范tractor $X_A \in \Gamma(\mathcal{E}_A[1])$ 表示它；在任意尺度下，它都表示为 $X_A = (0, 0, 1)$。此外，还存在一个典范投影 $\mathcal{E}_A \to \mathcal{J}^1(\mathcal{E}[1]) \to \mathcal{E}[1]$，它由一个余tractor $X^A \in \Gamma(\mathcal{E}^A[1])$ 表示，并且有 $X^A U_A = \sigma$。

给定一个度量 $g \in \boldsymbol{c}$，还有另外两个投影算子，

$$Z^A{}_a U_A = \mu_a \quad \text{and} \quad Y^A U_A = \rho$$

它们不是不变的。这些投影算子来自依赖标度的分裂 (4.3)，我们可以从 (4.4) 读出变换律，

$$\hat{X}^A = X^A, \quad \hat{Z}^A{}_a = Z^A{}_a + \Upsilon_a X^A, \quad \hat{Y}^A = Y^A - \Upsilon^a Z^A{}_a - \tfrac{1}{2}\Upsilon_a\Upsilon^a X^A.$$

拖拉机丛具有一个无权且不变的非退化双线性形式，

$$h^{AB} = X^A Y^B + Y^A X^B + Z^{Aa} Z^B{}_a$$

称为*tractor*度量。tractor度量使我们能够升降 tractor 指标，从而将投影算子 $X^A, Y^A, Z^A{}_a$ 与相应的嵌入映射 $X_A, Y_A\ Z_A{}^a$联系起来。图 1 展示了所有投影算子和分裂。

拖拉机丛具有一种自然的不变微分演算，由共形不变的拖拉机联络给出，其定义为

$$\nabla_a U_A = \nabla_a(\sigma, \mu_b, \rho) = (\nabla_a\sigma - \mu_a, \nabla_a\mu_b + \mathsf{P}_{ab}\sigma + \boldsymbol{g}_{ab}\rho, \nabla_a\rho - \mathsf{P}_a{}^b\mu_b),$$

或者等价地，用投影算子表示为，

$$\nabla_a X^A = Z^A{}_a, \quad \nabla_a Z^A{}_b = -\mathsf{P}_{ab}X^A - \boldsymbol{g}_{ab}Y^A, \quad \nabla_a Y^A = \mathsf{P}_a{}^b Z^A{}_b, \tag{4.5}$$

其中，在（4.5）中，所有联络都是拖拉机联络与共形类中$\mathcal{E}_a$和 $\mathcal{E}[w]$上的联络配对而成。tractor度量及其逆度量均为平行的，因此（4.5）中的公式在升高指标后仍然成立。

tractor 丛及其相关微积分特别适用于不变偏微分方程的延拓。最基本的例子是共形不变几乎爱因斯坦方程 [2]

$$AE(\sigma)_{ab} = \nabla_{(a}\nabla_{b)_0}\sigma + \mathsf{P}_{(ab)_0}\sigma = 0,$$

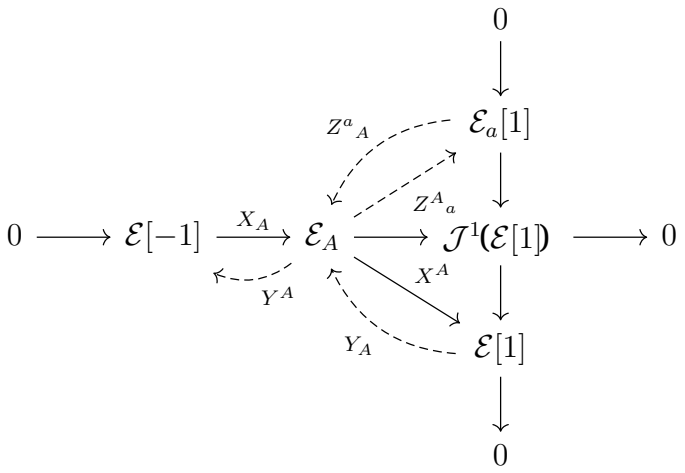


FIGURE 1. 拖拉机投影算子

对于 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{E}[1])$。近似爱因斯坦方程的解与平行的无权标准托拉一一对应； $I_A \in \Gamma(\mathcal{E}_A)$ 满足 $\nabla_a I_A = 0$。相应的解为 $\sigma = X^A I_A$ ，而从解到 tractor 的逆运算由二阶 tractor 算子 D、 $D\colon \Gamma(\mathcal{E}[1]) \to \Gamma(\mathcal{E}_A)$ 给出，其在一个尺度下的表达式为

$$D_A\sigma = Y_A\sigma + Z^a{}_A\nabla_a\sigma - X_A\frac{\Delta\sigma + \mathsf{J}\sigma}{n}, \tag{4.6}$$

不难检验其为共形不变的。事实上，这是本节前面定义的不变算子，由二阶喷射算子 $j^2\colon \Gamma(\mathcal{E}[1]) \to \Gamma(J^2(\mathcal{E}[1]))$ 与投影到拖拉机丛的投影算子复合而成。

设 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{E}[1])$ 为一个尺度密度。那么，拖拉机 $I_A = D_A\sigma$ 尺度 ***tractor*** σ 被称为 σ 的尺度 tractor。在稠密开集 $M\backslash\mathcal{Z}(\sigma)$ 上，使用由 $g = \sigma^{-2}\boldsymbol{g}$ 诱导的分裂，我们有

$$I_A = (\sigma, 0, -\tfrac{1}{n}(\mathsf{J}^g\sigma)).$$

˜拖拉机 D 由不变的非归一化拖拉机 D 算子 [2] 诱导，该算子适用于任意带权共形拖拉机丛，具有任意数量的 tractor 指标和任意共形权重，

$$\tilde{D}_A V = (n+2w-2)wY_A V + (n+2w-2)Z_A{}^a\nabla_a V - X_A(\Delta V + w\mathsf{J}V),$$

其中我们省略了 V 的所有 tractor 指标。归一化 tractor D 随后定义为：对于任意 $w \notin \{0, \frac{2-n}{2}\}$， $D = ((n+2w-2)w)^{-1}\tilde{D}$ ；当 $w = 0$ 时，则定义为 $D = (n+2w-2)^{-1}\tilde{D}$。我们只会用到 tractor D (4.6) 和 tractor $D\colon \Gamma(\mathcal{E}_A) \to \Gamma(\mathcal{E}_{AB}[-1])$ by

$$D_A U_B = Z_A{}^a\nabla_a I_B - \frac{1}{n-2}X_A\Delta I_B.$$

将此 tractor D 应用于尺度 tractor $I_A = D_A\sigma$，并采用由 $g = \sigma^{-2}\boldsymbol{g}$ 诱导的分裂时，我们有

$$D_A I_B = Z_A{}^a Z_B{}^b \mathsf{P}_{(ab)_0} - \frac{1}{n}\nabla_a \mathsf{J} Z_A{}^a X_B - \frac{1}{n}\nabla_b \mathsf{J} Z_B{}^b X_A + \frac{1}{n-2}\left(\frac{1}{n}\Delta \mathsf{J} + \mathsf{P}^{(ab)_0}\mathsf{P}_{(ab)_0}\right)$$

在考虑具有斜对称性的拖拉机丛时，定义新的投影算子会很有用。我们令

$$\mathbb{X}^{AB}{}_b = X^{[A}Z^{B]}{}_b, \quad \mathbb{W}^{AB} = X^{[A}Y^{B]}, \quad \mathbb{Z}^{AB}{}_{ab} = Z^{[A}{}_a Z^{B]}{}_b, \quad \mathbb{Y}^{AB}{}_b = Y^{[A}Z^{B]}{}_b.$$

tractor $\mathbb{X}$ 是规范的，也就是说，它不依赖于我们所计算的尺度，因为这些对称性消除了 Z的变换。我们不需要一般的变换律，尽管推导它们很简单。相反，我们将需要作用于这些投影算子的联络，

$$\nabla_a \mathbb{X}^{AB}{}_b = \mathbb{Z}^{AB}{}_{ab} - \boldsymbol{g}_{ab}\mathbb{W}^{AB}, \quad \nabla_a \mathbb{W}^{AB} = \mathsf{P}_a{}^b \mathbb{X}^{AB}{}_b - \mathbb{Y}^{AB}{}_a, \tag{4.7}$$

$$\nabla_a \mathbb{Z}^{AB}{}_{bc} = 2\boldsymbol{g}_{a[c}\mathbb{Y}^{AB}{}_{b]} + 2\mathsf{P}_{a[c}\mathbb{X}^{AB}{}_{b]}, \quad \nabla_a \mathbb{Y}^{AB}{}_b = \mathsf{P}_{ab}\mathbb{W}^{AB} - \mathsf{P}_a{}^c \mathbb{Z}^{AB}{}_{bc}$$

4.2. BGG 机制。 抛物几何中的 Bernstein-Gelfand-Gelfand（BGG）序列 [6, 40] 是与任意不可约 tractor 丛相关联的微分算子不变序列。在共形几何的语境中，拖拉机丛是标准 tractor 丛的某个张量幂的一个 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(p+1,\ q+1)$ 不变子丛，并配备符号为 $(p+1,\ q+1)$ 的双线性形式 h_{AB}。特别地，不可约 tractor 丛是具有由杨图给出的对称性的无迹 tractor。

与拖拉机丛 $\mathcal{V}$ 相关联的是扭曲 *de Rham* 序列，

$$0 \longrightarrow \mathcal{V} \xrightarrow{d^\nabla} T^*M \otimes \mathcal{V} \xrightarrow{d^\nabla} \Lambda^2 T^*M \otimes \mathcal{V} \xrightarrow{d^\nabla} \dots,$$

其中 $d^\nabla(V_{a_1\dots a_k\ A}) = \nabla_{[a}(V_{a_1\dots a_k]\ A_1\dots A_j})$，其中 $A_1 \dots A_j$是 $\mathcal{V}$的 tractor 指标，而 ∇ 是与 M上的任意无挠仿射联络配对的 tractor 联络。当 tractor 联络是平坦的时，扭曲 de Rham 序列是一个复形。Kostant 余微分是一个沿相反方向作用的代数算子，

$$0 \xleftarrow{\partial^*} \mathcal{V} \xleftarrow{\partial^*} T^*M \otimes \mathcal{V} \xleftarrow{\partial^*} \Lambda^2 T^*M \otimes \mathcal{V} \xleftarrow{\partial^*} \dots.$$

对于共形 tractor 丛，我们有

$$\partial^*(V_{a_1\dots a_k\ A_1\dots A_j}) = \sum_{i=1}^{j} 2\mathbb{X}_{A_i}{}^{Ba_1} V_{a_1\dots a_k A_1\dots A_{i-1} B A_{i+1}\dots A_j},$$

其中 $\mathbb{X}_{AB}{}^b = X_{[A}Z_{B]}{}^b$ 是一个不变丛嵌入，$\mathbb{X}\colon\ T^*M \hookrightarrow \mathcal{E}_{[AB]_0}$ 同调丛定义为 $H_k(\mathcal{V}) = \ker(\partial^*)/\mathrm{im}(\partial^*)$，其中二者都是 $\Lambda^k T^*M \otimes \mathcal{V}$ 的子丛。我们将投影到同调的投影记为 $\Pi\colon \ker(\partial^*) \to H_k(\mathcal{V})$，并注意到对于 $k = 0$，这给出了一个映射 $\Pi\colon\ \mathcal{V} \to H_0(\mathcal{V})$。对于不可约抛物几何，包括共形几何，同调丛 $H_k(\mathcal{V})$ 是不可约的 $\mathfrak{g}_0$ 丛。对于共形几何，$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{co}(P,\ Q) = \mathfrak{so}(P,\ Q) \oplus \mathbb{R}$，因此同调丛是无迹不可约加权张量丛。

Bernstein-Gelfand-Gelfand 机制给出了两类重要的算子。第一类是 BGG 分裂算子。

定理 *4.1*（[40] 定理 *2.5* 和引理 *2.7*）。存在不变分裂算子 $L\colon\ \Gamma(H_k(\mathcal{V})) \to \Gamma(\ker(\partial^*))$，使得 $\Pi\circ L = \mathrm{id}_{H_k(\mathcal{V})}$ 且 $\partial^*\circ d^\nabla\circ L = 0$。子空间 $\mathrm{im}(L) \subset \Gamma(\Lambda^k(T^*M)\otimes\mathcal{V})$ 由满足以下条件的截面组成：$s\ \partial^*(s) = 0$ 且 $\partial^*\circ d^\nabla(s) = 0$。

上述条件足以计算分裂算子。取 $\mathcal{V} = \mathcal{E}_A$ 标准共形余tractor 丛。我们可以在一个分裂中计算 ∂^* 对 $\mathcal{E}_{aA}$ 的作用，

$$(4.8)\ \partial^*(\sigma_a Y_A + \mu_{ab}Z^b{}_A + \rho_a X_A) = 2\mathbb{X}_A{}^{Ba}(\sigma_a Y_B + \mu_{ab}Z^b_B + \rho_a X_B) = -\sigma_b Z_A{}^b + \mu_a{}^a X_A.$$

因此，设 $\sigma \in \Gamma(H_0(\mathcal{E}_A)) = \mathcal{E}[1]$，且 $L(\sigma)_A = (\sigma,\ \mu_a,\ \rho)$。那么 $d^\nabla\circ L(\sigma) = \nabla_a(\sigma,\ \mu_b,\ \rho) = (\nabla_a\sigma - \mu_a,\ \nabla_a\mu_b + \sigma\mathrm{P}_{ab} + \rho\boldsymbol{g}_{ab},\ \nabla_a\rho - \mathrm{P}_a{}^b\mu_b)$。因此，条件 $\partial^*\circ d^\nabla\circ L = 0$ 变为 $\nabla_a\sigma - \mu_a = 0$ 且 $\nabla_a\mu^a + \mathrm{J}\sigma + n\rho = 0$。于是，$\mu_a = \nabla_a\sigma$ 且 $\rho = -\frac{\Delta+\mathrm{J}}{n}\sigma$。这表明，第一个分裂算子示例是（归一化的）tractor D 算子（4.6）。

分裂算子引出了第二族算子，即 BGG 微分算子 $\mathscr{D}_k := \Pi\circ d^\nabla\circ L\colon\ \Gamma(H_k(\mathcal{V})) \to \Gamma(H_{k+1}(\mathcal{V}))$，以及 BGG 序列，

$$0 \longrightarrow \Gamma(H_0(\mathcal{V})) \xrightarrow{\mathscr{D}_0} \Gamma(H_1(\mathcal{V})) \xrightarrow{\mathscr{D}_1} \Gamma(H_2(\mathcal{V})) \xrightarrow{\mathscr{D}_2} \cdots$$

在平坦情形下，BGG 序列是一个复形。一般而言，下图中的方块并不交换，但在平坦情形下它们确实交换。

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Gamma(\mathcal{V}) & \xrightarrow{d^\nabla} & \Gamma\big(\Lambda^1(T^*M)\otimes\mathcal{V}\big) & \xrightarrow{d^\nabla} & \Gamma\big(\Lambda^2(T^*M)\otimes\mathcal{V}\big) & \xrightarrow{d^\nabla} & \cdots \\
 & & \uparrow L_0 & & \uparrow L_1 & & \uparrow L_2 & & \\
0 & \longrightarrow & \Gamma\big(H_0(\mathcal{V})\big) & \xrightarrow{\mathscr{D}_0} & \Gamma\big(H_1(\mathcal{V})\big) & \xrightarrow{\mathscr{D}_1} & \Gamma\big(H_2(\mathcal{V})\big) & \xrightarrow{\mathscr{D}_2} & \cdots
\end{array}$$

定理 4.2. 设 $(M, \boldsymbol{c})$ 是一个共形平坦流形，且 $\mathcal{V}$ 是一个不可约 *tractor* 丛。那么，k 阶 *BGG* 算子 $\mathscr{D}_k\colon\ \Gamma(H_k(\mathcal{V})) \to \Gamma(H_{k+1}(\mathcal{V}))$ 的核中的张量，与属于 $\Lambda^k(T^*M)\otimes\mathcal{V}$ 且同时位于 ∂^* 和 d^∇ 的核中的截面一一对应。

特别地，对于 $k = 0$，$\mathscr{D}_0 s = 0$ 的解与 $\mathcal{V}$ 中的平行 *tractor* 一一对应。

对于 $\mathcal{V} = \mathcal{E}_A$，根据 (4.8)，$\partial^*$ 的像可确定为由 Z 和 X 张成的子空间。因此，投影到同调空间的投影算子为 $\sigma Y_A + \mu_a Z^a{}_A + \rho X_A \mapsto \sigma$，等价地写作 $U_A \mapsto X^A U_A$。更一般地，对于具有某些对称性的不可约 tractor 丛，投影 $\Pi\colon\ \mathcal{V} \to H_0(\mathcal{V})$ 的求法是：先尽可能多地应用符合这些对称性的 X 投影算子，再对剩余指标应用 Z 投影算子。对于 tractor $V \in \Gamma(\mathcal{V})$，张量 $\Pi(V)$ 称为 V 的顶层槽，该投影总是共形不变的。下面的引理常用于将张量方程转化为 tractor 方程。

引理 4.3。设 $\mathcal{V}$ 是一个不可约 *tractor* 丛，且 $V \in \Gamma(\mathcal{V})$ 是平行的。若 $\Pi(V) = 0$，则 $V = 0$。

证明。 根据定理 4.1， $V = L \circ \Pi\,(V) = 0$，因为 $d^{\nabla}\,(V) = 0$ 且 $\partial^{*}\,(V) = 0$。 □

对于任意特定的 tractor 丛，都可以通过直接计算来证明上述引理：对其求导，并证明 V 的所有槽位都消失。例如，若 $V_A \in \Gamma(\mathcal{E}_A)$ 是平行的且 $X^A V_A = 0$，那么在任意尺度下，

$$\nabla_a(X^A V_A), = Z^A{}_a V_A = 0 \implies \nabla_b(Z^A{}_a V_A) = -\mathsf{P}_{ab} X^A V_A - \boldsymbol{g}_{ab} Y^A V_A = -\boldsymbol{g}_{ab} Y^A V_A = 0$$

因此 $X^A V_A = 0$、 $Z^A{}_a V_A = 0$ 和 $Y^A V_A = 0$，所以 $V = 0$。随着 tractor 指标数量增加，计算会变得更加繁琐，因此 BGG 机制提供了一条便捷的途径。

除此之外，本文确实关注许多 BGG 算子。我们主要关注各种 tractor 丛上的 $\mathscr{D}_0$。我们将 $\mathscr{D}_0$ 称为与 $\mathcal{V}$ 相关联的 ***BGG*** 算子。

共形 Killing 算子 (2.8) 对所有秩 ℓ 都是一个 BGG 算子。秩一共形 Killing 向量算子是反对称 tractor 丛（也称为伴随 tractor 丛）的 BGG 算子， $\mathcal{A} = \mathcal{E}_{[AB]}$ ； 而秩二共形 Killing 算子是由具有曲率对称性的四阶无迹 tractor 组成的 tractor 丛的 BGG 算子，

$$\mathcal{W} = \{W \in \mathcal{E}_{ABCD} : W_{ABCD} = -W_{BACD} = -W_{ABDC},\ W_{AB}{}^{A}{}_{D} = 0,\ W_{[ABC]D} = 0\},$$

由无迹杨图 $_0(\mathcal{E}_A)$ 表示。将定理 4.2 应用于这些拖拉机丛，可得如下结果，

定理 4.4。 设$(M, \boldsymbol{c})$ 是共形平坦的。以下两者之间存在一一对应关系：

(a) 共形 ***Killing*** 向量 $k_a \in \Gamma(\mathcal{E}_a[2])$，(b) 平行反对称共形 ***tractor*** K_{AB}。

以下两者之间存在一一对应关系：

(a) 秩为2 的共形 ***Killing*** 张量 $k_{ab} \in \Gamma(\mathcal{E}_{(ab)_0}[4])$，(b) 具有 ***Weyl*** 张量对称性的平行共形 ***tractor*** W_{ABCD} 。

tractor W_{ABCD} 称为 k_{ab} 的完全延拓 。

映射 (b)→(a) 通过取顶层槽给出，即 $k_b = X^A Z^B{}_b K_{AB}$ 和$k_{bd} = X^A Z^B{}_b X^C Z^D{}_d W_{ABCD}$

分裂算子 L （给出映射 (a)→(b)）则较难构造。对于秩一共形 Killing 张量，我们应用于标准 tractor 丛的直接方法仍相当简单；然而，将此方法用于二阶张量则要困难得多。在共形平坦流形上，秩一和秩二共形 Killing 张量的分裂算子已在 [13] 中以不变方式推导出来。在该论文中，作者又在 [11], 中扩展了相关工作，推导出共形 Killing 张量的完全延拓与尺度 tractor 之间的代数条件，这些条件刻画了 Killing 尺度，对我们当前的应用非常重要。

这些论文的结果总结如下。

4.3. **Killing 张量的延拓**。我们将用到来自 [13]和 [11]的以下结果。第一条命题也可见于 [14]

命题 4.5。 设 $I_A = D_A\sigma$ 为平行尺度 *tractor*。考虑伪黎曼流形 $(M \setminus \mathcal{Z}(\sigma)\ g)$，其中 $g = \sigma^{-2}\boldsymbol{g}$。在 $M \setminus \mathcal{Z}(\sigma)$ 上的射影拖拉机丛与 $M \setminus \mathcal{Z}(\sigma)$上垂直于 I_A 的共形 *tractor* 丛子丛之间，存在保持联络的同构。射影丛上的射影投影算子与 $I^\perp$ 上的投影算子 X^A 和 $Z^A{}_a$ 一致。

定理 4.6 ([13] 定理 4.18, [11] 对零 I)。 设 $(M, \boldsymbol{c})$ 为共形平坦的，并设 $I_A = D_A\sigma$ 为平行尺度 *tractor*。以下两者之间存在一一对应：
(a) 对于度量 $g = \sigma^{-2}\boldsymbol{g}$ 为 *Killing* 的截面 $k_a \in \Gamma(\mathcal{E}_a[2])$，以及(b) 满足 $I^A K_{AB} = 0$ 的平行反对称共形 *tractor* K_{AB}。
以下两者之间存在一一对应关系：
(a) 截面 $r_{bd} \in \Gamma(\mathcal{E}_{(bd)}[4])$ 对于度量 $g = \sigma^{-2}\boldsymbol{g}$ 是 *Killing* 的，以及(b) 具有黎曼曲率对称性的平行共形 *tractor* R_{ABCD}，满足 $I^A R_{ABCD} = 0$。

在本文后续部分，我们将需要以下命题，该命题表明，平行 tractor R_{ABCD} 与爱因斯坦尺度无关。

命题4.7。 设$(M, \boldsymbol{c})$ 是共形平坦的，且 $I_A = D_A\sigma$ 和 $J_A = D_A\tau$ 是平行尺度 *tractor*。设 R_{ABCD} 是具有曲率对称性的平行 *tractor*，满足 $I^A R_{ABCD} = 0$。设 $r_{bd} = X^A Z^B{}_b X^C Z^D{}_d R_{ABCD}$，并假设 r_{bd} 是度量 $\tau^{-2}\boldsymbol{g}$的 *Killing* 张量。那么 $J^A R_{ABCD} = 0$。

证明。 根据定理 4.6，存在一个平行 tractor $\hat{}\, R_{ABCD}$，其满足平行，$J^A \hat{}R_{ABCD} =$0 且 $X^A Z^B{}_b X^C Z^D{}_d \hat{}R_{ABCD} = r_{bd}$。因此 $X^A Z^B{}_b X^C Z^D{}_d(R_{ABCD} - \hat{}R_{ABCD}) = 0$。具有曲率对称性的共形 tractor 丛分解为

$$\square\!\square(\mathcal{E}_A) = \square\!\square_0(\mathcal{E}_A) \oplus \square\square_0(\mathcal{E}_A) \oplus \mathcal{E}. \tag{4.9}$$

投影算子 $X^A Z^B{}_b X^C Z^D{}_d$ 直接提取无迹部分的顶层槽。因此，根据引理 4.3， $R - R$ 在第一个直和项上的投影为零。第二个直和项的顶层槽由下式给出

$$X^A X^C h^{BD}(R - \hat{R})_{ABCD} = X^A Z^B{}_b X^C Z^D_d g^{bd}(R - \hat{R})_{ABCD} = r_b{}^b - r_b{}^b = 0.$$

因此，根据引理 4.3， $R - R$ 在（4.9）的第二个直和项上的投影为零。最后一个直和项由 tractor $(h \owedge h)_{ABCD} = 4h_{A[C}h_{D]B}$张成。因此，$R_{ABCD} - \hat{}R_{ABCD} = \lambda h_{A[C}h_{D]B}$。然而，由于 $I^A R_{ABCD} = 0 = J^A \hat{}R_{ABCD}$,

$$0 = I^A J^B \left(R_{ABCD} - \hat{R}_{ABCD}\right) = \lambda I^A J^B h_{A[C}h_{D]B} = \lambda I_{[C}J_{D]}.$$

因此，要么 I 与 J 成比例，结论显然成立；要么 $\lambda = 0$，于是 $R = R$和 $J^A R_{ABCD} = 0$。 □

Killing 向量的类似结果显而易见，因为 $\Lambda^2(\mathcal{E}_A)$ 已经是一个不可约 tractor 丛，所以 K_{AB} 由其顶层槽 $k_b = X^A Z^B{}_b K_{AB}$决定。

我们将 tractor K_{AB} 和 R_{ABCD} 称为完全延拓，这与共形 Killing 张量的延拓类似。

定理4.8 ([13] 定理1。3, [11] 对于零 I)。 设$(M, \boldsymbol{c})$ 是共形平坦的，并且令 k_{ab} 为一个共形 ***Killing*** 张量。令 W_{ABCD} 为 k_{ab}的完全延拓。则以下两者之间存在一一对应关系：

