arXiv:2611.28580v1 [math.CO] 21 Nov 2026

关于 Edmonds–Johnson 性质的 Gerards–Schrijver 猜想是错误的

Alberto Del Pia

工业与系统工程系 & 威斯康星发现研究所 威斯康星大学麦迪逊分校，美国威斯康星州麦迪逊 delpia@wisc.edu

2026年11月20日

摘要

若对所有整数向量b，c，l，u，A 的第一 Chv´atal 闭包 $\{x\colon b \le Ax \le c,\ l \le x \le u\}$ 都等于其整数包，则称整数矩阵 A 具有 Edmonds–Johnson 性质。Gerards 和 Schrijver 猜想，一个完全半模矩阵具有 Edmonds–Johnson 性质，当且仅当它不含与两个特定矩阵之一相等的子式，这两个矩阵的大小分别为3×3 和 3×4。我们推翻了这一猜想。我们给出一个不具有 Edmonds–Johnson 性质且不含与这两个矩阵中任意一个相等的子式的完全半模 5×6 矩阵。它是一个极小障碍：每个真子式都具有 Edmonds–Johnson 性质。证明基于一个图展开，该图的边对应矩阵的行和界，子式操作则对应于删除、收缩和边减半。为证明极小性，我们将每个真子式化归为两类已知具有 Edmonds–Johnson 性质的矩阵。

1 引言

对于有理多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^n$，P 的整数包为 $P_I := \text{conv}(P \cap \mathbb{Z}^n)$。Chv´atal– Gomory 割（CG 割） [12, 4] 是针对 P 的不等式 $wx \le \lfloor \delta \rfloor$，其中 $w \in \mathbb{Z}^n$ 且 $wx \le \delta$ 对 P有效。P的 Chv´atal 闭包 P'是 P中满足针对 P的所有 CG 割的点的集合。Chv´atal [4] 和 Schrijver [13] 证明了 P' 是有理多面体，并且 P_I 可通过有限次应用此操作从 P 得到。P 的 Chv´atal 秩是所需的最少应用次数。

与依赖于多面体的 Chv´atal 秩不同，以下秩的概念仅取决于约束矩阵。整数矩阵 A 的强 ***Chv´atal*** 秩 是这些多面体的最大 Chv´atal 秩

$$P(A; b, c, l, u) := \{x \in \mathbb{R}^n :\ b \le Ax \le c,\ l \le x \le u\} \tag{1}$$

对所有整数向量 b，c，l，u。根据 Cook、Gerards、Schrijver 和 Tardos 的定理 [6],，这个最大值存在。强 Chv´atal 秩为 0 的矩阵恰好是全幺模矩阵（见 [14, 第 19]章）。按照 [11, 8]，A 具有 ***Edmonds–Johnson*** 性质 (***EJ*** 性质），当且仅当其强 Chv´atal 秩至多为 1，也就是说，$P' = P_I$ 对每个形如 P **(1)** 的多面体。

已知具有 EJ 性质的矩阵类并不多。Edmonds 和 Johnson [10] 证明，每个列的 ℓ_1-范数至多为 2 的整数矩阵都具有 EJ 性质。Gerards 和 Schrijver [11] 证明，一个行的 ℓ_1-范数至多为 2 的整数矩阵具有 EJ 性质，当且仅当它没有奇数K_4 子式。Conforti、Gerards 和 Zambelli 的结果 [5]以及 Del Pia 和 Zambelli 的结果 [9] 表明，将某个全幺模矩阵的若干列乘以 2，且该矩阵每行有两个非零元素，由此得到的每个矩阵都具有 EJ 性质。Appa、Kotnyek、Papalamprou 和 Pitsoulis [2] 证明，整数 binet 矩阵具有 EJ 性质。Del Pia、Musitelli 和 Zambelli [8] 研究了通过将某些列乘以 2，从$\{0, \pm 1\}$每列至多有两个非零元素的矩阵得到的矩阵的 EJ 性质。

这些类中所有具有 EJ 性质的矩阵都满足以下条件 [8]。如果对于 A的每个非奇异方形子矩阵，S^{-1} 都是半整数，则整数矩阵 A 称为完全半模（THM）。等价地，THM 矩阵是 Appa 和 Kotnyek 意义下的整数 2-正则矩阵 [1]。特别地，THM 矩阵的每个元素都属于 $\{0, \pm 1, \pm 2\}$。对于 THM 矩阵，Chv´atal 闭包可以通过约束 [1, 7] 的 $\{0, \frac{1}{2}\}$-组合进行简单描述（关于 $\{0, \frac{1}{2}\}$-割，另见 [3]）。

A 的一个子式是指通过依次执行以下操作 [7, 8]中的任意操作，从 A 得到的矩阵：

（i）删除、置换或乘以 -1 行或列。

（ii）将所有元素均为偶数的一行除以 2。

(iii) 对等于 1 的元素进行主元变换，即将 $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \alpha & D \end{pmatrix}$ 替换为 $\begin{pmatrix} -1 & \beta \\ \alpha & D - \alpha\beta \end{pmatrix}$，其中 α 是列向量，β 是行向量。

如果 A 的子式的行数加列数少于 A，则称其为 真 子式。EJ 性质和全半模性在取子式时保持不变 [7, 定理 2.1 和 2.9]（删除和收缩另见 [11] ）。这两个矩阵

$$A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_4 := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

是 THM [8, 第 1] 节中的 THM，并且不具有 EJ 性质 [7, 观察 2.11]。Gerards 和 Schrijver 猜想它们是唯一的障碍。该猜想由 Gerards 于 2007年 提出，并见于 [7,猜想 2.1]和 [8,猜想 1]。

猜想 1.1（Gerards–Schrijver）。一个全半模矩阵具有 *EJ* 性质，当且仅当它不含有与 A_3 或 A_4 相等的子式。

根据 Gerards 和 Schrijver 定理 [11]（见 [7, 第2节。2]），该猜想对行的 ℓ_1-范数至多为 2 的矩阵成立。对于这些矩阵，相关的障碍是A_4，它对应于一个奇数-K_4 子式，尽管 A_4 本身并不属于这一类。该猜想对 [8], 类中的 THM 矩阵也成立，而其中相关的障碍是 A_3。

反例

我们证明猜想 1.1 是错误的。令

$$A_6 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

与 A_3 和 A_4一样，下标表示列数。

定理 1.2。 矩阵 A_6 是完全半模的，不具有 *EJ* 性质，并且没有等于 A_3 或 A_4的子式。

推论 1.3。 猜想 *1.1*是错误的。

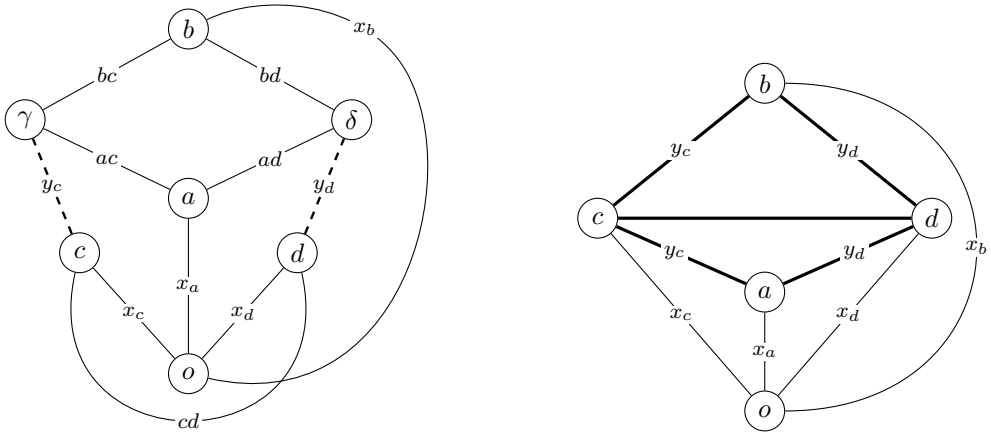
如果 THM 矩阵不具有 EJ 性质，但其每个真子式都具有 EJ 性质，则称其为极小障碍 。矩阵 A_3 和 A_4 是极小障碍 [8,第 1]节。

