arXiv:2611.28601v1 [q-bio.NC] 21 Nov 2026

从局部竞争到隆起吸引子：兴奋宽度如何决定视觉工作记忆循环模型中的容量、干扰与更新

Purvikalyani Prasannah[1]
Rakesh Sengupta[1,*]

[1]Krea大学计算认知实验室，交织艺术与科学学院，斯里城，印度安得拉邦*通讯作者： rakesh.sengupta@krea.edu.in(ORCID 0000-0003-1768-0551)

摘要

视觉工作记忆的两种主要循环模型——中心兴奋、周围抑制（OCOS）网络和斑块吸引子——主要区别在于循环兴奋的扩散范围。我们将它们纳入同一类模型，以固定总兴奋下的兴奋宽度为参数，并探究每个存储项目的稳定性，以及电路维持和改变项目所需付出的代价。答案是，兴奋宽度决定了连续性的代价。在 OCOS 极限下，我们通过补全 Sengupta 等人（2024）的能量函数形式体系，得到了精确解：一个项目占据单个单元，快速弛豫且从不漂移；容量可用闭式表达式求得，对所有稳定状态都精确。当兴奋范围拓宽至斑块状状态时，项目变得连续，但代价高昂：每个项目占用 15–29 个单元，而非一个单元；活动量是原来的 6.5–11 倍；扰动后弛豫速度慢 35–60 倍；要接纳第二个项目，需要强 35–230 倍的线索；容量则从至少 40 个项目降至 7–10 个。在噪声作用下，当背景虚警大致匹配时，约三分之一的宽项目会发生漂移，而窄项目则始终不动。然而，即使项目的平移模态软化并趋近于零，项目仍会锁定在晶格上。项目位置之间的能量差无法很好地预测锁定，而项目边缘外侧紧邻单元低于阈值的幅度则具有很强的预测力（在 40 种参数设置下，秩相关为 0.91）。当这一裕度消失时，新输入会捕获存储项目，而不是被添加到记忆中。

关键词： 视觉工作记忆；中心兴奋、周围抑制网络；斑块吸引子；能量函数；稳定性；计算成本；容量；更新

1 引言

视觉工作记忆能够保持少量项目数秒，但保持效果并不完美。存储的项目越多，回忆就越不精确（Bays and Husain，2008年；Ma 等人，2014年）；项目数超过少数几个后，一些项目会完全丢失（Luck and Vogel，1997；Zhang and Luck，2008年）；彼此相近的项目会相互干扰；记忆还必须抵御噪声、保持稳定，同时仍能
能够接受新输入并进行更新。无论这些限制反映的是固定数量的离散槽位，还是由多个项目共享的连续资源，过去二十年来一直存在争论（Zhang and

Luck，2008年；Bays and Husain，2008年；Ma 等人，2014年）。在神经机制层面，这类特性通常用递归网络来解释，其持续活动会在刺激消失后继续存在（Compte 等人，2000年；Wang，2001年）。

因此，理解哪些循环机制可能导致这些限制一直备受关注，而其中两类模型占据主导地位。在中心兴奋、周围抑制 （OCOS）网络中，这类网络源自Grossberg（1973年）的工作，并由Cohen和Grossberg（1983年）加以分析；每个单元都会兴奋自身并抑制邻近单元。在我们先前的工作中，OCOS网络被用作注意优先级图的模型，其中单个参数——侧向抑制的强度——使网络在聚焦的、受容量限制的模式与弥散模式之间转换（Sengupta 等人，2014年、2017年）。同一架构既解释了视觉短时记忆中的容量限制，也解释了枚举中的容量限制（Knops 等人，2014年；Sengupta，2025年），而其全局抑制版本则被用于研究高负载下的干扰和记忆灾难性丧失（Endress and Szabó，2017年、2020年）。相比之下，在隆起吸引子 网络中，兴奋会在调谐相似的单元群体中扩散，抑制范围更广，而被记住的特征值则以局部化活动峰的形式保持（Amari，1977年；Compte 等人，2000年；Wimmer 等人，2014年）。活动峰模型能够捕捉延迟期间精度逐渐、弥散式的丧失（Compte 等人，2000年；Wimmer 等人，2014年），而多项目扩展则将其容量限制与活动峰之间的抑制联系起来（Edin 等人，2009年；Wei 等人，2012年；Almeida 等人，2015年）。

这两类模型通常被视为彼此替代的方案，但它们共享一种架构：局部兴奋和范围更广的抑制。它们的主要区别在于兴奋作用能传播多远。这提示我们可以将它们视为同一类模型的成员，其中循环兴奋的宽度 σ_e 是连接二者的参数。在极限情况下， $\sigma_e \to 0$ 兴奋仅局限于各个单元自身，此时便是 OCOS网络；随着 σ_e 增大，兴奋逐渐扩散，网络也趋近于斑块吸引子。因此，我们提出了一个不同于通常研究的问题：重点不是判断哪个模型正确，而是考察当网络从一种模型转变为另一种模型时，发生了什么变化，以及这些变化通过何种机制产生。两个量构成了比较的框架。第一个是稳定性：存储项目抵抗扰动、噪声和新输入的能力有多强。第二个是 成本：电路为了维持一个项目以及改变其所存储的内容，必须付出什么代价，包括所招募的单元数量、所维持的活动、从扰动中恢复所需的时间、项目之间的间距，以及更新所需的输入。既便宜又稳定的记忆是有用的；只有付出巨大成本才能保持稳定，或虽然便宜却十分脆弱的记忆，则不那么理想。考察稳定性和成本沿这一模型族如何共同变化，可以使两类模型之间的比较变得具体起来。

相关文献已经表明，吸引子的离散性至关重要。完全平移不变的隆起网络具有一个稳定状态连续体，而噪声会使隆起沿着该连续体游移（Compte 等，2000年；Burak 和 Fiete，2012年；Kilpatrick 和 Ermentrout，2013年）。打破这种对称性，例如引入异质性兴奋，会使一组离散状态趋于稳定，并减缓游移速度，但代价是对能够存储的内容进行粗粒化（Brody 等，2003年；Renart 等，2003年；Itskov 等，2011年；Kilpatrick 等，2013年）。然而，这些分析关注的是单个被记住的值。关于同一结构变化如何塑造定义视觉工作记忆的多项目特性，我们所知甚少：能够保持多少个项目，它们之间可以有多接近，新项目到来时会发生什么，以及记忆如何

在噪声下失效。

为了解答这些问题，我们做出了三项贡献。

1. **窄（OCOS）极限的精确理论**（第3节）。我们补全了Sengupta等（2024）针对完整耦合网络构建的能量函数，并证明其海森矩阵可提供严格线性稳定性的精确检验（定理1）。这表明，该研究中的节点级和成对稳定性判据分别是必要条件和精确判据（推论 1）。对于均匀抑制，我们得到了容纳 S 个项目的状态存在性和稳定性的闭式条件（定理2），并证明每个稳定状态都具有相等激活（命题 2）。因此，所得容量 S_{st} 对于所有稳定状态而言是精确的，并且始终小于多项目状态不再存在时的上限 $S_{\max}$ 。我们还证明，所有项目在 $S_{\max}$ 以上消失是一种瞬态，而非吸引态（命题 3）；推导出距离依赖性抑制下两个项目能够共存的最小间距（命题 4）；并推导出保护非活跃单元免遭招募的裕度（命题 5）。每项结果均通过模拟进行检验。

2. **将 OCOS 与斑块吸引子联系起来的参数化族** （第 2 节），其中兴奋宽度发生变化，而总兴奋保持不变，因此唯一发生变化的因素是宽度。

3. **沿该参数化族对稳定性与成本进行系统比较** （第 4 节）：比较局部稳定性、抵抗移动的能力、更新提示的结果以及在噪声下的失效情况，并考察每个存储项目所需的单元、活动、弛豫时间、间距和输入。该比较还揭示了晶格锁定的机制，以及新输入捕获存储项目的机制。

简而言之，兴奋宽度决定了连续性的代价。窄网络能够容纳许多成本低廉的项目，每个项目只占据一个单元，被锁定在原位，能够迅速从扰动中恢复，并且不会因噪声而移动。宽网络只能容纳少量项目，每个项目虽具有连续性却代价高昂：它占据许多单元，使活动维持在数倍水平，恢复速度慢几十倍，使其他项目彼此相距很远，并且在添加第二个项目之前需要强得多的线索；此外，它还会在噪声下发生漂移。在此过程中，存储项目的最慢模态——即其平移——逐渐软化至零，但项目仍然保持锁定于晶格。有趣的是，项目位置之间的能量差异并不能很好地预测锁定；相反，锁定性与项目边缘之外紧邻单元低于阈值的程度具有很强的预测关系。当这一裕度消失时，新输入不再添加一个项目，而是捕获已有的存储项目。最后，我们将讨论这对“槽位与资源”之争以及对容量限制的回路层面的解释意味着什么（第 5 节）。

2 模型

2.1 加性网络

该模型使用一个由 N 率单元组成的单层网络，这些单元以晶格间距为 1 的方式排列在一个环上，因此单元 i 与 j 之间的距离为 $d_{ij} = \min(|i-j|,\, N-|i-j|)$。每个单元都会兴奋自身（以及，

沿着下方的族，其邻近单元），并抑制其他单元。网络的时间动力学由下式给出

$$\dot{x}_i = -\lambda x_i + \sum_j W_{ij}\, F(x_j) + I_i(t) - \theta + \eta_i(t), \qquad F(x) = \begin{cases} x/(1+x), & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases} \tag{1}$$

其中， x_i 是单元 i的激活， $\lambda > 0$ 是泄漏， W 是对称循环权重矩阵， $I_i(t)$ 是外部输入（仅在线索呈现期间存在）， $\theta \ge 0$ 是可选的紧张性抑制， η_i 是噪声。饱和阈值输出 F 正是我们在早期 OCOS 枚举和容量模型中使用的输出（Sengupta 等人，2014年、2017年；Sengupta，2025年）。注意，对于 $x > 0$， $F\prime(x) = (1+x)^{-2}$；对于 $x < 0$， $F\prime(x) = 0$；并且 $F'(0^+) = 1$。我们将 $y_i = F(x_i)$ 记作，如果 $x_i > 0$，则称一个单元为活跃单元；活跃单元的集合为 $\mathcal{A}$。除非另有说明， $\theta = 0$ 和$\eta \equiv 0$。

2.2 从 OCOS 到斑块吸引子的一族模型

循环权重是兴奋减去抑制， $W = E - B$，其中

$$E_{ij} = \alpha\, \frac{g_e(d_{ij})}{\sum_d g_e(d)}, \quad g_e(d) = e^{-d^2/2\sigma_e^2}, \qquad B_{ij} = \beta_0\, e^{-d_{ij}^2/2\mathrm{RF}^2}\ (i \ne j), \quad B_{ii} = 0. \tag{2}$$

抑制核 B的强度为 β_0 ，宽度为感受野，是 Sengupta（2025年）提出的距离依赖性抑制。兴奋核 E 的宽度为 σ_e ，并经过归一化，使每个单元发出的总兴奋量 $\sum_j E_{ij} = \alpha$不受 σ_e影响。这种“质量”归一化是关键的设计选择：它使宽度成为该模型系列中唯一变化的因素。当$\sigma_e = 0$ 时，核退化为 $E_{ij} = \alpha\, \delta_{ij}$ ，而式（1）正好就是 OCOS网络

$$\dot{x}_i = -\lambda x_i + \alpha F(x_i) - \sum_{j \ne i} \beta_{ij} F(x_j) + I_i, \tag{3}$$