(a) 尺度因子 σ，使得度量 $g_{ab} = \sigma^{-2}\boldsymbol{g}_{ab}$ 是爱因斯坦的，且 k_{ab} 是关于 g_{ab}的 ***Killing*** 张量的无迹部分；满足以下条件的平行 ***tractor*** I_C：

(b)

$$I^A W_{AB[CD} I_{E]} = 0. \tag{4.10}$$

(c) 满足以下条件的平行 ***tractor*** I_A：存在一个平行 R_{ABCD}，其具有黎曼曲率的对称性，并满足

$$I^A R_{ABCD} = 0 \quad and \quad W_{ABCD} = \text{trace-free}(R)_{ABCD} \tag{4.11}$$

在 [11]中证明了向非爱因斯坦尺度的推广。若尺度 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{E}[1])$ 是 k_{ab} 的局部 ***Killing*** 尺度，则对于所有 $q \in M \setminus \mathcal{Z}(\sigma)$，都存在一个包含 U 的开邻域q，使得 $g = \sigma^{-2}\boldsymbol{g}$ 在其上是 k_{ab}的 Killing 尺度。

定理 4.9。 设$(M, \boldsymbol{c})$ 共形平坦。设 k_{ab} 是共形 ***Killing*** 张量。设 W_{ABCD} 是 k_{ab} 的完全延拓。设 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{E}[1])$，并设 $g_{ab} = \sigma^{-2}\boldsymbol{g}_{ab}$ 在 $M \setminus \mathcal{Z}(\sigma)$ 上。那么，σ 是 k_{ab} 的局部 ***Killing*** 尺度，当且仅当 $I_A = D_A\sigma$ 满足

$$3I^A X^B Z^C{}_c Z^D{}_d X^E W_{AB[CD} I_{E]} = \sigma X^B Z^C{}_c Z^D{}_d X^E W_{AB[CD} D_{E]} I^A, \tag{4.12}$$

根据定理 3.3 中的刻画，我们将关注在多个 Killing 尺度下均为 Killing 张量的共形 Killing 张量。我们将经常使用上述定理来确定哪些尺度是 Killing 尺度。一般方法如下。从一个爱因斯坦尺度 σ 开始，它具有平行尺度 tractor $I_A = D_A\sigma$。对于 σ，Killing 张量对应于具有曲率对称性且与 I 正交的平行 tractor R_{ABCD}。给定这样的 R，取其无迹部分，

$$W_{ABCD} = R_{ABCD} - (h \owedge P)_{ABCD} = R_{ABCD} - h_{AC}P_{BD} - h_{BD}P_{AC} + h_{AD}P_{BC} + h_{BC}P_{AD}, \tag{4.13}$$

其中

$$P_{BD} = \frac{1}{n}\left(R_{AB}{}^{A}{}_{D} - \frac{1}{2(n+1)} R_{AC}{}^{AC} h_{BD}\right).$$

然后使用定理 4.8 或定理 4.9 来检验另一个尺度是否为 W 的 Killing 尺度。

特别地，如果第二个尺度是爱因斯坦的，对应于平行拖拉机 J_A，那么下面的结果表明我们不需要计算 W。

定理4.10。 令 $(M, \boldsymbol{c})$ 为共形平坦，令 $J_A = D_A\tau$ 为平行拖拉机，并令 R_{ABCD} 为具有黎曼曲率对称性的平行拖拉机。假设

$$J^A R_{AB[CD} J_{E]} = 0.$$

那么，τ 是 $k = \text{top}(W)$的 ***Killing*** 尺度，其中 $W =$ 无迹(R)。

证明。 根据（4.13），我们有 $W =$无迹(R)。因此

$$J^A W_{ABCD} = J^A R_{ABCD} - 2J^A P_{A[C} h_{D]B} - 2J_{[C} P_{D]B}$$

因此，由于 $J^A R_{AB[CD} J_{E]} = 0$,

$$J^A W_{AB[CD} J_{E]} = 2J^A P_{A[C} J_E h_{D]B} = \frac{2}{n} J^A R_{AB'[C}{}^{B'} J_E h_{D]B}$$

然而，同样根据假设，我们有

$$0 = \operatorname{tr}_{BD} \left(J^A R_{AB[CD} J_{E]} \right) = \frac{1}{3} \left(J^A R_{ABC}{}^B J_E + J^A R_{AB}{}^B{}_E J_C \right) = \frac{2}{3} J^A R_{AB[C}{}^B J_{E]}$$

因此，根据定理4.8， $J^A W_{AB[CD} J_{E]} = 0$和 τ是一个 Killing 尺度。 □

推论4.11。 设$(M, \boldsymbol{c})$ 是共形平坦的，且 I_A 是一个平行拖拉机，并设$R_{ABCD} = (I^2 \owedge U)_{ABCD}$，其中某个平行的 $U \in \Gamma(\mathcal{E}_{(AB)})$。那么 $\sigma = X^A I_A$是共形 ***Killing*** 张量 $k_{(ab)} = r_{(ab)_0}$的 ***Killing*** 尺度，其中 $r =$top(R)。

下面的引理针对非零 I 在 [13]中的情形已得到证明。零情形下的证明类似，但由于我们将用到它，为完整起见，我们将给出证明，包括零 I。

引理 4.12. 设 $I_A \in \mathcal{E}_A|_q$ 是点 $q \in M$ 处的一个非零 ***tractor***。那么，具有曲率对称性、与 I 正交且无迹部分为零的 ***tractor*** 所构成的空间由以下元素张成

$$(h \owedge (I^2 - \tfrac{\iota}{2} h))_{ABCD},$$

其中 $\iota = I_A I^A$。

证明. 固定 $I_A \in \mathcal{E}_A|_q$。 设 $P_{BD} \in S^2(\mathcal{E}_A|_q)$，并假设 $I^A (h \owedge P)_{ABCD} = 0$。那么

$$I^A (h \owedge P)_{ABCD} = 2P_{B[D} I_{C]} + 2I^A P_{A[C} h_{D]B} = 0 \tag{4.14}$$

因此 $I^A P_{A[C} I_E h_{D]B} = 0$，这意味着 $I^A P_{A[C} I_{E]} = 0$，因为 h 非退化。由此可得，对于某个 $\lambda_1 \in \mathbb{R}$，有 $I^A P_{AC} = \lambda_1 I_C$。将其代入 (4.14) 得

$$P_{B[D} I_{C]} + \lambda_1 I_{[C} h_{D]B} = 0,$$

所以，对于某个 $\lambda_2 \in \mathbb{R}$，有 $P_{BD} - \lambda_1 h_{BD} = \lambda_2 I_B I_D$。于是 $I^A P_{AC} = (\lambda_2 \iota - \lambda_1) I_C = \lambda_1 \bar{I}_C$。因此 $\lambda_1 = -\frac{\iota}{2} \lambda_2$，且 $P_{BD} = \lambda_2 (I_B I_D - \frac{\iota}{2} h_{BD})$。 □

我们的主要方法是首先构造 $2n-2$ 个函数独立的 Killing 张量，使其对于由两个爱因斯坦尺度的函数组合所给出的一整族尺度因子均为 Killing（见命题 6.2），然后只在最后的常数中使用 (4.12)。

5. Functional Independence

定义在流形 S 上的一组函数 $f_1,\dots,f_m$: $S\to\mathbb{R}$ 若其微分 $df_1,\dots,df_m$ 在 T^*S 中的一个开稠密子集 S 上线性无关，则称其函数独立。显然，若 $m>\dim(S)$，则函数 $f_1,\dots,f_m$ 函数相关。

设 f_1，…，f_m 是定义在 T^*M 的一个开子集上的哈密顿量 $\mathcal{H}$ 的运动常数。由于关于 T^*M 上的辛形式 ω，df_1，…，df_m 都与 $d\mathcal{H}$ 正交，因此 $\mathcal{H}$ 的函数独立运动常数的最大值为 $2n-1$。如果存在 $2n-1$ 个函数独立的 $\mathcal{H}$ 的运动常数，则称该哈密顿量是最大超可积的。

函数 $f\colon T^*M\to\mathbb{R}$ 的微分是 $T^*(T^*M)$ 的一个截面。设 $(q,\ p)\in T^*M$。于是存在向量空间的典范对偶正合列，

$$0\longrightarrow T^*_qM\xrightarrow{\varphi}T_{(q,p)}(T^*M)\xrightarrow{d\pi}T_qM\longrightarrow 0,$$

$$0\longrightarrow T^*_qM\xrightarrow{\pi^*}T^*_{(q,p)}(T^*M)\xrightarrow{\varphi^*}T_qM\longrightarrow 0,$$

其中，第一个正合列的第一个映射是将垂直丛$V_{(q,\ p)}=\ker(d\pi)\subset T_{(q,\ p)}(T^*M)$与 T^*_qM 进行同一化。为显式构造该映射，取 $\omega_q\in T^*_qM$，并考虑 T^*M 中从 $(q,\ p)$ 出发的曲线 $(q,\ p+t\omega_q)$，该曲线的初速度是 ω_q 在 $T_{(q,\ p)}(T^*M)$ 中的像。

第一条序列的一个分裂将 T_qM识别为 $H_{(q,p)}\subset T_{(q,\ p)}(T^*M)$ 中的一个子空间，通常称为水平子空间，从而给出直和分解 $T_{(q,\ p)}(T^*M)=V_{(q,\ p)}\oplus H_{(q,p)}$。对所有 $(q,\ p)\in T^*M$ 给出一个水平子丛 $H\subset T(T^*M)$，使得 $T(T^*M)=H\oplus V$；这样的分裂光滑族等价于 T^*M 上的一个联络（例如参见 [25,26,30]）。给定一个联络 ∇，水平子丛由 ∇的所有平行移动的初速度生成，而这些平行移动都是 T^*M中的曲线。

$T(T^*M)$的序列的一个分裂等价于 $T^*(T^*M)$的序列的一个对偶分裂，我们将其记为 $(q,\ p)\in T^*M$，即

$$T^*_{(q,p)}(T^*M)\overset{\nabla}{=}T_qM\oplus T^*_qM. \tag{5.1}$$

这是我们关注的情形，因为对于运动常数f，$df\in\Gamma(T^*(T^*M))$。因此，我们明确计算多项式函数 f 的$df_{(q,p)}$的水平分量和垂直分量，以及 $T^*_qM\oplus T_qM$ 的相应元素。

命题 5.1。设 ∇ 是一个仿射联络，且令 $f\colon T^*M\to\mathbb{R}$ 由向量场诱导，$f(q,p)=k_q(p)$。则在同构 $T^*_{(q,p)}(T^*M))\overset{\nabla}{=}T^*_qM\oplus T_qM$ 下，我们有

$$df\overset{\nabla}{=}(k^a,p_a\nabla_bk^a)$$

证明。典范分量 $\phi^*(df_{(q,p)})$ 的作用于 $\omega_q\in T^*_qM$ 的方式为

$$\langle\phi^*(df_{(q,p)}),\omega_q\rangle=\langle df_{(q,p)},\phi(\omega)\rangle=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}k_q(p+t\omega_q)=k_q(\omega_q).$$

因此 $\varphi^*(df) = k^a$。令 $v \in T_qM$，并令 $\hat{v} \in T_{(q,p)}(T^*M)$ 为由∇给出的水平提升，它是平行移动曲线 $(p(t), q(t))$ 的初速度，其中 $q'(0) = v$。于是

$$df(\hat{v}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} k_{q(t)}(p(t)) = \nabla_v \langle k, p\rangle = \langle \nabla_v k, p\rangle.$$

因此，$df \overset{\nabla}{=} (k^a, \ p_a \nabla_b k^a)$。 □

首先考虑 $S^\ell(TM)$ 的简单截面，即 $r_{a_1\cdots a_\ell} = k^1{}_{(a_1}\cdots k^\ell{}_{a_\ell)}$，便可轻松推广上述命题。如果 $r \in \Gamma(S^\ell(TM))$，那么在 T^*M 上诱导函数的微分（也记作 r）映射为

$$dr_{(q,p)} \overset{\nabla}{=} (\ell p_{a_2}\ldots p_{a_\ell} r^{b\,a_2\cdots a_\ell}, p_{a_1}\ldots p_{a_\ell}\nabla_b r^{a_1\cdots a_\ell})|_q \in T_qM \oplus T_q^*M \tag{5.2}$$

对于哈密顿量 $\mathcal{H} = g^{-1} + V$，第一个取用的运动常数通常就是 $\mathcal{H}$ 本身。利用 g 的列维-奇维塔联络进行识别 (5.1)，可得

$$(2p_a g^{ab}, p_a p_c \nabla_b g^{ac} + \nabla_b V) = (2p^b, \nabla_b V) \in T_qM \oplus T_q^*M. \tag{5.3}$$

设 r_{ab} 是度量 $g \in \boldsymbol{c}$ 的 Killing 张量。根据定理 4.4 和 4.6，我们可以分别将平行 tractor R_{ABCD} 和 W_{ABCD} 与 r_{ab} 及其无迹部分 $k_{ab} = r_{(ab)_0}$ 相关联。然后，利用定理 3.3 以及定理 4.8 (b) 和 4.9，我们可以检验是否存在函数 U，使 $f = r + U$ 成为 $\mathcal{H} = g^{-1} + V$ 的运动常数。然而，构造函数 U 并将其与 tractorR_{ABCD} 和 W_{ABCD} 联系起来十分复杂。因此，处理整个微分 $df = dr + dU$ 会很困难。不过，利用线性代数可以证明，只需考虑 dr 即可。

命题5.2。设 f_1 是 T^*M 上的多项式函数，且设 r_1 是表示 f_1，...，f_m 的最高阶项的逆变张量场。如果由 r_1，...，r_m 诱导的函数函数独立，那么 f_1，...，f_m 也函数独立。

证明。设 ∇ 是 M 上的仿射联络。对于每个 $i \in \{1, \ldots, m\}$，令 ℓ_i 为 f_i 的阶数，使得 $r^i \in \Gamma(S^{\ell_i}(TM))$。在（ 5.2 ）的对应关系下，

$$dr_i \overset{\nabla}{=} (\ell_i\, p_{a_2}\ldots p_{a_{\ell_i}} r^{b\,a_2\cdots a_{\ell_i}}, p_{a_1}\ldots p_{a_{\ell_i}}\nabla_b r^{a_1\cdots a_{\ell_i}})|_q$$

根据假设，对于几乎所有 $(q, \ p) \in T^*M$，dr_1，.....，dr_m 都是线性无关的。于是令 F: $T^*M \to \mathbb{R}^m$ 为函数 $F(q, \ p) = (f_1(q, \ p)$ .....，$f_m(q, \ p))$。固定 $(q, \ p) \in T^*M$，并考虑限制在 $\{(q, \ \lambda p) : \lambda \in \mathbb{R}, \ \lambda \neq 0\}$ 上的微分 dF。那么 dF 是一个矩阵，其行

$$dF|_{(q,\lambda p)} \overset{\nabla}{=} \left(\lambda^{\ell_i - 1}\ell_i p_{a_2}\ldots p_{a_{\ell_i}} r_i^{b\,a_2\cdots a_{\ell_i}} + l.o.ts, \lambda^{\ell_i} p_{a_1}\ldots p_{a_{\ell_i}}\nabla_b r_i^{a_1\cdots a_{\ell_i}} + l.o.ts\right)_{1\le i\le m}$$

其中 $l.o.ts$ 表示关于 λ的幂的低阶项。设 ℓ 为 f_1、.....、f_m中的最大多项式阶数。现在，我们将 dF 的前 n 列乘以 λ，并将每一行乘以 $\lambda^{\ell-\ell_i}$。此操作不会改变矩阵的秩。由此可得

$$\operatorname{rank}(dF|_{(q,\lambda p)}) = \operatorname{rank}(\lambda^\ell \ell_i p_{a_2}\ldots p_{a_{\ell_i}} r_i^{b\,a_2\cdots a_{\ell_i}} + l.o.ts, \lambda^\ell p_{a_1}\ldots p_{a_{\ell_i}}\nabla_b r_i^{a_1\cdots a_{\ell_i}} + l.o.ts)_{1\le i\le m}$$

$$= \operatorname{rank}(\lambda^\ell A_\ell + \lambda^{\ell-1} A_{\ell-1} + \dots \lambda A_1 + A_0)$$

其中 A_ℓ 是行由以下各项组成的矩阵

$$dr_i|_{(q,p)} \overset{\nabla}{=} (\ell_i\, p_{a_2} \dots p_{a_{\ell_i}} r^{b\, a_2 \cdots a_{\ell_i}}, p_{a_1} \dots p_{a_{\ell_i}} \nabla_b r^{a_1 \cdots a_{\ell_i}})|_q,$$

因此 A_ℓ 的秩为 m。现在我们需要线性代数中的以下结果。设

$$A(\lambda) = \lambda^\ell A_\ell + \dots + \lambda A_1 + A_0$$

为一个矩阵铅笔。若 A_ℓ 的秩为 R，则对于除有限多个$\lambda \in \mathbb{R}$之外的所有情形，$\operatorname{rank}(A(\lambda)) \geq R$。

事实上，对于非零的 λ，令 $\alpha = \lambda^{-1}$ 并考虑

$$B(\alpha) = \alpha^\ell A_0 + \dots \alpha A_{\ell-1} + A_\ell.$$

由于 $B(0) = A_\ell$ 的秩为 R，且矩阵铅笔 $B(\alpha)$ 的秩至多在有限多个 $\alpha \in \mathbb{R}$ 处下降，因此对于除有限多个$\lambda \in \mathbb{R}$之外的所有情形，$\lambda^\ell B(\alpha) = A(\lambda)$ 的秩至少为 R。

根据假设，存在一个开稠密子集 $U \subset T^*M$，在该子集上 dr_1、……、dr_m 线性无关。若 $(q, p) \in U$，则对于除 λ 的有限多个值之外的所有情形，$\operatorname{rank}(dF) = \operatorname{rank}(A_\ell) = m$。因此，令 $V \subset T^*M$ 为 dF 秩为 m的开集，我们已经证明了$U \subset V$；由于 U是稠密的，这意味着 $V = T^*M$。□

设 $k_b \in \Gamma(\mathcal{E}_b)$ 是一个共形 Killing 向量。回忆第 4.2 节中 k_b 的 BGG 延拓，$K_{AB} \in \Gamma(\mathcal{E}_{[AB]})$ 满足 $\mathbb{X}^{AB}{}_b K_{AB} = k_b$ 和 $2\mathbb{X}_{[B}{}^{Cb} \nabla_{|b|} K_{A]C} = 0$。通过直接计算可验证，当 k_b 为共形 Killing 向量时，这些条件等价于

$$\begin{gathered} \mathbb{X}^{AB}{}_b K_{AB} = k_b, \quad \mathbb{Z}^{AB}{}_{ab} K_{AB} = \nabla_{[a} k_{b]} \\ \mathbb{W}^{AB} K_{AB} = -\frac{1}{n} \nabla_b k^b, \quad \text{and} \quad \mathbb{Y}^{AB}{}_b K_{AB} = \mathsf{P}_b{}^a k_a + \tfrac{1}{n} \nabla_b \nabla_a k^a, \end{gathered} \tag{5.4}$$

类似的计算见 [13, 16]。或者，我们可以将上述内容写为

$$K_{AB} = \begin{pmatrix} k_b \\ \nabla_{[a} k_{b]}, & -\frac{1}{n} \nabla_b k^b \\ \mathsf{P}_b{}^a k_a + \frac{1}{n} \nabla_b \nabla_a k^a \end{pmatrix},$$

这与我们在 (4.4) 中表示 tractor 的方式类似。我们使用完全延拓，以共形不变的方式描述 dk 的识别 (5.1)。

定理 5.3。 设$(M, \boldsymbol{c})$ 为一个共形流形，且 $g \in \boldsymbol{c}$。设 $k_a \in \Gamma(\mathcal{E}_a[2])$ 为一个共形 *Killing* 向量，其完全延拓为 K_{AB}。设 ∇ 为 g的 *Levi-Civita* 联络，且$(q, p) \in T^*M$。将识别(5.1)记为 $\Phi\colon T^*_{(q,p)}(T^*M) \to T_qM \oplus T^*_qM$。定义 $\Psi\colon T_qM \oplus T^*_qM \to \mathcal{E}_{[AB]}|_q$为

$$\Psi(v^a, \omega_b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2v_{[a} p_{b]}, & v^b p_b \\ -\omega_b \end{pmatrix},$$

其中我们使用由 $g \in \boldsymbol{c}$确定的同构 $\mathcal{E}_{[AB]} \cong \mathcal{E}_a[2] \oplus \mathcal{E}_{[ab]}[2] \oplus \mathcal{E} \oplus \mathcal{E}_b$。当 p非零时，映射 Ψ 是单射，并且

$$\Psi \circ \Phi(dk) = 4K_{[A}{}^{C}S_{B]C}, \tag{5.5}$$

其中 $S_{AB} = \mathbb{X}_{AB}{}^{b}p_b$。

证明。 Ψ 的核由（p_a，0）张成（当 p 为零时），否则为平凡核。根据命题 5.1， Φ（$dk_{(q,p)}$） = （k^a， $p_a\nabla_b k^a$）。因此，由（5.4）得，

$$4K_{[A}{}^{C}S_{B]C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2k_{[a}p_{b]}, \quad k^b p_b \\ -\frac{1}{n}\nabla_a k^a p_b - \nabla_{[b}k_{a]}p^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2k_{[a}p_{b]}, \quad k^b p_b \\ -p_a\nabla_b k^a \end{pmatrix},$$

因为 $\nabla_{(a}k_{b)_0} = 0$。由此得到（5.5）。 □

点（q， p） $\in T^*M$构成的集合中，满足 p对于共形度量为零的点形成 T^*M的一个处处稀疏子集。由此得到以下推论。

推论 5.4。 设 k_b^1、……、$k_b^m \in \Gamma(\mathcal{E}_b[2])$ 为共形 *Killing* 向量，其完全延拓为 $K^1{}_{AB}$、……、$K^m{}_{AB}$。当且仅当满足以下条件的点集（q， p） $\in T^*M$ 中的

$$K^1{}_{[A}{}^{C}S_{B]C}, \ldots, K^m{}_{[A}{}^{C}S_{B]C} \in \mathcal{E}_{[AB]}|_q \quad \textit{are linearly independent}$$

在 T^*M 中稠密，其中 $S_{AB} = X_{[A}Z_{B]}{}^{b}p_b$。

$\mathcal{H} = g^{-1} + V$ 的二阶运动积分，其首项是 g 的 Killing 张量。在共形平坦情形下，利用定理 4.6 中的延拓，我们可以将上述结果推广到近爱因斯坦尺度对应的 Killing 张量。

定理 5.5. 设 $(M, \boldsymbol{c})$ 为一个共形流形，且 $g \in \boldsymbol{c}$。设 R_{ABCD} 为具有曲率对称性的平行拖拉机，并设 $r_{bd} = \mathbb{X}^{AB}{}_{b}\mathbb{X}^{CD}{}_{d}R_{ABCD}$。固定 (q, p) $\in T^*M$，并令 $\Phi\colon T^*_{(q,p)}(T^*M) \to T_qM \oplus T_q^*M$，且令 $\Psi\colon T_qM \oplus T_q^*M \to \mathcal{E}_{[CD]}|_q$ 为定理 *5.3* 中的线性映射。那么

$$\Psi \circ \Phi(dr) = 8S^{AB}R_{ABE[D}S_{C]}{}^{E}, \tag{5.6}$$

其中 $S_{AB} = \mathbb{X}_{AB}{}^{b}p_b$。

证明。 对于高秩tractor R，我们只计算绝对必要的分量，得到

$$8S^{AB}R_{ABE[D}S_{C]}{}^{E}Z^{C}{}_{c}Z^{D}{}_{d} = -4p^bX^AZ^B{}_bX^CZ^D{}_{[d}p_{c]}R_{ABCD} = 4p^br_{b[c}p_{d]},$$
$$8S^{AB}R_{ABE[D}S_{C]}{}^{E}X^CY^D = -2p^bX^AZ^B{}_bZ^C_cp^cX^DR_{ABCD} = 2p^bp^dr_{bd}.$$

对于 $Y^CZ^D{}_d$ 分量，我们需要

$$\nabla_c r_{bd} = 2X^AZ^B{}_{(b}Z^C_{|c|}Z^D{}_{d)}R_{ABCD} - 2g_{c(d}X^AZ^B{}_{b)}X^CY^DR_{ABCD},$$

于是我们得到

$$\begin{aligned} 8S^{AB}R_{ABE[D}S_{C]}{}^{E}Y^CZ^D{}_c &= 2p^bp^dX^AZ^B{}_bZ^E{}_dZ^D{}_cR_{ABED} + 2p_cp^bX^AZ^B{}_bX^CY^DR_{ABCD} \\ &= -(\nabla_c r_{bd})p^bp^d, \text{ and} \end{aligned}$$

$$8S^{AB}R_{ABE[D}S_{C]}{}^{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4p^b r_{b[c}p_{d]}, \quad 2p^b p^d r_{bd} \\ -(\nabla_a r_{bd})p^b p^d \end{pmatrix} = \Psi \circ \Phi(dr) \tag{5.7}$$

由 (5.2) 得出。 □

对于如下形式的平行曲率拖拉机，证明 (5.7) 有一种更简单的方法:

$$R^i{}_{ABCD} = K^1{}_{AB}K^2{}_{CD} + K^2{}_{AB}K^1{}_{CD} - 2K^1{}_{[AB}K^2{}_{CD]} \tag{5.8}$$

其中 $X^A Z^B{}_b X^C Z^D{}_d R^i{}_{ABCD} = r_{bd} = 2k^1{}_{(b}k^2{}_{d)}$，且 $k^i{}_b = X^A Z^B{}_b K^i{}_{AB}$。计算可得

$$S^{AB}R^i{}_{ABE[D}S_{C]}{}^{E} = k^1{}_a p^a K^2{}_{E[D}S_{C]}{}^{E} + k^2{}_a p^a K^1{}_{E[D}S_{C]}{}^{E},$$