定理 1.4。 矩阵 A_6 是一个极小障碍。

证明思路

全半模性（第2节）。我们按照 A_6 各列的顺序，将多面体 $P(A_6; b, c, l, u)$ 的变量记为 x_a, x_b, x_c, x_d, y_c, y_d，并将 A_6 中奇数项为 x_p 和 x_q 的系数的行称为 pq 。每行恰有两个奇数项，因此 A_6 与某个图的关联矩阵的转置相近，该图的顶点为 a, b, c, d，分别对应 x_a, x_b, x_c, x_d，另有一个顶点 o 对应界限。 y_c 和 y_d 的列中的项均为偶数，可以通过变量替换将其吸收。例如， y_c 只出现在 ac 和 bc 这两行中，系数均为 2，因此用新的变量 $x_c + 2y_c$ 表示后（它成为一个新顶点 γ），这两行便只涉及两个变量。对 y_d 做同样处理并引入新顶点 δ 后， A_6 的行和界限就成为图 G_6 的边，如图 1 所示（引理 2.2）。 y_c 和 y_d 上的界限则成为长度为一半的边 $c\gamma$ 和 $d\delta$ 。全半模性由此成立，因为每条边的向量的两倍，都是任意一棵生成树的边的向量的整数线性组合（命题2.4）。

EJ 性质的失效（第 3 节）。我们给出整数数据 b, c, l, u 和一个点 z，它属于 $P := P(A_6; b, c, l, u)$ 的 Chv´atal 闭包，但违反了一个对 P_I 有效的不等式（命题 3.3）。由于 A_6 是 THM，若 z 满足每个 $\{0, \frac{1}{2}\}$-割，则 $z \in P'$；这些割会加入定义 P 的若干不等式：其法向量之和模 2 为 0，将其除以 2 后向下取整。哪些不等式会组合起来，只取决于它们的法向量模 2 的值；而模 2 下， y_c 和 y_d 的列均为零。将 G_6 的两条半长边收缩后，得到 K_5 减去边 ab，记作 $K_5 - ab$ （图 1）。它的边是 A_6 的行，其中行 pq 是边 pq；关于 x_a, x_b, x_c, x_d 的界中，关于 x_p 的界是边 op。在 z 处，九个不等式的松弛量为 1 3，其余所有不等式的松弛量至少为 1。这九个不等式对应于 $\bar{K_5} - ab$ 的边，且其法向量模 2 非零且两两不同。因此，每个 $\{0, \frac{1}{2}\}$-割所加入的不等式在 z 处的总松弛量至少为 1，并且在 z 处满足。



G_6 $K_5 - ab$

图 1：图 G_6 和 $K_5 - ab$。在 G_6中，每条边都标记为其所编码的行或界。虚线边的长度为一半。收缩这些边得到 $K_5 - ab$，其中粗边表示行，细边表示界。每一行都标记有变量 y_c 和 y_d 中在该行具有非零系数的变量。

子式（第 4节）。子式操作通过删除、收缩和边减半来作用于 G_6 。因此， A_6 的每个子式的行和界都构成一个图，该图由 G_6 通过这些操作得到。对于 A_4 ，它们不构成图；而对于 A_3 ，它们构成 K_4 ，其中有两条互不相交的半长边，而这无法由 G_6 得到（命题4.6）。

极小性（第 5节）。为了证明的每个真子式都具有EJ 性质，我们将其归约到已知类别。坐标变换不会改变EJ 性质，也不会改变图 G_6 （图 1）。因此，除图的对称性外，的每个真子式都可通过保持EJ 性质的运算，由一个矩阵得到；该矩阵的行和界构成的图，是从中删除或收缩一条边得到的图，共有九种情形（引理 5.7和命题 5.8）。对于其中五个图，半长边具有公共端点；必要时，可沿路径移动度为2的顶点，于是Del Pia和Zambelli定理适用（引理 5.5）。对于另外四个图，我们细分半长边，并在其中一种情形中将一个顶点拆分，然后找到一个生成树 T ，使得以 T为坐标表示的其他边构成一个矩阵，其列的 ℓ_1-范数至多为2，因此Edmonds和Johnson定理适用（引理5.3）。

定理1.2 也可以通过计算机验证。矩阵 A_6 规模很小，而且它只有有限多个子式，因为 THM 矩阵的子式仍然是 THM 矩阵，所以其元素都属于 $\{0, \pm 1, \pm 2\}$，并且操作（i）–（iii）不会增大矩阵的规模。我们改用手工证明定理 1.2 ，因为证明很简短，能说明为什么 A_6 是一个反例；此外，这些证明还构建了加权图 G_6 ，并展示子式操作如何作用于该图，这也构成了证明定理 1.4的基础。

第 6 节包含另外两个反例和一些开放问题。

2 全半模性

本节中，我们将矩阵的行和界限表示为向量，并用图 A_6 的边来编码其 G_6 ，该图见图 1。随后我们证明 A_6 是 THM。

如第1节中所述， $P(A_6;\ b,\ c,\ l,\ u)$的变量为 $x_a,\ x_b,\ x_c,\ x_d,\ y_c,\ y_d$和 pq 是A_6 中奇数项为 x_p 和 x_q的系数的那一行。

将行和界限视为向量。对于一个有 n 列的整数矩阵 X ，令 $E(X)$为由 X 的行以及向量 $e_1^\top$、.....、$e_n^\top$构成的族。忽略符号差异，这些向量是定义 $P(X;\ b,c,l,u)$的不等式的法向量。令 $M(X)$为由这些向量在$\mathbb{Q}$上表示的、定义在 $E(X)$上的拟阵。第1节中的每个操作(i)–(iii)对 $E(X)$的作用如下（忽略符号差异）：

- 删除一行会删除一个元素。
- 删除列 j 会收缩$e_j^\top$，也就是说，它会删除$e_j^\top$以及其他每个元素中的项 j 。
- 行除以2将 $E(X)$中位于 $2\mathbb{Z}^n$的一个元素减半。
- 行的置换和符号变换会重新排列 $E(X)$并改变符号。列的置换和符号变换，以及对元素 $a_{ij}=1$ 进行主元变换，都是幺模坐标变换。主元变换将变量x_j 替换为 $a_i x$，并交换行 i和 $e_j^\top$。

加权图。 设 Γ 为一个图，其顶点集包含一个特殊顶点 o，且其中每条边 g 都具有权重 $\kappa_g \in \{0,-1\}$。当 $\kappa_g=-1$ 时，我们称 g 轻边 ，否则称为重边 。设向量 f_p（其中 $p\neq o$为顶点）构成 $\mathbb{Q}^n$的一组基，其中 n 是这些顶点的数量，并设 f_o 为零向量。 Γ 的族 $F(\Gamma)$按 Γ的边进行索引，端点为 p、 q 的边 g 所对应的向量为

$$v_g := 2^{\kappa_g}(f_p - f_q),$$

由于我们只将向量视为相差一个符号，因此端点的顺序无关紧要，正如上面的项目符号所示。环对应于零向量。族 F 由 Γ 编码 ，其中 Γ 的边是 F 的元素，并且对于某个基 f_p的选取，每条边 g 的向量都是 $\pm v_g$。于是， F 在 $\mathbb{Q}$ 上的拟阵是 Γ的循环拟阵，其基是Γ的生成树，我们将它们视为边的集合。

对于 $\mathbb{Q}^n$ 中的向量族 F，以及 F 中向量为 v的元素 g ，令 $F\setminus g$ 为去掉g后的 F，令 F/g 为 $F\setminus g$ 中各向量在 $\mathbb{Q}^n/\mathbb{Q}v$里的像所组成的族。因此，删除 X 的列 j会将 X（ E）替换为 X（ E）$/e_j^\top$。对于 Γ的一条非环边 g ，令 Γ/g 为收缩g后得到的拟阵；若 g 以 o 为端点，则新顶点为 o。

引理 2.1。 设 g 是加权图 Γ的一条边。

(*a*) $F(\Gamma)\setminus g = F(\Gamma - g)$.