其中 $\beta_{ij} = B_{ij}$。随着 σ_e 增大，兴奋会扩散至邻近单元，一个项目会占据多个单元，网络也会形成斑块吸引子的局部兴奋、广泛抑制结构（Amari，1977；Compte 等，2000）。图1展示了不同宽度下的核和一个存储项目。在一项对照实验中（第4.7节），我们改用“峰值”归一化 $E_{ij} = \alpha\, g_e(d_{ij})$，此时自权重保持在 α ，而总兴奋随 σ_e增长。

均匀抑制下的 OCOS极限，对于所有 $i \ne j$ 均为 $\beta_{ij} = \beta$，是 Endress和Szabó（2020年）研究的全局抑制网络，也是我们早期枚举工作（Sengupta 等人，2014年、2017年）中采用单个抑制参数的网络；这是第3节闭式结果所采用的设定。

模型行为。自激与侧向抑制形成推拉相互作用，推动网络达到稳定平衡态。被线索指定的单元依靠自身的循环兴奋维持在阈值之上，而它发出的抑制则限制了能与其同时保持活跃的其他单元数量。在 $\sigma_e = 0$ ，一个项目因此就是一个活跃单元，而网络能够保持的项目数量仅由抑制决定。随着兴奋范围扩大，相邻单元开始相互支持，使一个项目变成由多个共同活跃单元组成的小群体，其位置

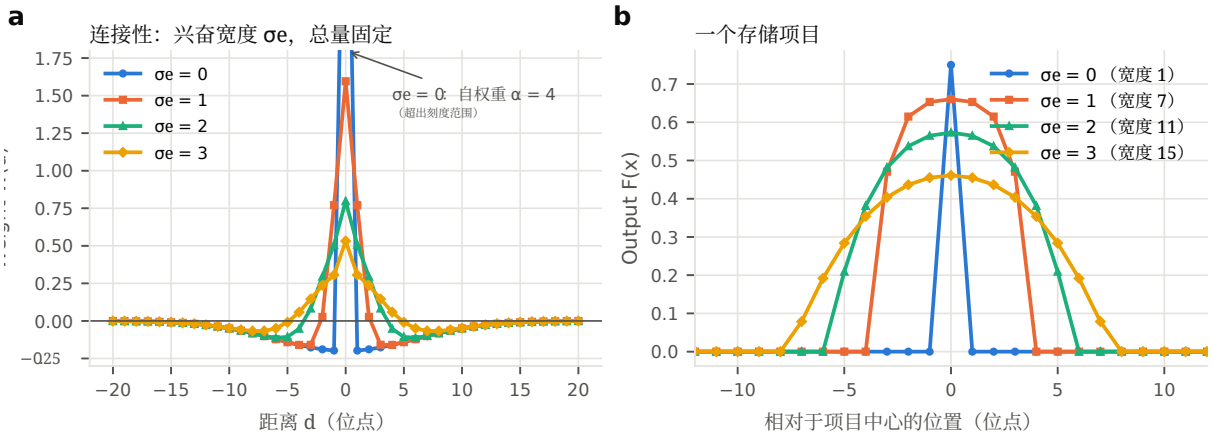


图1：从 OCOS 到斑块吸引子的一族模型。（a）四种兴奋宽度 σ_e 下，循环权重 $W(d)$ 随距离的变化，总兴奋固定为 $\alpha = 4$（$\beta_0 = 0.2$，RF $= 6$）。在 $\sigma_e = 0$ 处，唯一的兴奋是自权重 $W(0) = \alpha$（超出比例尺）。（b）对于相同宽度，单个存储项目的输出 $F(x)$。该项目在 $\sigma_e = 0$ 处的一个单元上，占据范围随着兴奋宽度增加而扩展至 7、11 和 15 个单元。

原则上可以移动，而不会导致该项目丢失。本文其余部分探讨的问题是：沿着这一系列变化，第二种类波峰行为究竟会在何种程度上出现，以及它需要付出什么代价。

2.3 模拟与测量指标

方程（1）采用欧拉法（无噪声）或欧拉–丸山方法进行积分，步长为 0.01。通过在一个单元处施加振幅为 1 的线索并持续 5 个时间单位来创建一个项目，随后在无输入的情况下持续 60 个时间单位。在模拟过程中，两项数值保护措施证明至关重要。首先，单个单元处的线索具有镜像对称性，而对称状态可能是不稳定鞍点，动力学会因此始终停留在对称子空间内而无法离开；例如，一个项目的中心位于某个单元上，而其稳定形式的中心位于两个单元之间。其次，在接近斑块吸引子的一端，最慢的弛豫时间 $1/|\mu_{\text{top}}|$ 可能超过稳定过程所需的时间。因此，对每个最终状态都进行收敛性（最大残差 $< 10^{-3}$）和线性稳定性检验；未通过检验的状态会沿其主特征向量在活跃单元所限定的范围内受到轻微扰动，然后再次进行稳定过程（附录C）。以下所有量均指通过检验的状态。

对于每一对（σ_e、β_0），我们测量了以下量。

宽度：单个存储项目中的活跃单元数量。

最慢模态 μ_{top}：该项目处雅可比矩阵特征值的最大实部。接近零的负值表示能量景观中存在近乎平坦的方向。

锁定 a_{shift}：施加于项目边缘之外第一个单元、持续 5 个时间单位的最小输入量；该输入会使单个项目至少偏移半个位点。它衡量晶格将项目保持在原位的能力。

干扰范围 $d_{\min}$：两个项目同时提示且振幅略有不同（1 和 1.02）时，能够确保它们永不合并或丢失其中一个项目的最小间距。

容量：　在稳定状态下，S 所对应的最大值，使得 S 个等间距项目同时提示后都能存续其中的线索 le

状态（已搜索至 $S = 40$）。

更新： 在距存储项目固定 2RF 的位置施加一个线索，持续 10 个时间单位，振幅从 0.005 到 5 取 25 个对数等距值。每种结果分为已忽略 （单个项目，未移动）、已推动 （单个项目，发生位移但未移至线索处）、已添加 （两个稳定项目）或已捕获 （单个项目，此时位于线索处）。a_{add} 和 a_{cap} 分别是产生每种结果所需的最小振幅。

噪声： 进行持续 100 个时间单位的试验，对每个单元加入强度为 σ 的独立白噪声，并将结果分为保持、移动 （位移至少 0.75 个位点）、侵入 （出现意外的第二个项目）或丢失。噪声试验包含紧张性抑制 θ；若无此抑制，远处的静息单元便无法免受招募（第3.5节）。主要噪声比较（第 4.6 节）对每种条件进行 1000 次试验，并比较不同宽度：既比较固定 θ 时的情况，也比较将 θ 校准到背景虚警率相同的情况。

两组运行探索了这一连续体，两者的总兴奋均固定为 $\alpha = 4$ 和$\lambda = 1$：运行 A（$N = 160$, 感受野 $= 6$, $\beta_0 \in \{0.2, 0.3\}$， $\sigma_e \in \{0, 0.5, \ldots, 3\}$）和运行 B（$N = 320$，感受野 $= 12$, $\beta_0 \in \{0.1, 0.15\}$， $\sigma_e \in \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$）。运行 B 将环和抑制宽度都加倍，并将 β_0 减半，使总抑制与运行 A 相匹配；此运行用于检验相对宽度较大时这些趋势是否仍会延续。两组对照运行（第 4.7 节）采用 Endress 和 Szabó（2020）使用的 $\alpha = 2.2$：运行 C 使用质量归一化，运行 D 使用峰值归一化。所有参数列于表 3（附录C）。

3 窄极限理论

在通过数值方法考察这一族模型之前，我们先推导能够精确得出的结论。以下第一个结果适用于任意对称的 W，因此在整个模型族中均成立；其余结果则针对 OCOS 极限（3），在此极限下，网络足够简单，可以得到闭式解。下文中，“稳定”指定理1(b)意义上的严格线性稳定；在下述条件的边界处， H 为奇异，线性化无法得出结论。证明见附录A。

3.1 能量函数与精确稳定性

在我们早先关于 OCOS 网络的研究中，能量函数发挥了两种作用：一是作为枚举的反应时相关指标来源（Sengupta 等人，2014年、2017年），二是用于推导稳定性条件（Sengupta 等人，2024年）。在后者中，Cohen–Grossberg网络的能量函数是根据动力学本身构造的，而非通过猜测李雅普诺夫函数得到：对于每个单元， $dH_i \propto \dot{x}_i \, d\dot{x}_i$。在平衡态附近，这种构造能够还原 Cohen–Grossberg 函数（Cohen和Grossberg，1983年）。对于加性OCOS网络，保留每个单元自身对 x_i的 $\dot{x}_i$ 依赖关系，可得到节点级能量

$$H \;\propto\; -\sum_i \int \left(\lambda - \alpha F'(x_i)\right) \dot{x}_i^2 \, dt, \tag{4}$$

此处采用通用写法 λ （他们使用了 $\lambda = 1$）。在有 S 个等量活跃单元的状态下，当 $A_S^2 > \lambda\alpha$ 时，系数 $\lambda - \alpha F'(x_i)$为正，且$A_S = \alpha - (S-1)\beta$。Sengupta 等人

（2024年）还根据单元对之间差异的衰减推导出了第二个条件$A_S^2 > \lambda(\alpha+\beta)$，并指出这两个条件并不相同，而且随着 β 增大，差异也越来越大。因此，究竟哪个条件才是正确的，仍未有定论。现在，我们为完整的耦合网络补全这一推导，从而精确厘清这两个条件之间的关系。

定理1（能量与海森矩阵检验）。设 W 为对称的，I 为常数，且 $\eta \equiv 0$（常数θ 被并入 I）。令 $\Phi(x) = \ln(1+x) + \frac{1}{1+x} - 1$，其中 $x > 0$，且 $\Phi(x) = 0$，其中 $x \le 0$，并且

$$\mathcal{E}(x) = \sum_i \Big[\lambda\,\Phi(x_i) - I_i F(x_i)\Big] - \tfrac{1}{2}\sum_{i,j} W_{ij} F(x_i) F(x_j). \tag{5}$$

（*a*）沿着（1）的解，$\dot{E} = -\sum_i F\prime(x_i)\,\dot{x}_i^2 \le 0$。

（*b*）设 x^* 为一个平衡态，且没有单元恰好处于阈值，并令

$$H_{ij} = \lambda(1+x_i^*)^2\,\delta_{ij} - W_{ij}, \qquad i,j \in \mathcal{A}, \tag{6}$$

为*E*在输出坐标 $y_i = F(x_i)$ 中的海森矩阵。在 x^* 处，雅可比矩阵的所有特征值均为实数。若 $H \succ 0$，则 x^* 具有线性稳定性，因而也具有局部指数稳定性。若 H 具有负特征值，则 x^* 线性不稳定。若 H 为奇异矩阵，则线性化无法得出结论。