由此立即得到 (5.7)。在共形平坦流形上，显然，局部而言，(5.8) 形式的 tractor 张成曲率拖拉机的空间。

结合本节的结果，便得到我们用来讨论运动常数的函数独立性的框架。

推论 5.6。设 $(M, \boldsymbol{c})$ 为共形平坦。设 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{E}[1])$ 为一个近爱因斯坦尺度，设 $g = \sigma^{-2}\boldsymbol{g}$，且设 $\mathcal{H} = g^{-1} + V$ 为定义在 $M \setminus \mathcal{Z}(\sigma)$ 上的哈密顿量。

令 $f_1, \dots, f_{m_1}$ 为与共形 *Killing* 向量 $k^1{}_b, \dots, k^{m_1}{}_b \in \Gamma(\mathcal{E}_b[2])$ 相对应的线性运动常数，其完全延拓为 $K^1{}_{AB}, \dots, K^{m_1}{}_{AB}$。

令 $f_{m_1+1}, \dots, f_{m_1+m_2}$ 为二次运动常数，其二次部分由 $g, r^1{}_{bd}, \dots, r^{m_2}{}_{bd} \in \Gamma(\mathcal{E}_{bd}[4])$ 的 *Killing* 张量诱导，并具有完全延拓，如定理 *4.6* 中的 $R^1{}_{ABCD}, \dots, R^{m_2}{}_{ABCD}$。

那么，若点集 $(q, p) \in T^*M$ 上 *tractor*

$$K^1{}_{[C}{}^{E}S_{D]E}, \dots, K^{m_1}{}_{[C}{}^{E}S_{D]E},\ 2S^{AB}R^1{}_{ABE[D}S_{C]}{}^{E}, \dots, 2S^{AB}R^{m_2}{}_{ABE[D}S_{C]}{}^{E} \tag{5.9}$$

在 $\mathcal{E}_{[CD]}|_q$ 中线性无关的点集在 T^*M 中稠密，其中 $S_{AB} = \mathbb{X}_{AB}{}^b p_b$，则常数 $f_1, \dots, f_{m_1+m_2}$ 函数独立。

以下引理给出了检验这些 tractor 是否线性无关的明确条件。我们只需要考虑非零 (5.9) 情形。

引理 5.7。令 $(q、\ p) \in T^*M$ 且令 $S_{AB} = X_{[A}Z_{B]}{}^b p_b$。假设 p 非零。那么，当且仅当在所有尺度下，$T_{AB} \in \mathcal{E}_{[AB]}|_q$ 满足 $T_{[A}{}^C S_{B]C} = 0$。

$$\mathbb{X}^{AB}{}_b T_{AB} = 0, \quad \mathbb{W}^{AB}T_{AB} = 0, \quad and \quad p^a \mathbb{Z}^{AB}{}_{ab}T_{AB} = 0 \tag{5.10}$$

前两个要求可以替换为 $X^A T_{AB} = 0$。在这种情况下，映射 $T \mapsto T_{[A}{}^C S_{B]C}$ 的像的维数为 $2n$。

否则，如果 p 为零，则当且仅当在所有尺度下，$T_{[A}{}^C S_{B]C} = 0$。

$$\mathbb{X}^{AB}{}_b T_{AB} = \lambda p_b, \quad \mathbb{W}^{AB}T_{AB}p_b + p^a \mathbb{Z}^{AB}{}_{ab}T_{AB} = 0. \tag{5.11}$$

证明。在某个尺度下，T 具有以下形式，

$$T_{AB} = \begin{pmatrix} t_b \\ \nu_{ab},\ \tau \\ * \end{pmatrix}, \text{ we have that } 4T_{[A}{}^C S_{B]C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2t_{[a}p_{b]},\ t^a p_a \\ \tau p_b + \nu_{ab}p^a \end{pmatrix}, \tag{5.12}$$

因此 $4T_{[A}{}^{C}S_{B]C} \in \mathrm{im}(\Psi_{(q,p)})$，其中 Ψ 如定理 5.3 所述。事实上，显然上述形式的元素张成 $\mathrm{im}(\Psi_{(q,p)})$，其维数为 $2n$。于是

$$\Psi_{(q,p)}^{-1}\left(4T_{[A}{}^{C}S_{B]C}\right) = (t^a, -(\tau p_b + \nu_{ab}p^a)),$$

当且仅当 $t=0$、$\tau=0$ 和 $p^a\nu_{ab}=0$时，其为零，因为 ν_{ab} 是斜对称的，而 p 不是零。

在零情形下，由 (5.12) 可知，当且仅当 $T_{[A}{}^{C}S_{B]C}=0$、$t_{[a}p_{b]}=0$、$t^ap_a=0$和 $\tau p_b+\nu_{ab}p^a=0$ 时，$T_{[A}{}^{C}S_{B]C}=0$。第一个条件等价于 $t_a=\lambda p_a \implies t^ap_a=0$，因为 p 是零；第二个条件正是 (5.11) 中的第二个条件。

□

6. 爱因斯坦尺度

射影平坦伪黎曼流形（常曲率空间）具有最大的局部对称性：每一点处的各向同性群为 $O(P,\ Q)$，并且在单连通空间上，Killing 向量空间具有最大维数 n $(n+1)/2$。在共形平坦流形上，射影平坦度量等价于爱因斯坦度量。

设 $(M,\ \boldsymbol{c})$ 共形平坦，并令 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{E}[1])$ 为一个近爱因斯坦尺度。这些条件等价于 $(M\setminus\mathcal{Z}(\sigma),\ g)$ 是射影平坦的。对于 g，Killing 向量空间与 $\Lambda^2(I^\perp)$ 的平行截面一一对应，其中$I_A = D_A\sigma$ 由定理 4.6 给出。若 τ 是另一个近爱因斯坦尺度，则同时对于两个尺度为 Killing 的向量空间，与 $\Lambda^2(I^\perp\cap J^\perp)$ 的平行截面一一对应，其中 $J_A = D_A\tau$。在处理这样一对爱因斯坦尺度时，我们记 $\iota = I_AI^A$、$\jmath = J_AJ^A$ 和 $\kappa = I_AJ^A$。我们假设 I_A 和 J_A 不共线。由于它们是平行的，且 M 是连通的，因此 M 中任意一点处的共线性等价于 M 上处处共线。于是，重缩放因子 $s=\tau^{-1}\sigma$ 在 M 的一个开稠密子集上是正则的。

引理 6.1。设 I_A 和 J_A 是平行且不共线的 *tractor*。设 $\sigma = X^AI_A$和 $\tau = X^AJ_A$，并设 $s=\tau\sigma^{-1}\in C^\infty(M\setminus\mathcal{Z}(\sigma))$。则 ds 在 M的一个开稠密子集上非零。特别地，ds 的零点集包含于满足以下条件的点集之中：

$$\iota s(q)^2 - 2\kappa s(q) + \jmath = 0, \tag{6.1}$$

其中 $\iota = I_AI^A$、$\jmath = J_AJ^A$ 和 $\kappa = I_AJ^A$。

证明。写作 $\tau = s\sigma$，我们有 $J_A \overset{\sigma}{=} (\sigma s, \sigma\nabla_a s, -\frac{1}{n}\mathsf{J}^\sigma\sigma s - \frac{1}{n}\sigma(\Delta s))$。假设$ds=0$在开集 $U\subset M$ 上成立。那么 $\Delta s=0$在 U上成立，因此 $J \overset{\sigma}{=} (s\sigma, \mathbf{0}, -\frac{1}{n}\mathsf{J}^\sigma s\sigma) = sI_A$在 U上成立。由于 I 和 J 平行，它们在 M上共线，这与我们的假设矛盾。

现在令 $q\in M\setminus\mathcal{Z}(\sigma)$ 满足 $ds|_q=0$。那么在尺度 σ 中，$Z^A{}_aJ_A=0$，因此存在一个 $\rho\in\mathcal{E}[-1]_q$，使得 $J_A|_q = s(q)I_A|_q + \rho X_A|_q$。于是，在 q 处，

$$\kappa = I^AJ_A = s(q)\iota + \rho\sigma \quad \text{and} \quad \jmath = J^AJ_A = s(q)\kappa + \rho\sigma s(q).$$

Su将 $\rho\sigma$ 的第一个表达式代入第二个方程，得到 (6.1)。 □

事实证明，这些 Killing 向量也属于范围大得多的一类光滑度量。

命题 6.2. 令 $r_{a_1\cdots a_\ell} \in \mathcal{E}_{(a_1\cdots a_\ell)}[2\ell]$，并令 $\sigma,\tau \in \Gamma(\mathcal{E}[1])$。令 $g = \sigma^{-2}\boldsymbol{g}$，并令 $\hat{} g = \tau^{-2}\boldsymbol{g}$，且假设 $r_{a_1\cdots a_\ell}$ 是 g 和 $\hat{} g$ 的 ***Killing*** 张量。令$s = \tau\sigma^{-1} \in C^\infty(M \setminus \mathcal{Z}(\sigma))$，并令 f 为定义在 s 的值域上的光滑实值函数。那么， $r_{a_1\cdots a_\ell}$ 是 $\tilde{g} = \tilde{\sigma}^{-2}g$ 的 ***Killing*** 张量，其中 $\tilde{\sigma} = f(s)\sigma$，定义在 $M \setminus \mathcal{Z}(\sigma\tau f(s))$ 上。

$\hat{}$ $\tilde{}$证明。设 ∇, ∇ 和 ∇ 分别是 $g, \hat{} g$ 和 $\tilde{g}$的列维-奇维塔联络。根据共形变换定律，

$$\hat{\nabla}_{(a}r_{a_1\cdots a_\ell)} = \nabla_{(a}r_{a_1\cdots a_\ell)} + \ell\Upsilon^d r_{d(a_2\cdots a_\ell}\boldsymbol{g}_{a\,a_1)},$$

其中 $\Upsilon_a = s\nabla_a(s^{-1}) = -s^{-1}\nabla_a s$。因此，若 r_{ab} 是 g 和 $\hat{} g$的 Killing 张量，则

$$0 = \hat{\nabla}_{(a}r_{a_1\cdots a_\ell)} = \nabla_{(a}r_{a_1\cdots a_\ell)} \implies \Upsilon^d r_{d(a_2\cdots a_\ell}\boldsymbol{g}_{a\,a_1)} = 0$$

$\tilde{}$在 ∇和 ∇之间的共形变换定律使用

$$\tilde{\Upsilon}_a = f(s)\nabla_a(f(s)^{-1}) = -\frac{f(s)f'(s)}{f(s)^2}\nabla_a s = s\frac{f'(s)}{f(s)}\Upsilon_a,$$

Then

$$\tilde{\nabla}_{(a}r_{a_1\cdots a_\ell)} = \nabla_{(a}r_{a_1\cdots a_\ell)} + \ell\tilde{\Upsilon}^d r_{d(a_2\cdots a_\ell}\boldsymbol{g}_{a\,a_1)} = \ell s\frac{f'(s)}{f(s)}\Upsilon^d r_{d(a_2\cdots a_\ell}\boldsymbol{g}_{a\,a_1)} = 0.$$

□

考虑与 $\mathbb{R}^n$ 相关联且带有平坦度量的共形流形，我们将在第 10 节详细讨论它。令 $\sigma \in \mathcal{E}[1]$ 表示欧几里得度量。那么$\tau = -\frac{r^2}{2}\sigma$是另一个平坦尺度，而空间 $I^\perp \cap J^\perp$ 由平行 tractor$I^i_A = (\sigma q_i, \sigma p_i, 0)$ 张成。因此， σ和 τ共有的 Killing 张量是顶层槽

$$2X^A Z^B{}_b I^i_{[A} I^j_{B]} = q_i p_j - q_j p_i.$$

根据上述命题，角动量函数 $L^{i,\,j}$ 对于形如 $|p|^2 + V(r)$ 的任意哈密顿量，都是运动常数，并且 $2n-3$ 的 $L^{i,\,j}$在函数意义下独立。在本节余下部分，我们将这一推理推广到更大的一类哈密顿量，其中的函数由爱因斯坦缩放函数参数化。此外，我们还将使用上一节建立的 tractor 框架，谨慎证明 $2n-3$ Killing 向量的函数独立性，从而证明相关哈密顿量族的准极大超可积性。为证明函数独立性，我们需要两个技术引理。设 $\mathcal{B}$ 是一个配备联络 $\nabla^{\mathcal{B}}$的向量丛。若向量子丛 $\mathcal{V} \subset \mathcal{B}$ 满足平行条件，即对所有 $s \in \Gamma(\mathcal{V})$ 都有 $\nabla^{\mathcal{B}}{}_a s \in \mathcal{E}_a \otimes \mathcal{V}$，则称其为平行子丛。

引理 6.3。设 $(M, \boldsymbol{c})$ 是一个共形流形，且 $\mathcal{V} \subset \mathcal{E}^A$ 是共形 ***tractor*** 丛的平行子丛。若存在一个开 $U \subset M$，使得对所有 $q \in U$都有 $X_q \in \mathcal{V}[1]_q$，则 $\mathcal{V} = \mathcal{E}^A$。

证明。设 ∇ 是共形类中某个度量的联络。那么在开集 U 上，

$$\nabla_a X^A = Z^A{}_a \in \mathcal{E}_a[1] \otimes \mathcal{V}$$

那么在 U 的所有点处,

$$\nabla_b Z^A{}_a = -\mathsf{P}_{ab} X^A - \boldsymbol{g}_{ab} Y^A \in \Gamma(\mathcal{E}_{ab}[1] \otimes \mathcal{V})$$

由于 $X^A \in \mathcal{V}[1]$, 我们得出结论: 在 U 的所有点上, $Y^A \in \mathcal{V}[-1]$。因此, 在每个点 $q \in U$, $\mathcal{E}^A_q \subset \mathcal{V}_q$。由于 $\mathcal{V}$ 是一个子丛且秩恒定, 我们得出结论: $\mathcal{V} = \mathcal{E}^A$。□

命题 6.4。设 $1 < m \leq n+1$, 并设 I^1、.....、$I^m \in \Gamma(\mathcal{T}^*)$ 为线性无关的平行 *tractor*。设对所有 $1 \leq i < j \leq m$, $K^{ij}{}_{AB} = 2I^i{}_{[A} I^j{}_{B]}$。那么, 由 $K^{1,2}$、.....、$K^{1,m}$ 以及 $K^{2,m}$、$\ldots K^{m-1,m}$ 的顶槽所给出的共形 *Killing* 向量诱导的 $2m-3$ 个函数是函数独立的。此外, 这是 $\Gamma(\mathrm{span}(K^{i,j}))$ 中 *tractor* 的顶槽所给出的函数独立的共形 *Killing* 向量可能达到的最大数量。

证明。由推论 5.4, 只需证明对于 T^*M 的某个开稠密子集中的所有 (q,p), tractor

$$K^{1,2}{}_{[A}{}^C S_{B]C}, \ldots, K^{1,m}{}_{[A}{}^C S_{B]C}, \ldots, K^{m-1,m}{}_{[A}{}^C S_{B]C}, \tag{6.2}$$

线性无关, 其中 $S_{AB} = \mathbb{X}_{AB}{}^b p_b$。因此, 设 $(q,p) \in T^*M$ 且$\lambda_{1,2}, \ldots, \lambda_{1,m}, \ldots \lambda_{m-1,m} \in \mathbb{R}$ 满足

$$\lambda_{1,2} K^{1,2}{}_{[A}{}^C S_{B]C} + \cdots + \lambda_{1,m} K^{1,m}{}_{[A}{}^C S_{B]C} + \cdots + \lambda_{m-1,m} K^{m-1,m}{}_{[A}{}^C S_{B]C} = 0. \tag{6.3}$$

设 $K = \lambda_{1,2} K^{1,2} + \cdots + \lambda_{1,m} K^{1,m} + \cdots + \lambda_{m-1,m} K^{m-1,m}$。现在假设 p 非零。那么, 由引理 5.7,

$$X^A K_{AB} = 0, \quad \text{and} \quad p^a \mathbb{Z}^{AB}{}_{ab} K_{AB} = 0 \tag{6.4}$$

展开第一个条件可得

$$\begin{aligned} 0 = X^A K_{AB} &= (\lambda_{1,2}\sigma_1 - \lambda_{2,m}\sigma_m) I^2{}_B + \cdots + (\lambda_{1,m-1}\sigma_1 - \lambda_{m-1,m}\sigma_m)\, I^{m-1}{}_B \\ &\quad - \left(\sum_{i=2}^{m} \lambda_{1,i}\sigma_i\right) I^1{}_B + \left(\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_{i,m}\sigma_i\right) I^m{}_B. \end{aligned} \tag{6.5}$$

由于这些 tractor $I_1, \ldots, I^m$ 线性无关, 因此可得

$$\lambda_{1,i}\sigma_1 - \lambda_{i,m}\sigma_m = 0 \tag{6.6}$$

对每个 $i \in \{2, \ldots, m-1\}$ 都成立。接下来我们计算

$$\begin{aligned} 0 &= 2I^{1\,B} K_{[A}{}^C S_{B]C} \\ &= -I^{1\,B} K_B{}^C S_{AC} + \lambda_{1,2} \left(I^1{}_B I^2{}_C S^{BC}\right) I^1{}_A + \cdots + \lambda_{1,m} \left(I^1{}_B I^m{}_C S^{BC}\right) I^1{}_A \\ &\quad + \lambda_{2,m} \left(I^1{}_B I^m{}_C S^{BC}\right) I^2{}_A + \cdots + \lambda_{m-1,m} \left(I^1{}_B I^m{}_C S^{BC}\right) I^{m-1}{}_A \\ &\quad - \lambda_{2,m} \left(I^1{}_B I^2{}_C S^{BC}\right) I^m{}_A - \cdots - \lambda_{m-1,m} \left(I^1{}_B I^{m-1}{}_C S^{BC}\right) I^m{}_A \end{aligned}$$

由于 $X^C K_{AC} = 0$, 第一项是 X_A 的倍数。由于 $m \leq n+1$, 由 I^1、.....、I^m 张成的平行子丛, 对于 M 的开稠密子集中的所有 q, 都不包含 X, 这由引理 6.3 得出。取这样的 q, 我们得出

$$\lambda_{i,m} I^m{}_A I^1{}_C S^{AC} = 0$$

对于 $i \in \{2, \dots, m-1\}$。我们有 $2I^m{}_A I^1{}_C S^{AC} = -K^{1,\,m}{}_{AC} S^{AC} = p^c k^{1,\,m}{}_c$。由于 $k^{1,\,m}{}_c$是一个非零平行 tractor 的顶层槽，因此它在M的一个开稠密子集上非零。这可由引理 4.3 得出，也可由式 (4.7) 快速推导。假设在 M 的一个开子集上，$\mathbb{X}^{AB}{}_b K^{1,\,m}{}_{AB} = 0$。那么

$$0 = \nabla_a(\mathbb{X}^{AB}{}_b K^{1,m}{}_{AB}) = \mathbb{Z}^{AB}{}_{ab} K^{1,m}{}_{AB} - \boldsymbol{g}_{ab} \mathbb{W}^{AB} K^{1,m}{}_{AB}.$$

因此，$\mathbb{Z}^{AB}{}_{ab} K^{1,\,m}{}_{AB}$和 $\mathbb{W}^{AB} K^{1,\,m}{}_{AB}$均为零。再次对其中任一个施加联络，得到 $\mathbb{Y}^{AB}{}_b K^{1,\,m}{}_{AB} = 0$。

因此，若 $(q,\ p) \in T^*M$包含于满足以下条件的 T^*M 的开稠密子集中

$$p_a p^a \neq 0, \quad \sigma_1(q) \neq 0, \quad \sigma_m(q) \neq 0, \quad \text{and} \quad I^m{}_A I^1{}_C S^{AC} \neq 0,$$

那么对所有 $i \in \{2, \dots, m-1\}$，均有 $\lambda_{i,\,m} = 0$。又由于 $\sigma_1 \neq 0$，根据 (6.6)，对所有 $i \in \{2, \dots, m-1\}$，我们有 $\lambda_{1,\,i} = 0$。于是 (6.5) 化为

$$0 = X^A K_{AB} = \lambda_{1,m}(\sigma_1 I^m{}_B - \sigma_m I^1{}_B).$$

由线性无关性和 $\sigma_m \neq 0$，我们得出 $\lambda_{1,\,m} = 0$，且 (6.2) 中的 tractor 在 T^*M 的一个开稠密子集上线性无关。

为证明 $2m-3$ 是最大的，我们固定 $q \in M$，使得 $\sigma_1(q) \neq 0$，因此 $X_q \notin$也张成空间 span$(I^1|_q$、.....、$I^m|_q)^\perp$。考虑线性映射$\phi_{p,\,q}$：span$(K^{i,\,j}|_q) \to \mathcal{E}_A|_q \oplus \mathcal{E}_a|_q$，其定义如下：

$$\phi_{p,q}(K_{AB}) = (X^A K_{AB}, p^b \mathbb{Z}^{AB}{}_{ab} K_{AB}),$$

在尺度 σ_1下进行计算。于是 $X^A K_{AB} \in$span$(I^1$、.....、$I^m) \cap X^\perp$，根据假设，其维数 $m-1$在 q处。于是 $p^b \mathbb{Z}^{AB}{}_{ab} K_{AB} \in$span$(Z^A{}_a I^2{}_A$、.....、$I^m{}_A Z^A{}_a) \cap p^\perp$，在固定的 $q \in M$ 处，对于 p，只要其位于$T^*_q M$的某个低维子空间之外，其维数就是 $m-2$。因此，对于开稠密子集 T^*M中的所有$(q,\ p)$，$\phi_{p,\,q}$的像的维数至多为 $2m-3$。□

这些 tractor $S_{AB} = \mathbb{X}_{AB}{}^b p_b$ 张成伴随 tractor 丛的一个不变子丛。乘积 $R_{C[A} S^C{}_{B]}$ 与伴随 tractor R 对 S的作用相同。伴随 tractor 丛是一个伴随丛 $\mathcal{G} \times_P \mathfrak{g}$，其中 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(p+1,\ q+1)$，且该作用由 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{g}$的作用诱导，即由李括号给出。两个伴随 tractor 的乘积 $R_{AB} T^{AB}$ 由 $\mathfrak{g}$上的 Killing 型 B 诱导；更多细节请参见 [39]。特别地，它给出了下面这个其实很容易证明的恒等式

$$R_{C[B} S^C{}_{A]} T^{AB} = -T_{C[B} S^C{}_{A]} R^{AB} \tag{6.7}$$

对于任意伴随 tractor $R,\ S,\ T$，由于 $B([r,s],\ t) = B(r,\ [s,t]) = -B([t,s],\ r)$。

引理 6.5。设 g为一个度量，且设 k^1，.....，k^m 为包含在 TM的某个真子丛中的向量场。那么，由 g^{-1}、k^1、.....、k^m 诱导的函数函数独立，当且仅当由 k^1、.....、k^m 诱导的函数函数独立。

证明。令 ∇ 为 g 的列维-奇维塔联络。于是，在分裂$T^*(T^*M) \overset{\nabla}{=} T^*M \oplus TM$中进行计算可得，

$$dg^{-1}(q,p) \overset{\nabla}{=} (2p_a, 0) \quad \text{and} \quad dk^i \overset{\nabla}{=} (k^i_a, p^b \nabla_a k_b{}^i).$$

假设 $(q,\ p)\in T^*M$ 满足 $p\notin$ 张成空间$(k^1|_q、\ .....、\ k^m|_q)$，并且 $\lambda,\ \lambda_1,\ .....、\ \lambda_m\in\mathbb{R}$ 满足

$$\lambda dg^{-1}+\lambda_1 dk^1+\cdots+\lambda_m dk^m=0\implies \lambda p+\lambda_1 k^1+\cdots+\lambda_m k^m=0.$$

于是 $\lambda=0$。由于 k^1、.....、k^m 包含在 TM 的一个真子丛中，因此存在 T^*M 的一个开稠密子集，使得 $p\notin$ 张成 $k^1|_q$、.....、$k^m|_q$。因此，$dg^{-1},\ dk^1$、.....、dk^m 在线性无关的开稠密子集上成立，当且仅当 dk^1、.....、dk^m 在线性无关的开稠密子集上成立。□

现在我们可以陈述本节的主要结果了。我们的假设要求流形共形平坦且单连通。这是为了确保我们可以通过平行移动，将一点处的任意 tractor 延拓为整个 M 上的平行拖拉机。因此，可以将“设 $(M,\ \boldsymbol{c})$ 共形平坦且单连通”替换为“设 $(M,\ \boldsymbol{c})$ 具有平凡的共形 holonomy”。

定理 6.6. 设$(M,\boldsymbol{c})$ 共形平坦且单连通。设 $I_A=D_A\sigma$ 和$J_A=D_A\tau$对于 $\sigma,\tau\in\Gamma(\mathcal{E}[1])$ 是线性无关的平行 ***tractor***。设 $s=\tau\sigma^{-1}$，并设 $V\colon\ \mathbb{R}\setminus A\to\mathbb{R}$ 是光滑函数，其中 $A\subset\mathbb{R}$ 为有限。则哈密顿量

$$\mathcal{H}(q,p)=g_q^{-1}(p,p)+V\left(\frac{\tau}{\sigma}\right),$$

其中 $g=\sigma^{-2}\boldsymbol{g}$，具有 $2n-2$ 个函数独立的运动常数。这些运动常数为 $f_0=\mathcal{H}$，以及由对g 和$\hat{}g=\tau^{-2}\boldsymbol{g}$均为 ***Killing*** 的向量场诱导的 $f_1,\ldots,f_{2n-3}$。