(b) 如果 g 不是环，则 $F(\Gamma)/g = F(\Gamma/g)$。

(c) 如果 g是重边，那么用 $\frac{1}{2}v_g$ 替换 v_g 可得 $F(\Gamma')$，其中 Γ'是 Γ 中轻的 g。

证明。 (a) 部分显然。对于 (b)，设 p 和 q 是 g的两端。$\mathbb{Q}^n/\mathbb{Q}v_g$ 中 f_p 和 f_q 的像相等，而 Γ/g 的顶点 $w\neq o$ 所对应的向量 f_w的像构成一组基。若 $q=o$，则 f_p 的像为 0。(c) 部分由 $\frac{1}{2}v_g = 2^{-1}(f_p - f_q)$ 得出。 □

每一行 A_6 恰有两个奇数项。变量 y_c 只出现在行 ac和 bc中，其系数为 2，因此就 $x_c + 2y_c$ 而言，这些行只涉及两个变量； y_d也同理。由此得到图 G_6 （见图 1）。

引理 *2.2*。族 $E(A_6)$ 由图 *1* 中的图 G_6 编码，其中行 ac、bc、 ad、 bd 和 cd 分别是边 $a\gamma$、 $b\gamma$、 $a\delta$、 $b\delta$ 和 cd， x_p 上的界是 $p \in \{a, b, c, d\}$ 对应的边 op ，而 y_c 和 y_d 上的界分别是轻边 $c\gamma$ 和 $d\delta$。

证明。令 $f_a := -e_a^\top$、 $f_b := -e_b^\top$、 $f_c := e_c^\top$、 $f_d := e_d^\top$、 $f_\gamma := f_c + 2e_{y_c}^\top$ 和 $f_\delta := f_d + 2e_{y_d}^\top$，其中 e_a、 e_b、 e_c、 e_d、 e_{y_c}、 e_{y_d} 是变量 x_a、 x_b、 x_c、 x_d、 y_c、 y_d 的单位向量。行 ac、 bc、 ad 和 bd 分别是 $f_\gamma - f_a$、 $f_\gamma - f_b$、 $f_\delta - f_a$ 和 $f_\delta - f_b$。 x_a、 ……、 x_d 上的界分别为 $\pm f_a$、 ……、 $\pm f_d$，而 y_c 和 y_d 上的界分别为 1 2($f_\gamma - f_c$) 和 1 2 ($f_\delta - f_d$)。行 cd 是 $f_c = f_d$。 □

对于向量族 F ，令 Λ(*F*)表示由其向量生成的格。

引理2.3。 若对 $M(X)$ 的每个基 B 及每个$v \in E(X)$，都有 $2v \in \Lambda(B)$ ，则整数矩阵 X 是*THM*。

证明。 设$X_{R,C}$ 是 X的一个非奇异方形子矩阵，并令 J 为其余列组成的集合。 X 中属于 R 的行以及满足 $j \in J$ 的向量 $e_j^\top$构成 $M(X)$的一个基 B 。经过置换后，由这些行组成的矩阵为

$$S = \begin{pmatrix} X_{R,C} & X_{R,J} \\ 0 & I \end{pmatrix}, \qquad \text{and} \qquad S^{-1} = \begin{pmatrix} Y & -YX_{R,J} \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad Y = X_{R,C}^{-1}.$$

根据假设，对每个 i，都有 $2e_i^\top \in \Lambda(B)$，也就是说， $2e_i^\top S^{-1}$ 是整数。因此 S^{-1} 是半整数， Y也如此。

□

命题2.4。 矩阵 A_6 是*THM*。

证明。设 B 是 $M(A_6)$的一个基，也就是说，是 G_6的一棵生成树；令 L 为由边 pq （其中 pq 属于 B）对应的向量 $f_p - f_q$ 生成的格。对于端点为 p和 q的边 g ，有$f_p - f_q = 2^{-\kappa_g} v_g$ ，其中 $\kappa_g \in \{0, -1\}$，因此 $L \subseteq \Lambda(B)$。对于每个顶点 $r \neq o$，由于 $f_o = 0$，向量 f_r 是从 o 到 r的路径 B 上各边 pq 对应的向量 $\pm(f_p - f_q)$之和，因此$f_r \in L$。所以，对于每条端点为 p和 q的边 g ，都有 $f_p - f_q \in L$ ，且 $2v_g = 2^{1+\kappa_g}(f_p - f_q) \in \Lambda(B)$。由引理2.3， A_6 是THM。 □

3 EJ 性质的失效

本节将描述 THM 矩阵A对应的多面体 $P(A;\ b,\ c,\ l,\ u)$ 的 Chv´atal 闭包，并证明 A_6 不具有 EJ 性质。

˜对于整数矩阵 $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$，我们将定义 $P(A;\ b,\ c,\ l,\ u)$ 的方程组写作 $Ax \leq h$，˜其中 A是矩阵

$$\begin{pmatrix} A \\ -A \\ I \\ -I \end{pmatrix}. \tag{2}$$

˜ A 的各行称为侧面。来自 A 第 a_i 行的侧面 a_i 和 $-a_i$ 分别对应于 $a_i x \leq c_i$和 $-a_i x \leq -b_i$，并且分别是第 i行的上侧面和下侧面。侧面 $e_j^\top$和 $-e_j^\top$分别对应于界限 $x_j \leq u_j$和 $x_j \geq l_j$。对于 $x \in \mathbb{R}^n$，$s(x) := h - Ax$ 是松弛量向量。

令 $k := 2m + 2n$ 表示侧面的数量。若 $\mu^\top \tilde{A} \equiv 0 \pmod 2$ 且 $\mu^\top h$ 为奇数，则向量 $\mu \in \{0,1\}^k$ 称为奇。我们将 μ 与其支撑中的侧面集合等同起来。

以下关于 Chv´atal 闭包的描述基本归功于 Appa 和 Kotnyek [1]。对于行的 ℓ_1-范数至多为 2 的矩阵，这一结果可追溯至 Gerards 和 Schrijver [11]。

引理 3.1 (Appa 和 Kotnyek [1])。设 A 是一个 *THM* 矩阵，设 $P = P(A;\ b, c, l, u)$ 具有整数数据，且设 $Ax \le h$ 是定义 P的方程组。那么

$$P' = \{x \in P :\ \mu^\top s(x) \ge 1 \text{ for every odd } \mu \in \{0,1\}^k\}.$$

证明。我们首先证明 A 是 THM。A 的非奇异方形子矩阵 S 不包含一行及其相反数。因此，经过对行和列进行符号变换及置换后，$S = \begin{pmatrix} A_{R,\,C} & A_{R\,J} \\ 0 & I \end{pmatrix}$，，其中 R 是 A 中构成 S的一行的那些行的集合，J 是满足 $e_j^\top$或 $-e_j^\top$构成 S的一行的那些列 j 的集合，而 C 是 S中其余列的集合。由于S 非奇异，$A_{R,\,C}$ 是 A的一个非奇异方形子矩阵。因此 $S^{-1} = \begin{pmatrix} Y & -Y A_{R,\,J} \\ 0 & I \end{pmatrix}$满足 $Y = A_R^{-1}$，C，且为半整数。

现在证明这个等式。根据 [7, 引理 2。10]（另见 [1]），应用于 THM 矩阵 A时，Chv´atal 闭包 P'是满足 $\lambda^\top \tilde{A} x \le \lfloor \lambda^\top h \rfloor$ 的 P中的点集，其中对每个 $\lambda \in \{0, \frac{1}{2}\}^k$，$\lambda^\top \tilde{A}$ 都是整数。对于这样的 λ，令 $\mu := 2\lambda$，于是 $\mu^\top \tilde{A} \equiv 0 \pmod 2$。如果 $\mu^\top h$ 为偶数，则该不等式对 P成立。否则 μ为奇数，且该不等式为$\frac{1}{2}\mu^\top \tilde{A} x \le \frac{1}{2}(\mu^\top h - 1)$，这等价于 $\mu^\top s(\bar{x}) \ge 1$。每个奇数 μ 都能以这种方式得到，其中 $\lambda := \frac{1}{2}\mu$。因此，$P'$是所述等式的右端。 □