（a）是节点级构造所体现的耗散定律。每个单元对 $\dot{\mathcal{E}}$ 的贡献按 $F'(x_i)$ 加权，如（4）所示。（b）使能量成为一种精确的分析工具：记忆状态的严格线性稳定性等价于它是$\mathcal{E}$的非退化局部极小值。对于OCOS网络，$H_{ii} = \lambda(1+x_i^*)^2 - \alpha$ 和 $H_{ij} = \beta_{ij}$。由于非活跃单元的 $F' = 0$，它们绝不会反馈至活跃单元，因此只有同时活跃的单元才会进入 H。

推论 1（严格线性稳定性的判据）。 在没有任何单元处于阈值的 *OCOS*网络平衡态处：

（*i*）必要条件： 式（4）的每个逐节点系数均为正，$\lambda - \alpha F'(x_i^*) > 0$；等价地，$H$ 的每个对角元素均为正。

（*ii*）充分条件：$\lambda(1+x_i^*)^2 - \alpha > \sum_{j\in\mathcal{A}\ j\neq i} \beta_{ij}$ 对每个活跃 i 均成立（将格尔施戈林圆盘定理应用于 H）。

（*iii*）精确条件（严格线性稳定性）：$H \succ 0$。

对于 $S \ge 2$ 个等量活跃单元在均匀抑制下，（*i*）表示为 $A_S^2 > \lambda\alpha$，而（*iii*）表示为$A_S^2 > \lambda(\alpha+\beta)$。三者都涉及严格线性稳定性；当 H 为奇异矩阵，或某个单元处于阈值时，它们无法判定非线性稳定性。

因此，Sengupta等（2024）的节点级能量判据是必要但不充分的，而成对判据才是精确判据（下文定理2）。二者的差异在于共同活跃单元之间的抑制性耦合 β，节点级构造将其遗漏了；这解释了其中观察到的差距。在（ii）中，求和中仅包含共同活跃单元：无论抑制范围内有多少个非活跃邻居，它们都无关紧要。

能量框架还为下面将要讨论的两个重要性质提供了有用视角。首先，能量在低于阈值时不可感知：非活跃单元对$\mathcal{E}$ 没有贡献（因为

$\Phi = F = 0$ 在那里），并且它们在耗散定律中的权重为 $F' = 0$。因此，能量决定了活跃单元如何在给定的活跃单元集合内稳定下来，但不决定改变该集合需要付出什么代价。这取决于非活跃单元低于阈值的程度（第3.5节），而这正是最能预测项目被锁定在晶格上的程度的量（第4.4 节）。其次，活跃单元雅可比矩阵为 $-HD$ ，其中 $D = \mathrm{diag}(F'(x_i))$, 它与对称矩阵 $-D^{1/2}HD^{1/2}$ 具有相同的特征值。因此， $\mu_{\mathrm{top}} \to 0^-$ 意味着 H 正在变得奇异：能量景观沿某个方向变得平坦。对于平移不变隆起吸引子而言，该方向就是平移方向，并且 $\mu_{\mathrm{top}} = 0$ 恰好如此（Amari，1977；Compte 等，2000）。第 4.2 节检查这里究竟是哪个方向正在变平。

命题1（持久记忆需要 $\alpha > \lambda$）。 对于具有 $I = 0$ 的 *OCOS*网络，任何包含活跃单元的平衡态都满足 $\alpha > \lambda$。反之，如果 $\alpha > \lambda$，则位于$x_w = \alpha/\lambda - 1$的单个活跃单元、其余单元均不活跃的状态是一个稳定平衡态。

3.2 多项目状态与容量

定理2（存在性、稳定性与容量）。 考虑具有均匀抑制 $\beta_{ij} = \beta$ 和 $I = 0$ 的 *OCOS*网络。令 $A_S = \alpha - (S-1)\beta$。一个具有 S 个等量活跃单元、其余单元均不活跃的状态

$$x_S = \frac{A_S}{\lambda} - 1, \qquad x_l = -\frac{\beta S y_S}{\lambda} \quad (l \notin \mathcal{A}), \qquad y_S = 1 - \frac{\lambda}{A_S}. \tag{7}$$

(*a*) 当且仅当 $A_S > \lambda$ 时存在，即 $S < S_{\max} = 1 + (\alpha - \lambda)/\beta$。

(*b*) 其活跃单元雅可比矩阵具有一个均匀模态，并且对于 $S \geq 2$，具有一个 $(S-1)$ 重横向模态，

$$\mu_{\parallel} = -\lambda + \frac{\lambda^2}{A_S}, \qquad \mu_{\perp} = -\lambda + \frac{\lambda^2(\alpha+\beta)}{A_S^2}. \tag{8}$$

(*c*) 对于 $S \geq 2$，当且仅当 $A_S^2 > \lambda(\alpha+\beta)$ 时它是稳定的，即

$$S < S_{\mathrm{st}} = 1 + \frac{\alpha - \sqrt{\lambda(\alpha+\beta)}}{\beta}, \tag{9}$$

且 $S_{\mathrm{st}} < S_{\max}$ 始终如此。等价地，在固定的 β 下， S-项目状态（$S \geq 2$）稳定，当且仅当

$$\alpha > \alpha_S(\beta) = \tfrac{1}{2}\Big[2(S-1)\beta + \lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda S\beta}\Big]. \tag{10}$$

单个项目（$S = 1$）没有横向模态，只要它存在就稳定，也就是说，只要$\alpha > \lambda$成立即可。

因此，只要满足 $\alpha > \lambda$，网络的容量——即它能够稳定保持的最大项目数——就是 $\max(1, \lceil S_{\mathrm{st}} \rceil - 1)$：即严格小于 S_{st} 的最大整数，但绝不会小于 1。这是严格线性稳定平衡中同时处于活跃状态的单元数量上限。特定提示方案实际能够恢复的项目数可能更少；对于第4.2 节的空间局部网络而言，这一区别十分重要。在 S_{st} 和 $S_{\max}$ 之间， S 项状态虽然存在，却是一个鞍点：它可以由完全对称的线索达到，但任何不对称性

都会使网络不断丢失项目，直到达到稳定状态。换言之，自激与共享抑制之间的推拉平衡可以在更多项目上实现，但无法抵抗微小扰动而维持。对于 $\alpha = 2.2$ 和 $\lambda = 1$ （Endress 和 Szabó，2020），$\beta = 0.1$ 相对于 $S_{\max} = 13$ 给出 $S_{\mathrm{st}} = 7.83$ （容量为 7），而 $\beta = 0.15$ 相对于 $S_{\max} = 9$ 给出 $S_{\mathrm{st}} = 5.45$ （容量为 5）。

推论2 (赢家通吃窗口**)**。 当且仅当 $\lambda < \alpha \leq \alpha_2(\beta) = \frac{1}{2}[\lambda + 2\beta + \sqrt{\lambda^2 + 8\lambda\beta}]$ 时，只有单项目状态是稳定的。-在 α_2 以上，网络存储两个或更多项目；对于每个 $\alpha > \lambda$，单项目状态都保持稳定。

下界 $\alpha > \lambda$ 与 Sengupta等（2024）在 $n = 1$ 处通过节点级能量得到的下界一致。至于我们在那里报告的上界 $\alpha^2 - \alpha - 2\beta \leq 0$ （其中 $\lambda = 1$），将成对判据（$\alpha - \beta$）$^2 \leq \alpha + \beta$展开后，恰好得到推论2；例如，在 $\beta = 0.25$ 处，上界是 1。62，而不是 1。37。因此，赢家通吃窗口比先前所述的更宽。

命题 2 （稳定状态具有相等的激活）。 在 $I = 0$ 均匀抑制下，任何没有单元处于阈值上的严格线性稳定平衡，其所有活跃单元的激活都相等。

因此，均匀抑制下的记忆状态仅由项目数量决定。结合定理2，命题 2 表明，max(1，$\lceil S_{\mathrm{st}} \rceil - 1$) 是所有严格线性稳定平衡的容量，而不仅仅是具有相等激活的平衡。

3.3 高于 $S_{\max}$：完全丢失是暂态

当同时出现线索的项目数超过 $S_{\max}$ 时， S 项目状态便不存在，而完全对称的配置会衰减至静默状态。这就是全局抑制网络中的灾难性干扰（Endress and Szabó，2020年）。然而，对于这个激活函数，静默状态是不稳定平衡：从静默状态精确出发的轨迹会停留在那里，但静默状态不会吸引邻近状态，因为当 $\alpha > \lambda$ 时，任何微小的正向扰动都会增长。

命题 3 (高于 $S_{\max}$ 时的暂时性凹陷，小 ε 时为渐近的**)**。 设 $\beta_{ij} = \beta$, $I = 0$, $\alpha > \lambda$ 和 $S > S_{\max}$，并从 S 个彼此近乎相等、相对不对称性 ε 很小的活跃单元开始；它们在不对称性增大之前进入 $x \ll 1$ 区间。在 $x = 0^+$ 附近，平均活动以速率 $\lambda - A_S > 0$ 衰减，而差异以速率 $\alpha + \beta - \lambda > 0$ 增长，因此相对于均值的不对称性以速率 $S\beta$ 增长。因此，活动会达到一个最小值；在 $\varepsilon \to 0$ 的主导阶近似下，该最小值为

$$t_{\mathrm{dip}} \simeq t_0 + \frac{\ln(1/\varepsilon)}{S\beta}, \qquad depth \propto \varepsilon^{(\lambda - A_S)/(S\beta)}, \tag{11}$$

之后， 少数项目会恢复。只有完全对称的初始状态才会衰减至静默 $e.$

在 $S = S_{\max}$ 恰好处，均匀模态处于边际稳定状态（$\lambda - A_S = 0$）：此时均值按代数规律衰减， $x \approx 1/(\lambda t)$，对于较小的 x，且式 (11) 不适用。因此，在有限试验中，表面上的完全丢失取决于线索之间的差异程度，也取决于线索的数量。当 t_{dip} 超过延迟时间或凹陷低于读出阈值时，就会观察到丢失。该结果

基于 $F'(0^+) = 1$ 以及 $\alpha > \lambda$，它们使静默状态在正向扰动下变得不稳定；若发放阈值位于 F 内，静默状态则可能具有吸引性。分流（乘法）门控并不会消除潜在的存在性上限：分流 OCOS 网络对等量活跃单元的数量也有自身上限，其能量判据同样与线性稳定性一致（附录 B）。

3.4 距离依赖性抑制下的两个项目

命题 4 （最小间距）。 在具有 $I = 0$ 的 *OCOS*网络中，位于单元 i和 j 的两个项目（无其他单元处于激活状态）构成平衡态 $x_i = x_j =$ （$\alpha - \beta_{ij}$）$/\lambda - 1$。当且仅当以下条件成立时，该平衡态稳定：

$$\beta_{ij} < \beta^* = \tfrac{1}{2}\Big[(2\alpha + \lambda) - \sqrt{\lambda^2 + 8\alpha\lambda}\Big]. \tag{12}$$

因此，对于高斯核（2），当且仅当两个项目之间的距离大于以下数值时，它们才能共存：

$$d^* = \mathrm{RF}\sqrt{2\ln(\beta_0/\beta^*)} \qquad (\textit{at any separation if } \beta_0 \le \beta^*). \tag{13}$$