证明. 设 $I^1,\ldots,I^n\in\Gamma(\mathcal{E}_A)$ 为平行 tractor，它们张成 n维子丛 $\operatorname{span}(I,J)^\perp\subset\mathcal{E}_A$。对每个 $1\le i<j\le n$，设 $K^{i,\ j}_{\ AB}=2I^i{}_{[A}I^j{}_{B]}$ 和 $k^{i,\ j}_{\ b}=\mathbb{X}^{AB}{}_bK^{i,\ j}_{\ AB}$。于是 $I^AK^{i,\ j}_{\ AB}=0=J^AK^{i,\ j}_{\ AB}$，因此根据定理 4.6，所有 $k^{i,\ j}_{\ b}$ 对 g 和 $\hat{}g$ 均为 Killing。再根据命题 6.2，$k^{i,\ j}_{\ b}$ 对 $\tilde{g}=V\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)g$ 也为 Killing。再根据命题 3.2，由 $k^{i,j}{}_b$ 诱导的函数是 $\mathcal{H}$ 的运动常数。

根据命题 6.4，由 $k^{1,\ 2},\ \ldots,\ k^{1,\ n},\ \ldots,\ k^{n-1,\ n}$诱导的 $2n-3$ 函数是函数独立的。注意，对于所有 $1\le i<j\le n$，还有 $k^{i,\ j}\in$张成空间$(\mu^2,\ \ldots,\ \mu^n)$，其中 $\mu^i{}_a=Z^{1A}{}_aI^i{}_A$，而 Z^1 是尺度 $\sigma_1=X^AI^1_A$中的投影算子。因此，根据引理 6.5，由 $g^{-1},\ k^{1,\ 2},\ \ldots,\ k^{1,\ n},\ \ldots,\ k^{n-1,\ n}$ 诱导的函数是函数独立的。□

取与上述定理中相同的 I_A 和 J_A。根据引理 6.5，微分 $dk^{i,\ j}$ 和dg^{-1}张成了 $T^*(T^*M)$的一个 $2n-2$ 维子空间。在下面的引理中，我们将明确说明它们对应于伴随拖拉子的哪个子空间，并给出相应的判据；这些判据将在第 7 节中用于证明最后一个运动常数的函数独立性。

引理 6.7. 设$(M,\boldsymbol{c})$ 具有平凡的共形 ***holonomy***，且 $I_A=D_A\sigma$ 和$J_A=D_A\tau$ 是非共线的平行 ***tractor***。设 R_{ABCD} 是具有黎曼曲率对称性且与 I 正交的平行 ***tractor***，并设 $r_{bd}=\mathbb{X}^{AB}{}_b\mathbb{X}^{CD}{}_dR_{ABCD}$。则以下条件等价

(a) r_{bd} 在尺度 $\tau=X^AJ_A$下是 ***Killing***，(b) $r_{bd}\nabla^b\tau=0$ 在 $M\setminus\mathcal{Z}(\sigma)$上，其中 $\nabla=\nabla^\sigma$，

(c) $J^D R_{ABCD} = 0$ 以及(d) 由 r_{bd} 诱导的函数与由 $k_b = \mathbb{X}^{AB}{}_b K_{AB}$ 诱导的函数并非函数独立，对于所有满足 $I^A K_{AB} = J^A K_{AB} = 0$的平行 $K_{AB} \in \Gamma(\mathcal{E}_{[AB]})$ 均如此。

证明。设 ∇ 和 $\hat{\nabla}$ 分别为 $g = \sigma^{-2}\boldsymbol{g}$ 和 $\hat{g} = \tau^{-2}\boldsymbol{g}$ 的列维-奇维塔联络，在它们有定义的地方成立。设 $\Upsilon_a = -\tau^{-1}\nabla_a\tau$ 在 $M \setminus (\mathcal{Z}(\tau) \cup \mathcal{Z}(\sigma))$ 上。这就是公式 (2.6) 中的同一个 Υ。$\nabla_a r_{bd}$ 的共形变换律为

$$\hat{\nabla}_a r_{bd} - \nabla_a r_{bd} = 2\Upsilon_a r_{bd} - \Upsilon_b r_{ad} - \Upsilon_d r_{ba} + \Upsilon^c r_{cd}\boldsymbol{g}_{ab} + \Upsilon^c r_{bc}\boldsymbol{g}_{ad}$$

因此 $\hat{\nabla}_{(a} r_{bd)} - \nabla_{(a} r_{bd)} = \Upsilon^c r_{c(d}\boldsymbol{g}_{ab)}$ 当且仅当 $\Upsilon^b r_{bd} = 0$ 时为零。由于 $\tau\Upsilon_a = \nabla_a\tau$ 在 M 的一个稠密开子集上，这就证明了 (a) $\iff$ (b)。

命题4.7给出 (a) $\implies$ (c)，而定理 4.6 给出了逆命题 .

假设 $J^A R_{ABCD} = 0$。那么 $S^{AB} R_{ABCD} \in \Gamma(\Lambda^2(I^\perp \cap J^\perp))$。因此，对于所有 $(q, p) \in T^*M$，$S^{AB} R_{ABE[D} S^E{}_{C]}$ 始终属于由 $K_{E[D} S^E{}_{C]}$ 对所有平行$K \in \Lambda^2(I^\perp \cap J^\perp)$张成的子空间。因此，根据定理5.3和5.5，$r_{bd}$ 与相应共形 Killing 向量诱导的函数并不函数独立。

现在假设 (d) 成立。设 $I^1, \ldots\ldots, I^n$ 为在整个 M 上为$I^\perp \cap J^\perp$形成基的平行 tractor。设 $K^1, \ldots\ldots, K^{2n-3} \in \Lambda^2(I^\perp \cap J^\perp)$ 为命题 6.4中构造的最大值函数独立 Killing 向量集的延拓。则

$$2K^i{}_{E[D} S^E{}_{C]} J^D (SJ)^C = -K^i{}_{EC} (SJ)^E (SJ)^C = 0 \tag{6.8}$$

对所有 $i \leq 2n-3$均成立。由推论 5.6 的逆否命题可知，存在 $U \subset T^*M$ 的一个开子集，在该子集上，$S^{AB} R_{ABE[D} S^E{}_{C]}$ 属于 $K^i{}_{E[D} S^E{}_{C]}$ 的张成空间，其中 $S_{AB} = \mathbb{X}_{AB}{}^b p_b$ 且 $i \leq 2n-3$。然后我们限制到非空开子集 $U \subset U$，该子集由满足 $p_a p^a \neq 0$, $\tau(q) \neq 0$ 的 $(q, p) \in U$ 组成。于是

$$\begin{aligned} 8S^{AB} R_{ABE[D} S^E{}_{C]} J^D S^C{}_{A'} J^{A'} &= 4S^{AB} R_{ABED} J^D S^E{}_C S^C{}_{A'} J^{A'} - 4S^{AB} R_{ABEC} (SJ)^E (SJ)^C \\ &= -p_a p^a \tau S^{AB} R_{ABCD} X^C J^D \\ &= -p_a p^a \tau p^b r_{bd} \nabla^d \tau = 0. \end{aligned} \tag{6.9}$$

因此 $p^b r_{bd} \nabla^d \tau = 0$ 在 (q, p) 处成立。由于 U 是开集，交集 $U \cap T^*_q M$ 是 $T^*_q M$ 的生成集。因此，根据线性，$p^b r_{bd} \nabla^d \tau = 0$ 对所有 $p \in T^*_q M$ 均成立。因此，$r_{bd} \nabla^b \tau = 0$ 在 $\pi(U)$ 上成立，而后者是 M 的一个开子集。令 $V \subset \pi(U)$ 为单连通的，并将 (b) $\implies$ (c) 应用于 $(V, \boldsymbol{c}|_V)$ 上的 Killing 张量 r。由此我们得出，$J^D R_{ABCD} = 0$ 在 V 上成立。由于 $J^D R_{ABCD}$ 是平行的且 M 是连通的，因此可知 $R_{ABCD} J^D = 0$ 在 M 上成立。于是我们证明了 (c) 成立。□

引理 6.8。设$(M, \boldsymbol{c})$ 具有平凡的共形 *holonomy*，且令 $I_A = D_A\sigma$ 和 $J_A = D_A\tau$ 为不共线的平行 *tractor*。令 $\iota = I_A I^A$ 和 $\kappa = I_A J^A$，并设$(\iota, \kappa) \neq (0, 0)$。设 R_{ABCD} 为具有黎曼曲率对称性的平行 *tractor*，且与 I 正交，并令 $r_{bd} = X^A Z^B{}_b X^C Z^D{}_d R_{ABCD}$。则以下各项等价，

(a) 存在 $\lambda \in \mathbb{R}$，使得 $r_{bd} - \lambda\sigma^2\boldsymbol{g}_{bd}$ 在尺度 $\tau = X^A J_A$下是 *Killing*，

(b) 存在 $\lambda\in\mathbb{R}$，使得 $r_{bd}\nabla^b\tau=\lambda\sigma^2\nabla_d\tau$ 在 $M\setminus\mathcal{Z}(\sigma)$上，其中 $\nabla=\nabla^\sigma$，(c) 存在常数 $\lambda\in\mathbb{R}$，使得 $J^A(R_{ABCD}-\lambda G_{ABCD})=0$，其中 $G_{ABCD}=(h\owedge(I^2-\frac{\iota}{2}h))_{ABCD}$，(d) 存在一个与 $\bar{R}$ 具有相同无迹部分的平行 $S_{ABCD}\in I^\perp\cap J^\perp$，以及(e) 由 r_{bd} 诱导的函数与由 $\sigma^2\boldsymbol{g}$ 和 $k_b=X^AZ^B{}_bK_{AB}$ 诱导的函数并非函数独立，对所有满足 $I^AK_{AB}=J^AK_{AB}=0$的平行 $K_{AB}\in\Gamma(\mathcal{E}_{[AB]})$ 均成立。

证明。注意到，G_{ABCD} 是平行的，$I^AG_{ABCD}=0$ 和 $X^AZ^B{}_bX^CZ^D{}_dG_{ABCD}=\sigma^2\boldsymbol{g}$。等价关系 (a) $\iff$ (b) $\iff$ (c) 源于引理 6.7 中的相同对应关系。

蕴含关系 (c) $\implies$ (d) 显然。反之则由引理 4.12 得出，该引理指出，G_{ABCD} 张成纯迹且正交于 I的曲率拖拉机空间，从而得到 $S-R=\lambda G$。

蕴含关系 (a) $\implies$ (e) 源于引理 6.7 的 (a) $\implies$ (d)

令 $K^{i,\ j}{}_{AB}=2I^i{}_{[A}I^j{}_{B]}$ 对每个 $1\leq i<j\leq n$ 为$\Lambda^2(I^\perp\cap J^\perp)$的平行截面的一个生成集，其中 I^1, ……，I^n 是 $I^\perp\cap J^\perp$的一个平行基。然后令 $k^{i,\ j}{}_b=\mathbb{X}^{AB}{}_bK^{i,\ j}{}_{AB}$。

假设 (e) 成立，也就是说，r 与 $k^{i,\ j}$ 和 $\sigma^2\boldsymbol{g}$函数相关。于是，根据推论 5.6 的逆否命题，存在定义在某个开子集 $\hat{U}\subset T^*M$ 上的函数 $\lambda^{i,\ j}$ 和 λ，使得

$$S^{AB}R_{ABE[D}S^E{}_{C]}=\sum_{i,j}\lambda^{i,j}(q,p)K_{E[D}S^E{}_{C]}+\lambda(q,p)S^{AB}G_{ABE[D}S^E{}_{C]},\tag{6.10}$$

其中 $S_{AB}=\mathbb{X}_{AB}{}^bp_b$。接着，我们将范围限制在子集 $U\subset\hat{U}$，该子集由满足 $\sigma(q)\neq0$、$\tau(q)\neq0$、$\kappa\sigma-\iota\tau\neq0$ 和 $\nabla_a\tau\neq0$的 $(q,\ p)\in\hat{U}$组成。由于 σ、τ和 $\kappa\sigma-\iota\tau$都是尺度因子，且根据引理 6.1，$\nabla_a\tau=\sigma(ds)_a$ 在 M的一个开稠密子集上非零，因此 U非空。然后将 $J^C(SJ)^D$缩并到 (6.10) 中，得到

$$\begin{aligned}&8S^{AB}R_{ABE[D}S^E{}_{C]}J^D(SJ)^C=8\lambda(q,p)S^{AB}G_{ABE[D}S^E{}_{C]}J^D(SJ)^C,\\\implies&-\tau p_ap^ap^bX^AZ^B{}_bX^CJ^DR_{ABCD}=\lambda(q,p)\tau p_ap^ap^bX^AZ^B_bX^CJ^DG_{ABCD}\end{aligned}$$

其中，$K^{i,j}$ 中的项根据 (6.8) 消失。在尺度 σ 下展开上述表达式，得到

$$-p_ap^a\tau p^br_{bd}\nabla^d\tau=-\lambda(q,p)p_ap^a\tau\sigma^2p^b\boldsymbol{g}_{bd}\nabla^d\tau\implies p^br_{bd}\nabla^d\tau=\lambda(q,p)\sigma^2p^d\nabla_d\tau.$$

接着，我们将 I^CJ^D 与 (6.10) 收缩。由于 $K^{i,j}$与 I,J正交，因此得到

$$4S^{AB}R_{ABED}S^E{}_CI^CJ^D=4\lambda(q,p)S^{AB}G_{ABED}S^E{}_CI^CJ^D.$$

我们在尺度 σ下进行计算，得到 $S^E{}_CI^C=-\frac{1}{2}\sigma Z^E{}_ep^e$，因此

$$\begin{aligned}\sigma p^bp^cX^AZ^B{}_bZ^C{}_cJ^DR_{ABCD}&=\sigma\lambda(q,p)p^bp^cX^AZ^B{}_bZ^C{}_cJ^DG_{ABCD}\\&=-\lambda(q,p)\sigma\left(\sigma\kappa-\iota\tau\right)p_bp^b,\end{aligned}$$

我们将其写为 $p^bp^cB_{bc}=-\lambda(q,p)(\sigma\kappa-\iota\tau)p_cp^c$，其中 $B_{bc}=X^AZ^B{}_{(b}Z^C{}_{c)}J^DR_{ABCD}$。

由于在q,p处有$(\sigma\kappa-\iota\tau)p_cp^c\neq0$，我们可以从推导出的两个恒等式中消去 λ，得到

$$-(\sigma\kappa-\iota\tau)p_cp^cp^br_{bd}\nabla^d\tau=\sigma^2p^d\nabla_d\tau p^bp^cB_{bc}.\tag{6.11}$$

令 $p \in T^*_qM \cap U$变化，上述结论在 T^*_qM的一个开子集上成立。两个多项式在 $\mathbb{R}^n$ 的一个开子集上相等，当且仅当它们在$\mathbb{R}^n$上处处相等。因此，(6.11)在 T^*_qM上成立。

若 $p \in T^*_qM$ 满足 $p^d\nabla_d\tau = 0$ 和 $p_cp^c \neq 0$，则由 (6.11) 可得 $p^br_{bd}\nabla^d\tau = 0$。由于 $(\nabla_d\tau|_q)^\perp$ 的维数为 $n-1 > n/2$，它不可能是全零子空间。因此，与 $\nabla_d\tau$ 正交的非零 p 在 $(\nabla_d\tau|_q)^\perp$ 中稠密。所以对所有 $p \in (\nabla_d\tau|_q)^\perp$，都有 $p^br_{bd}\nabla^d\tau = 0$。由此可知，存在一个 $c_q \in \mathbb{R}$，使得 $r_{bd}\nabla^d\tau = c_q\sigma^2\nabla_b\tau$ 在 q 处成立。遍历 $q \in V := \pi(U)$，可得对所有 $(q,\ p) \in U$，$\lambda(q,\ p) = c_q$。因此，记 $\lambda(q) = c_q$，我们有

$$p^bX^AZ^B{}_bX^CJ^DR_{ABCD} = \lambda(q)p^bX^AZ^B{}_bX^CJ^DG_{ABCD} \quad \text{and}$$
$$p^bp^cX^AZ^B{}_bZ^C{}_cJ^DR_{ABCD} = \lambda(q)p^bp^cX^AZ^B{}_bZ^C{}_cJ^DG_{ABCD}$$

对所有 $(q,\ p) \in U$。对于每个固定的 q，上述内容都是定义在 T^*_qM 的某个开子集上的多项式。因此，这些恒等式对所有 $q \in \pi(U)$ 和 $p \in T^*_qM$ 都成立。也就是说，

$$X^AZ^B{}_bX^CJ^DR_{ABCD} = \lambda X^AZ^B{}_bX^CJ^DG_{ABCD} \quad \text{and}$$
$$X^AZ^B{}_{(b}Z^C{}_{c)}J^DR_{ABCD} = \lambda X^AZ^B{}_{(b}Z^C{}_{c)}J^DG_{ABCD}$$

在 $V = \pi(U)$ 上 $\subset M$ 开。因此，在 V

$$\begin{aligned}\nabla_{(c}\big(X^AZ^B{}_{b)}X^CJ^DR_{ABCD}\big) &= X^AZ^B{}_{(b}Z^C{}_{c)}J^DR_{ABCD} - \boldsymbol{g}_{bc}\,X^AY^BX^CJ^DR_{ABCD}\\ &= X^AZ^B{}_{(b}Z^C{}_{c)}J^DR_{ABCD},\end{aligned}$$

因为 $R \in I^\perp$，所以将 R 换成 G 后，同样的结论也成立。因此，

$$X^AZ^B{}_{(b}Z^C{}_{c)}J^DR_{ABCD} = \lambda X^AZ^B{}_{(b}Z^C{}_{c)}J^DG_{ABCD} + (\nabla_{(c}\lambda)X^AZ^B{}_{b)}X^CJ^DG_{ABCD}$$
$$\implies 0 = (\nabla_{(c}\lambda)X^AZ^B{}_{b)}X^CJ^DG_{ABCD} = (\nabla_{(c}\lambda)(\nabla_{b)}\tau)$$

由于在整个 V 上 $\nabla_b\tau \neq 0$，我们得出 $\nabla_b\lambda = 0$ 在 V 上成立。因此，如有必要，将范围限制在一个连通开子集上后，λ 在 V 上为常数。所以

$$\nabla^b\tau r_{bd} = \lambda\sigma^2\nabla_d\tau$$

在 V 上，且 λ 为常数。因此，我们将 (b) $\implies$(c) 应用于 $r_{bd}|_{V'}$ 和 $(V',\ \boldsymbol{c}|_{V'})$，其中 V' 是 V 的一个单连通子集，故其共形 holonomy 平凡。由此可知，$J^A(R_{ABCD} - \lambda G_{ABCD}) = 0$ 在 V' 上成立，进而 $J^A(R_{ABCD} - \lambda G_{ABCD}) = 0$，因为它是平行的，且 M 连通。至此完成 (e) $\implies$(c) 的证明。

□

注 6.9。假设（ι、κ）$\neq$（0，0）不可省略。在 $\mathbb{R}^n$、$n \geq 3$ 上，令 I 为欧氏尺度牵引子，并令 $J = I^1$，使得 $\tau = q_1\sigma$、$\iota = \kappa = 0$，且 $\tau^{-2}\boldsymbol{g}$ 为上半空间度量。欧几里得 *Killing* 张量 $r = p_1p_2$ 的完全延拓与 I 正交，并且在 $\{p_1 \neq 0\}$

$$d(p_1p_2) = \frac{p_2}{2p_1}\,d|p|^2 + \Big(p_1 - \frac{p_2^2}{p_1}\Big)dp_2 - \frac{p_2}{p_1}\sum_{i\geq 3}p_i\,dp_i,$$

因此，r 在函数关系上取决于 $|p|^2$ 以及平移 p_2、……、p_n，而这些平移对于两个尺度因子都是*Killing*。然而，$r_{bd}\nabla^b\tau \propto dq_2$，而 $\sigma^2\nabla_d\tau \propto dq_1$，因此（*b*）不成立。在这种

情况下， $\kappa\sigma-\iota\tau\equiv 0$，所以在上述证明中与 $I^C J^D$ 的缩并无法提供关于 λ 的信息。

当且仅当对于每个 $q\in M$ （在其上定义了 $\mathcal{H}$ ），存在 U 的一个开邻域，使得 $\mathcal{H}|_{T^*U}$ 是二阶最大超可积的，哈密顿量 $\mathcal{H}$ 是局部二阶最大超可积的。

命题 6.4 还表明，当 V 非常数时，对于定理 6.6 的哈密顿量， $2n-3$ 是函数独立的线性运动常数的最大数量。（事实上，根据命题 6.2，对于 g 和 $V(s)g$ 的 Killing 向量，对于 $s^{-2}g=\tau^{-2}\boldsymbol{g}$ 也同样是 Killing 向量。）这就对局部最大二次超可积性提出了以下要求，

定理 6.10。设 $(M,\boldsymbol{c})$ 具有平凡的共形 *holonomy*，并设 $I_A=D_A\sigma$ 和 $J_A=D_A\tau$ 是不共线的平行 *tractor*。设 $\iota=I_AI^A$ 和 $\kappa=I_AJ^A$，并假设 $(\iota,\kappa)\neq(0,0)$。设 $s=\tau\sigma^{-1}\in C^\infty(M\setminus\mathcal{Z}(\sigma))$，设 $f\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 光滑，设 $\tilde{\sigma}=f(s)\sigma$，并设 $\tilde{I}_A=D_A\tilde{\sigma}$。设 $V(s)=f(s)^{-2}$，并考虑哈密顿量

$$\mathcal{H}(q,p)=g_q^{-1}(p,p)+V(s),$$

其中 $g=\sigma^{-2}\boldsymbol{g}$。那么 $\mathcal{H}$ 局部二阶最大超可积，当且仅当存在一个具有 *Weyl* 对称性的 W_{ABCD} ，它是某个具有曲率对称性的平行 R_{ABCD} 的无迹部分，并且满足 $I^AR_{ABCD}=0$；后者不满足引理 *6.8* 中任何一个等价性质，且

$$3\tilde{I}^AX^BZ_c^CZ_d^DX^EW_{AB[CD}\tilde{I}_{E]}=\tilde{\sigma}X^BZ_c^CZ_d^DX^EW_{AB[CD}\hat{D}_{E]}\tilde{I}^A, \tag{6.12}$$

$\tilde{\sigma}=f(s)\sigma$ 和 $I_A=D_A(\tilde{\sigma})$。

证明。假设 R_{ABCD} 是具有曲率对称性的平行 tractor，满足 $I^AR_{ABCD}=0$，并假设 $W=$无迹(R) 满足 (6.12)。那么，根据定理 4.9， $\tilde{\sigma}$ 是 $k_{bd}=X^AZ^B{}_bX^CZ^D{}_dW_{ABCD}$ 的局部 Killing 尺度，因此根据定理 3.3，存在一个 $\mathcal{H}$ 的运动常数，其二次部分为 $r_{bd}=X^AZ^B{}_bX^CZ^D{}_dR_{ABCD}$。根据命题 6.4，存在 $2n-3$ 个函数独立的线性运动常数，由共形 Killing 向量 $k_b=X^AZ^B{}_bK_{AB}$ 诱导，其中 K_{AB} 平行且与 I 和 J 正交。于是，根据引理 6.5，由 g^{-1} 诱导的函数给出 $2n-2$ 个函数独立的函数；并且根据引理 6.8 (e)，由 r_{bd} 诱导的函数与 g^{-1} 函数独立。最后，根据命题5.2， $2n-3$ 个线性运动常数、哈密顿量（二次部分为 g^{-1} ）以及二次部分为 r_{bd} 的最后一个运动常数，共构成 $2n-1$ 个函数独立的运动常数，并使 $\mathcal{H}$ 二阶最大超可积。

对于 $\mathcal{H}$，模去 $\mathcal{H}$ 的常数倍后，二次运动常数与满足 g 和 $\tilde{g}$ 均为 Killing 尺度的共形 Killing 张量一一对应。设 $\mathcal{H}$ 具有 $2n-2$ 个这样的常数， f_1，……， f_{2n-2}，再加上$\mathcal{H}$ 后使 $\mathcal{H}$ 成为二阶最大超可积系统。这些常数的二次部分 r^1，……， r^{2n-2} 是 g 的 Killing 张量。接下来，令$R^1{}_{ABCD}$，……， R^{2n-2}_{ABCD} 为相应 Killing 张量的延拓。

反设所有的 R^i 都满足引理 6.8 的条件。于是，我们可以将每个运动常数加上 $\mathcal{H}$ 的一个常数倍进行调整，使得

新的二次部分满足 $\hat{r}^i{}_{ab}\nabla^a\tau = 0$。这不会改变函数依赖关系。根据引理 6.8，$\hat{r}^i$ 都是 $\hat{g} = \tau^{-2}\boldsymbol{g}$的 Killing，因此根据命题 6.2，每个 $\hat{r}^i$ 也是 $(V(s)g)$ 的 Killing。因此，根据命题 3.2，每个 $\hat{r}^i$ 所诱导的函数本身就是一个运动常数，而每个调整后的运动常数的函数部分都是常数。

然而，这意味着这些守恒量的函数独立性归结为 $\hat{r}^i$ and g 的函数独立性。根据引理 6.8 (e)，这不可能成立，因为这些函数中的每一个都依赖于平行 $K \in \Gamma(\Lambda^2($ $I^\perp \cap J^\perp))$ 和g 的 $k_b = X^A Z^B{}_b K_{AB}$，而后者在 M流形 T^*M 上至多能生成 $2n-2$ 个函数独立的函数（包括 $\mathcal{H}$），这由命题 6.4 可知。□

在上述证明中，我们不需要考虑线性常数，因为将它们平方即可得到二次守恒量，且不改变函数依赖关系。如果我们没有将 $\mathcal{H}$ 纳入守恒量列表，那么 $\mathcal{H}$ 就依赖于 $2n-1$ 个守恒量，因为这是最大值。因此，我们可以用 $\mathcal{H}$ 替换一个守恒量，并继续上述证明。