对于奇数 μ，我们称不等式 $\mu^\top s(x) \ge 1$ 为 $\{0, \frac{1}{2}\}$-割。引理 3.1 的下一个推论是我们用来证明某个点属于 Chv´atal 闭包的工具。

引理 3.2。设 A 为 *THM*，$P = P(A;\ b, c, l, u)$ 具有整数数据，且 $z \in P$。假设在 z处，每个侧面的松弛量要么为 $1\,3$，要么至少为 1，并且松弛量为 $1\,3$ 的侧面的法向量非零，且模 2两两不同。那么 $z \in P'$。

证明。设 μ 为奇数。如果 μ 的支撑包含一个松弛量至少为 1 的侧面，那么 $\mu^\top s(z) \ge 1$。否则，支撑 μ 中的所有侧面的松弛量均为 $1\,3$。它们的法向量之和模 2 为 0，且这些法向量非零并且模 2 两两不同。因此，μ 的支撑至少包含三个元素，并且 $\mu^\top s(z) \ge 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$。由引理 3.1，$z \in P'$。 □

收缩 G_6 的轻边，得到图 $K_5 - ab$，如图 1所示。在 $K_5 - ab$中，行pq 是边 pq，而 x_p 的界是边 op。由于 y_c 和 y_d 的列仅含偶数项，$K_5 - ab$ 的边模 2 描述了 A_6 的行以及 x_a、x_b、x_c和 x_d的界限。这足以处理 $\{0, \frac{1}{2}\}$-割，因为奇 $\mu^\top \tilde{A} \equiv 0 \pmod 2$ 的定义中条件 μ（模 2）只涉及侧面的法向量模 2。

Let

$$\begin{aligned} b &= (0,2,1,1,0), & c &= (2,4,3,3,2), \\ l &= (-1,0,-1,0,-1,-1), & u &= (1,2,1,2,2,2), \\ z &= (\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}). \end{aligned} \tag{3}$$

命题 3.3。设 b，c，l，u和 z与 (3)中所述相同。那么 z属于其 *Chv´atal* 闭包$P(A_6;\ b,\ c,\ l,\ u)$ 但不属于其整数包。特别地，A_6 不具有 *EJ* 性质。

证明。 我们使用第 2节中引入的变量和行名称，并令 $P = P(A_6;\ b,\ c,\ l,\ u)$。

我们首先证明 $z \in P'$。在 z 处， A_6 的五行取值为13，73，43，83，53。因此 $z \in P$。在 z 处，恰有九个侧面的松弛量为13，其余所有侧面的松弛量至少为43。这九个侧面是前三行的下侧面、最后两行的上侧面，以及界 $x_a \le 1$、 $x_b \ge 0$、 $x_c \le 1$ 和 $x_d \ge 0$。由于 y_c 和 y_d 的系数都是偶数，这九个侧面的法向量模 2 后，分别是以下向量的转置

$$e_c + e_d,\ e_b + e_c,\ e_b + e_d,\ e_a + e_c,\ e_a + e_d,\ e_a,\ e_b,\ e_c,\ e_d,$$

也就是说， $K_5 - ab$的边。它们均非零，且两两不同。由命题 2.4 和引理 3.2， $z \in P'$。

接下来，我们证明每个 $x \in P \cap \mathbb{Z}^6$ 都满足 $x_a - x_b \le 0$，因此每个 $x \in P_I$ 也满足。由于 $z_a - z_b = \frac{1}{3} > 0$，这就得到 $z \notin P_I$。令 $x \in P \cap \mathbb{Z}^6$，并假设 $x_a - x_b > 0$。由于 $x_a \le 1$ 且 $x_b \ge 0$，我们有 $x_a = 1$ 和 $x_b = 0$。行 bc 和 bd 的下侧面给出 $x_c + 2y_c \ge 2$ 和 $x_d + 2y_d \ge 1$，行 ac 和 ad 的上侧面给出 $x_c + 2y_c \le 2$ 和 $x_d + 2y_d \le 1$。因此 $x_c + 2y_c = 2$ 和 $x_d + 2y_d = 1$。于是 $x_c = 2 - 2y_c$ 为偶数， $x_d = 1 - 2y_d$ 为奇数。由于 $x_c \le 1$ 和 $x_d \ge 0$，我们得到 $x_c \le 0$ 和 $x_d \ge 1$，这与行 cd 的下侧面 $x_c - x_d \ge 0$ 矛盾。 □

4 Nominor 等于 A_3 或 A_4

在本节中，我们跟踪操作（i）–（iii）如何改变图 G_6。对于每个矩阵X 通过 A_6 的操作序列得到， $E(X)$ 都由一个通过删除边、收缩边和降低权重从 G_6 得到的图来编码（引理 4.3）。这排除了A_4，其拟阵不是图拟阵（引理 4.5），而且这些图的轻边排除了 A_3（引理4.4 和命题 4.6）。

令 $N(X)$ 表示定义在 $E(X)$ 上的拟阵，其由其元素的模 2 约化在 GF(2) 上表示。拟阵的一个元素称为余回路，如果它属于每个基；等价地，如果它不在其他元素的张成中。

引理 4.1。 在操作（*i*）–（*iii*）的序列中，当前矩阵 X 中 $N(X)$ 的任何余回路元素都不会被删除。

证明。 只删除行。 $E(X)$ 中元素 $e_1^\top, \ldots, e_n^\top$ 对模 2 的约化构成 $\mathrm{GF}(2)^n$ 的一组基，因此它们构成 $N(X)$ 的一组不含行的基。因此， X 的任何一行都不是 $N(X)$ 的余回路。

□

设 $E(X)$ 由 Γ 编码。根据引理 2.1，删除一个元素会将其从 Γ中删除；将一个元素减半会使其权重降低 1；收缩一个非环元素会在 Γ中收缩该元素。幺模坐标变换不会改变 Γ。如果一个图是由 Γ 通过删除边、收缩非环边以及降低权重得到的，那么该图的每个顶点 p 都是 Γ中一组顶点 $S(p)$ 的像。这些顶点集两两不相交，每个集合由收缩边连接；新图的每条边都是 Γ 中连接其中两个集合的一条边。

引理 4.2。 设 $E(X)$ 由 Γ编码。 Γ 的轻图 与 Γ 具有相同的顶点，其边为轻边。轻分支 是轻图的一个连通分支。

(a) 作为轻图中桥的轻边是 $N(X)$ 的余回路。

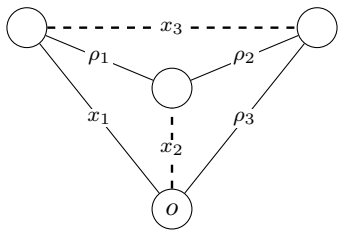


图 2：图编码 $E(A_3)$，其中 x_1、x_2、x_3 是变量，ρ_1、ρ_2、ρ_3 是A_3的行。每条边都标有其所编码的行或界。虚线边是轻边。

(b) 非环的轻边不属于 $2\mathbb{Z}^n$。

(c) 如果一条不为环的重边 属于 $2\mathbb{Z}^n$，那么它的两个端点位于同一个轻分支中 t.