因此，在晶格上，当$\beta_0 > \beta^*$时，最小允许间距为 $d_{\min} = \max\{1, \lfloor d^* \rfloor + 1\}$，否则为 $d_{\min} = 1$ 。

这将“干扰取决于局部而非全局拥挤程度”这一定性观点，转化为适用于 OCOS极限的闭式定律：仅当两个项目之间的抑制超过自激所能承受的程度时，它们才会相互干扰。第 4 节将测量随着兴奋范围扩大，两个项目所需的间距如何变化。

3.5 静息单元的保护

命题 5 (募集屏障**)**。 考虑 *OCOS*网络中的一个非活动单元 l ，并假设它响应时受到的抑制保持不变（固定背景近似）：$m_l = \sum_j \beta_{lj} y_j - I_l > 0$，因此它静止在 $x_l = -m_l/\lambda$。令 $h(x) = -\lambda x + \alpha F(x)$，其在 $x > 0$ 上的最大值为 $h_{\max} = (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\lambda})^2$。

(a) 若 $m_l \ge h_{\max}$，则没有任何瞬态脉冲能在抑制保持不变时招募单元 l

d. (b) 若 $m_l < h_{\max}$，则任何大于 $\Delta_l = m_l/\lambda + x_u$ 的脉冲都会招募该单元，其中 x_u 是 $h(x) = m_l$的较小正根。*(c)* 未受抑制的单元（$m_l = 0$）在 $\alpha > \lambda$时有 $\Delta_l = 0$ ，因此不受保护。

由于背景保持不变， Δ_l 是该单元自身的局部阈值，而不是整个网络在任意扰动下的精确势垒：单元 l 一旦响应，它受到的抑制就可能改变。图 2d 表明，对于单次脉冲，这一结果仍然准确。同样的裕度也可推广至 $\sigma_e > 0$ ，即 $m_l = -\sum_j W_{lj} y_j - I_l$，它是使非活动单元保持在阈值以下的净驱动。对于紧邻项目边缘外侧的单元，它衡量改变该项目活动集所需的条件；第 4.4 节表明，它可以预测项目的位移阻力。

（c）部分对所有具有局部抑制的网络都很重要：远离所有存储项目的单元几乎不会受到抑制，因此任何正向波动都可能发展成伪项目。因此需要某种背景静默机制，例如发放阈值、紧张性抑制或较弱的

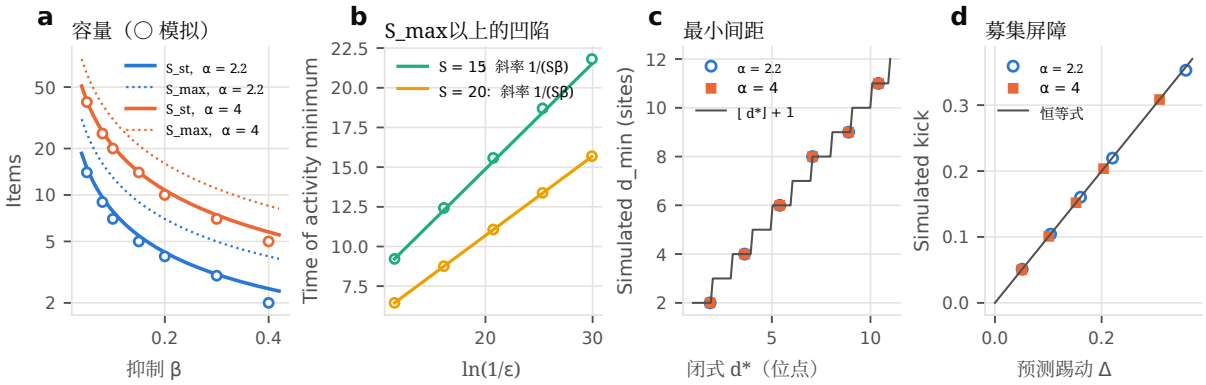


图2：OCOS极限的闭式解与模拟结果一致。 (a) 均匀抑制下的容量： S_{st} （实线）和 $S_{\max}$ （虚线），对应 $\alpha = 2.2$ 和 $\alpha = 4$，并显示模拟容量（圆点）。(b) 在 $S_{\max}$ （$\alpha = 2.2$、 $\beta = 0.1$）以上： $S = 15$ 和 $S = 20$的活动最小值时间与 $\ln(1/\varepsilon)$ 的关系；直线具有预测斜率 $1/(S\beta)$ 。(c) 两个项目的模拟最小间距与闭式解 d^* （感受野 $= 6$；直线： $\lfloor d^* \rfloor + 1$）的关系。(d) 模拟招募踢动与预测势垒 Δ 的关系。

全局抑制成分。我们的噪声模拟采用紧张性抑制 θ，使每个静息单元的裕度都偏移 θ。

3.6 数值验证

我们通过模拟验证了每个闭式解（图2）。在测试的全部14种情况（ α的两个取值、 β的七个取值）中，均匀抑制下的模拟容量等于 $\lceil S_{\mathrm{st}} \rceil - 1$ 。在 $S_{\max}$以上出现凹陷后，活动最小值的时间随 $\ln(1/\varepsilon)$ 增长，其斜率分别为0.502和0.683（对应 $S = 20$ 和 $S = 15$），而预测的 $1/(S\beta)$ 值分别为0.500和0.667；深度指数分别为0.353和0.147，而预测值为0.350和0.133。对于更大的S，近似结果更为接近，此时凹陷达到更低的活动水平。在全部12种情况下，模拟最小间距等于 $\lfloor d^* \rfloor + 1$；模拟招募踢动与 Δ 的差异在1.4%以内。

4 结果：从 OCOS 到隆起吸引子

4.1 模拟精确再现窄极限

在改变兴奋宽度之前，我们首先考察了仿真代码能否在 $\sigma_e = 0$ 处再现第3节的闭式解，此处的答案已精确可知（表1）。向量场与对式（3）的独立实现一致；均匀抑制下的容量符合定理2；无论最小间距是否非零，最小间距均符合命题 4；添加第二个项目所需的线索与受提示位点处的抑制边缘一致；单个项目的最慢模态则等于解析值 $-\lambda + \lambda^2/\alpha$。容量检验还显示了定理2预测的项目脱落：八个和九个同时提示信号最终分别留下七个和六个项目。

4.2 拓宽兴奋使系统趋近于弱稳定的斑块状状态

确定窄极限后，我们在总兴奋固定的条件下逐步加宽兴奋，并追踪存储项目及成对项目的变化（图3；表 2）。为比较运行 A和B，

表1： 在 $\sigma_e = 0$ 处进行的检查，在每次扫描前自动运行（$\alpha = 2.2$、 $\lambda = 1$、 $N = 160$，感受野 $= 6$） .

	量	模拟值	闭式
C1	向量场与独立 OCOS 实现-	最大差异 $< 10^{-12}$	相同
	分割		
C2	容量、均匀抑制 $\beta = 0.1$	7	$\lceil S_{\mathrm{st}} \rceil - 1 = 7$ （$S_{\mathrm{st}} = 7.83$）
C3	最小间距， $\beta_0 = 1.0$ / $\beta_0 = 0.3$	7 / 1	$\lfloor d^* \rfloor + 1 = 7$ ($d^* = 6.62$) / 1
C4	在 2RF 处添加第二个项目的线索 / 抑制	比率 1.003	1（来自上方）
	边缘		
C5	单个项目的最慢模态	-0.545455	$-\lambda + \lambda^2/\alpha = -0.545455$

宽度以抑制范围 σ_e/RF 为相对单位表示。

最慢模态趋近于零，而且它是平移模态。 在 $\sigma_e = 0$ 每次运行中，单个项目都有$\mu_{\mathrm{top}} = -0.75$, 其 OCOS 值为 $-\lambda+\lambda^2/\alpha$ $\alpha = 4$。随着兴奋加宽， μ_{top} 向零上升；在运行 A 中，当 σ_e/感受野宽度为 $= 0.5$ 时达到 -0.022 ，并且 -0.026 ；在运行 B 中，当相对宽度相同时达到 -0.012 ，并且 -0.017（图3a）。根据定理1，项目周围的能量景观沿一个方向变得平坦。然而，特征值趋于零并不一定意味着平移；它也可能预示着项目振幅或宽度即将发生分岔。因此，我们检查了哪个方向正在变平。我们测量了最慢特征向量与项目轮廓的平移向量（即其离散导数）之间的重叠度 Q，并将范围限制在活跃单元内； $Q = 1$ 表示慢模态是纯平移。在运行 A 中，所有 $\sigma_e > 0$的单元都满足 $Q \geq 0.979$ ；在运行 B 中，除一个单元外，所有此类单元都满足 $Q \geq 0.972$ ，唯一的例外是边缘单元恰处于阈值的那个单元（第 4.4 节）。因此，软化模态是项目的平移模态，与斑块吸引子中的情况相同。即使在高度锁定的项目中，平移仍是最慢模态，包括运行 D 中 $\beta_0 = 1$ 的项目（$Q \geq 0.988$）。事实上，随宽度变化的并非最慢模态是哪一个，而是它有多软。这是一个由 160 或 320 个单元构成的有限晶格，我们并不声称其收敛至连续神经场极限；我们的主张更为有限：平移模态软化并趋近于零。这个趋近过程并非完全单调。运行 A 中 $\beta_0 = 0.3$ 的情况在 $\sigma_e = 2.5$ 处出现回退（$\mu_{\mathrm{top}} = -0.167$），此时项目宽度停滞在七个单元。运行 B 中 $\beta_0 = 0.15$ 的情况在 $\sigma_e = 3$ 处没有稳定的单个项目（$\mu_{\mathrm{top}} = +0.010$）。这些不规则现象与项目所占单元数的变化相吻合；在晶格上，单元数只能以整数个为单位变化。

项目变宽，干扰范围也随之扩大。 正如预期，项目宽度从 1 个单元增至 15（运行 A， $\beta_0 = 0.2$）和 29（运行 B， $\beta_0 = 0.1$）个单元；在抑制更强时，增幅较小（图 3b）。两个项目所需的间距也随之增加：运行 A 中从 1 增至 11 和 10 个位点，运行 B 中则从 1 增至 20 和 23 个位点。在全部 21 个项目宽度大于 1 个单元的细胞中， $d_{\min}$ 往往随项目宽度成比例增长（相关系数为 0.80；最小二乘斜率为 0.82；图 3e），不过该斜率仅适用于这些参数，不应视为普遍的标度律。因此，OCOS 极限的干扰范围原本仅由抑制决定（命题 4），如今则转变为主要由每个项目的延展范围决定。

操作容量下降。我们从操作层面对容量进行了测量，将其定义为：在同时提示的情况下，能够全部保持在稳定状态中的等间距项目的最大数量；这一数量取决于加载协议和环大小，并不是任何稳定状态所能容纳的最大项目数。

表 2： 连续体上存储项目的稳定性和成本（运行 A、 $\beta_0 = 0.2$ 和 B、 $\beta_0 = 0.1$；$\alpha = 4$）。宽度：每个项目的活跃单元数；活动：该项目的总输出 $\sum_i F(x_i)$； $\tau = 1/|\mu_{\mathrm{top}}|$：最慢的弛豫时间。在 $\sigma_e = 0$ 下，容量达到搜索上限 40。