在接下来的两节中，我们将构造并分类上述定理中二阶超可积的势函数 $V(s)$。到这两节结束时，我们将不再需要考虑局部运动常数，因为我们将证明，只有对 V 作出特定选择，才能实现局部二阶最大超可积性；对于这些选择，我们都将构造出全局运动常数。

7. Existence

本节将运用上一节所得的结果，构造二阶极大超可积哈密顿量。第 8 节将证明，在势函数为爱因斯坦缩放因子的光滑函数的哈密顿量族中，这些哈密顿量是唯一的。第 10 节将明确构造其中的一些例子。

引理 7.1. 设$(M, \boldsymbol{c})$ 共形平坦。设 $\sigma, \tau \in \Gamma(\mathcal{E}[1])$ 为近爱因斯坦尺度，$I_A = D_A\sigma$ 和 $J_A = D_A\tau$ 为相应的平行 ***tractor***。设$s = \tau\sigma^{-1} \in C^\infty(M \setminus \mathcal{Z}(\sigma))$，设 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$光滑，设 $\tilde{\sigma} = f(s)\sigma$且设 $\tilde{I}_A = D_A\tilde{\sigma}$。假设 $k_{bd} \in \Gamma(\mathcal{E}_{(bd)_0}[4])$ 是共形 ***Killing*** 张量，且 σ 是局部 ***Killing*** 尺度。那么，$\tilde{\sigma}$ 是 ***Killing*** 尺度当且仅当

$$X^B Z^C{}_c Z^D{}_d X^E \left(u(s)\left[I^A W_{AB[CD} J_{E]} + J^A W_{AB[CD} I_{E]}\right] + v(s) J^A W_{AB[CD} J_{E]}\right) = 0, \tag{7.1}$$

其中 $u(s) = (3(f(s) - sf'(s))f'(s) + sf(s)f''(s))$，且 $v(s) = (3f'(s)^2 - f(s)f''(s))$。此外，若 $R_{ABCD} \in \Gamma(I^\perp)$ 满足 W 是 R 的无迹部分，则

$$X^B Z^C{}_c Z^D{}_d X^E \left[I^A W_{AB[CD} J_{E]} + J^A W_{AB[CD} I_{E]}\right] = J^A X^B Z^C{}_c Z^D{}_d X^E R_{AB[CD} I_{E]} \quad \text{and}$$
$$J^A X^B Z^C{}_c Z^D{}_d X^E W_{AB[CD} J_{E]} = J^A X^B Z^C{}_c Z^D{}_d X^E R_{AB[CD} J_{E]}.$$

因此 (7.1) 等价于

$$X^B Z^C{}_c Z^D{}_d X^E \left(u(s) J^A R_{AB[CD} I_{E]} + v(s) J^A R_{AB[CD} J_{E]}\right) = 0. \tag{7.2}$$

证明。根据定理 4.9， $\tilde{\sigma}$ 是 Killing 尺度，当且仅当

$$3\tilde{I}^A X^B Z^C{}_c Z^D{}_d X^E W_{AB[CD}\tilde{I}_{E]} = \tilde{\sigma} X^B Z^C{}_c Z^D{}_d X^E W_{AB[CD}\hat{D}_{E]}\tilde{I}^A. \tag{7.3}$$

首先注意到，将包含 X 或 h的 tractor 加到 I_A 或 $D_A I_B$ 上，都不会改变（7.3）的值，因为它会被投影算子消去。因此我们先在尺度 σ下计算 I_A 模X，

$$\tilde{I}_A = D_A\tilde{\sigma} \overset{\text{mod } X_A}{=} \begin{pmatrix} f(s)\sigma \\ \nabla_a\tilde{\sigma}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(s)\sigma \\ \sigma f'(s)\nabla_a s\end{pmatrix} = (f(s) - sf'(s))\begin{pmatrix}\sigma\\0\end{pmatrix} + f'(s)\begin{pmatrix}\sigma s\\ \sigma\nabla_a s\end{pmatrix}$$

所以 $I_A = (f(s) - sf'(s))I_A + f'(s)J_A$模 X_A。由于 $D_A(\phi X_B) = 0$模 X， h对于任意密度 ϕ,

$$\begin{aligned} D_A\tilde{I}_B &= Z_A{}^a\nabla_a\left((f(s) - sf'(s))I_A + f'(s)J_A\right) \mod X, h\\ &= (-sf''(s))(\nabla_a s)I_B + f''(s)(\nabla_a s)J_B\\ &= \sigma^{-1}f''(s)(J_A - sI_A)(J_B - sI_B) \mod X,\end{aligned}$$

因为 $\sigma Z_A{}^a\nabla_a s = J_A - sI_A$模 X。因此，在（7.3）中取左边减去右边，得到

$$\begin{aligned} 0 = X^B Z^C{}_c Z^D{}_d X^E\Big(&(3(f(s) - sf'(s))^2 - s^2 f(s)f''(s))I^A W_{AB[CD}I_{E]}\\ &+ (3(f(s) - sf'(s))f'(s) + sf(s)f''(s))I^A W_{AB[CD}J_{E]}\\ &+ (3(f(s) - sf'(s))f'(s) + sf(s)f''(s))J^A W_{AB[CD}I_{E]}\\ &+ (3f'(s)^2 - f(s)f''(s))J^A W_{AB[CD}J_{E]}\Big).\end{aligned} \tag{7.4}$$

根据假设， σ是 W的 Killing 尺度。因此，由定理4.8， $I^A W_{AB[CD}I_{E]} = 0$，从而完成（7.1）的证明。

现在假设 W 是某个 $R \in I^\perp$的无迹部分，即

$$W_{ABCD} = R_{ABCD} - (\mathsf{P} \owedge h)_{ABCD},$$

其中 $\mathsf{P}_{BD} = \frac{1}{n}(R_{AB}{}^A{}_D - rh_{BD})$，且 $r = \frac{1}{2(n+1)}R_{AB}{}^{AB}$。应用 J^A 可得

$$J^A W_{ABCD} = J^A R_{ABCD} - 2\mathsf{P}_{B[D}J_{C]} - 2J^A\mathsf{P}_{A[C}h_{D]B}, \quad \text{and}$$

$$\begin{aligned} I^A W_{AB[CD}J_{E]} + J^A W_{AB[CD}I_{E]} = &-2\mathsf{P}_{B[D}I_C J_{E]} - 2I^A\mathsf{P}_{A[C}J_E h_{D]B} + J^A R_{AB[CD}I_{E]}\\ &-2\mathsf{P}_{B[D}J_C I_{E]} - 2J^A\mathsf{P}_{A[C}I_E h_{D]B}.\end{aligned}$$

由于 $X^B Z^C{}_c h_{BC} = 0$，可得

$$X^B Z^C{}_c Z^D{}_d X^E\left[I^A W_{AB[CD}J_{E]} + J^A W_{AB[CD}I_{E]}\right] = J^A X^B Z^C{}_c Z^D{}_d X^E R_{AB[CD}I_{E]}.$$

Similarly,

$$J^A W_{AB[CD}J_{E]} = J^A R_{AB[CD}J_{E]} - 2\mathsf{P}_{B[D}J_C J_{E]} - 2J^A\mathsf{P}_{A[C}h_{D|B|}J_{E]}, \text{so}$$

$$J^A X^B Z^C{}_c Z^D{}_d X^E W_{AB[CD}J_{E]} = J^A X^B Z^C{}_c Z^D{}_d X^E R_{AB[CD}J_{E]},$$

于是得到式 (7.2)。 □

根据定理 3.3，对于 $\mathcal{H} = g^{-1} + V(s)$，同时关于 σ 和 $\tilde{\sigma}$ 为 Killing 的秩二 Killing 张量对应于运动常数，其中 $V(s) = f(s)^{-2}$。于是

$$2v(s) = f(s)^4 V''(s) \quad \text{and} \quad -2u(s) = f(s)^4(sV''(s) + 3V'(s)). \tag{7.5}$$

现在我们需要一个引理，以从平行 tractorR_{ABCD}中恢复运动常数。

引理 7.2。设$(M, \boldsymbol{c})$ 共形平坦。设 R_{ABCD} 为具有曲率对称性的平行 *tractor*。设 $I_A = D_A\sigma$ 和 $J_A = D_A\tau$ 为平行尺度 *tractor*，并设$g = \sigma^{-2}\boldsymbol{g}$。假设 $I^A R_{ABCD} = 0$ 且

$$J^A R_{ABCD} = 2S_{B[D}T_{C]}$$

对于某些平行 *tractor* $S \in \mathcal{E}_{(BD)}$和 $T \in \Gamma(\mathcal{E}_C)$。设 $W \in C^\infty(M)$，并设 V为定义在 $\mathbb{R}$上、有限奇点集之外的光滑实值函数。设$r_{bd} = X^A Z^B{}_b X^C Z^D{}_d R_{ABCD}$。那么，函数 $r + W$是哈密顿量 $\mathcal{H} = g^{-1} + V$的运动常数，当且仅当

$$dW = V'(s)(\phi d\psi - \tfrac{1}{2}\psi d\phi),$$

其中 $\phi = \sigma^{-2}X^B X^D S_{BD}$ 且 $\psi = \sigma^{-1}X^C T_C$。

证明。根据定理 4.6，$r_{bd} = X^A Z^B{}_b X^C Z^D{}_d R_{ABCD}$是 g的 Killing 张量。因此，$r+W$是 $\mathcal{H}$ 的运动常数，当且仅当

$$0 = \{V, r\} + \left\{g^{-1}, W\right\} = -r^{ab}(dV)_b + g^{ab}(dW)_b = -r^{ab}(dV)_b + \sigma^2(dW)^a \tag{7.6}$$

在尺度 σ下计算，

$$(d\psi)_c = \sigma^{-1}Z^C{}_c T_C \quad \text{and} \quad (d\phi)_d = 2\sigma^{-2}X^B Z^D{}_d S_{BD}.$$

由于 $(dV)_a = V'(s)(ds)_a = \sigma^{-1}V'(s)\nabla_a\tau$，我们有

$$\begin{aligned} r_{bd}(dV)^d &= \sigma^{-1}V'(s)X^A Z^B{}_b X^C J^D R_{ABCD} \\ &= 2V'(s)\sigma^{-1}X^B Z^C{}_b X^D S_{B[D}T_{C]} \\ &= V'(s)\sigma^2(\phi(d\psi)_b - \tfrac{1}{2}\psi(d\phi)_b), \end{aligned}$$

因此由 (7.6) 可得结论。 □

现在我们将讨论范围限制在这样的情形：由 I 和 J 张成的子空间是非退化的，或者等价地，$\kappa^2 - \iota\jmath \neq 0$。由于我们考虑的势函数具有 $V(s) = V(\tau\sigma^{-1})$ 的形式，因此可以用常数重新缩放 I 和 J，而不改变所考虑的哈密顿量。此外，对于任意 $c \in \mathbb{R}$，我们也可以将 J 替换为 $J + cI$，因为这会将 s 替换为 $s + c$。通过这些允许的变换，我们可以归结为两种情形。

首先，假设 $\iota = I_A I^A = 0$。那么，根据非退化性，$\kappa \neq 0$。我们将 J 替换为 $J - \frac{\jmath}{2\kappa}I$，使得 J 为零，然后将 J 乘以一个常数，使得 $\kappa = I_A J^A = 1$ 和 $\iota = \jmath = 0$。

然后，如果 $\iota = I_A I^A \neq 0$，我们用 $J - \frac{\kappa}{\iota}I$ 替换 J，使 J 与 I 正交。随后重新缩放以得到 $\kappa = 0$、ι，$\jmath \in \{-1, 1\}$。

定理 7.3。 设 $(M、\ \boldsymbol{c})$ 具有平凡的共形 *holonomy*。设 $\sigma、\ \tau\ \in\ \Gamma(\mathcal{E}[1])$ 为近爱因斯坦尺度，并设 $I_A = D_A\sigma$ 和 $J_A = D_A\tau$ 为相应的平行 *tractor*。设 $s = \tau\sigma^{-1} \in C^\infty(M \setminus \mathcal{Z}(\sigma))$。设 $\iota = I_A I^A$ 和 $\jmath = J_A J^A$。假设由 I 和 J 张成的子空间是非退化的，则不失一般性地，或者

(a) I 和 J 为零且 $I_A J^A = 1$，或者(b) I 和 J 正交

且 $\iota, \jmath \in \{-1, +1\}$。

设 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 光滑，使得 $f \circ s$ 在 $M \setminus \mathcal{Z}(\sigma)$ 上非常数，并设 $V(s) = f(s)^{-2}$。若 f 满足上述情形对应的常微分方程，

(a) $v(s) = 3f'(s)^2 - f(s)f''(s) = 0$，等价地，$V''(s) = 0$ 的解为

$$V(s) = \lambda s + C.$$

(b) $u(s) = 3(f(s) - sf'(s))f'(s) + sf(s)f''(s) = 0$，等价地，$sV''(s) + 3V'(s) = 0$ 的解为

$$V(s) = \frac{\lambda}{s^2} + C.$$

则哈密顿量

$$\mathcal{H}(q,p) = g_q^{-1}(p,p) + V(s), \tag{7.7}$$

其中 $g = \sigma^{-2}\boldsymbol{g}$ 是二阶最大超可积的。

表示 $\mathcal{H}$ 运动常数二次部分的 *Killing* 张量空间 r_{bd}，由满足下式的延拓 $R_{ABCD} \in I^\perp$ 刻画

$$R_{AB[CD}\pi_{E]}{}^A = 0, \tag{7.8}$$

其中 π 是到 $I^\perp \cap J^\perp$ 上的自然平行投影。满足此条件的曲率拖拉机空间在每种情况下均由下式刻画

(a) $R_{ABCD} = R^0{}_{ABCD} + (I^2 \owedge S)_{ABCD}$，其中 $R^0 \in (I^\perp \boxplus J^\perp)$ 且 $S \in S^2(I^\perp \cap J^\perp)$。相应的运动常数为

$$r_q(p,p) - \frac{\lambda}{2}\phi(q), \tag{7.9}$$

其中 $r_{bd} = X^A Z^B{}_b X^C Z^D{}_d R_{ABCD}$ 和 $\phi = \sigma^{-2} X^A X^B S_{AB}$。

(b) $R_{ABCD} = R^0{}_{ABCD} + (J^2 \owedge S)_{ABCD}$，其中 $R^0 \in (I^\perp \cap J^\perp)$ 和 $S \in S^2(I^\perp \cap J^\perp)$。相应的运动常数为

$$r_q(p,p) + \lambda\jmath\frac{\phi(s)}{s^2}, \tag{7.10}$$

其中 $r_{bd} = X^A Z^B{}_b X^C Z^D{}_d R_{ABCD}$ 和 $\phi = \sigma^{-2} X^A X^B S_{AB}$。

由 $r_{(bd)_0}$ 给出的共形 *Killing* 张量空间，其中 r_{bd} 表示 $\mathcal{H}$ 的运动常数的二次部分，可由满足以下条件的延拓 W_{ABCD} 刻画

$$W_{AB[CD}\pi_{E]}{}^A = 0. \tag{7.11}$$

证明. 令 $\tilde{\sigma} = f(s)\sigma$，并注意到若 $u = v = 0$，则 $V'(s) = 0$，因此 $f(s)$ 为常数，这与我们的假设矛盾。我们先考虑 (a)。在这种情况下

$$\pi_{AB} = \delta_{AB} - I_A J_B - J_A I_B$$

因此，在假设 $v(s) = 0$ 的条件下，条件 (7.1) 和 (7.2) 变为

$$-u(s)X^B Z^C{}_c Z^D{}_d X^E W_{AB[CD}\pi_{E]}{}^A = 0 \text{和} -u(s)X^B Z^C{}_c Z^D{}_d X^E R_{AB[CD}\pi_{E]}{}^A = 0$$

情形 (b) 类似。令 $\iota = I_A I^A$ 和 $\jmath = J_A J^A$。于是

$$\pi_{AB} = \delta_{AB} - \iota I_A I_B - \jmath J_A J_B.$$

因此，在假设 $u(s) = 0$ 的条件下，条件 (7.1) 和 (7.2) 变为

$$-v(s)X^B Z^C{}_c Z^D{}_d X^E W_{AB[CD}\pi_{E]}{}^A = 0 \quad \text{and} \quad -v(s)X^B Z^C{}_c Z^D{}_d X^E R_{AB[CD}\pi_{E]}{}^A = 0$$

在两种情形下，任何相容的 R_{ABCD} 和 W_{ABCD} 都必须满足

$$X^B Z^C{}_c Z^D{}_d X^E W_{AB[CD}\pi_{E]}{}^A = 0 = X^B Z^C{}_c Z^D{}_d X^E R_{AB[CD}\pi_{E]}{}^A, \tag{7.12}$$

我们现在将其加强为 (7.8) 和 (7.11)。tractor $W_{AB[CD}\pi_{E]}{}^A$ 和$R_{AB[CD}\pi_{E]}{}^A$ 具有由杨图给出的对称性。此外，$W_{AB[CD}\pi_{E]}{}^A$是无迹的。(7.12) 中□的投影算子取平行 tractor 的无迹部分的不变顶槽，因此根据引理 4.3，$W_{AB[CD}\pi_{E]}{}^A = 0$。若 P 满足 $W = R - (h \owedge \mathsf{P})$，则

$$0 = W_{AB[CD}\pi_{E]}{}^A = R_{AB[CD}\pi_{E]}{}^A - 2\mathsf{P}_{A[C}\pi^A{}_E h_{D]B}.$$

$R_{AB[CD}\pi_{E]}{}^A$ 的不变顶槽于是为

$$X^E Z^C{}_c \mathsf{P}_{A[C}\pi^A{}_{E]} = 3X^B Y^D X^E Z^C{}_c \mathsf{P}_{A[C}\pi^A{}_E h_{D]B} = \tfrac{3}{2\sigma} X^B I^D X^E Z^C{}_c R_{AB[CD}\pi_{E]}{}^A =$$

因此，由引理 4.3 可得 $\mathsf{P}_{A[C}\pi^A{}_{E]} = 0$，所以 $R_{AB[CD}\pi_{E]}{}^A = 0$。

对于情形 (a)，方程 (7.8) 化为

$$R_{AB[CD}\pi_{E]}{}^A = -J^A R_{AB[CD}I_{E]} = 0,$$

这可以看作是刻画以下复合的核：

$$\lrcorner J : \square(I^\perp) \to \square(I^\perp) \quad \text{with} \quad \wedge I : \square(I^\perp) \to \square(I^\perp).$$

$\wedge I$ 的核等于 $\{U_{B[D}I_{C]} : \ U \in S^2(I^\perp)\}$。在映射 $\lrcorner J$ 下，它的原像由形如以下形式的 R 构成

$$R_{ABCD} = T_{ABCD} + (I^2 \owedge U)_{ABCD},$$

使得 $J^B U_{B[D}I_{C]} = 0$。这意味着 $J^B U_{BD} = \lambda I_D$，从而得到 $U \in S^2(I^\perp \cap J^\perp) \oplus \mathrm{span}(I^2)$。由于 $(I^2 \owedge I^2) = 0$，只需取 $U \in S^2(I^\perp \cap J^\perp)$。

现在我们应用引理 7.2 来求运动常数。由于 $J^A R_{ABCD} = 2U_{B[D}I_{C]}$，令 $\phi = \sigma^{-2}X^B X^D U_{BD}$ 和 $\psi = \sigma^{-1}X^C I_C = 1$。由于 $V'(s) = \lambda$，$r + W$ 是运动常数，当且仅当

$$dW = \lambda(\phi d\psi - \tfrac{1}{2}\psi d\phi) = -\tfrac{\lambda}{2}d\phi.$$

因此 $r - \frac{\lambda}{2}\phi$ 是运动常数，并且 $\mathcal{H}$ 是二阶最大超可积的。

情形 (b) 类似。首先，(7.8) 变为 $J^A R_{AB[CD}J_{E]} = 0$，因此我们考虑 $\wedge J \circ \lrcorner J$ 的核。这个核是 $(\lrcorner J)^{-1}\{U_{B[D}J_{C]}$ 的原像：$U \in S^2(I^\perp)\}$，它由如下形式的 R 构成

$$R_{ABCD} = T_{ABCD} + (J^2 \owedge U)_{ABCD},$$

使得 $J^B U_{B[D} J_{C]} = 0$。消去形式为 J^2 的 U 后可知，只需取 $U \in S^2(I^\perp \cap J^\perp)$。

为找出相应的运动常数，我们注意到 $J^A R_{ABCD} = \jmath 2 U_{B[D} J_{C]}$。因此令 $\phi = \sigma^{-2} X^B X^D U_{BD}$ 和 $\psi = \jmath \sigma^{-1} X^C J_C = \jmath s$。由于 $V'(s) = -2\lambda s^{-3}$， $r + W$是运动常数当且仅当

$$dW = -\frac{2\lambda\jmath}{s^3}\left(\phi ds - \frac{1}{2} s d\phi\right) = \lambda \jmath d\left(\frac{\phi}{s^2}\right).$$

因此，$r + \lambda\jmath\frac{\phi}{s^2}$ 是运动常数，且 $\mathcal{H}$ 是二阶最大超可积的。

□

上述定理在 I 和 J 为欧几里得尺度时给出谐振子，而下述定理在这种情况下给出开普勒-库仑系统。

定理 7.4。设$(M, \boldsymbol{c})$具有平凡的共形 *holonomy*。设 $\sigma, \tau \in \Gamma(\mathcal{E}[1])$ 为近爱因斯坦尺度，且 $I_A = D_A\sigma$ 和 $J_A = D_A\tau$ 为相应的平行拖拉机。设 $s = \tau\sigma^{-1} \in C^\infty(M \setminus \mathcal{Z}(\sigma))$。设 $\iota = I_A I^A$ 和 $\jmath = J_A J^A$。若由 I 和 J 张成的子空间非退化，则不失一般性，可取以下两种情况之一

(a) I 和 J 为零且 $I_A J^A = 1$，或(b) I和 J正交且 ι, $\jmath \in \{-1, +1\}$。
设 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 光滑，使得 $f \circ s$ 在 $M \setminus \mathcal{Z}(\sigma)$ 上非常数，并设 $V(s) = f(s)^{-2}$。若 f 满足上述情形对应的常微分方程；

(a) $u(s) - sv(s) = 3f(s)f'(s) - 6sf'(s)^2 + 2sf(s)f''(s) = 0$，等价地，$2sV''(s) + 3V'(s) = 0$，其解为

$$V(s) = \frac{\lambda}{\sqrt{|s|}} + C,$$

(b) $s\iota\jmath u(s) - v(s) = 3(\iota\jmath s f(s) - \iota\jmath s^2 f'(s) - f'(s))f'(s) + (\iota\jmath s^2 + 1)f(s)f''(s) = 0$，等价地，$(\iota\jmath s^2 + 1)V''(s) + 3\iota\jmath s V'(s) = 0$ 其解为

$$V(s) = \frac{\lambda s}{\sqrt{|\iota\jmath s^2 + 1|}} + C,$$

那么哈密顿量

$$\mathcal{H}(q, p) = g_q^{-1}(p, p) + V(s), \tag{7.13}$$

其中 $g = \sigma^{-2}\boldsymbol{g}$ 是二阶最大超可积的。表示 $\mathcal{H}$ 的运动常数二次部分的 *Killing* 张量空间 r_{bd}，由满足以下条件的延拓 $R_{ABCD} \in I^\perp$ 刻画：

$$J^A R_{ABCD} = 2\pi_{B[D} U_{C]}, \tag{7.14}$$

对于某个平行的 $U \in I^\perp$，其中 π是到 $I^\perp \cap J^\perp$上的自然平行投影。于是，*(a)* 和 *(b)* 的运动常数分别为

$$r_q(p, p) + \lambda\frac{\psi(q)}{\sqrt{|s|}}, \quad \textit{and} \tag{7.15}$$

$$r_q(p,p) - \lambda\iota\frac{\psi(q)}{\sqrt{|\iota\jmath s^2+1|}}, \tag{7.16}$$

分别为，其中 $r_{bd} = X^A Z^B{}_b X^C Z^D{}_d R_{ABCD}$和 $\psi = \sigma^{-1} X^A U_A$。

证明。令 $\tilde{\sigma} = f(s)\sigma$，并注意，若 $u = v = 0$，则 $V'(s) = 0$，因此 $f(s)$ 为常数，这与我们的假设矛盾。我们先考虑 (a)。在这种情况下

$$\pi_{AB} = \delta_{AB} - I_A J_B - J_A I_B.$$

因此，在假设 $u(s) = sv(s)$ 下，条件 (7.2) 变为

$$\begin{aligned} 0 &= X^B Z^C{}_c Z^D{}_d X^E \left(sv(s) J^A R_{AB[CD} I_{E]} + v(s) J^A R_{AB[CD} J_{E]}\right) \\ &= v(s) X^B Z^C{}_c Z^D{}_d X^E J^A R_{AB[CD}(J + sI)_{E]} \\ &= -v(s)\sigma^{-1} J^A X^B Z^C{}_c Z^D{}_d X^E X^F R_{AB[CD}\pi_{E]F}. \end{aligned}$$