证明。 对于一个不包含 o 的顶点集合 W，令 ψ_W 为线性函数，其中对于 $p \in W$，$\psi_W(f_p) = 1$，而对于其他顶点 $p \neq o$，$\psi_W(f_p) = 0$。于是 $\psi_W(f_p - f_q) \in \{0, \pm 1\}$；当 p 和 q 同时位于 W 中或同时位于 W 外时，该值为 0。$E(X)$ 的元素生成 $\mathbb{Z}^n$，因此，在这些元素上取整数值的线性函数在 $\mathbb{Z}^n$ 上也取整数值。

（a）设 g 为这样一条边。移除 g 后，其轻分支分成两部分，我们令 W 为不包含 o的那一部分。函数 $2\psi_W$ 在 v_g 上取奇数值，在其他每个元素上取偶数值。因此，v_g 不是其他元素模 2 之和。

(b) 令 $p \neq o$ 为该边的一个端点。函数 $2\psi_{\{p\}}$ 在各元素上取整数值，在该边上取奇数值。

(c) 否则，令 W 为不包含 o 的某个端点所在的轻分支。函数 ψ_W 在各元素上取整数值，因为每条轻边的两个端点要么都在 W 中，要么都在 W 外；且该函数在该边上取奇数值。

□

引理 4.3。 设 $E(A)$ 由 Γ编码，并考虑一个操作（*i*）–（*iii*）的操作序列。那么，对于序列中的每个矩阵 X，$E(X)$均由一个图编码，该图由 Γ通过删除边、收缩非环边和降低权重得到；没有权重会降至 -1 以下，并且满足以下性质。

(a) 对于 Γ 的每个轻分支 W，W 中各顶点的像都属于同一个轻分支。*(b)* 至少含有两个顶点的轻分支中的每个顶点，都是 Γ 中某个至少含有两个顶点的轻分支内某个顶点的像。

证明。 将零行除以 2 不会改变矩阵，因此我们可以假设只有非零元素被减半，且它们不是环。删除列 j 会收缩 $e_j^\top \neq 0$，而它不是环。根据引理2.1，只要没有权重降至 -1以下，第一个结论就成立。根据引理 4.1和 4.2(a)，不会删除作为轻图桥的轻边，而收缩操作只会合并轻分支。根据引理4.2(b)，轻边不会被减半，因此没有权重会降至-1以下；根据引理 4.2(c)，被减半的重边连接同一轻分支中的两个顶点。所有结论均可通过对操作次数进行归纳得出。

□

引理 4.4。 令 $E(A_3)$ 由图 Γ编码。那么 Γ是 K_4，且其轻边构成一个完美匹配。

证明。 拟阵 $M(A_3)$ 是图 K_4 的循环拟阵。其三元素回路为

$$\rho_1 = e_1^\top + 2e_2^\top, \quad \rho_3 = e_1^\top + 2e_3^\top, \quad \rho_2 = \rho_1 + 2e_3^\top, \quad \rho_2 = \rho_3 + 2e_2^\top,$$

其中 ρ_1、ρ_2、ρ_3 是 A_3的行。这些关系中的每一个都是 $E(A_3)$的三个元素之间的线性依赖，其系数为 ±1、±1 和 ±2，因此恰好有一个系数为偶数。

Γ 的循环拟阵是 $M(A_3)$，它是连通的、简单的，秩为 3，并且有 6 个元素。因此， Γ 有四个顶点，并且是 K_4。三角形的三条边 g满足 $\sum \pm 2^{-\kappa_g} v_g = 0$。除以因子 2 外，这是该三角形唯一的本原整数关系；当且仅当该三角形恰有一条轻边时，它恰有一个偶系数。由于 $F(\Gamma)$ 除符号外等于 $E(A_3)$，这些关系除符号和因子 2 外，正好就是上面的四个关系。因此，每个三角形恰有一条轻边，而轻边构成一个完美匹配。 □

引理 4.5。 拟阵 $M(A_4)$ 不是图拟阵。

证明。 拟阵 $M(A_4)$ 有 7 个元素，秩为 4。直接验证可知，它是连通的，并且没有包含至多 3 个元素的回路。（它是非 Fano 拟阵的对偶。）具有循环拟阵 $M(A_4)$ 的图将是一个有 5 个顶点、7 条边且不含三角形的简单图，但这样的图至多有 6 条边。 □

命题4.6。 矩阵 A_6 没有与 A_3 或 A_4相等的子式。

证明。 假设 $A' \in \{A_3, A_4\}$ 是 A_6的一个子式，并固定从 A_6到 A'的操作序列。我们首先证明 $A' = A_3$。根据引理 2.2 和 4.3， $E(A')$ 由图 Γ表示，该图由 G_6 按照引理 4.3中的方法得到。因此， $M(A')$ 是图拟阵，并且根据引理 $A' = A_3$ 4.5。

接下来，我们确定 Γ的轻分支。根据引理 4.4， Γ 是 K_4，其轻边构成一个完美匹配（见图 2）。因此， Γ 有两个轻分支 W_1 和 W_2，每个分支包含两个顶点，并且四条重边将 W_1 的每个顶点与 W_2 的每个顶点相连。由于权重只会减小，这些边在 G_6中是重边。令 $\bar{p}$ 表示 G_6中顶点 p的像。 G_6 中至少包含两个顶点的轻分支是 $\{c, \gamma\}$ 和 $\{d, \delta\}$。根据引理 4.3(b)， $W_1 \cup W_2$ 的每个顶点都是 c、γ、d 或 δ之一的像。根据引理 4.3(a)， $\bar{c}$和 $\bar{\gamma}$位于同一个 $\bar{}$ $\bar{}$轻分支中， d 和 δ也位于同一个轻分支中。由于 W_1 和 W_2 都包含像，我们不妨设 $\bar{}$ $\bar{}$ $W_1 = \{\bar{c}, \bar{\gamma}\}$ 和 $W_2 = \{d, \delta\}$。

最后，我们导出矛盾。设 $S(p)$ 如上所述，对应于 Γ 的顶点 p。由于 $\bar{c} \neq \bar{\gamma}$ $\bar{}$和 $d \neq \delta$，边 $c\gamma$ 和 $d\delta$ 未被收缩，而集合 $S(p)$ 由重边连通。 c 处的重边通向 o 和 d， d 处的重边则通向 o 和 c。图 Γ 有 $\bar{}$ $\bar{}$一条边连接 $\bar{c}$ 和 δ。若 $S(\bar{c}) = \{c\}$，这条边便连接 c 和 o，因此 $o \in S(\delta)$。否则， $S(\bar{c})$ $\bar{}$含有一个与 d 不同的 c 的重邻点，因此 $o \in S(\bar{c})$。类似地，连接 d 和 $\bar{\gamma}$ $\bar{}$的边给出 $o \in S(d) \cup S(\bar{\gamma})$。这四个集合两两不相交，矛盾。 □

定理 *1.2* 的证明。这三个论断分别是命题 2.4、3.3 和 4.6。 □

推论 *1.3* 的证明。根据定理 1.2，矩阵 A_6 是 THM，不含与 A_3 或A_4 相等的子式，且不具有 EJ 性质。 □

5 极小性

本节证明定理1.4。在第 5.1 节中，我们将证明，矩阵X 的 EJ 性质只取决于族 $E(X)$，且只需考虑坐标变换；在第5.2节中，我们给出加权图满足其向量族具有该性质的两个条件；在第 5.3 节中，我们证明该定理。

5.1 系列与格基

设 F 是一个有限向量族，它张成了 $\mathbb{Q}$上的有限维向量空间，例如$\mathbb{Q}^n$ 或 $\mathbb{Q}^n/\mathbb{Q}v$，并回忆一下，Λ(*F*)是由其向量生成的格。 F 的格基 是 F 的一个子族，且该子族是 Λ(*F*)的基。若 B 是格基，则将 F 中不属于B 的元素用相对于 B 的坐标表示，可得到一个整数矩阵 X_B；每个不属于 B的元素对应一行，而 $E(X_B)$在这些坐标下为 F。对于一个有 n 列的矩阵 X，元素$e_1^\top$、.....、 $e_n^\top$ 构成 $B(X)$的格基 E，且 $X_B = X$。若两个族 F和 F'在线性同构 φ 下对应，则存在它们之间的一个双射，使得 φ 将 F 中每个元素的向量映射为 F'中对应元素的向量 $\pm$。

EJ 性质不受重复约束的影响。

引理 5.1。 设 A 为一个整数矩阵，并设 A 由 A 通过添加一行得到，该行等于某个 j对应的 $\pm e_j^\top$，或等于 A中的一行的 $\pm$。那么，当且仅当 A具有 *EJ* 性质时， $\bar{A}$ 才具有 *EJ* 性质。