		稳定性		Cost					
	σ_e	μ_{top}	a_{shift}	宽度	活动	τ	$d_{\min}$	容量	a_{add}
运行 A（感受野 $= 6$）	0	-0.750	–	1	0.75	1.3	1	≥ 40	0.020
	1	-0.392	0.185	7	4.14	2.5	6	24	0.133
	2	-0.117	0.166	11	4.92	8.5	8	12	0.339
	3	-0.022	0.132	15	4.87	46.3	11	10	0.703
运行 B（感受野 $= 12$）	0	-0.750	–	1	0.75	1.3	1	≥ 40	0.010
	2	-0.090	0.207	17	8.96	11.1	11	18	0.267
	4	-0.042	0.114	22	9.07	23.6	16	12	0.798
	6	-0.012	0.119	29	8.48	80.5	20	9	2.338

在每次运行中， $\sigma_e = 0$ 处的容量至少为40个项目（搜索上限）；在 σ_e/感受野 $= 0.5$ 处，运行 A 中降至10和8，运行 B 中降至9和7（图3c）。对于固定大小的环，局部抑制下的容量取决于在相互干扰范围内能够容纳多少项目，因此容量的下降在很大程度上反映了 $d_{\min}$的上升。这些项目位于人工一维格点上，不能与三或四个项目的行为估计相比较。

4.3 连续性的代价

斑块状状态的实现是有代价的。为明确这种代价，我们测量了电路为存储单个项目必须付出的成本（表 2；附录C）。我们考察四种成本。第一种是神经资源：一个项目在 $\sigma_e = 0$ 处占用 1 个单元，在 σ_e/感受野处占用 15 个（运行 A）或 29 个（运行 B）单元 $= 0.5$。第二种是活动：该项目的总输出 $\sum_i F(x_i)$ 是一种基于速率的代理指标，用来衡量电路必须维持的活动；其数值从 0.75 升至 4.87 和 8.48，分别为 OCOS 数值的 6.5 倍和 11 倍，而且增长主要发生在加宽的最初几个步骤中。第三种是时间：最慢的弛豫时间 $\tau = 1/|\mu_{\mathrm{top}}|$决定了项目从扰动中恢复所需的时间，它从 1.3 增至 46 和 80 个时间单位（分别为 35 倍和 60 倍）。第四种是存储的共享与更改成本：其他项目必须保持的间距从 1 增至 11 和 20 个位点，因此操作容量下降；而添加第二个项目所需的线索则增加了 35 倍和 230 倍（第 4.5 节）。在这些方面，窄网络的成本都更低，而且也更稳定：它从扰动中恢复得更快（第 4.2 节），并且从不会因噪声而移动（第 4.6 节）。加宽带来的是连续性：项目的位置可以平滑移动，而非只能以整单位为步长移动。

这些是电路的成本，而非模拟的成本。由于式（1）中的循环求和是在环上的卷积，采用快速傅里叶变换时，每个积分步的运算成本为 $O(N \log N)$，与宽度无关，因此模拟网络的成本无法区分这两种机制。对认证一个记忆状态的成本则有所不同。在均匀抑制的 OCOS 极限下，一个包含 S 个项目的状态是否稳定，由一个闭式不等式决定（定理2）。对于该系列中的其余情况，定理1要求计算海森矩阵在整个活动集上的谱，而活动集的大小会随着每个项目所含单元数的增加而增大。同样，活动度量只是一个代理指标，并非代谢能量；要估算代谢能量，还需要对脉冲生成

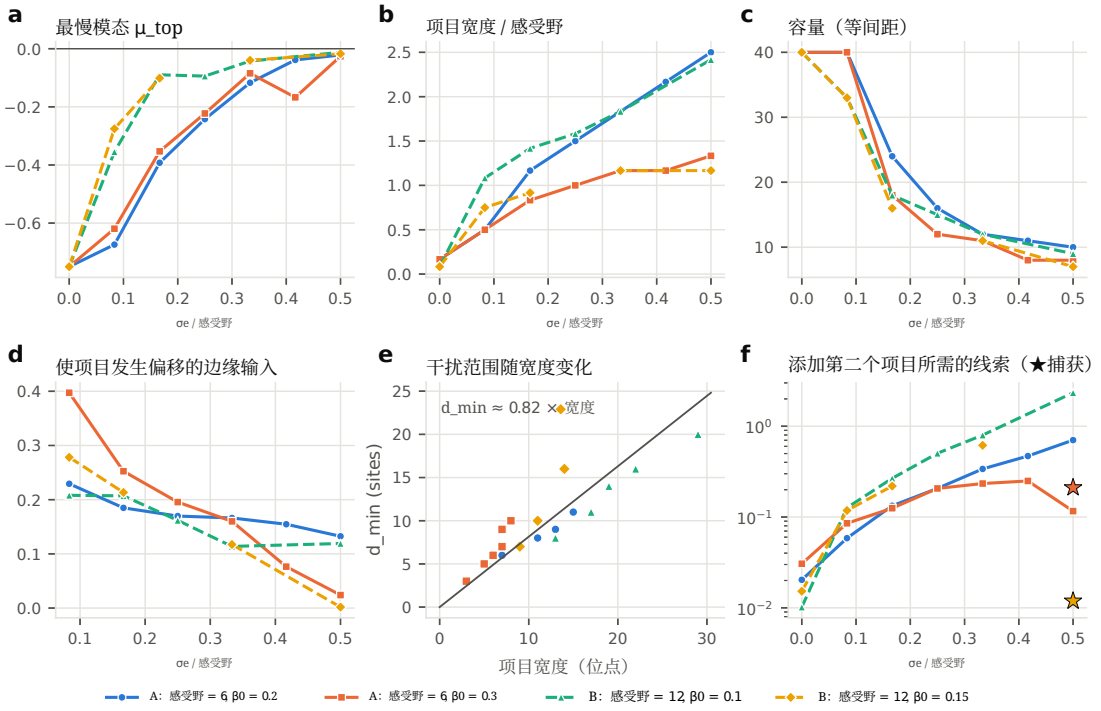


图3：在固定总兴奋下拓宽兴奋，会使 OCOS网络趋向斑块吸引子（$\alpha = 4$）。A组（感受野 $= 6$，实线）和B组（感受野 $= 12$，虚线）的运行结果，宽度以抑制范围为相对尺度。（a）单个项目的最慢模态 μ_{top}。（b）项目宽度相对于感受野的比例。（c）等间距项目的容量（40为搜索上限）。（d）锁定：使项目发生移动所需的边缘输入；在 $\sigma_e = 0$ 时，若 $\beta_0 < \beta^*$，相邻输入会改为添加一个项目，因此不存在移动。（e）所有细胞中最小间距与项目宽度的关系（直线：通过原点的最小二乘拟合）。（f）在距离为2RF处添加第二个项目所需的线索；星号标示会捕获存储项目的线索。空白处表示不存在稳定的单个项目的细胞。

和突触事件作出假设，而率模型并未涉及这些内容。

4.4 晶格锁定由招募裕度而非能量差预测

连续吸引子不具备抵抗移动的能力。因此，如果加宽只是将项目转变为凸起，那么位移阻力应当随 μ_{top}一同消失。有趣的是，事实并非如此。在A和B组中，除三个细胞外，移动一个项目所需的边缘输入始终介于0.11和0.40之间，其中包括 $\sigma_e > 0$ （图3d）；即使在 μ_{top} 距零仅几百分之一的情况下也是如此。一个细胞的锁定较弱（运行 A，$\beta_0 = 0.3$、$\sigma_e = 2.5$；$a_{\text{shift}} = 0.076$），另有两个细胞几乎完全失去了锁定：运行 A 中 $\beta_0 = 0.3$ 为 $\sigma_e = 3$ （$a_{\text{shift}} = 0.024$），以及运行 B 中 $\beta_0 = 0.15$ 为 $\sigma_e = 6$ （$a_{\text{shift}} = 0.002$）。

势垒的预测因素。第3节的能量框架自然解释了为何软平移模态与有限锁定势垒能够并存。阈值以下，能量不受影响，因此 μ_{top} 描述的是固定活跃单元集合时$\mathcal{E}$ 的曲率。然而，移动一个项目需要改变该集合：项目边缘之外的非活动单元必须被驱动跨越阈值。该单元因其裕度 $m_{\text{edge}} = -\sum_j W_{ej} y_j$而保持在阈值以下（第3.5节）。在A–D组中，具有 $\sigma_e > 0$ 和正裕度的40个细胞里，m_{edge} 预测了

a_{shift}，秩相关为0.91（图4d）。在同一批细胞中，项目中心位于一个单元上与位于两个单元之间时的能量差，预测能力较弱（0.73；图4e）。当锁定很强时，该能量差有时也会小到几乎为零： 7×10^{-8} 在运行 A 中，$\beta_0 = 0.3$ 为 $\sigma_e = 2$，此时 $a_{\text{shift}} = 0.16$。因此，仅凭不同稳态表示之间的能量差，无法充分刻画晶格锁定；而边缘单元与阈值之间的裕度，则能有力预测移动项目所需的输入，并揭示阈值的局部机制。这里有两点需要注意。比较两个平衡态的能量，并不等同于计算二者之间转变路径上的势垒，因为沿途其他单元也会发生变化；我们并未声称不存在这样的势垒。此外，较高的秩相关并不意味着裕度是唯一的决定因素：提示持续时间、连接性以及活动集中的其余部分也会产生影响。

对锁定丧失进行精细扫描。为了观察锁定丧失时会发生什么，我们回到了锁定已经消失的两个区域，并以更小的步长改变 σ_e：运行 A 中为 0.1（$\beta_0 = 0.3$,$\sigma_e = 2$–3），运行 B 中为 0.25（$\beta_0 = 0.15$, $\sigma_e = 4.5$–6）（图 4a–c）。结果呈现出与项目活动集相关的锯齿结构。当项目保持相同宽度时（运行 A 中 $\sigma_e = 2.0$–2.8 为七个单元；运行 B 中 $\sigma_e = 4.75$–5.5 为 15 个单元），其边缘裕度持续下降并趋近于零（运行 A 中从 0.085 降至 0.0002），位移阈值也随之下降。在这一范围内，裕度完美地排序了位移阈值（两次运行中的秩相关均为 1.0），而中心位置之间的能量差则没有做到这一点（运行 A 中为 0.15）。当项目招募了另一个单元时（运行 A 中为 $\sigma_e = 2.9$ ），裕度重新跃升，锁定增强，随后又再次下降。在精细扫描的全部 17 个细胞中，裕度与位移阈值之间的秩相关为 0.95。

值得注意的是，最慢模态的表现截然不同。在运行 A 的七单元范围内，μ_{top} 变得更加 负（从 -0.085 到 -0.186），同时锁定减弱；只有当项目变宽时，它才跃升至 -0.014。因此，锁定丧失并非存储状态的平滑分岔，而是伴随着边缘单元接近阈值，这意味着活动集的组成发生了变化。这两个量描述的是不同的情况： μ_{top} 和 Q涉及当前活动集内的无穷小运动，而单个位点的有限位移需要项目边缘发生阈值穿越，这一点是线性化无法捕捉的。整个过程中，慢模态都是平移（$Q \geq 0.997$）；但在运行 B 的最后一个单元（$\sigma_e = 6$）中，边缘单元恰好位于阈值（$m_{\text{edge}} = -0.0005$），此时最慢模态表现为边缘处的变化，而非平移（$Q = 0.055$）。