取某个 $U \in \Gamma(I^\perp \cap J^\perp)$，令 $R = ((I \vee U) \owedge \pi)$，可得 $R \in I^\perp \setminus J^\perp$，并且

$$J^A X^B X^F R_{AB[CD}\pi_{E]F} = X^B \pi_{B[D} U_C \pi_{E]F} X^F = 0,$$

情形 (b) 类似。在这种情况下，由于 $\iota^2 = \jmath^2 = 1$,

$$\pi_{AB} = \delta_{AB} - \iota I_A I_B - \jmath J_A J_B.$$

因此，在假设 $v(s) = s\iota\jmath u(s)$ 下，条件 (7.2) 变为

$$\begin{aligned} 0 &= X^B Z^C{}_c Z^D{}_d X^E \left(u(s) J^A R_{AB[CD} I_{E]} + \iota\jmath s u(s) J^A R_{AB[CD} J_{E]}\right) \\ &= \iota u(s) X^B Z^C{}_c Z^D{}_d X^E J^A R_{AB[CD}(s\jmath J + \iota I)_{E]} \\ &= -\iota u(s)\sigma^{-1} J^A X^B Z^C{}_c Z^D{}_d X^E X^F R_{AB[CD}\pi_{E]F}. \end{aligned}$$

对任意 $U \in \Gamma(I^\perp \cap J^\perp)$ 取 $R = ((J \vee U) \owedge \pi)$，得到 $R \in I^\perp \setminus J^\perp$并且

$$J^A X^B X^F R_{AB[CD}\pi_{E]F} = X^B \pi_{B[D} U_C \pi_{E]F} X^F = 0,$$

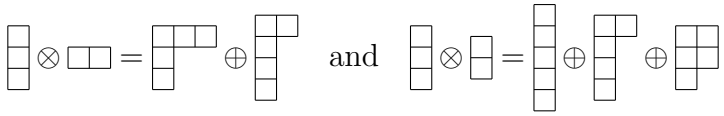
在这两种情况下，我们都证明了 $R \in I^\perp$ 满足

$$J^A X^B Z^C{}_c Z^D{}_d X^E X^F R_{AB[CD}\pi_{E]F} \tag{7.17}$$

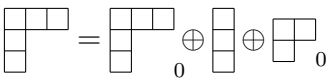
我们有

$$J^A R_{AB[CD}\pi_{EF]} = 0 \quad \text{and} \quad J^A R_{A[BCD}\pi_{E]F} = 0,$$

这迫使 $J^A R_{AB[CD}\pi_{E]F}$ 具有由 $\oplus$ 给出的对称性。投影到第一个杨图等价于对对 (BF) 进行对称化，而投影到第二个杨图等价于对对 $[BF]$ 进行反对称化，因为



式 (7.17) 中的投影算子取出完全无迹分量的顶层槽



而该分量随后必须为零。第一个迹部分由 $J^A R_{AB[CD}\pi_{E]}{}^B = 0$ 给出。最终分量的顶层槽投影算子为

$$J^A X^B Z^C{}_c X^D Y^E X^F R_{AB[CD}\pi_{E]F} = \sigma^{-1} J^A X^B Z^C{}_c X^D I^E X^F R_{AB[CD}\pi_{E]F} = 0$$

Hence, $J^A R_{AB[CD}\pi_{E]F}$在 BF这一对指标上是反对称的。因此，在情形 (a) 中

$$\begin{aligned} 0 &= 3\,\mathrm{tr}_{B,D}(J^A R_{AB[CD}\pi_{E]F} + J^A R_{AF[CD}\pi_{E]B}) \\ &= 2J^A R_{AB[C}{}^B \pi_{E]F} + J^A R_{ABEC}\pi^B{}_F + 2J^A R_{AF[C}{}^B \pi_{E]B} + nJ^A R_{AFEC} \\ &= 2J^A R_{AB[C}{}^B \pi_{E]F} + J^A R_{AFEC} + 2J^A R_{AFCE} - 2J^A R_{AF[C}{}^B I_{E]} J_B + nJ^A R_{AFEC} \\ &= (n-1)J^A R_{AFEC} + 2J^A R_{AB[C}{}^B \pi_{E]F} + 2J^A J^B R_{AFB[C} I_{E]}, \end{aligned}$$

而在情形 (b) 中，最后一项替换为 $2J^A J^B R_{AFB[C} J_{E]}$。因此，我们只需证明 $J^A J^C R_{ABCD}$ 与 π_{BD} 成比例。接着，在两种情形下，将 J^C 缩并到上式中，得到

$$0 = (n-1)J^A J^C R_{AFEC} + J^A J^C R_{ABC}{}^B \pi_{EF} - J^A J^B R_{AFBE}$$

因此 $nJ^A J^C R_{ABCD} = J^A J^C R_{AEC}{}^E \pi_{BD}$，且在情形 (a) 中，

$$J^A R_{ABCD} = \pi_{B[D} U_{C]}, \text{ where } U_C = \frac{2}{n-1}\left(J^A R_{ABC}{}^B + \frac{1}{n} J^A J^D R_{AB}{}^B{}_D I_C\right),$$

而在情形 (b) 中，上式的最后一项变为 $J^A J^D R_{AB}{}^B{}_D J_C$。

现在，我们应用引理 7.2 来求运动常数。由于 $J^A R_{ABCD} = 2\pi_{B[D}U_{C]}$，令 $\phi = \sigma^{-2} X^B X^D \pi_{BD}$ 和 $\psi = \sigma^{-1} X^C U_C$。

对于情形 (a)，我们有 $\phi = -2s$ and $V'(s) = -\frac{\lambda s}{2|s|^{5/2}}$，因此 $r + W$ 是运动常数，当且仅当

$$dW = \frac{\lambda s}{|s|^{5/2}}(s d\psi - \frac{1}{2}\psi ds) = \lambda\left(\frac{d\psi}{\sqrt{|s|}} - \frac{\psi s ds}{2|s|^{5/2}}\right) = \lambda d\left(\frac{\psi}{\sqrt{|s|}}\right).$$

因此，$r_q(p,p) + \lambda\,\psi_{(q)}\sqrt{|s|}$ 是运动常数，并且 $\mathcal{H}$ 是二阶最大超可积的。

对于情形 (b)，令 $D = 1 + \iota \jmath s^2$。则 $\phi = -\iota - \jmath s^2 = -\iota D$ and $V'(s) = \frac{\lambda}{|D|^{5/2}}$，因此 $r + W$ 是运动常数，当且仅当

$$dW = V'(s)\big(\phi\, d\psi - \tfrac{1}{2}\psi\, d\phi\big) = -\lambda\iota\, d\left(\frac{\psi}{\sqrt{|D|}}\right),$$

因此，$r_q(p,p) - \lambda\iota\,\psi_{(q)}\sqrt{|D|}$ 是运动常数，并且 $\mathcal{H}$ 是二阶最大超可积的。

□

这样，我们构造出了二阶最大超可积的哈密顿量，并将在第 10 节计算一些例子及其相关的运动常数。下一节的目标是证明，在对 V 作出给定假设的条件下，上述两个定理分类了所有可能的二阶极大超可积势。

8. Uniqueness

本节将证明，当 span(I， J) 非退化时，第 7 节所介绍的系统是共形平坦爱因斯坦流形上唯一具有由爱因斯坦缩放因子参数化的势函数的二阶极大超可积系统。

取一个正则值 c，使得 $\jmath - 2c\kappa + c^2\iota \neq 0$ 对于 s 成立，并考虑水平集 $\Sigma_c = \{q \in M : \ s(q) = c\}$。注意到， $s = \tau\sigma^{-1} = c$ 等价于 $\tau - c\sigma = 0$。因此， Σ_c 是一个近爱因斯坦尺度的零点集。关于一般共形超曲面与子流形的拖拉机演算，已有广泛研究， [8, 15]。我们讨论的近爱因斯坦尺度零点集这一情形格外优美；此类超曲面曾在 [12] 中讨论过，并且是全纯性约化的一种特殊情形 [38]。与共形超曲面相关联的是一个法拖拉机，$N_A = D_A\nu$；在我们的情形中，它是 $D_A(\tau - c\sigma) = J_A - cI_A$ 的单位长度倍数。注意

$$(J - cI)_A(J - cI)^A = \jmath - 2c\kappa + c^2\iota.$$

Σ_c 的内禀拖拉机丛可与 $N^\perp|_\Sigma = (J - cI)^\perp|_\Sigma$典范地识别。由于 N 平行， M 的拖拉机联络保持 $N^\perp$。此联络与 Σ_c的内禀拖拉机联络一致；即使对于 $dim(\Sigma_c) < 3$[8], 也可以定义这种内禀拖拉机联络。 Σ_c 的 tractor度量是将 M 的 tractor度量限制到 $N^\perp$上所得的度量。特别地，引理 4.3 适用于 Σ_c上的 tractor，由此得到以下引理。

引理 8.1。 设 $(M, \boldsymbol{c})$ 为一个连通共形流形，设 $N_A = D_A\nu$ 是一个长度非零的平行拖拉机，且其零点集 $\Sigma = \mathcal{Z}(\nu)$ 非空，则 Σ 是一个嵌入超曲面 [38, 定理 3。5]。设 $U \in \Gamma(\mathcal{V})$，其中 $\mathcal{V}$是 M的一个不可约无迹拖拉机丛。假设 $U|_\Sigma$与 N正交， $\Pi(U|_\Sigma) = 0$，且 U沿 Σ平行，即当 $v \in T\Sigma$时， $\nabla_v U = 0$。则 $U|_\Sigma = 0$。

证明。 由于 U与 N正交， $U|_\Sigma$是 $\mathcal{V}|_\Sigma$的子丛中的平行截面，而该子丛是 Σ上的不可约 tractor 丛。投影 Π 由 X和 Z的线性组合收缩到 U中构成。与 [8], 中一样， $N^\perp$中的 tractor 的投影算子 X_Σ和 Z_Σ分别就是 $X_\Sigma{}^A = X^A$ 和 $Z_\Sigma{}^A{}_a = Z^A{}_a - \epsilon Z^A{}_b n^b n_a$，其中 $n_a \in \Gamma(\mathcal{E}_a[1])$的长度为 $n^a n_a = \epsilon \in \{-1, +1\}$。

由此可得， $\Pi_\Sigma(U)$，即取投影算子 X_Σ和 Z_Σ后的 U 的顶层槽，是投影到 $T\Sigma$ 上的 $\Pi(U)$。然而，由于 $\Pi(U) = 0$，我们有 $\Pi_\Sigma(U) = 0$。事实上，可以利用 U 与 N 正交这一点，证明 $\Pi(U)$已经属于 $T\Sigma$的某个张量幂，但这里无需如此。因此，由引理 4.3 应用于共形流形 Σ，可得 $U|_\Sigma = 0$。 □

与我们在引理 4.3 后所作的评论类似，上述引理的任何具体情形都可以手动求解。设 $N_A \in \Gamma(\mathcal{E}_A)$ 且设 $U_A \in \Gamma(\mathcal{E}_A)$，二者均满足上述引理的假设。固定一个尺度 $g = \sigma^{-2}\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{c}$ 以进行计算。由于在 Σ 上有$X^A U_A = 0$，我们得到

$$0 = \nabla_v(X^A U_A) = v^a Z^A{}_a U_A$$

对所有 $v \in T\Sigma$ 均成立。接着写作 $\nu = t\sigma$，因此 $\Sigma = \mathcal{Z}(t)$。然后在 Σ

$$Z^A{}_a N_A = \nabla_a \nu = \sigma \nabla_a t \propto n_a.$$

由于 $X^A U_A = 0 = X^A N_A$ 在 Σ 上，我们也有

$$0 = h^{AB} U_A N_B = Z^A{}_a Z^{Ba} U_A N_B = n^a Z^A{}_a U_A.$$

因此 $Z^A{}_a U_A|_\Sigma = 0$。最后

$$0 = \nabla_v (Z^A{}_a U_A) = -v_a Y^A U_A$$

对于所有 $v \in T\Sigma$，因此 $Y^A U_A = 0$ 在 Σ 上，因此 $U|_\Sigma = 0$。

本节需要将上述引理应用于具有无迹对称性的拖拉机丛截面。针对该拖拉机丛的直接证明与上述证明类似，但步骤更多。□

引理 8.2. 设 $(M, \boldsymbol{c})$ 共形平坦。设 $\sigma, \tau \in \Gamma(\mathcal{E}[1])$ 为近爱因斯坦尺度，$I_A = D_A\sigma$ 和 $J_A = D_A\tau$ 为相应的平行拖拉机。设 $s = \tau\sigma^{-1} \in C^\infty(M \setminus \mathcal{Z}(\sigma))$，设 $\tilde{\sigma} = f(s)\sigma$，其中 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 非常数，且 $\tilde{\sigma}$ 在开稠密集上非零，并设 $K_A = J_A - sI_A$ 在 $M \setminus \mathcal{Z}(\sigma)$ 上。假设由 I, J 张成的空间是非退化的，或者等价地，$\kappa^2 - \iota\jmath \neq 0$，其中 $\iota = I^A I_A, \jmath = J^A J_A$ 和 $\kappa = I^A J_A$。

假设 $r_{bd} \in \Gamma(\mathcal{E}_{(bd)}[4])$ 是 σ 上的 ***Killing*** 张量，并假设 $\tilde{\sigma}$ 是 $k_{bd} = r_{(bd)_0}$ 的 ***Killing*** 尺度。那么存在一个函数 $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得每当 $K_A K^A = \iota s^2 - 2\kappa s + \jmath \neq 0$ 时，

$$(\iota u(s) + \kappa v(s)) J^A K^C R_{AB[CD} \hat{K}_{E]} + w(s) J^A K^C R_{AB[CD} \hat{I}_{E]} = \beta(s) \hat{h}_{B[D} \hat{K}_{E]}, \tag{8.1}$$

其中 $w(s) = (s\iota - \kappa)u(s) + (s\kappa - \jmath)v(s)$，$\hat{K}_B = 2K^A I_{[A} J_{B]}$、$\hat{I}_B = 2I^A I_{[A} J_{B]}$、$\hat{h}_{BD} = \overline{h_{BD}} = \frac{1}{K_A K^A} K_B K_D$，并且 R_{ABCD} 是 σ 尺度下 r_{bd} 的完全延拓。

证明。我们先计算

$$\hat{K}_B = 2K^A I_{[A} J_{B]} = (\kappa - s\iota) J_B - (\jmath - s\kappa) I_B \quad \text{and} \quad \hat{I}_B = 2I^A I_{[A} J_{B]} = \iota J_B - \kappa I_B.$$

因此，我们可以将 I 和 J 表示为 K 和 I 的线性组合。

$$\iota \hat{K}_B - (\kappa - s\iota)\hat{I}_B = (\kappa^2 - \iota\jmath) I_B \quad \text{and} \quad \kappa \hat{K}_B - (\jmath - s\kappa)\hat{I}_B = (\kappa^2 - \iota\jmath) J_B.$$

因此，由（7.2）可得，

$$\begin{aligned} 0 &= (\kappa^2 - \iota\jmath) X^B Z^C{}_c Z^D{}_d X^E \left(u(s) J^A R_{AB[CD} I_{E]} + v(s) J^A R_{AB[CD} J_{E]} \right) \\ &= X^B Z^C{}_c Z^D{}_d X^E \big((\iota u(s) + \kappa v(s)) J^A R_{AB[CD} \hat{K}_{E]} + w(s) J^A R_{AB[CD} \hat{I}_{E]} \big). \end{aligned}$$

我们有 $K_A = \nabla^\sigma_a \tau Z^a{}_A$ 模 X，因此根据上述结果，

$$0 = X^B K^C Z^D{}_d X^E \big((\iota u(s) + \kappa v(s)) J^A R_{AB[CD} \hat{K}_{E]} + w(s) J^A R_{AB[CD} \hat{I}_{E]} \big)$$

固定一个值 $s = \alpha$，使得 $K_A K^A = \sigma^2 \boldsymbol{g}(ds, ds) = \iota\alpha^2 - 2\alpha\kappa + \jmath \neq 0$，因此水平集 $\Sigma_\alpha = \{q \in M \setminus \mathcal{Z}(\sigma) : s(q) = \alpha\}$ 是 $M \setminus \mathcal{Z}(\sigma)$ 中的一个超曲面。然后考虑 tractor

$$V_{BDE} = K^C \big((\iota u(s) + \kappa v(s)) J^A R_{AB[CD} \hat{K}_{E]} + w(s) J^A R_{AB[CD} \hat{I}_{E]} \big)$$

因此 $V_{BDE} \in K^\perp$，因为 $J^A K^B R_{ABCD} = 0$，这也给出

$$4V_{[BDE]} = K^C \big((\iota u(s) + \kappa v(s)) J^A R_{A[BCD} \hat{K}_{E]} + w(s) J^A R_{A[BCD} \hat{I}_{E]} \big) = 0.$$

然而， V_{BCD} 并非无迹。因此，我们取 V 关于 $K^\perp$ 上度量 $\hat{}$ $h_{BD} = h_{BD} - \frac{1}{K_A K^A} K_B K_D$ 的无迹部分。也就是说，令

$$V^\circ{}_{BDE} = V_{BDE} - \frac{2}{n} V_A{}^A{}_{[E} \hat{h}_{D]B},$$

由于 $V \in K^\perp$，其关于标准 tractor 度量与 K 正交且无迹。因此， V° 属于不可约 tractor 丛 $_0$。由于 V° 是平行 tractor 的线性组合，其系数是 s 的函数，因此可知 V° 沿 Σ_α 平行。最后，我们有 $X^B Z^D{}_d X^E V^\circ{}_{BDE} = 0$。所以，根据引理 8.1， $V^\circ = 0$ 在每个 Σ_α 上成立。根据引理 6.1，对于正则值 $s = \alpha$ ，超曲面填充了 $M \setminus \mathcal{Z}(\sigma)$ 的一个稠密子集。因此， $V^\circ = 0$ 在 $M \setminus \mathcal{Z}(\sigma)$ 上成立。

最后，由于 $\hat{}K \in K^\perp$，我们有

$$0 = \hat{K}^B V^\circ{}_{BDE} = \frac{2}{n} V_A{}^A{}_{[E} \hat{h}_{D]B} \hat{K}^B = \frac{2}{n} V_A{}^A{}_{[E} \hat{K}_{D]}$$

所以 $V_A{}^A{}_E \propto \hat{}K_E$。然后，由于 $\hat{}K$ 和 $V_A{}^A{}_E$ 沿每个 Σ_α 平行，因此可知它们通过 s 的一个函数相关。□

假设由 I 和 J 张成的子丛是非退化的，则存在一个投影 $\pi\colon \mathcal{E}_A \to I^\perp \cap J^\perp$。回忆引理 6.8 中的 tractor $G_{ABCD} = (h \owedge (II - \frac{\iota}{2} h))$。若 $U_A \in I^\perp \cap J^\perp$，则

$$J^A J^C U^B G_{ABCD} = \kappa^2 U_D - \iota\jmath U_D.$$

因此，我们可以取 $\pi_{BD} = \frac{1}{\kappa^2 - \iota\jmath} J^A J^C G_{ABCD}$作为到 $I^\perp \cap J^\perp$上的平行投影。此外，我们可以计算

$$J^A G_{ABCD} = 2\kappa h_{B[D} I_{C]} - 2\iota h_{B[D} J_{C]} + 2 I_B J_{[C} I_{D]} = -2 h_{B[D} \hat{I}_{C]} + 2 I_B J_{[C} I_{D]},$$

所以 $J^A G_{AB[CD} \hat{}I_{E]} = 0$，因为 $\hat{}\, I \in$张成空间(I, J)。与 J^C收缩得到

$$0 = 3 J^A J^C G_{AB[CD} \hat{I}_{E]} = (\kappa^2 - \iota\jmath)\big(2\pi_{B[D} \hat{I}_{E]} - J^A G_{ABDE}\big),$$

也就是说， $J^A G_{ABDE} = 2\pi_{B[D} \hat{}I_{E]}$。

定理 8.3. 设 $(M, \boldsymbol{c})$ 是一个维数为 $n \geq 3$ 的共形平坦连通流形。设 $\sigma, \tau \in \Gamma(\mathcal{E}[1])$ 为近爱因斯坦尺度， I_A, J_A 为对应的平行 *tractor*。设 $s = \tau\sigma^{-1}$ 且设 $\tilde{\sigma} = f(s)\sigma$，其中某个光滑的 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足 $\tilde{\sigma}$ 在 M 的一个开稠密子集上非零。

假设由 I, J 张成的空间是非退化的，或者等价地， $\kappa^2 - \iota\jmath \neq 0$。如果哈密顿量

$$\mathcal{H}(q, p) = g_q^{-1}(p, p) + \frac{1}{f(s)^2} = g_q^{-1}(p, p) + V(s), \tag{8.2}$$

其中 $g = \sigma^{-2}\boldsymbol{g}$ 和 $V(s) = f(s)^{-2}$ 是二阶最大超可积的，那么 f 满足以下任一方程：

(a) $\omega(s) = \iota u(s) + \kappa v(s) = 0$ 或 $w(s) = ($

(b) $s\iota - \kappa) u(s) + (s\kappa - \jmath) v(s) = 0,$

其中 $u(s)$ 和 $v(s)$如引理 *7.1* 所述。

证明。由于结论是局部的，我们可以用一个单连通开子集替换 M，并因此假设 $(M, \boldsymbol{c})$ 的共形 holonomy 平凡。假设 $\mathcal{H}$ 是二阶最大超可积的。由 I 和 J 张成的子空间的非退化性可知 $(\iota, \kappa) \neq (0,0)$，因此由定理 6.10 和引理 8.2，存在一个在 $I^\perp$ 中具有曲率对称性的平行 R_{ABCD}，使得对所有 $\lambda \in \mathbb{R}$，$R_{ABCD} - \lambda G_{ABCD} \notin J^\perp$，且 (8.1) 成立

$$(\iota u(s) + \kappa v(s)) J^A K^C R_{AB[CD} \hat{K}_{E]} + w(s) J^A K^C R_{AB[CD} \hat{I}_{E]} = \beta(s) \hat{h}_{B[D} \hat{K}_{E]}, \tag{8.3}$$

其中，对于满足 $K_A K^A = \iota s^2 - 2\kappa s + \jmath \neq 0$ 的所有点 $q \in M$，都有 $K_A = J_A - sI_A$、$\hat{}K_B = 2K^A I_{[A} J_{B]}$、$\hat{}I_B = 2I^A I_{[A} J_{B]}$ 和 $\hat{}h_{BD} = h_{BD} - \frac{1}{K_A K^A} K_B K_D$。形式 $2I_{[A} J_{B]}$ 在由 I 和 J 张成的子空间上起着体积元的作用，其行列式为 $\iota\jmath - \kappa^2$。因此，$\hat{}K$ 的平方长度为 $(\iota\jmath - \kappa^2)(\iota s^2 - 2\kappa s + \jmath) \neq 0$。我们利用 $K^A \hat{}K_A = 0$ 和 $I^A \hat{}I_A = 0$ 重写 (8.3)。得到

$$2(\iota u(s) + \kappa v(s)) J^A K^C R_{ABC[D} \hat{K}_{E]} + 3w(s) J^A J^C R_{AB[CD} \hat{I}_{E]} = 3\beta(s) \hat{h}_{B[D} \hat{K}_{E]}. \tag{8.4}$$

注意到，在所有指标上，$J^A K^C R_{AB[CD} \hat{}I_{E]}$ 都与 K 和 I 正交，因此它与 I 和 J 的张成空间正交，其中包括 K。令 $U_{BD} = 3\beta(s) h_{BD} - 2(\iota u(s) + \kappa v(s)) J^A K^C R_{ABCD}$，使得

$$3w(s) J^A J^C R_{AB[CD} \hat{I}_{E]} = 2U_{B[D} \hat{K}_{E]} \in \hat{K}^\perp.$$

于是 $\hat{}K^B U_{B[D} \hat{}K_{E]} = 0$，因此 $\hat{}K^B U_{BD} \propto \hat{}K_D$。接着将 $\hat{}K^E$ 收缩到上式中，得到

$$0 = \hat{K}_E \hat{K}^E U_{BD} - \hat{K}^E U_{BE} \hat{K}_D \implies U_{BD} \propto \hat{K}_B \hat{K}_D,$$

因为 $\hat{}K_A \hat{}K^A \neq 0$ 且 $\hat{}K^B U_{BD} \propto \hat{}K_D$。因此，

$$2U_{B[D} \hat{K}_{E]} = 3w(s) J^A J^C R_{AB[CD} \hat{I}_{E]} = 0$$

所以，要么 $w(s)$ 在整个 $M \setminus \mathcal{Z}(\sigma)$ 上 $= 0$，要么 $M \setminus \mathcal{Z}(\sigma)$ 上存在一点，使得

$$J^A J^C R_{AB[CD} \hat{I}_{E]} = \iota J^A J^C R_{AB[CD} J_{E]} - \kappa J^A J^C R_{AB[CD} I_{E]} = 0,$$

由于它是平行的且 M 连通，因此该结论在整个 M 上成立。接着，由 (8.4)，

$$2(\iota u(s) + \kappa v(s)) J^A J^C R_{ABC[D} \hat{K}_{E]} = 3\beta(s) \hat{h}_{B[D} \hat{K}_{E]}$$

现在假设在某点 $q \in M$ 处，$(\iota u(s) + \kappa v(s)) \neq 0$。那么在 q 处，存在 c_1 和 c_2，使得

$$J^A J^C R_{ABCD} = c_1 \hat{h}_{BD} + c_2 \hat{K}_B \hat{K}_D$$

在 q处。右侧映射 $U \in I^\perp \cap J^\perp$到 $c_1 U$，而左侧与 I和 J正交。这完全确定了 $J^A J^C R_{ABCD} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{E}^B, \mathcal{E}_D)|_q$。因此，在 q处，

$$J^A J^C R_{ABCD} = c_1 \pi_{BD},$$

其中 $\pi_{BD} = \frac{1}{\kappa^2 - \iota\jmath} J^A J^C G_{ABCD}$是平行投影 $\pi\colon \mathcal{E}_B \to I^\perp \cap J^\perp$，由于两个 tractor 都是平行的，因此这在整个 M 上成立。结合我们的两个结论可得

$$0 = 3J^A J^C R_{AB[CD} \hat{I}_{E]} = 2c_1 \pi_{B[D} \hat{I}_{E]} + (\iota\jmath - \kappa^2) J^A R_{ABDE}$$

$$\implies J^A R_{ABDE} = -\frac{2c_1}{\iota\jmath - \kappa^2} \pi_{B[D} \hat{I}_{E]} = -\frac{c_1}{\iota\jmath - \kappa^2} J^A G_{ABDE}.$$