证明。由于 A 是 A的一个子式，根据定理 2， A 具有 EJ 性质意味着 A [7, 具有 EJ 性质。1] 反之，假设 A 具有 EJ 性质，并令 $P = P(A;\ b,\ c,\ l,\ u)$具有整数数据。添加行的两个侧面可以与 x_j 上的界限合并，也可以与相等行的侧面合并。因此， P要么为空，要么等于具有整数数据的多面体 $P(A;\ \cdot)$。在第二种情况下， $\bar{P}' = \bar{P}_I$，因为 A 具有 EJ 性质。

□

引理 5.2。 设 F 是上述具有格基的一个族。

(a) 对于 F 的格基 B，要么所有矩阵 X_B 都具有 *EJ* 性质，要么一个也不具有。前一种情况下，我们称 F 具有 *EJ* 性质。在线性同构下对应的两个族，要么都具有 *EJ* 性质，要么都不具有。*(b)* 设 F 具有 *EJ* 性质，且 B 是一个格基。若 $g \notin B$，则 $F \setminus g$ 具有 *EJ* 性质。若 $g \in B$，则 F/g 具有 *EJ* 性质。*(c)* 如果 F 中有两个元素相差一个符号，那么 F 具有 *EJ* 性质，当且仅当去掉其中一个元素后的 F 具有 *EJ* 性质。

证明。(a) 设 B 和 B' 是格基。由于它们都是 $\Lambda(F)$ 的基，从 B' 到 B 的坐标变换由一个幺模矩阵 U 给出，并且 $E(X_{B'})$ 与 $E(X_B)$ U 除符号和顺序外相同。定义 $P(X_B;\ b、\ c、\ l、\ u)$ 的方程组由两个不等式组成，对于每个 $v \in E(X_B)$，其法向量为 v 和 $-v$；代换 $x = Uy$ 将其转化为定义多面体 $P(X_{B'};\ b'、\ c'、\ l'、\ u')$ 的方程组，且该多面体具有整数数据。每个这样的多面体都可由此方式得到。映射 $y \mapsto Uy$ 保持 $\mathbb{Z}^n$，因此会将 CG 割映射为 CG 割，将 Chv´atal 闭包映射为 Chv´atal 闭包，并将整数包映射为整数包。因此， X_B 具有 EJ 性质，当且仅当 $X_{B'}$ 具有该性质。线性同构将格基映射为格基，且不会改变矩阵 X_B。

(b) 若 $g \notin B$，则 B 是 $F \setminus g$ 的格基，而 $F \setminus g$ 的 X_B 可由 F 的 X_B 删除第 g 行得到。若 $g \in B$，则 B 中除 g 外各元素的像构成 F/g 的格基，相应矩阵可由 X_B 删除 g 所在列得到。根据定理 2.1]，EJ 性质在取子式时保持不变 [7,。

（c）如果两个元素中的一个属于格基 B，则另一个是 X_B 中等于 $\pm e_j^\top$的一行。否则，二者都是 X_B的行。应用引理 5.1。

□

5.2 具有 EJ 性质的两类图

设 Γ 是第 2节所述的加权图。如果 Γ 是连通的，则 $F(\Gamma)$ 张成 $\mathbb{Q}^n$。对于连通图的生成树 T 和一条边 $g \notin T$，的基本回路 是由 g 以及 T 两端之间的路径 g 所构成的回路。 g。

引理5.3。 设 Γ 是一个无环的连通加权图，且 T 是包含所有轻边的生成树。

(a) T 是 $F(\Gamma)$的格基。

(b) 如果 T 的每条重边至多位于两个基本回路上，且 T的每条轻边至多位于一个基本回路上，那么 $F(\Gamma)$ 具有 *EJ* 性质。

证明。 我们首先证明(a)。设 $g \notin T$ 是一条端点为 p 和 q的边。它是重边。对于 T 中连接 p 和 q 的路径上的每条边 t，向量 $2^{-\kappa_t} v_t$ 为 $\pm(f_r - f_w)$，其中 r 和 w 是 t的端点。沿着该路径求和，

$$v_g = f_p - f_q = \sum_t \pm 2^{-\kappa_t} v_t.$$

因此，每个元素都是 T中向量的整数线性组合，而这些向量是线性无关的。这就证明了(a)。

现在证明 (b)。 X_T 中按 $t \in T$ 索引的列，在基本回路包含 t的边所对应的行中，其元素为 $\pm 2^{-\kappa_t}$，在其他行中为 0。在 (b) 的假设下，其 ℓ_1-范数至多为 2。根据 Edmonds和Johnson 定理， [10]、 X_T 具有 EJ 性质。 □

引理 5.4。 设 Γ 是一个连通加权图， $p \neq o$ 是一个恰有两条关联边 g_1 和 g_2的顶点，这两条边的另一端分别为 q 和 r。令 Γ' 由 Γ 得到：让 g_1 连接 p与 r ，让 g_2 连接 p 与 q，并保留相同的权重。则 $F(\Gamma)$ 与 $F(\Gamma')$ 在线性同构下对应，其中每条边都对应其自身。

证明。 令 $f'_p := f_q + f_r - f_p$，并令 $f'_w := f_w$表示其他顶点 $w \neq o$。这些向量构成 $\mathbb{Q}^n$的一组基。在 Γ'中， g_1的向量为 $2^{\kappa_{g_1}}(f'_p - f_r) = 2^{\kappa_{g_1}}(f_q - f_p)$，而 g_2的向量为$2^{\kappa_{g_2}}(f'_p - f_q) = 2^{\kappa_{g_2}}($ $f_r - f_p$)。这些分别是 g_1和 g_2在 Γ中的向量，至多相差一个符号，而其他向量不涉及 f_p。 □

在引理 5.4中，路径 $q\,p\,r$ 被路径 $r\,p\,q$所替代，因此顶点 p沿着路径移动，且两条边交换了位置。

引理5.5。 设 Γ 是一个不含环的连通加权图，其轻边具有一个公共端点。那么 $F(\Gamma)$ 具有 *EJ* 性质。

证明。我们首先将情形归约到公共端点为 o 的情况，并求出一个格基。设 r 是轻边的一个公共端点；如果没有轻边，则令 $r := o$ 。将每个向量 f_p 替换为 $f_p - f_r$（包括 $f_o = 0$）不会改变向量 $f_p - f_q$，并且 f_r 变为 0。因此， $F(\Gamma)$ 也是以 r 为特殊顶点的 Γ 族，我们可以假设 $r = o$。令 Γ_0 由 Γ 得到：对于每组权重相同的平行边，只保留其中一条边。 Γ_0 的轻边在 o 处构成一个星，因此它们包含于 T 中，而 T 是 Γ_0 的生成树。根据引理 5.3(a)，它是 $F(\Gamma_0)$ 的格基。权重相同的平行边给出至多差一个符号的同一向量，因此 T 也是 $F(\Gamma)$ 的格基；根据引理 5.2(c)，我们可以用 Γ_0 替换 Γ 。

现在我们证明 F（Γ）具有 EJ 性质。令 Γ^+ 由 Γ 得到：对于每个不与 o 相邻的顶点 $p \neq o$，添加一条重边 op。其向量是从 o 到 p 的某条路径上各边向量的整数线性组合，因此 Λ（F（Γ^+））$= \Lambda$（F（Γ））， 且 T 也是 F（Γ^+）的格基。根据引理 5.2(b)，只需证明 F（Γ^+）具有 EJ 性质。对于每个顶点 $p \neq o$，选择一条连接 o 与 p 的边 g_p；若可能，选择轻边，并令 $\sigma_p := 2$（当 g_p 为轻边时），否则令 $\sigma_p := 1$。g_p 的向量为 f_p/σ_p。o 与 p 之间的其他边都是重边，其向量为 $f_p = \sigma_p \cdot f_p/\sigma_p$；连接 p 与 q 且满足 p、$q \neq o$ 的边是重边，其向量为 $\sigma_p \cdot f_p/\sigma_p - \sigma_q \cdot f_q/\sigma_q$。因此，边 g_p 构成格基 B，且 $X_B = Y\Delta$，其中 Δ 是对角矩阵，其对角线元素为 σ_p；Y 的每一行都是 $e_p^\top$ 或 $e_p^\top - e_q^\top$，坐标由顶点 $p \neq o$ 索引。在仅有一个非零元素的行中，将一个元素为 -1 的列添加到 Y，所得矩阵是有向图关联矩阵的转置；该矩阵是全幺模的，并且每行有两个非零元素。根据 Del Pia和Zambelli定理 [9, 推论 2]（二分情形见 [5]），将其各列分别乘以元素 σ_p、将新列乘以 1 所得到的矩阵具有 EJ 性质。删除新列即得到 X_B。