4.5 更新：成本更高、具有排斥性，最终被捕获

接下来，我们探讨已有一个项目存储其中时，又有新项目到来会发生什么。

添加一个项目会付出代价。在 OCOS 极限下，只需一个略大于到达该位点的抑制强度的线索，就能在距离 2RF 处添加第二个项目（见 C4）：不同运行中的数值为 0.010 至 0.031。随着兴奋范围扩大，所需线索强度稳步上升（图3f），在运行 A 中达到 0.70（$\beta_0 = 0.2$，是窄极限下数值的 35 倍），在运行 B 中达到 2.34（$\beta_0 = 0.1$，是其 230 倍）。原因很简单：范围较宽的项目会将抑制作用延伸得更远，因此新项目必须克服更强的抑制。

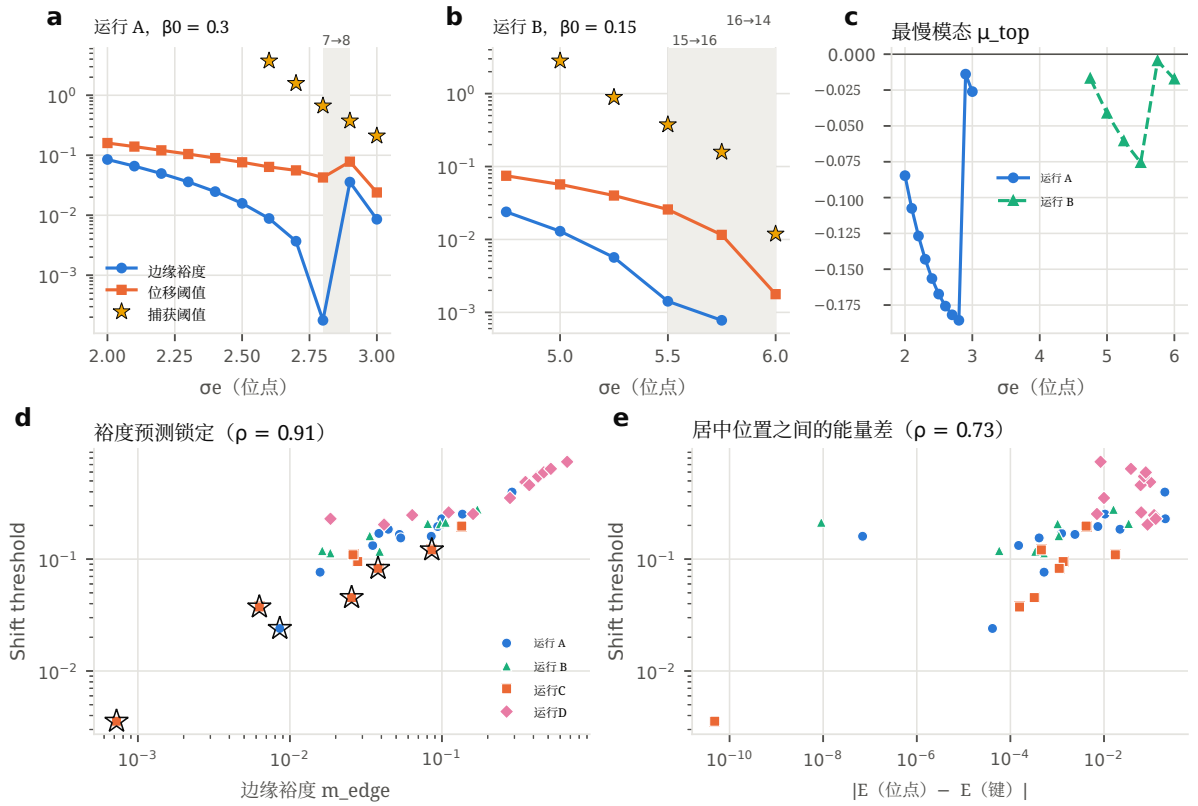


图4：当边缘单元裕度低于阈值时，模型预测会出现锁定。 （a、b）运行 A（$\beta_0 = 0.3$）和运行 B（$\beta_0 = 0.15$）中跨越锁定丧失区间的精细扫描，横轴采用对数刻度。图中绘制了三个不同量：边缘裕度 m_{edge}，即在线索出现前，刚好位于项目边缘之外的单元低于阈值的幅度（蓝色圆圈）；位移阈值 a_{shift}，即使项目发生位移所需的最小边缘输入（橙色方块）；以及捕获阈值 a_{cap}，即将项目拖至线索位置所需的最小线索强度，线索与项目相距 2RF（星号，仅在发生捕获处绘出）。灰色区域表示项目宽度发生变化。在宽度固定时，裕度逐渐降至零，锁定减弱并出现捕获；当项目招募一个单元时，裕度重置。（c）相同扫描中的最慢模态 μ_{top}。锁定丧失时，该模态并未变软，并会在宽度变化时跃升。（d）在 A–D 组的所有细胞中（$\sigma_e > 0$；裕度 > 0），边缘裕度可预测位移阈值（星号：发生捕获的细胞）。（e）两个居中位置之间的能量差是较弱的预测指标。

项目之间会相互排斥。 添加第二个项目时，两者不会停留在各自线索所指示的位置（图 5）。在线索达到阈值时，存储项目会被新项目推开：运行 A 中最多移动 7.5 个位点，运行 B 中最多移动 10.3 个位点；新项目则会落在其线索指示位置之外，最多偏移 11.7 和 28.0 个位点。亚阈值线索也会使范围较宽的项目发生位移，却不会产生新项目（图 5b 中标记为“已推动”）。在窄极限下，这两种效应都不会发生，因为已存储的单单元项目无法移动，而新项目恰好在其线索指示的位置形成。

没有锁定时，更新就变成了捕获。在失去锁定的两个细胞中，更新的性质发生了变化（图 5a,b）。在运行 A（$\beta_0 = 0.3$, $\sigma_e = 3$）中，强度为 0.12–0.21 的线索添加了第二个项目，但任何强度达到 0.21 或更高的线索都会将存储项目拖到线索指向的位置。在运行 B（$\beta_0 = 0.15$, $\sigma_e = 6$）中，即使强度仅为 0.005 的线索也会推动该项目，而任何强度达到 0.012 或更高的线索都会捕获它；没有任何振幅能够添加第二个项目。换句话说，新输入会覆盖记忆，而不是与之共存。

捕获 并未局限于这两个细胞。在运行 A–C 中，所有 29 个可测量锁定的细胞里， g

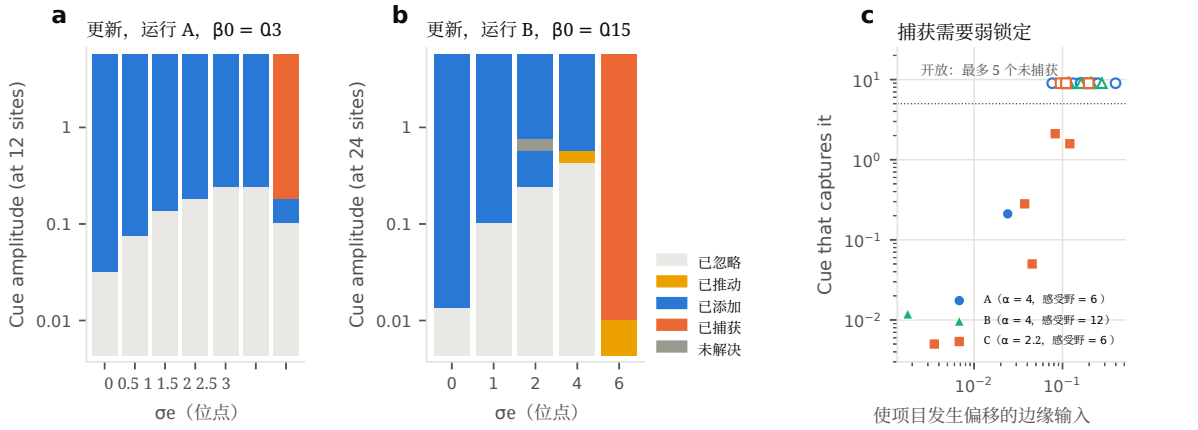


图5：沿连续体更新会改变其特性。(a,b) 对运行 A（$\beta_0 = 0.3$）和运行 B（$\beta_0 = 0.15$）而言，线索振幅（对数刻度）和兴奋宽度对距存储项目 2RF 的线索所产生结果的影响。较窄和中等宽度会忽略较弱的线索，并在较强线索下添加一个项目。在最宽设置下，存储项目反而会被捕获。(c) 在运行 A–C 的所有细胞中，能够捕获项目、抵消使其移位的边缘输入的线索（双对数刻度）。顶部的空心符号表示线索强度不超过 5 时均未发生捕获的细胞。

有七个发生了捕获，且这七个都具有 $a_{\text{shift}} \leq 0.121$ （图 5c）。在振幅不超过 5 的范围内，锁定更强的细胞均未出现捕获。在发生捕获的细胞中，锁定越弱，捕获所需的代价越低（秩相关 0.82， $n = 7$）。然而，弱锁定虽是必要条件，却非充分条件：有六个细胞的 a_{shift} 介于 0.076 和 0.119 之间，在测试范围内却没有出现捕获。第 4.4 节的精细扫描揭示了缺少的条件。当边缘裕度降至约 0.01 时，捕获首次出现（运行 A 中为 $\sigma_e = 2.6$， $m_{\text{edge}} = 0.009$；运行 B 中为 $\sigma_e = 5.0$， $m_{\text{edge}} = 0.013$）；随着裕度趋近于零，其阈值随后急剧下降（运行 A 中从 3.75 降至 0.67，运行 B 中从 2.81 降至 0.012；图 4a、b）。换言之，锁定使存储项目能够抵挡新项目、保持原位；而项目边缘距离招募另一个单元有多近，则能强烈预测锁定情况。

4.6 噪声：漂移是依赖宽度的失效

最后，我们考察了记忆在噪声下如何失效。不过，不同宽度之间的比较面临一个混淆因素。远离存储项目的单元需要某种保护以避免招募（命题5c），而给定紧张性抑制 θ 所提供的保护程度取决于宽度。在没有存储项目时，$\theta = 0.08$ 在 $\sigma_e = 0$ 条件下会使伪项目出现在28%的试验中，而在 $\sigma_e \geq 1$条件下最多仅出现在1.2%的试验中，这是因为较小的自权重使孤立单元更难被招募。因此，我们在两种条件下比较了单个项目（运行A配置， $\beta_0 = 0.2$，噪声 $\sigma = 0.03$，每种条件1000次试验）：一种是在每种宽度下使用相同的 $\theta = 0.08$，另一种是针对每种宽度进行 θ 校准，使得没有存储项目的网络在约5%的试验中获得伪项目，从而使背景虚警大致匹配（实际发生率为3.6–6.4%；校准后的 θ 介于0.069和0.088之间）。图6展示了结果及95%的置信区间。