然而，这与定理 6.10 中关于 R 的假设相矛盾，也就是引理 6.8 的等价条件，因为 $R+\frac{c_1}{\iota\jmath-\kappa^2}G$ 与 J正交。□

推论 8.4. 设 $(M,\boldsymbol{c})$ 是一个维数为 $n\geq 3$ 的共形平坦单连通流形。设 $\sigma,\tau\in\Gamma(\mathcal{E}[1])$ 为近爱因斯坦尺度，且 I_A，J_A为相应的平行 *tractor*。令 $s=\tau\sigma^{-1}$，并令 $\tilde{\sigma}=f(s)\sigma$，其中某个光滑的$f\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得 $\tilde{\sigma}$ 在 M的一个开稠密子集上非零。假设由 I 和 J 张成的子空间是非退化的。那么不失一般性，我们考虑两种情形（见定理 7.3）。

假设 I 和 J 是零的，且 $I_AJ^A=1$。那么哈密顿量

$$\mathcal{H}(q,p)=g_q^{-1}(p,p)+\frac{1}{f(s)^2}=g_q^{-1}(p,p)+V(s), \tag{8.5}$$

其中 $g=\sigma^{-2}\boldsymbol{g}$ 和 $V(s)=f(s)^{-2}$，当且仅当 f 满足以下任一方程时，才是二阶最大超可积的

$$v(s)=\frac{f(s)^4}{2}V''(s)=0,\quad in\ which\ case\quad V(s)=as+b$$

or

$$u(s)-sv(s)=-\frac{f(s)^4}{2}(2sV''(s)+3V'(s))=0,\quad in\ which\ case\quad V(s)=\frac{a}{\sqrt{|s|}}+b$$

令 $\iota=I_AI^A$和 $\jmath=J_AJ^A$。假设 I和 J正交，且 ι、$\jmath\in\{-1,+1\}$。那么哈密顿量

$$\mathcal{H}(q,p)=g_q^{-1}(p,p)+\frac{1}{f(s)^2}=g_q^{-1}(p,p)+V(s), \tag{8.6}$$

当且仅当 f 满足以下任一方程时，才是二阶最大超可积的

$$u(s)=-\frac{f(s)^4}{2}(sV''(s)+3V'(s))=0,\quad in\ which\ case\quad V(s)=\frac{a}{s^2}+b$$

or

$$v(s)-\iota\jmath su(s)=\frac{f(s)^4}{2}((\iota\jmath s^2+1)V''(s)+3\iota\jmath sV'(s))=0,\quad in\ which\ case\quad V(s)=a\frac{s}{\sqrt{|\iota\jmath s^2+1|}}+b.$$

我们为势函数 $V(s)$ 选择参数的方式，受到两个经典结果的启发。第一个是伯特兰定理的二阶类比，它是一个特例；第二个是 Evans 对三维二阶最大超可积系统的分类 [9]；见第 10 节。

考虑所有可能的尺度 tractor，它们是 I_A、J_A 和 X_A 的函数系数组合。也就是说，尺度密度 $\tilde{\sigma}$ 满足

$$f_1I_A+f_2J_A=D_A\tilde{\sigma}\mod X_A$$

对 X^A 进行缩并可得

$$f_1\sigma+f_2\tau=\tilde{\sigma},$$

而改为收缩 $Z^A{}_a$，尺度 σ中的投影算子 $Z^A{}_a$，得到

$$f_2\nabla^\sigma{}_a\tau=\nabla^\sigma{}_a\tilde{\sigma}=\sigma(df_1)_a+\tau(df_2)_a+f_2\nabla^\sigma{}_a\tau$$

因此， $\sigma(df_1)_a + \tau(df_2)_a = 0$，并且在 σ的零点集之外，$(df_1)_a = -s(df_2)_a$。取外微分得 $0 = (ds)\wedge(df_2)_a$，因此 df_1 和 df_2 都是 ds的倍数。在 ds的零点集之外（该集合处处稀疏），这意味着 f_1 和f_2 可以写成 s的函数。这意味着

$$\tilde{\sigma} = (f_1(s) + sf_2(s))\sigma = f(s)\sigma,$$

因此，本节所考察的势函数类具有一般性，因为它们是以函数系数对 I、J 和 X 取线性组合得到的。

9. Families of Hamiltonians

超可积系统通常以势函数线性族 [9, 28,34, 36]的形式给出。一个经典例子是 $\mathbb{R}^n$上的各向同性谐振子，

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}|p|^2 + \omega^2|q|^2 + \frac{\lambda_1}{q_1^2} + \cdots + \frac{\lambda_n}{q_n^2} + \lambda_0. \tag{9.1}$$

（$N+1$）哈密顿量线性族是在 T^*M 上的一组函数，由 $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ 参数化，其形式为

$$\mathcal{H}^\lambda(q,p) = g_q^{-1}(p,p) + \lambda_1 V_1(q) + \cdots + \lambda_N V_N(q) + \lambda_0, \tag{9.2}$$

其中 g是 M上的固定度量。对于 $\mathcal{H}^\lambda$，二次运动积分线性族是在 T^*M上的一组函数，由 $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$参数化，其形式为

$$r^\lambda(q,p) = r_q(p,p) + \lambda_1 W_1(q) + \cdots + \lambda_N W_N(q) + c(\lambda) \tag{9.3}$$

其中 c是参数的仿射函数，满足 $\left\{\mathcal{H}^\lambda,\ r^\lambda\right\} = 0$对所有 $\lambda \in \mathbb{R}^{N+1}$均成立。

参数族中的哈密顿量和运动常数对 λ 的依赖通常在符号 $\mathcal{H}$ 和 r 中省略。

定理 9.1。 设 $(M, \boldsymbol{c})$ 为一个共形流形，设 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{E}[1])$ 为一个尺度因子，设 $g = \sigma^{-2}\boldsymbol{g}$，并设 V_1、……、V_N为势函数，考虑族 $\mathcal{H}^\lambda$ (9.2)。则 $N+1$ 的参数族中的二次运动常数（模去 $\mathcal{H}^\lambda$ 的常数倍以及 λ的加性仿射函数）与秩二共形 *Killing* 张量之间存在线性同构，其中 g、$V_1 g$、……、$V_N g$均为 *Killing* 尺度。 $\mathcal{H}^\lambda$ 的线性运动常数与满足 g、$V_1 g$、……、$V_N g$均为 *Killing* 尺度的共形 *Killing* 向量一一对应。

证明。 定义一个线性映射 Φ，将式 (9.3) 中二次运动常数的线性族空间映射到共形 Killing 张量空间，其定义为 $\Phi(r^\lambda) = $无迹$(r)$。固定某个族 r^λ，对每个 i 取 $\lambda_i = 1$，并令其他参数为零，可得

$$\left\{g^{-1} + V_i, r + W_i\right\} = 0$$

对于每个 $i \in \{1, \ldots, N\}$。因此，根据定理 3.3， $V_1 g$、……、$V_N g$中的每一个都是k的 Killing 尺度。

反之，假设对于 g、$V_1 g$、……、$V_N g$中的每一个，k都是一个共形 Killing 张量，且它们都是 Killing 尺度。则根据定理 3.3，存在函数 W_1、……、W_N，使得对于每个 i,

$$\left\{g^{-1}+V_i, r+W_i\right\}=\left\{g^{-1}, r\right\}+\left(\left\{V_i, r\right\}+\left\{g^{-1}, W_i\right\}\right)=0,$$

每一阶的项都分别独立地消失。因此

$$\left\{\mathcal{H}^\lambda, r^\lambda\right\}=\left\{g^{-1}, r\right\}+\sum_{i=1}^N \lambda_i\left(\left\{V_i, r\right\}+\left\{g^{-1}, W_i\right\}\right)=0$$

因此，Φ 是从运动常数线性族空间到满足 $g, V_1 g, \ldots, V_N g$均为 Killing 尺度的共形 Killing 张量空间的满射线性映射。核 Φ 中的运动常数线性族必须满足：对某个 $a \in \mathbb{R}$，有 $r=a g^{-1}$，且对每个 i，都有$d W_i=a\, d V_i$。因此，$r^\lambda=a \mathcal{H}^\lambda+c(\lambda)$，其中 c 是 λ的某个仿射函数。

线性运动常数不能进行迹调整。若 k 是一个共形 Killing 向量，它为 $\mathcal{H}$诱导出一个运动常数，那么固定每个 $\lambda_i=1$ 并令其他项为零，可知根据命题 3.2，$g, V_1 g, \ldots, V_N g$ 均为 Killing 尺度。结合 $\{,\}$ 的线性性质，同一命题表明，任何满足$g, V_1 g, \ldots, V_N g$均为 Killing 尺度的共形 Killing 向量，都会为 $\mathcal{H}$ □诱导出一个线性运动常数

定理 9.1 中观察到的线性性质为 Killing 尺度带来了一个不同寻常的结果。对于度量 $\sigma^{-2}\boldsymbol{g}$，其中 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{E}[1])$ 是一个尺度因子，其一般形式是一个近似度量。

推论 9.2. 设$(M, \boldsymbol{c})$ 是一个共形流形，k 是秩一或秩二共形 *Killing* 张量，且 g 是 k 的一个 *Killing* 尺度。那么，使 $V g$ 成为 k 的 *Killing* 尺度的函数 V 构成一个线性子空间。换言之，在近似度量中，成为 k 的 *Killing* 尺度是 $\mathbb{R}$-线性的。

证明. 对于秩一情形，根据命题 3.2，$V g$ 是 Killing 尺度当且仅当 $\{V, k\}=0$，而这关于 V 是线性的。对于秩二情形，设 $r=k+T g^{-1}$ 是 g的 Killing 张量。根据定理 3.3，$V g$ 是 Killing 尺度当且仅当存在一个函数 U，使得 $\{V, r\}+\{g^{-1}, U\}=0$；这一条件关于有序对 (V, U) 是线性的。□

根据推论 9.2，哈密顿量族的运动常数族

$$\mathcal{H}=g_q^{-1}(p, p)+\lambda_1 V_1+\cdots+\lambda_N V_N+\lambda_0 .$$

对应于这样的共形 Killing 张量：˜由 g、$V_1 g$、……、$V_N g$张成的子空间中的每个非零近似度量都是 Killing 尺度。若我们选择一个非零的 $V g=\tilde{g} \in$张成空间（g、$V_1 g$、……、$V_N g$），便可构造一个新的哈密顿量族,

$$\tilde{\mathcal{H}}=\tilde{g}_q^{-1}(p, p)+\lambda_1 \frac{V_1}{\tilde{V}}+\cdots+\lambda_N \frac{V_N}{\tilde{V}}+\lambda_0 \frac{1}{\tilde{V}}. \tag{9.4}$$

˜这个新哈密顿量中的常数项被隐藏了，因为 V是˜ ˜V_1、……、V_N的线性组合。由于张成空间($\tilde{g}$、$(V_1/V)\tilde{g}$、……、$(V_N/V)\tilde{g}$、g) =张成空间(g、$V_1 g$、……、$V_N g$)，由定理 9.1 可知，$\mathcal{H}$ 的运动常数族与 $\mathcal{H}$的运动常数族之间存在线性同构。

如果一个二阶最大超可积族满足非退化条件，即 $N=n+1$，那么它称为非退化的；也就是说，它有 $n+2$ 个参数 [27, 定义 4.2]。一个例子是 (9.1)。

˜由此可得， $\mathcal{H}$ 的（二次）超可积性与 $\mathcal{H}$ 的（二次）超可积性等价。一个例子是 [3] 中给出的超可积系统。

现在，我们将说明如何把主要结果——定理6.6、7.3和7.4——推广到准最大超可积和二阶最大超可积哈密顿量族。

定理 9.3。 设$(M, \boldsymbol{c})$ 具有平凡的共形 *holonomy*。设 $I_A = D_A\sigma$ 和 $J_A = D_A\tau$ 对于 $\sigma, \tau \in \Gamma(\mathcal{E}[1])$是线性无关的平行 *tractor*，且 $\operatorname{span}(I, J)$非退化；设 $s = \tau\sigma^{-1} \in C^\infty(M \setminus \mathcal{Z}(\sigma))$，并设 $I_A^1, \dots, I_A^n$ 是 $I^\perp \cap J^\perp$ 的平行两两正交基。设 $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为光滑函数，并考虑哈密顿量线性族

$$\mathcal{H}(q,p) = g_q^{-1}(p,p) + \lambda F(s) + \lambda_1 \frac{\sigma^2}{\sigma_1^2} + \cdots + \lambda_n \frac{\sigma^2}{\sigma_n^2} + \lambda_0 \tag{9.5}$$

其中 $g = \sigma^{-2}\boldsymbol{g}$ 和 $\sigma_i = X^A I_A^i$ 对于 $i \in \{1, \dots, n\}$。那么 $\mathcal{H}$ 有 $2n-2$ 个函数独立的守恒量族；哈密顿量以及 $2n-3$ 个额外族，其二次部分是关于 g 和$\hat{}g = \tau^{-2}\boldsymbol{g}$ 的 *Killing* 向量场的对称平方。

证明。 对于每个 $i, j \in \{1, \dots, n\}$，令 $K^{i,\ j}_{AB} = 2I^i{}_{[A} I^j{}_{B]} \in I^\perp \cap J^\perp$并令 $k^{i,\ j}{}_b = X^A Z^B{}_b K^{i,\ j}_{AB}$。 根据定理 4.6 (a)，每个 $k^{i,\ a}{}^j$对于 g 和 $\hat{}g$都是 Killing。于是，根据命题 6.2，每个 $k^{i,\ a}{}^j$对于 $F(s)g$都是 Killing。令 $r^{i,\ j}{}_{ab} = k^{i,\ j}{}_{(a} k^{i,j}{}_{b)}$。 于是每个 $r^{i,\ j}$ 对于 g、$\hat{}g$和 $F(s)g$都是 Killing。令

$$\begin{aligned} R^{i,j}{}_{ABCD} = (I^{i\,2} \owedge I^{j\,2}) &= I^i{}_A I^j{}_B I^i{}_C I^j{}_D + I^j{}_A I^i{}_B I^j{}_C I^i{}_D - I^i{}_A I^j{}_B I^j{}_C I^i{}_D - I^j{}_A I^i{}_B I^i{}_C I^j{}_D \\ &= K^{i,j}_{AB} K^{i,j}_{CD} \end{aligned} \tag{9.6}$$

对于 每个 $i, j \in \{1, \dots, n\}$。因此， $X^A Z^B{}_b X^C Z^D{}_d R^{i,\ j}{}_{ABCD} = k^{i,\ j}{}_{(a} k^{i,j}{}_{b)} = r^{i,\ j}{}_{bd}$。另 o e

$$I^{\ell\,A} R^{i,j}{}_{AB[CD} I^\ell{}_{E]} = 0.$$

对于所有 $i, j, \ell \in \{1, \dots, n\}$。因此，根据定理4.10， $g_\ell = \sigma_\ell^{-2}\boldsymbol{g} = \frac{\sigma^2}{\sigma_\ell^2} g$是 $r^{i,\ j}{}_{ab}$的无迹部分的 Killing 尺度，对于所有 $i, j, \ell \in \{1, \dots, n\}$。因此，根据定理 9.1，对于每个 $i, j \in \{1, \dots, n\}$，哈密顿量族 $\mathcal{H}^\lambda$ 存在一个运动常数线性族，其二次部分为 $r^{i,\ j}$。于是根据命题 6.4和引理 6.5， g^{-1}， $r^{1,\ 2}$， . . . ， $r^{1,\ n}$， $r^{2,\ n}$， . . . ， $r^{n-1,\ n}$ 在函数上独立，因此根据命题 5.2，相应的运动常数族在函数上独立。□

定理 9.4。 设$(M, \boldsymbol{c})$ 具有平凡的共形 *holonomy*。设 $\sigma, \tau \in \Gamma(\mathcal{E}[1])$ 为近爱因斯坦尺度， $I_A = D_A\sigma$ 和 $J_A = D_A\tau$ 为相应的平行 *tractor*。设 $s = \tau\sigma^{-1} \in C^\infty(M \setminus \mathcal{Z}(\sigma))$。若由 I和J 张成的子空间是非退化的，则不失一般性，我们只考虑定理 *7.3* 和 *7.4* 中的情形 *(a)* 和 *(b)*。

如果 $V(s)$ 是定理 *7.3* 中相应情形的势函数，并且 I^1、.....、 I^n 是 $I^\perp \cap J^\perp$ 的平行两两正交基，那么哈密顿量的 $n+2$ 参数线性族

$$\mathcal{H}^\lambda(q,p) = g_q^{-1}(p,p) + \lambda V(s) + \lambda_1 V_1(q) + \cdots + \lambda_n V_n(q) + \lambda_0, \tag{9.7}$$

其中 $\sigma_i = X^A I^i{}_A$ 和 $V_i = \frac{\sigma^2}{\sigma_i^2}$，是二阶最大超可积的。

若 $V(s)$ 是定理 7.4 对应情形中的势函数，且 I^1、...、I^{n-1}是 $I^\perp \cap J^\perp$ 的一个平行两两正交线性无关子集，则哈密顿量的 $n+1$ 参数线性族

$$\mathcal{H}^\lambda(q,p) = g_q^{-1}(p,p) + \lambda V(s) + \lambda_1 V_1(q) + \cdots + \lambda_{n-1} V_{n-1}(q) + \lambda_0, \tag{9.8}$$

其中 $\sigma_i = X^A I^i{}_A$ 和 $V_i = \frac{\sigma^2}{\sigma_i^2}$，是二阶最大超可积的。

证明。对于 (9.7) 中包含的情形，我们将定理 9.3 与 $F = V$ 用作前几个运动常数。然后，我们选择最后一个运动常数，使得 $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ 是 Killing 尺度。

对于定理 7.3 (a) 中的情形，我们取 $R = (I^2 \owedge (I^i)^2) \in I^\perp$ 作为任意 $i \in \{1, \ldots, n\}$对应的最后一个 Killing 张量，它满足

$$R_{AB[CD}\pi_{E]}{}^A = 0 \quad \text{and} \quad I^{jA} R_{AB[CD} I^j{}_{E]} = 0$$

对所有 $j \in \{1, \ldots, n\}$。

同样，在定理 7.3 (b) 的情形下，对于任意 $i \in \{1, \ldots, n\}$，我们可以取 $R = (J^2 \owedge (I^i)^2)$。

对于 (9.8) 中的情形，我们先假设由 I^1、.....、I^{n-1} 张成的子空间是非退化的。然后，由于 $I^\perp \cap J^\perp$ 是非退化的，令 I^n 张成 $I^\perp \cap J^\perp$ 内与 I^1、.....、I^{n-1} 正交的 tractor 空间。于是 I^1、.....、I^n 两两正交，我们便按照 (9.7) 类似地进行。

对于定理 7.4 (a) 的情形，我们取 $R = ((I \vee I^n) \owedge \pi) \in I^\perp$。该 n

$$J^A R_{ABCD} = 2\pi_{B[D} I^n{}_{C]} \quad \text{and} \quad I^{jA} R_{AB[CD} I^j{}_{E]} = 0$$

对所有 $j \neq n$，因此我们可以像定理 9.3 中那样添加前 $n-1$ 个势能项。

类似地，对于定理 7.4 (b) 中的情形，我们取 $R = ((J \vee I^n) \owedge \pi)$。

现在假设由 I^1、.....、I^{n-1} 张成的子空间是退化的。那么 I^1、.....、I^{n-1} 中恰有一个是零向量，并张成 $I^\perp \cap J^\perp$ 中与 I^1、.....、I^{n-1} 正交的向量空间。这是因为 I^1、.....、I^{n-1} 两两正交，且 $I^\perp \cap J^\perp$ 非退化。假设 I^1 是零向量，并选取一个零向量 $I^n \in I^\perp \cap J^\perp$，使得对于 $i \in \{2, \ldots, n-1\}$，$h(I^1, I^n) = 1$，且 $h(I^i, I^n) = 0$。

如定理 9.3 的证明中所述，形如

$$R^{i,j}_{ABCD} = 4 I^i{}_{[A} I^j{}_{B]} I^i{}_{[C} I^j{}_{D]}$$

对于 i，$j \in \{1, \ldots, n-1\}$ 和 $i = 1$，$j = n$，与 I^1，....., I^{n-1}兼容。但 $R^{i,\ n}$ 对于 $i > 1$ 而言，与 I^1不兼容。因此我们改为取

$$R^i{}_{ABCD} = 2 I^1{}_{[A} I^i{}_{B]} I^n{}_{[C} I^i{}_{D]} + 2 I^n{}_{[A} I^i{}_{B]} I^1{}_{[C} I^i{}_{D]}$$

对于满足以下条件的 $i \in \{2, \ldots, n-1\}$

$$I^{jA} R^i{}_{AB[CD} I^j{}_{E]} = 0.$$

对所有 $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ 均成立。因此，存在具有如下二次部分的二次运动常数族

$$r^{i,j}{}_{bd} = X^A Z^B{}_b X^C Z^D{}_d R^{i,j}{}_{ABCD} = k^{i,j}{}_a k^{i,j}{}_b \quad \text{and}$$

$$r^i{}_{ab} = X^A Z^B{}_b X^C Z^D{}_d R^i{}_{ABCD} = k^{1,i}{}_{(a} k^{i,n}{}_{b)}$$

由 $g^{-1}, k^1, 2, k^{1,3}, \ldots, k^{1,n}, k^{2,n}, \ldots, k^{n-1,n}$ 诱导的函数根据命题 6.4 函数独立，这等价于由 $g^{-1}, r^1, 2, r^{1,3}, \ldots, r^{1,n}, r^2, \ldots, r^{n-1}$ 诱导的函数函数独立，因此我们再次处于定理 9.3 的情形，只需检验最后一个运动常数。对于定理 7.4 (a) 的情形，我们取 $R = ((I \vee I^1) \oslash \pi)$；对于定理 7.4 (b) 的情形，我们取 $R = ((J \vee I^1) \oslash \pi)$。□

这里推导出的结果与谐振子和开普勒系统的经典结果相符；为了保持二次超可积性，它们分别可以成为 $n+2$ 和$n+1$ 参数族。然而，当允许最终的运动常数关于动量 [36] 为四次时，开普勒系统还可以包含最后的势函数项。研究这一运动常数如何在 tractor 中出现将会很有意思。

10. Calculations

10.1. 从 tractor 到适当的运动常数。 在通过 tractor 对超可积系统进行理论推导的过程中，我们一直在使用运动常数、Killing 张量和平行 tractor 之间的等价关系，并通过构造满足特定要求的 tractor 来证明超可积性。这里我们概述如何从相应的 tractor 出发，在坐标中恢复运动常数的显式公式。

我们回顾前几节已经解释过的内容。如果 $I_A = D_A \sigma$，则通过取 $\sigma = X^A I_A$可以恢复尺度密度，而相应的度量为$g = \sigma^{-2}\boldsymbol{g}$。如果 I 是平行的，并且 $R_{ABCD} \in \Gamma(\mathcal{E}_A)$ 或 $K_{AB} \in \Gamma(\mathcal{E}_{[AB]})$ 是与 I 正交的平行 tractor，则通过取不变顶槽可以恢复 Killing 张量，

$$r_{bd} = X^A Z^B{}_b X^C Z^D{}_d R_{ABCD} \quad \text{and} \quad k_b = X^A Z^B{}_b K_{AB}.$$

现在假设 V 是一个势函数，并考虑哈密顿量

$$\mathcal{H}(q,p) = g_q^{-1}(p,p) + V(q) = \sigma^2 \boldsymbol{g}_q^{-1}(p,p) + V(q).$$

如果 Vg 是关于 k_b 的 Killing 尺度，那么命题 3.2 给出的相应线性运动常数就是 $f(q, p) = k_q(p)$。对于二次运动常数，我们将使用引理 7.2。特别地，对于由 $V(s) = s^{-2}$ 表示的爱因斯坦尺度，运动常数由以下命题给出。

命题 10.1. 设 $(M, \boldsymbol{c})$ 是共形平坦的。设 R_{ABCD} 是一个具有曲率对称性的平行 *tractor*。设 $I_A = D_A\sigma$ 和 $J_A = D_A\tau$ 是平行尺度 *tractor*，并设 $g = \sigma^{-2}\boldsymbol{g}$。假设 $I^A R_{ABCD} = 0$，且

$$J^A R_{ABCD} = 2S_{B[D} J_{C]}$$

令 $r_{bd} = X^A Z^B{}_b X^C Z^D{}_d R_{ABCD}$。令 $\phi = \sigma^{-2} X^B X^D S_{BD}$。则由 $f(q、p) = r_q(p、p) + {}^{\lambda\phi}{}_{(q)\,s^2}$ 给出的 T^*M 上的函数，是哈密顿量 $\mathcal{H}(q、p) = g_q^{-1}(p、p) + \frac{\lambda}{s^2}$ 的运动常数。

证明。令 $\psi = \sigma^{-1}X^C J_C = s$，并令 $V(s) = \frac{\lambda}{s^{2\sigma}}$ 则 $V'(s) = -\frac{2\lambda}{s^3}$。因此，根据命题 7.2，$r + W$ 是运动常数，当且仅当

$$dW = V'(s)\left(\phi d\psi - \tfrac{1}{2}\psi d\phi\right) = \lambda\left(\frac{d\phi}{s^2} - \frac{2\phi ds}{s^3}\right) = \lambda d\left(\frac{\phi}{s^2}\right),$$