□

5.3 定理1.4的证明

令 $F := E(A_6)$，由 G_6 (引理 2.2)。

引理 5.6。 F 的每个格基都包含 $c\gamma$ 和 $d\delta$。

证明。 轻边 $c\gamma$ 和 $d\delta$ 是轻图中的桥，因此根据引理 $N(A_6)$ 它们是 4.2(a) 的余回路。 F 的格基是 $\mathbb{Z}^6$的基，因此其模 2 约化是$N(A_6)$ 的基，并且包含每个余回路。

□

引理 5.7。 假设对每条重边 g， $F(G_6 - g)$ 都具有 *EJ* 性质；并且对每条边 g，$F(G_6/g)$ 都具有 *EJ* 性质。那么 A_6 是一个极小障碍。

证明。根据定理 1.2， A_6 是 THM，且不具有 EJ 性质。令 A' 为 A_6的一个真子式，并固定一个从 A_6 到 A'的操作序列。该序列会删除一行或一列，令 A'' 为首次删除之前的矩阵。 A_6 的每一行都有奇数项，因此 $E(A_6)$中没有元素属于 $2\mathbb{Z}^6$，而且这在幺模坐标变换下保持不变。因此，在 A''之前没有行被除以 2；经过幺模坐标变换后， $E(A'')$是 F，它将 F的格基 B映射为 $E(A'')$的元素 $e_1^\top$、.....、$e_6^\top$。如果删除操作删除一行，则它删除一个元素 $g \notin B$，根据引理 5.6， g 是重的。经过坐标变换后，所得矩阵是 $F \setminus g = F(G_6 - g)$的 X_B（引理 2.1）。由于 B 是$F \setminus g$的格基，且根据假设， $F(G_6 - g)$具有 EJ 性质，因此根据引理 5.2(a)，该矩阵具有 EJ 性质。如果删除操作删除一列，则它收缩一个元素 $g \in B$。 B 的其余元素的像构成 $F/g = F($ $G_6/g)$的格基；经过坐标变换后，所得矩阵是关于该格基的 F/g 的矩阵。由于根据假设， $F($ $G_6/g)$具有 EJ 性质，因此根据引理 5.2(a)，该矩阵具有 EJ 性质。根据定理 2.1]，剩余操作 [7, 保持 EJ 性质。因此 A' 具有 EJ 性质。

□

命题 5.8。 对于 G_6 的每条重边 g，族 F（$G_6 - g$）都具有 *EJ* 性质；对于 G_6 的每条边 g， F（G_6/g）也具有 *EJ* 性质。

证明。 我们首先将问题化简为九种情形。 G_6 的自同构可交换 a 与 b，或交换 c 与 d、 γ 与 δ，同时固定 o 和各权重。它们在这些族之间诱导出线性同构

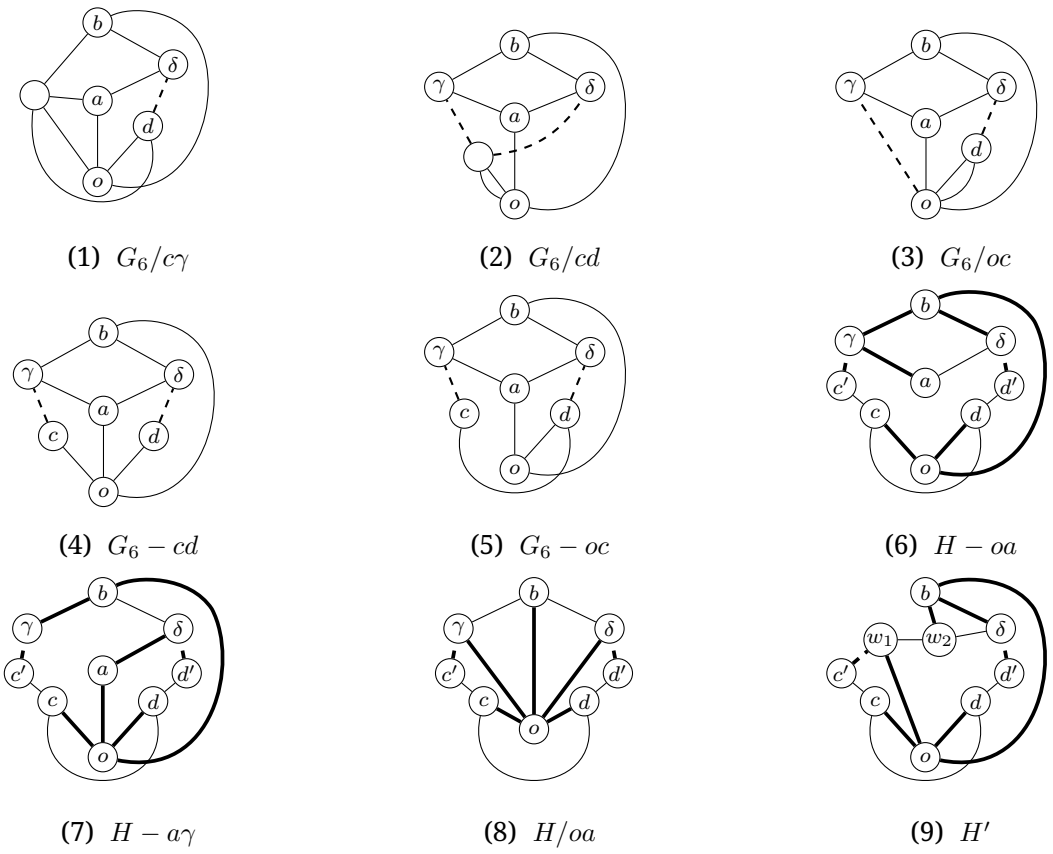


图 3：命题 5.8 的证明中的各种情形。虚线边为轻边。图版 (1)–(5) 展示了各情形的图，其中无标记顶点由收缩一条边得到。图版 ˆ (6)–(9) 展示了图 Γ，其中生成树 T 以粗体标示。

因此，根据引理 5.2(a)，只需考虑每个轨道中的一条边，即 $\{oa, ob\}$、$\{oc, od\}$、 $\{a\gamma, b\gamma, a\delta, b\delta\}$、$\{cd\}$ 和 $\{c\gamma, d\delta\}$。删除重边 oa、 oc、 $a\gamma$ 和 cd，并收缩边 oa、 oc、 $a\gamma$、 cd 和 $c\gamma$ ，得到九种情形：(1) $G_6/c\gamma$，(2) G_6/cd，(3) G_6/oc，(4) $G_6 - cd$，(5) $G_6 - oc$，(6) $G_6 - oa$，(7) $G_6 - a\gamma$，(8) G_6/oa 和(9) $G_6/a\gamma$ （见图 3）。这些图都是连通的，且没有环。

接下来，我们用引理 5.5 处理情形 (1)–(5)。

(1) $G_6/c\gamma$ 有一条轻边， $d\delta$。

(2) 在 G_6/cd中，轻边 $c\gamma$ 和 $d\delta$ 具有由 c和 d得到的公共端点。

(3) 在 G_6/oc中，顶点 c 与 o重合，轻边 $c\gamma$ 变为 $o\gamma$，而 cd 和 od变成具有相同向量的平行重边。根据引理 5.2(c)，我们删除 cd 。然后，d 恰有两条关联边，即 od 和 $d\delta$，引理 5.4 使轻边 $d\delta$ 连接d至 o。