侵入反映的是背景，而非宽度。在固定 θ 条件下，窄网络在 18.4% 的试验中出现了伪项（95 % 置信区间为 16.1–20.9%），而在较大宽度下至多为 1%。在校准的 θ 条件下，各种宽度下的侵入率均为 3.0–6.4%，接近背景误报

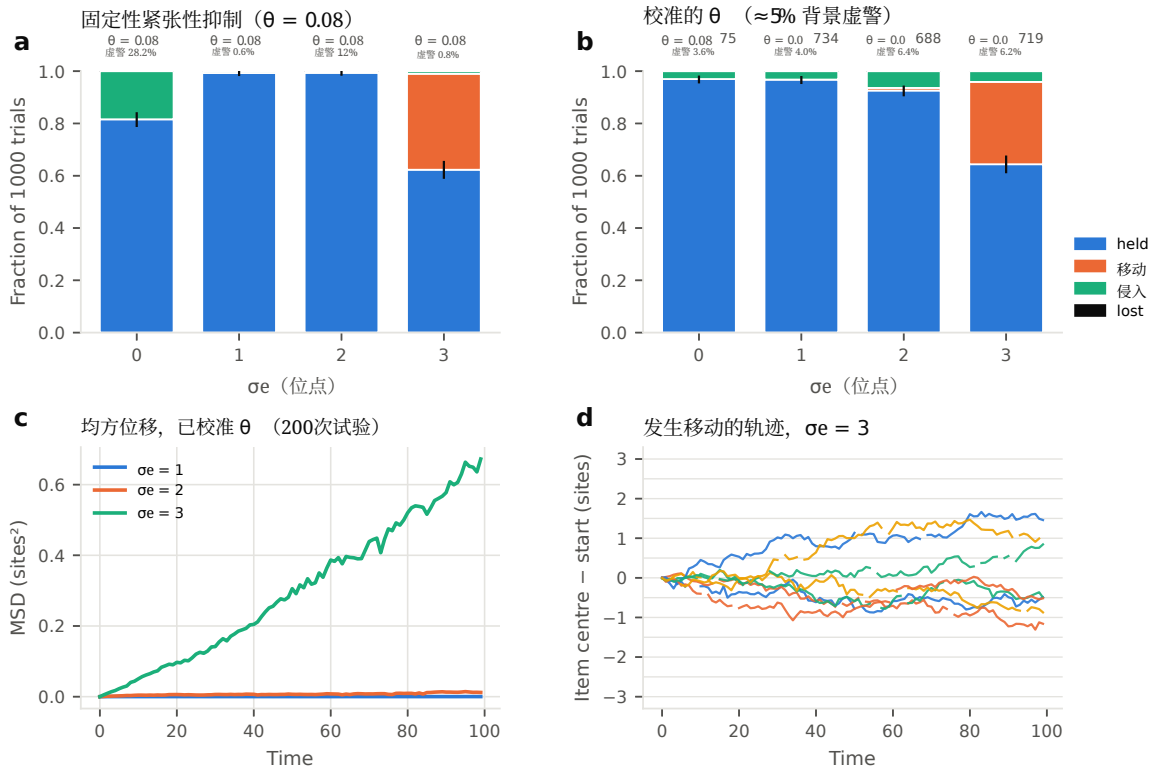


图6：在背景虚警大致匹配的情况下，漂移是宽度相关的失效（运行A配置，$\beta_0 = 0.2$、$\sigma = 0.03$，每种条件1000次试验）。（a）固定性紧张性抑制 $\theta = 0.08$；每个柱状图上方为 θ 以及不含存储项目的网络的虚警率。（b）按宽度分别校准 θ，以产生5%的背景虚警。误差线：保持比例的95% Wilson区间。（c）项目中心的均方位移，基于每种宽度下200条存储轨迹。（d）$\sigma_e = 3$ 中移动至少0.75个位点的示例轨迹；灰线标记位点和键位置。

报警率本身。因此，固定 θ 条件下窄宽度端侵入率偏高，反映的是背景被抑制得有多好，而非存储项目本身的属性。

漂移随宽度增大而加剧。在两种条件下，宽度为 $\sigma_e \leq 1$ 时存储项目始终没有移动（1000 次试验中为 0 次）；宽度为 $\sigma_e = 2$（校准值）时，有 1.0% 的试验中发生移动；宽度为 $\sigma_e = 3$ 时，固定条件下有 36.7%（置信区间 33.8–39.7%）的试验中发生移动，校准条件下则为 31.5 %（置信区间 28.7–34.4%）。在宽度为 $\sigma_e = 3$ 时，项目中心的均方位移随时间大致线性增长，对应的有限时间有效扩散系数为每单位时间 0.003 个位点^2（这是对模拟区间的估计，并不能证明在这个有限且锁定的系统中存在渐近扩散过程）；较小宽度下的位移可忽略不计（图 6c）。这种移动是渐进的，而非在晶格位置之间逐次跳跃。在宽度为 $\sigma_e = 3$ 时，约 56% 的采样中心位置与最近位点或键位置的距离超过 0.1 个位点（图 6d），这与第 4.2 节中的软平移模相符。因此，在所模拟的延迟时间内，依赖宽度而出现的失效是漂移，这正是斑块吸引子的典型弱点。

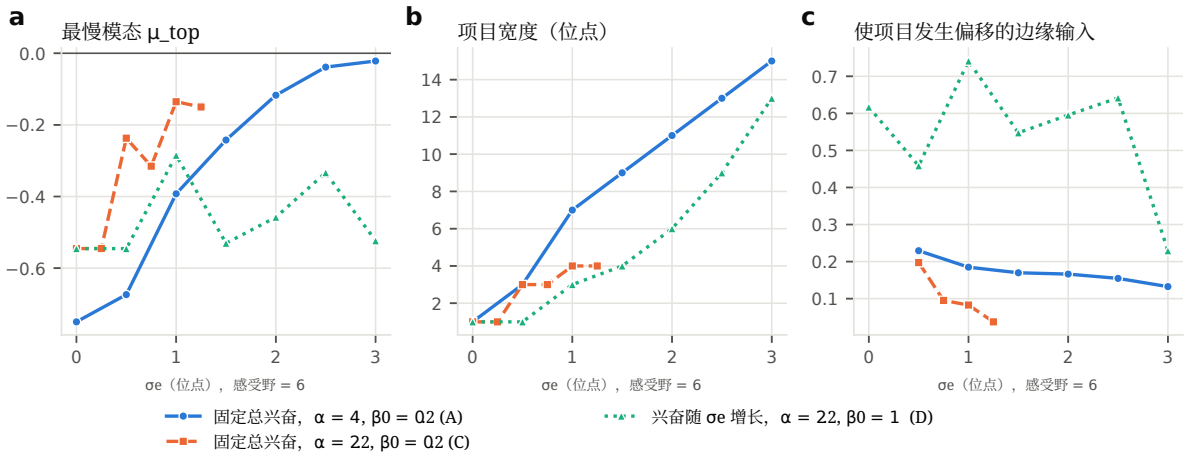


图7：只有在总兴奋受到约束且自兴奋较强时，才会出现类波峰软化 (感受野 $= 6$)。运行 A（$\alpha = 4$，固定总量）与运行 C（$\alpha = 2.2$，固定总量）以及运行 D（$\alpha = 2.2$，自权重固定，因此总兴奋随 σ_e增长）进行比较。(a) 单个项目的最慢模态。(b) 项目宽度。(c) 移动项目所需的边缘输入。

4.7 何时加宽会产生类波峰行为?

有人可能会问，类波峰行为是否仅仅源于拓宽兴奋。两项对照表明，在所考察的范围内，这种行为既取决于拓宽兴奋的方式，也取决于自激强度（图 7）。无论采用哪种归一化方式，这一族本身在 σ_e 上都是连续的；差异在于，拓宽是否会软化平移模态。

总兴奋增长时，项目仍保持锁定。在运行 D 中，兴奋加宽时未进行归一化，因此自权重保持在 α，总兴奋则随 σ_e 增长。项目宽度仍有所增加（在 $\sigma_e = 3$, $\beta_0 = 1$ 时达到 13 个单元），但依然高度稳定（μ_{top} 介于 -0.28和 -0.55之间），且锁定性很强（a_{shift} 介于 0.23 和 0.74 之间）。没有单元表现出捕获现象，而且在每种宽度下，至少 98% 的含噪运行中项目都保持不变（$\sigma = 0.05$, $\theta = 0.15$）。添加第二个项目仍变得更加困难，成本从 0.074 增至 1.56；在 $\sigma_e = 3$ 时，没有任何线索能在 5 以内成功。因此，允许兴奋性质量增长，可以加宽项目，同时保留强吸引力和晶格锁定。

自激较弱时，项目保持狭窄。 在运行C中，采用质量归一化但 $\alpha = 2.2$ （Endress 和 Szabó, 2020）时，项目仍保持狭窄（根据 $\sigma_e = 1.25$，至多为四个单元），其最慢模态也没有平滑地趋近于零。不过，锁定迅速减弱（从 $\sigma_e = 0.5$ 时的0.20降至 $\sigma_e = 1.25$ 时的0.037（ $\beta_0 = 0.2$），并在 $\beta_0 = 0.3$时降至0.004），且该次运行中有五个细胞出现了捕获。在这一兴奋水平下，加宽会带来斑块吸引子的更新弱点，却不具备其连续性。在存在噪声时，项目在紧张性抑制为0.05的条件下无法存活超过 $\sigma_e = 0.5$。

5 讨论

5.1 Onedial、两种记忆及其代价

在本研究中，我们采用了此前用于模拟枚举和容量限制的OCOS网络（Sengupta 等人，2014年、2017年；Sengupta，2025年），并探究在总兴奋保持不变的情况下，随着循环兴奋扩散范围扩大，该网络会发生什么变化。OCOS网络和凸起吸引子网络通常被视为不同的模型。我们的结果表明，它们可以归入同一类模型：单一参数——循环兴奋宽度——能够使网络从空间离散表征转向分布式表征。兴奋宽度会影响斑块宽度、稳定性和干扰，这一点本身并不新鲜；神经场模型早已研究过这类依赖关系（Amari，1977；Compte 等人，2000）。本研究的新意在于将以下内容结合起来：对狭窄端的精确理论、从该状态朝分布式兴奋逐步过渡的受控路径，以及沿这一路径对局部稳定性、位移阻力和更新结果的比较。

这种方法与我们此前对枚举的解释相似：快速准确计数范围和估算范围并非先验设定，而是随着抑制强度变化，从同一个网络中涌现出来（Sengupta 等人，2014年，2017年）。同样地，离散记忆与渐变记忆之间的差异并非内置于两种架构之中，而是随着兴奋范围加宽，从同一个网络中涌现出来。沿途发生的变化可概括为稳定性与成本之间的一系列权衡。

1. 连续性与成本之间的权衡。连续的类峰项目占据许多单元，维持的活动量是单单元项目的数倍，从扰动中恢复的速度则慢数十倍（第 4.3 节）。在这一系列网络中，加宽所带来的唯一收益是连续性，而我们测量的每一项回路成本都高于窄网络。