而 $W = \lambda\frac{\phi}{s^2}$ 显然是其解。 —

□

10.2. **平坦模型**。这里简要讨论 tractor 丛如何在共形几何的平坦模型上出现，以及它如何自然地为许多共形平坦空间，特别是 $\mathbb{R}^{P,\,Q}$，提供一组 tractor 基。我们的讲述遵循 [7] 的第 3 节。符号为 $(P,\ Q)$ 的共形几何模型，是通过在 $\mathbb{R}^{n+2}$ 上取一个符号为 $(P+1,\ Q+1)$ 的非退化对称双线性形式来构造的，

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & I & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 I 是对角矩阵，具有 P 个 $+1$和 Q个 -1。B的穿孔零锥 $\mathcal{N}$是满足以下条件的 $(q_0,\ \ldots,\ q_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2} \setminus \{0\}$ 的集合:

$$0 = \mathbf{q}^T B\mathbf{q} = \sum_{i=1}^{P} q_i^2 - \sum_{i=P+1}^{n} q_i^2 + 2q_0 q_{n+1},$$

射线射影化 $\mathcal{N}/\mathbb{R}_{>0}$ 是模型空间，我们将其称为符号为 $(P,\ Q)$ 的共形球，并记作 $\mathbb{S}^{P,\,Q}$。在黎曼符号下，该模型有两个连通分支，通常会选取其中一个连通分支。通过选取射影化的一个截面$\mathcal{N} \to \mathbb{S}^{P,\,Q}$，并将 B 在该截面上诱导的度量视为共形类中的一个元素，即可得到 $\mathbb{S}^{P,\,Q}$ 的共形几何。在黎曼符号下，模型的一个连通分支与 $\mathbb{S}^n$ 微分同胚，并与 $(\mathbb{S}^n,\ \boldsymbol{c})$ 共形等价，其中圆球度量属于 $\boldsymbol{c}$。

模型上的tractor对应于 $\mathcal{N}$ 上沿射线平行的切向量。tractor度量由 B给出。因此，模型上的平行余tractor对应于 $\mathcal{N}$ 上的1-形式，这些形式可延拓为 $\mathbb{R}^{n+2}$上的平行向量场。余拖拉丛有一个显然的平行基，由以下各项给出

$$I = p_0, J = p_{n+1}, I^1 = p_1, \ldots, I^n = p_n,$$

tractor I 和 J 为零向量，且它们的内积为 1；其余tractor的长度为 ± 1，并且两两正交。典范tractor X 由 $\mathbb{R}^{n+2}$上的欧拉向量场给出，$X = \sum_{i=0}^{n+1} q_i\partial_i$。权重为 w 的密度对应于$\mathcal{N}$ 上的齐次次数为 w 的函数，沿着 $\mathcal{N}_+$的射线齐次，因此我们可以看到，X 具有权重一，正如预期的那样。

如果 σ 是一阶密度，那么由 $\mathcal{N} \to \mathbb{S}^{P,Q}$ 中满足 $\sigma = 1$ 的点构成的截面给出了度量为 $\sigma^{-2}\boldsymbol{g}$ 的伪黎曼空间。尺度 tractor $D_A\sigma$ 的长度等于 $-\frac{R}{n(n-1)}$，其中 $R = R_{ab}{}^{ab}$ 是相应度量的标量曲率。因此，tractor I 和 J 对应于平坦伪欧几里得空间 $\mathbb{R}^{P,Q}$，而

其他 tractor 对应于常正曲率或负曲率空间；在黎曼情形下，它们全都是双曲空间。

因此，令 $q_0 = B(X,\ I) = \sigma$（它是权重一密度）表示基底欧几里得尺度，我们发现 σ 的零点集是射线的集合 $(0,\ \tilde{q},\ q_{n+1})$，其中$_{\tilde{q} \in \mathbb{R}^{P,\ Q}}$ 为零。在 $\mathcal{N}$ 的其余部分，由 I 表示的欧几里得空间由子流形 $\sigma = 1$ 的几何结构给出，即形如以下形式的点

$$(1, q_1, \ldots, q_n, q_{n+1}) = \left(1, q_1, \ldots, q_n, -\frac{r^2}{2}\right),$$

其中 $r^2 = q_1^2 + \cdots + q_P^2 - q_{P+1}^2 - \cdots - q_n^2$。这表明

$$\tau = B(X,J) = -\frac{r^2}{2}\sigma, \quad \sigma_1 = B(X,I_1) = q_1\sigma, \quad \ldots, \quad \sigma_n = B(X,I_n) = q_n\sigma,$$

其中 $(q_1,\ \ldots\ldots,\ q_n)$ 是欧几里得空间上的坐标。因此，在尺度 σ 下，tractor 系统为

$$I_A = \begin{pmatrix}\sigma\\0\\0\end{pmatrix}, I_A^i = \begin{pmatrix}\sigma q_i\\ \sigma p_i\\0\end{pmatrix}, J_A = \begin{pmatrix}-\sigma\frac{r^2}{2}\\ -\sigma e\\ \sigma^{-1}\end{pmatrix},$$

其中 $e = \sum_{i=1}^{P} q_i p_i - \sum_{i=P+1}^{n} q_i p_i$。

我们首先聚焦于这一对 $I,\ J$。在定理 7.3 和 7.4 中，这一对属于情形 (a)。定理 7.3 允许势函数具有以下形式

$$V(q) = \lambda r^2 + \lambda_0, \tag{10.1}$$

这对应于各向同性谐振子，而定理 7.4 允许势函数具有以下形式

$$V(q) = \frac{\lambda}{r} + \lambda_0, \tag{10.2}$$

这对应于开普勒系统。我们使用 $I^1, \ldots, I^n$ 的基 $I^\perp \cap J^\perp$。于是，Killing 向量 $k^{i,}{}_b{}^j = 2X^A Z^B{}_b I^i{}_{[A} I^j{}_{B]} = \sigma^2(q_i p_j - q_j p_i)$ 就是角动量。根据定理 7.3 (a)，(10.1) 的最后一个运动常数来自某个 $R_{ABCD} = (II \owedge U)_{ABCD}$，其中 U是一个与 I和 J正交的对称平行曳引子。于是运动常数为（注意，我们使用的是带有$s = -r^2/2$的 $\mathcal{H} = |p|^2 + \lambda r^2 = |p|^2 - 2\lambda s$ ）

$$u_q(p,p) + \lambda\phi(q),$$

其中 $u_{bd} = \sigma^2 Z^B{}_b Z^D{}_d U_{BD}$和 $\phi = \sigma^{-2} X^B X^D U_{BD}$。

因此，超可积系统是

$$f_1 = \mathcal{H} = |p|^2 + \lambda r^2, f_2 = L^{1,2}, \ldots f_n = L^{1,n}, f_{2n-2} = L^{n-1,n}, f_{2n-1} = u_q(p,p) + \lambda\phi(q)$$

为了推广到哈密顿量族，

$$\mathcal{H}^\lambda(q,p) = |p|^2 + \lambda r^2 + \frac{\lambda_1}{q_1^2} + \cdots + \frac{\lambda_n}{q_n^2} + \lambda_0,$$

我们应用命题 10.1。我们需要转向秩二 Killing 张量 $r^{i,\ j}{}_{ab} = k^{i,\ j}{}_a k^{ij}{}_b$ 以及 tractor $R^{i,\ j}{}_{ABCD} = (\ (I^i)^{\ 2} \owedge\ (I^j)^{\ 2})$。显然， $R^{i,\ j}$ 与 I^ℓ正交，其中 $\ell \neq i,\ j$。于是

$$I^{jA} R^{i,j}{}_{ABCD} = 2 I^i{}_B I^j{}_{[C} I^i{}_{D]}.$$

根据命题 10.1， $|p|^2 + \lambda_j \frac{1}{q_j^2}$的运动常数为 $L^2_{i,\ j} + \lambda_j \frac{q_i^2}{q_j^2}$。因此， $\mathcal{H}^\lambda$ 的第一个$2n-2$ 运动常数为

$$f_1 = \mathcal{H}^\lambda, f_2 = (L^{1,2})^2 + \lambda_1 \frac{q_2^2}{q_1^2} + \lambda_2 \frac{q_1^2}{q_2^2}, \dots, f_{2n-2} = (L^{n-1,n})^2 + \lambda_{n-1} \frac{q_n^2}{q_{n-1}^2} + \lambda_n \frac{q_{n-1}^2}{q_n^2}$$

最后一个 Killing 张量是 $R_{ABCD} = I^2 \owedge U$的顶层槽。为确保与其他尺度因子相容，我们选择 $U = I^1_A I^1_B$。然后只需计算

$$I^{1A} R_{ABCD} = 2 I_B I^1{}_{[C} I_{D]}.$$

因此，根据命题 10.1，最后的运动常数仍为

$$f_{2n-1} = p_1^2 + \lambda q_1^2 + \frac{\lambda_1}{q_1^2}.$$

作为第二个例子，我们考虑这一对 $I^1,\ I^2$。此处 Hamilton 量的底层度量的尺度密度为 $X^A I^1{}_A = q_1 \sigma$，其中 σ 是欧氏尺度。因此，在每个开半空间上，度量由 $g_1 = q_1^{-2} g$给出，其中 g 是欧几里得度量。这是双曲空间的上半空间模型。在定理 7.3 和 7.4 中，这一对属于情形 (b)。进行以下计算时，取 $q_1 > 0$。定理 7.3 允许如下形式的势函数

$$V(q) = \lambda \frac{q_1^2}{q_2^2} + \lambda_0, \tag{10.3}$$

定理 7.4 允许势函数取如下形式

$$V(q) = \frac{\lambda s}{\sqrt{s^2+1}} + \lambda_0 = \frac{\lambda q_2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} + \lambda_0, \tag{10.4}$$

其中 $s = q_2/q_1$。我们将详细计算 (10.4)。与 I^1 和 I^2 正交的 tractor 空间由 $I,\ J,\ I^3,$ ....., I^n 张成，但这个基并非两两正交。因此，自然的做法是取 $I + J,\ I - J,\ I^3,$ $\dots I^n$。这意味着我们构造的运动常数将与球面度量（由 $I - J$ 表示）以及另一个双曲度量（由 $I + J$ 表示）相容，但与任一欧几里得度量都不相容。不过，正如我们稍后所示，可以对其进行调整，使之与 I 相容。

这个哈密顿量的 Killing 向量为 $k^{i,\ }{}_b{}^j = 2 X^A Z^B{}_b I^i{}_{[A} I^j{}_{B]} = \sigma^2(q_i p_j - q_j p_i)$，其中 $3 \leq i < j \leq n$，以及

$$k^{\pm i}{}_b = 2 X^A Z^B{}_b (I^i{}_{[A} (I \pm J)_{B]}) = \sigma^2 (\mp e q_i - p_i \pm \tfrac{r^2}{2} p_i),$$

其中 $e = \sum_{i=1}^n q_i p_i$。对于最后一个 Killing 张量，我们可以取 $R_{ABCD} = (\pi \owedge S)_{ABCD}$，其中 $S_{AB} = 2 I^2{}_{(A} V_{B)}$ 对任意与 I^1 和 I^2正交的平行 V 均成立，其中 $\pi_{AB} = h_{AB} - I^1{}_A I^1{}_B - I^2{}_A I^2{}_B$。然后我们选择 $V = I^3$，于是

$$X^A Z^B{}_b X^C Z^D{}_d R_{ABCD} = \sigma^4 \left(q_2 q_3 |p|^2 - L^{1,2} L^{1,3} \right) \quad \text{and}$$

$$I^{2A}R_{ABCD} = \pi_{B[D}I^{3}{}_{C]}.$$

因此，根据定理 7.4，二阶极大超可积哈密顿量为

$$\mathcal{H}(q,p) = q_1^2|p|^2 + \frac{q_2}{\sqrt{q_1^2+q_2^2}} \tag{10.5}$$

当 $n \geq 4$ 时，运动常数为

$$f_1 = \mathcal{H}, f_2 = k^{+3}, f_3 = k^{-3}, f_4 = L^{3,4}, \ldots, f_n = L^{3,n}, f_{n+1} = k^{+n}, f_{n+2} = k^{-n},$$
$$f_{n+3} = L^{4,n}, \ldots, f_{2n-2} = L^{n-1,n} \quad \text{and} \quad f_{2n-1} = q_2q_3|p|^2 - L^{1,2}L^{1,3} - \frac{q_3}{2\sqrt{q_1^2+q_2^2}}.$$

当 $n = 3$ 时，我们可以将 k^{-3}、k^{+3} 和 $e = \sum q_ip_i$ 与二次积分一起取用。

为了构造一个二阶最大超可积线性族，自然可以为 $I^{1\perp} \cap I^{2\perp}$ 选择正交归一基 $I + J$，$I - J$，I^3，$\ldots$，I^n，从而得到

$$\mathcal{H}^\lambda(q,p) = q_1^2|p|^2 + \lambda_1\frac{q_2}{\sqrt{q_1^2+q_2^2}} + \lambda_2\frac{q_1^2}{(1-\frac{r^2}{2})^2} + \lambda_3\frac{q_1^2}{q_3^2} + \cdots + \lambda_n\frac{q_1^2}{q_n^2} + \lambda_0,$$

或者从 $q_3, \ldots, q_n$，$1 - \frac{r^2}{2}$，$1 + \frac{r^2}{2}$ 中选取另一组 $n-1$ 个尺度因子；根据定理 9.4，这也是二阶最大超可积的。

不过，我们也可以在定理 9.4 中取 I，I^3，$\ldots$，I^n，从而得到哈密顿量族

$$\mathcal{H}^\lambda(q,p) = q_1^2|p|^2 + \lambda_1\frac{q_2}{\sqrt{q_1^2+q_2^2}} + \lambda_2q_1^2 + \lambda_3\frac{q_1^2}{q_3^2} + \cdots + \lambda_n\frac{q_1^2}{q_n^2} + \lambda_0, \tag{10.6}$$

经过 St¨ackel 变换后，除以 q_1^2 得到

$$\tilde{\mathcal{H}}^\lambda(q,p) = |p|^2 + \lambda_1\frac{q_2}{q_1^2\sqrt{q_1^2+q_2^2}} + \lambda_0\frac{1}{q_1^2} + \lambda_3\frac{1}{q_3^2} + \cdots + \lambda_n\frac{1}{q_n^2} + \lambda_2,$$

这将表 I 中第三个二阶最大超可积系统推广到了任意维数 [9]。

我们简要概述 (10.6) 的运动常数的计算。由定理 9.4 的证明可知，这些运动常数的二次部分由各种 Killing 张量诱导；请注意，此处 tractor 的标签与那里不同。

首先，$I^{1}{}_{[A}I^{3}{}_{B]}$、……、$I^{1}{}_{[A}I^{n}{}_{B]}$、$I^{1}{}_{[A}I^{2}{}_{B]}$由 tractor $4I_{[A}I^{i}{}_{B]}I_{[C}I^{i}{}_{D]}$和 $4I_{[A}J_{B]}I_{[C}J_{D]}$诱导，因此得到线性动量的平方$p_3^2$、……、$p_n^2$ 以及欧拉向量场的平方（$\sum_{j=1}^n p_jq_j$）^{2}。其次，作为以下对象顶层槽的 Killing 张量

$$R^{i}{}_{ABCD} = 2I_{[A}I^{i}{}_{B]}J_{[C}I^{i}{}_{D]} + 2J_{[A}I^{i}{}_{B]}I_{[C}I^{i}{}_{D]},$$

它们是 $p_i\left(q_ie - \frac{r^2}{2}p_i\right)$。为求出标量项，我们首先计算

$$4I^{A}I_{[A}J_{B]}I_{[C}J_{D]} = 2I_BJ_{[C}I_{D]} \quad \text{and} \quad 4I^{iA}I_{[A}I^{i}{}_{B]}I_{[C}I^{i}{}_{D]} = 2I_BI^{i}{}_{[C}I_{D]}$$

因此，根据命题 10.1，$\mathcal{H}^\lambda$ 的前 n 个运动常数为

$$f_1 = \mathcal{H}^\lambda, f_2 = \left(\sum_{j=1}^n q_jp_j\right)^2 + \lambda_2r^2, f_3 = p_3^2 + \frac{\lambda_3}{q_3^2}, \ldots, f_n = p_n^2 + \frac{\lambda_n}{q_n^2}$$

然后我们计算

$$I^A R^i{}_{ABCD} = I^i{}_B I_{[C} I^i{}_{D]} \quad \text{and} \quad I^{iA} R^i{}_{ABCD} = I_B I^i{}_{[C} J_{D]} + J_B I^i{}_{[C} I_{D]}$$

因此，下列 $n-2$ 运动常数为

$$f_{n-2+i} = p_i \left(q_i e - \frac{r^2}{2} p_i \right) + \lambda_2 \frac{q_i^2}{2} - \lambda_i \frac{r^2}{2q_i^2},$$

对于 $i \in \{3, \dots, n\}$。最后一个 Killing 张量是其顶层槽

$$R_{ABCD} = 2 I_{[A} \pi_{B][D} I^2{}_{C]} + 2 I^2{}_{[A} \pi_{B][D} I_{C]},$$

它是 $\sigma^4(q_2 \boldsymbol{g}_{bd} + p^1{}_{(b} L^{1,2}{}_{d)})$。我们计算

$$I^A R_{ABCD} = I_B I_{[C} I^2{}_{D]} \quad \text{and} \quad I^{iA} R_{ABCD} = I_B I^i{}_{[C} I^2{}_{D]} + I^2{}_B I^i{}_{[C} I_{D]}$$

对于 $i \in \{3, \dots, n\}$ 和

$$I^{2A} R_{ABCD} = \pi_{B[D} I_{C]},$$

因此，最终的运动常数如式 (7.16) 所示，利用命题 10.1 可得

$$f_{2n-1} = q_2 |p|^2 + p_1 L^{1,2} + \lambda_2 q_2 + \lambda_3 \frac{q_2}{q_3^2} + \cdots + \lambda_n \frac{q_2}{q_n^2} - \frac{\lambda_1}{2\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}.$$

References

1. V. I. Arnold，《经典力学的数学方法》，《数学研究生教材》第 60 卷，施普林格，纽约，纽约州，1989 年。 2. T. N. Bailey、M. G. Eastwood 和 A. R. Gover，适用于共形、射影及相关结构的 Thomas 结构丛，《落基山数学杂志》 24 (1994)，第 4 期，1191–1217。MR 1322223´3. A. Ballesteros、A. Enciso、F. J. Herranz 和 O. Ragnisco，非恒定曲率 n 维空间上的一个极大超可积系统，《D辑物理学：非线性现象》237 (2008)，第 4 期，505–509。 4. J. Bertrand，关于一点被吸引至固定中心的运动的定理，《法国科学院院报》，巴黎 77 (1873)，849–853（法文）。 5. C. P. Boyer、E. G. Kalnins 和 W. Miller Jr.，St ¨äckel 等价的可积哈密顿系统，《SIAM 数学分析杂志》 17 (1986)，第 4 期，778–797。MR 846389 6. David M. J. Calderbank 和 Tammo Diemer，微分不变量与弯曲的 Bernstein-Gelfand-Gelfand 序列，《纯粹与应用数学杂志》537 (2001)，67–103。MR 1856258 7. Sean N. Curry 和 A. Rod Gover，《共形几何与拖拉机演算导论：兼论其在广义相对论中的应用》，《广义相对论中的渐近分析》，伦敦数学学会讲义丛书，第 443 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2018 年，第 86–170 页。MR 3792084 8. Sean N. Curry、A. Rod Gover 和 Daniel Snell，《共形子流形、特殊子流形与可积性》，2025 年 4 月，arXiv:2309.09361 [math.DG]。 9. N. W. Evans，经典力学中的超可积性，《物理评论 A》41 (1990)，第 10 期，5666–5676，出版方：美国物理学会。 10. J. Fri ˇs、V. Mandrosov、Ya.\ A. Smorodinsky、M. Uhl´ı ˇr 和 P. Winternitz，量子力学中的高阶对称性，《物理快报》16 (1965)，354–356。MR 187763 11. Simon C. W. Goodwin、A. Rod Gover 和 Thomas Leistner，《共形 Killing 张量与 Killing 尺度》，2026 年，预印本。 12. A. Rod Gover，黎曼符号下的近爱因斯坦流形与 Poincar´é–Einstein 流形，《几何物理杂志》60 (2010)，第 2 期，182–204。MR 2587388 13. A. Rod Gover、Jonathan Kress 和 Thomas Leistner，《共形 Killing 张量及其 Killing 尺度》，2024 年 6 月，arXiv: 2406.17212 [math]。 14. A. Rod Gover 和 Heather R. Macbeth，识别 Einstein 测地线：射影与共形几何中的爱因斯坦度量，《微分几何及其应用》33 (2014)，44–69。MR 3159950 15. A. Rod Gover 和 Andrew Waldron，子流形共形不变量与边界 Yamabe 问题，《2013 年秋季几何分析、类型论、同伦论与单值基础扩展摘要》，《CRM 巴塞罗那数学研究展望》丛书，第 3 卷，Birkh¨auser/施普林格，尚，2015 年，第 21–26 页。MR 3738965ˇ 16. A. Rod Gover 和 Josef Silhan，微分形式上的共形 Killing 方程——延拓与应用，《微分几何及其应用》26 (2008)，第 3 期，244–266。MR 2421703 17. E G Kalnins、J M Kress 和 W Miller，非共形平坦空间中的超可积性，《物理学杂志 A：数学与理论》46 (2013)，第 2 期，022002。 18. E. G. Kalnins、J. M. Kress 和 W. Miller Jr.，《共形平坦空间中的二阶超可积系统 I：二维经典结构理论》，《数学物理杂志》46 (2005)，第 5 期，053509，共 28 页。MR 2143019 19. ，《共形平坦空间中的二阶超可积系统 II：经典二维 St ¨äckel 变换》，《数学物理杂志》46 (2005)，第 5 期，053510，共 15 页。MR 2143027 20. ，《共形平坦空间中的二阶超可积系统 III：三维经典结构理论》，《数学物理杂志》46 (2005)，第 10 期，103507，共 28 页。MR 2178607 21. ，《共形平坦空间中的二阶超可积系统 IV：经典三维 St ¨äckel 变换与三维分类理论》，《数学物理杂志》47 (2006)，第 4 期，043514，共 26 页。MR 2226351

22. , 共形平坦空间中的二阶超可积系统。V. 二维和三维量子系统，《数学物理杂志》47（2006），第9期，093501，25。MR 2263655 23. E. G. Kalnins 和 Willard Miller, Jr.，哈密顿-雅可比方程与Helmholtz方程的 Killing 张量和变量分离，SIAM J. Math. Anal. 11（1980），第6期，1011–1026。MR 595827 24. Ernest G. Kalnins、Jonathan M. Kress 和 Willard Miller, Jr.，变量分离与超可积性，IOP Expanding Physics，IOP Publishing，布里斯托尔，2018。MR 3942135 25. Shoshichi Kobayashi 和 Katsumi Nomizu，《微分几何基础》第一卷，Interscience Publishers（John Wiley & Sons, Inc.旗下分部），纽约—伦敦，1963。MR 152974 26. Ivan Kol´aˇr、Jan Slov´ak 和 Peter W. Michor，《微分几何中的自然运算》，施普林格，柏林、海德堡，1993。27. Jonathan Kress、Konrad Sch¨obel 和 Andreas Vollmer，任意维数二阶超可积系统分类的代数几何基础，《几何分析杂志》33（2023），第11期，360。28. ，任意维数共形超可积性的代数条件，《数学物理通讯》405（2024），第4期，92。29. N. H. Kuiper，大范围上的共形平坦空间，《数学年刊》50（1949），第4期，916–924。30. Serge Lang，《微分几何基础》，数学研究生教材，第191卷，施普林格，纽约，NY，1999。31. John M. Lee，《光滑流形导论》，数学研究生教材，第218卷，施普林格，纽约，NY，2012。32. ，《黎曼流形导论》，施普林格国际出版，2018。33. A. A. Makarov、J. A. Smorodinsky、Kh. Valiev 和 P. Winternitz，系统搜索具有动力学对称性的非相对论系统，Nuovo Cimento A（1965–1970）52（1967），第4期，1061–1084。34. Willard Miller, Jr.、Sarah Post 和 Pavel Winternitz，经典与量子超可积性及其应用，《物理学杂志》A 46（2013），第42期，423001，97。MR 3119484 35. Albert Nijenhuis，某些张量场的双线性微分伴随量的 Jacobi型恒等式。I，《数学研究》58（1955），390–397。36. P. E. Verrier 和 N. W. Evans，一个新的超可积哈密顿量，《数学物理杂志》49（2008），第2期，022902。37. P. Winternitz、Ya.\ A. Smorodinskiĭ、M. Uhl´ıˇr 和 I. Friˇs，经典力学与量子力学中的对称群，《苏联核物理杂志》4（1966），444–450。MR 211699 ˇ38. A. Cap、A. R. Gover 和 M. Hammerl，Cartan几何的整体单调群约化与曲轨道分解，《杜克数学杂志》163（2014），第5期，1035–1070。MR 3189437 ˇ 39. Andreas Cap 和 A. Rod Gover，不可约抛物几何的拖拉机丛，《整体分析与调和分析》（马赛—卢米尼，1999），S´emin. Congr.，第4卷，法国数学学会，巴黎，2000，129–154页。MR 1822358 ˇ 40. Andreas Cap、Jan Slov´ak 和 Vladim´ır Souˇcek，Bernstein-Gelfand-Gelfand序列，《数学年刊》154（2001），第1期，97–113。（Goodwin）

Department of Mathematics, The University of Auckland, Auckland 1142, New Zealand电子邮箱：simon.goodwin@auckland.ac.nz（Gover）

Department of Mathematics, The University of Auckland, Auckland 1142, New Zealand电子邮箱：r.gover@auckland.ac.nz（Kress）

School of Mathematics and Statistics, University of New South Wales, Syd-ney 2052, Australia电子邮箱：j.kress@unsw.edu.au