(4) 在 $G_6 - cd$中，顶点 c 恰有两条关联边，即 oc 和 $c\gamma$，也一样，其中 od和 $d\delta$。引理 5.4在 c 处以及在 d 处使两条轻边的端点都位于 o。

(5) 在 $G_6 - oc$ 中，顶点 c 恰有两条关联边， cd 和 $c\gamma$。引理 5.4 使轻边 $c\gamma$ 连接 c 与 d，后者是与 $d\delta$ 的公共端点。

在每种情况下，引理 5.5都适用于最终图，而引理5.4和5.2(a)，以及引理5.2(c) 在情况 (3) 中，表明该情况下的族具有 EJ 性质。

最后，我们借助引理5.3处理情形（6）–（9）。令 H 通过细分轻边得到：将 $c\gamma$ 替换为一条重边 cc' 和一条轻边 $c'\gamma$，将 $d\delta$ 替换为一条重边dd' 和一条轻边 $d'\delta$，其中 c' 和 d' 是新顶点。在 H 中收缩 cc' 和 dd'，得到G_6。令 H' 由 $H/a\gamma$ 通过拆分顶点 w 得到，该顶点由 a 和 γ 获得，将其拆分为两个顶点 w_1 和 w_2：w_1 与 oa 和 $c'\gamma$ 的像关联，w_2 与 $b\gamma$ 和 $a\delta$ 的像关联，并用一条新的重边 w_1w_2 将二者连接。收缩 w_1w_2 得到 $H/a\gamma$。在每种情况下，该情形的图 ˆ ˆ 都可由图 Γ 通过收缩得到，并且我们使用 Γ 的一棵生成树 T。

（6） $G_6 - oa = (H - oa)/\{cc', dd'\}$，以及 $T = \{ob, oc, od, a\gamma, b\gamma, b\delta, c'\gamma, d'\delta\}$。（7） $G_6 - a\gamma = (H - a\gamma)/\{cc', dd'\}$，以及 $T = \{oa, ob, oc, od, b\gamma, a\delta, c'\gamma, d'\delta\}$。（8） $G_6/oa = (H/oa)/\{cc', dd'\}$，以及 $T = \{ob, oc, od, o\gamma, o\delta, c'\gamma, d'\delta\}$。（9） $G_6/a\gamma = H'/\{w_1w_2, cc', dd'\}$，以及 $T = \{ow_1, ob, oc, od, bw_2, b\delta, c'w_1, d'\delta\}$.

ˆ ˆ 在每种情况下，T 都包含 Γ的轻边，图3 展示了 Γ，其中 T 以粗体标出。的每条轻边只位于边 cc' 或 dd' 细分该边所形成的基本回路上，因为 c'和 d' 的度数为 2，且 cc'，$dd' \notin T$。从图中可见，T的每条重边至多位于两个基本回路上。由引理5.3(b)，$F(\Gamma)$ 具有 EJ 性质。

剩下要证明的是，收缩 cc' 和 dd'，以及在情形 (9) 中收缩 w_1w_2，都能保持 EJ 性质。收缩边与轻边构成一个森林：情形 (6)–(8) 中的路径 $c\,c'\,\gamma$ 和 $d\,d'\,\delta$，以及情形 (9) 中的路径 $c\,c'\,w_1\,w_2$ 和 $d\,d'\,\delta$。因此，它们包含在 T'ˆ Γ 的一棵生成树中，该生成树包含所有轻边；由引理5.3(a)，它是一个格基。我们逐条收缩这些边。由引理5.2(b)，每次收缩都保持 EJ 性质，且 T' 中其余边的像构成一个格基。因此，每种情形对应的族都具有 EJ 性质。

□

定理*1.4*的证明。结合引理5.7 和命题5.8。 □

6 更多反例与未解问题

通过类似的论证，我们还可以得到两个猜想1.1的反例。令 A_6^+ 由 A_6 将条目 -1 改为 1 得到，并令 A_7 由 A_6 将第一行最后两个条目改为 2 和 -2，并添加列 $(2,0,0,0,0)^\top$得到：

$$A_6^+ := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_7 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

两个矩阵都是 THM，不具有 EJ 性质，且没有等于 A_3 或 A_4的子式。在论证中，将 G_6 中边 cd 的向量 $f_c - f_d$ 替换为A_6^+对应的 $f_c + f_d$，并将 G_6 中的边 cd 替换为一条含有一条轻边的路径，以对应 A_7。此处不列出这些证明。

两个矩阵若可通过对条目 ± 1进行主元操作、置换和符号变换相互得到，则称它们等价。猜想 1.1指出， A_3 和 A_4 是等价意义下仅有的极小障碍。我们的反例表明这个列表并不完整，因此自然的问题是如何补全它。

问题 6.1。 THM 矩阵具有 EJ 性质，当且仅当它没有等于 A_3, A_4, A_6, A_6^+ 或 A_7 的子式吗？更一般地说，除等价情形外，是否存在有限多个极小障碍？

致谢

作者感谢他的博士导师 Giacomo Zambelli 将 Gerards– Schrijver 猜想介绍给他，并感谢他们共同研究这一问题时度过的许多小时光。

资助。 A. Del Pia 部分获得 AFOSR 资助项目 FA9550-23-1-0433 和 ONR 资助项目 N00014-25-1-2490 的支持。本文所表达的任何观点、研究结果、结论或建议均属于作者个人意见，不一定反映美国空军科学研究办公室或美国海军研究办公室的立场。

人工智能声明。 人工智能工具（由 Anthropic 开发的 Claude）曾用于校对并提出改进表述的建议。作者对论文内容承担全部责任。

参考文献

[1] Gautam Appa 和 Bal´azs Kotnyek，有理与整数 k-正则矩阵，Discrete Mathematics**275** （2004），第1–3期，1–15页。[2] Gautam Appa、Bal´azs Kotnyek、Konstantinos Papalamprou 和 Leonidas Pitsoulis，使用 *binet* 矩阵进行优化，Operations Research Letters**35** （2007），第3期，345–352页。[3] Alberto Caprara 和 Matteo Fischetti，$\{0, \frac{1}{2}\}$-*Chv´atal–Gomory* 割，Mathematical Pro- gramming **74** （1996），第3期，221–235页。[4] Va˘sek Chv´atal，*Edmonds* 多面体与组合问题的层次结构，Discrete Mathematics**4** （1973），第4期，305–337页。[5] Michele Conforti、Bert Gerards 和 Giacomo Zambelli，二分图上的混合整数顶点覆盖，Integer Programming and Combinatorial Optimization：第12届国际 IPCO 会议（柏林），《计算机科学讲义》，第4513卷，Springer，2007年，第324–336页。[6] William J. Cook、Bert Gerards、Alexander Schrijver 和 ´Eva Tardos，整数线性规划中的敏感性定理，Mathematical Programming **34** （1986），第3期，251–264页。[7] Alberto Del Pia，关于具有 *Edmonds–Johnson* 性质的矩阵，博士论文，帕多瓦大学，2009年。[8] Alberto Del Pia、Antoine Musitelli 和 Giacomo Zambelli，关于由双向图产生的具有 *Edmonds–Johnson* 性质的矩阵，Journal of Combinatorial Theory, Series B**130**（2018），49–91页。

[9] Alberto Del Pia 和 Giacomo Zambelli，二部双向图上的半整数顶点覆盖：全对偶整数性与割秩，SIAM 离散数学杂志 **23**（2009），第3期，1281–1296页。[10] Jack Edmonds 和 Ellis L. Johnson，匹配、欧拉回路与中国邮递员问题，Mathematical Programming **5** （1973），第1期，88–124页。[11] Bert Gerards 和 Alexander Schrijver，具有 *Edmonds–Johnson* 性质的矩阵，Com- binatorica**6** （1986），第4期，365–379页。[12] Ralph E. Gomory，线性规划整数解算法概要，美国数学会通报 **64** （1958），275–278页。[13] Alexander Schrijver，关于割平面，离散数学年刊**9**（1980），291–296页。[14] ,线性与整数规划理论，约翰·威立父子公司，奇切斯特，1986年。