2. 容量与干扰范围之间的权衡。窄网络能够容纳许多项目，因为每个项目只占据一个单元，且仅通过抑制与其他项目相互作用（命题 4）。宽网络容纳的项目较少，因为每个项目都会扩展开来，而项目间所需的间距也会随着扩展范围增大（图 3e）。

3. 稳定性与灵活性。 随着兴奋范围扩大，存储项目的最慢模态（即其平移）趋近于零（图3a）；在兴奋范围最宽时，噪声会移动该项目（图 6）。在窄网络中，噪声永远不会移动存储项目。

4. 易于添加与易于覆盖。 在窄网络中，添加第二个项目成本低；在宽网络中则成本高，而且项目之间还会相互排斥。当锁定消失时，新输入不再加入记忆，而是取而代之（图 5）。

5. 锁定与捕获。 在这一系列设置的大部分范围内，项目都保持锁定在晶格上，因为移动它们需要招募一个边缘单元。当边缘单元裕度消失时，正是使项目保持原位的同一机制，让新输入能够将其拖离（图 4）。

比较工作记忆模型时，一个反复出现的问题是：哪些属性至关重要，哪些只是偶然如此。这里的答案很明确：区分这两类模型的属性都源自一个结构参数，而且每种属性都可追溯到某种机制，即抑制受限相互作用、扩散性兴奋或阈值诱导锁定。

成本问题值得一提，因为它很容易与模拟成本混淆。每个积分步的运算次数无法区分这两种工作状态：循环求和是一种卷积，无论宽度如何，都能在 $O(N \log\ N)$ 次运算内完成。真正能区分它们的成本，是电路本身所付出的代价，包括单元数量、活动、恢复时间、间距，以及更新所需的输入。这样来看，稳定性与成本并非模型的两个独立属性，而是对同一参数的两种解读。原则上，电路可以根据任务需求选择自己在这一系列模型中的位置：当必须将许多离散项目彼此分开保存时，采用窄而低成本、稳健的存储方式；当重要的是对单一特征进行分级、平滑变化的估计时，则采用更宽、成本更高的方式。

5.2 能量、阈值与锁定

Sengupta 等人（2024）的能量形式在本研究中发挥两种作用。在窄间距情况下，其逐节点和成对判据分别成为单个海森矩阵检验中的对角元和精确条件（推论 1）。这解释了二者之间的差异，并与命题 2 一同得出一个适用于所有稳定状态的精确容量。在这一系列模型中，同一能量还为晶格锁定与软平移模态为何并存提供了动力学解释。由于能量对阈值以下的状态并不敏感，沿平移方向的能量可以近乎平坦（ $|\mu_{\mathrm{top}}|$较小，居中位置之间的能量差极小），但要移动项目，仍须驱动一个非活动边缘单元越过阈值。因此，与其通过项目位置之间的能量差来理解锁定，不如将其视为一种募集阈值；边缘单元裕度对此有很强的预测作用（第 4.4 节）。裕度消失时便会出现捕获。两个项目位置之间的完整转变路径上是否存在势垒，则是一个我们尚未探讨的独立问题。我们预计，在其他阈值网络中，能量在活动集内的曲率与改变活动集的成本之间也存在同样的区别。

5.3 离散吸引子与连续吸引子

离散性与漂移相互权衡这一更广泛的观点并非新鲜事。环形网络中的异质性兴奋能够稳定有限个峰位置，以牺牲可存储内容的粗粒化为代价减缓扩散（Kilpatrick et al., 2013；Kilpatrick and Ermentrout, 2013）；稳态缩放（Renart et al., 2003）和短时程易化（Itskov et al., 2011）也被提出作为减缓漂移的其他方式；而离散吸引子和连续吸引子则被对比为渐变持续活动的模型（Brody et al., 2003）。我们的结果从三个方面扩展了这一图景。第一，我们关注的是多个项目，因此容量、干扰范围和更新与漂移并列成为关键因素。第二，在阈值网络中，晶格本身通过每个项目的活动集提供了离散性。这正是晶格锁定在平移模态变软的情况下仍能保持的原因：最慢模态和位移阈值衡量的是不同的事物，分别是活动集内部能量的曲率，以及改变活动集所必须克服的裕度（第 4.4 节）。第三，该系列模型中 OCOS 这一端拥有精确理论（第3节），因此连续体的一端由闭式解加以锚定，而不仅仅依赖模拟。

5.4 视觉工作记忆的意义

一个有用计算模型的标志在于，它不仅能解释已知现象，还能提出可检验的预测。因此，我们考察这一系列模型对视觉工作记忆意味着什么。

槽位样和资源样机制。 OCOS 端的机制具有槽位样动力学：项目彼此离散，呈全或无状态，其数量受闭式容量（定理2）限制。峰值端则具有资源样动力学：项目呈分级状态，在一定范围内相互作用，并发生漂移。这些是动力学机制，而不是行为理论的实现。槽位模型和资源模型会对回忆精度、猜测以及集合大小效应作出具体预测（Zhang and Luck，2008年；Bays and Husain，2008年；Ma 等人，2014年），而检验这些预测需要行为读出，而我们尚未对其进行模拟。需要说明的是，这种对比不必意味着必须在不同架构之间作出选择；它也可以被看作单个电路参数上的一个位置。脉冲网络研究提出了相关观点，显示在归一化作用下，系统会从分布式资源转变为有限槽位（Wei 等人，2012年）。当前这一机制家族进一步提供了一种具体且可分析的机制，用于确定电路位于该轴线的何处。

容量取决于间距，而不仅仅是数量。在抑制随距离变化的情况下，能容纳多少个项目取决于它们相隔多远（命题 4；图 3e）。由此可以得出一个直接预测：在项目占据同一特征图或空间图的任务中，容量估计值应随项目间距增大而上升；而项目不再相互干扰时的间距，应与底层表征的宽度成比例。拓扑吸引子模型已将记忆精度与所记位置之间的距离联系起来（Almeida 等人，2015年）。

排斥与覆盖。在宽宽度状态下，新添加的项目会将已存储的项目推开（图 5），据此可以预测：当项目间距略大于干扰范围时，记忆项目之间会出现排斥偏差。在锁定较弱的情况下，强输入会覆盖已有项目，而非将其添加进来。在工作记忆任务中，这会表现为新呈现的项目取代附近位置上较早项目的记忆，使较早的项目被报告为出现在新位置。真实电路是否处于这种状态，仍是一个经验问题；但模型明确指出了可验证的特征：随着位移阻力下降，捕获阈值也会降低。

高负载下的完全丢失。在采用此激活函数时，全局抑制网络中的灾难性干扰（Endress 和 Szabó，2020年）是一种长暂态：静默状态是不稳定平衡，而非吸引态（命题 3）。因此，试次中是否会观察到这种现象，取决于各项目输入之间的不均等程度以及延迟时长，而不仅仅取决于项目数量。

替代解释。 一种替代解释是，离散记忆和渐变记忆分别由不同的网络承载，例如一种容量受限优先级图；OCOS网络正是为模拟这类优先级图而提出的（Sengupta 等人，2014年、2017年；Knops 等人，2014年），同时还存在

为前额叶皮层提出的那类特征调谐的峰值吸引子（Compte 等人，2000年；Wimmer 等人，2014年）。这种解释完全可能成立，我们的结果也无法排除它。不过，它的简约性较低：它必须分别说明离散存储器为何能抵抗更新，以及渐变存储器为何会发生漂移；而在当前这一族模型中，这两者都源于同一个参数和单一的锁定机制。第二种替代解释是，抵抗位移仅仅反映了项目位置之间的能量差，就像钉扎连续吸引子那样。在我们考察的参数设置中，这一差异的预测力弱于边缘裕度；在锁定作用较强的情况下，它有时甚至可以忽略不计（第 4.4 节）。

5.5 局限性

该模型是由率单元构成的一维环。视觉工作记忆涉及多个特征维度和绑定（Ma 等人，2014），而二维映射可能会改变项目的排列方式。我们在两个总兴奋水平下改变了兴奋宽度，并采用了一种激活函数； F 中的阈值会产生晶格锁定，因此预计平滑激活会减弱这种效应。背景静默机制（紧张性抑制）是为简化模型而选用的；侵入率取决于该机制，因此我们比较宽度时，使背景虚警率大致匹配。噪声研究只涵盖一条参数路径，以及 100 个时间单位的延迟。噪声为加性白噪声，而真实电路中的噪声具有结构和内在限制（Burak 和 Fiete，2012）。第 4.4 节的精细扫描沿参数空间中的两条路径进行；尚待绘制完整图谱，以确定晶格锁定在何处消失，以及它如何随 σ_e、 β_0 和感受野而变化。所有模拟都采用有限晶格，我们不对其收敛至连续神经场极限作任何断言。最后，第3节的闭式解仅在 OCOS极限下严格成立。在其余参数范围内，结果均为数值结果；定理1在这些情况下仍然成立，但闭式容量和间距则不成立。

5.6 未来研究方向

在我们看来，这一研究方向最有前景之处，在于它开始将通常分开研究的问题联系起来：稳定性、容量、干扰、更新和漂移。由此自然可以延伸出若干方向。在本研究中，每个试次内的兴奋宽度和自激保持不变。例如，若允许自激随时间变化——在刺激呈现期间增强，之后逐渐减弱——同一网络便能在一个试次内先后进入竞争状态和维持状态，并将编码与维持联系在同一个递归架构中。同样，在我们的枚举研究中，我们曾预想一种逐试次调整抑制的机制（Sengupta 等人，2017年）；类似地调整兴奋宽度，就能使电路根据任务需求沿这一系列状态移动。最后，上述关于间距依赖的容量、排斥和捕获的预测，可以通过行为实验检验；从锁定到捕获的转变，则为记忆维持期间的神经记录提供了一种候选特征。理解电路如何以这种方式在稳定性与灵活性之间取得平衡，将有助于弥合抽象计算模型与视觉工作记忆神经机制之间的鸿沟。

5.7 结论

在本研究中，我们表明，当总兴奋保持不变时，单一结构参数——循环兴奋宽度——会使OCOS网络趋向弱稳定化的斑块状状态，并决定连续性的代价。沿着这一变化过程，网络会牺牲容量、较短的干扰范围和抗覆盖能力；为实现连续性，它还要付出单元数量、活动和恢复时间方面的代价，同时更容易受到漂移影响。在较窄的一端，基于 Sengupta等（2024年）的能量函数，可以精确描述容量、干扰和稳健性。沿着这一系列状态，尽管项目仍保持锁定，平移模态却逐渐软化，因为移动一个项目需要在其边缘招募一个单元，而活动集内的能量函数无法反映这一阈值。当该阈值消失时，更新便转变为捕获。总的来说，这些是电路本身的性质，而非某种建模传统的特性，并且它们能够产生可检验的预测。

声明

资助。 本研究未获得外部资助。

利益冲突。 作者声明不存在利益冲突。

伦理　批准与同意。 不适用；未收集任何人类或动物数据　.

数据与代码可用性。模拟代码、用于计算理论检查并生成所有图表的脚本，以及生成的数据文件，均作为辅助文件随本 arXiv 投稿一并提供（文件夹 `anc/`；见 `anc/README.md`）。

参考文献

Rita Almeida、João Barbosa 和 Albert Compte。视空间工作记忆精度的神经电路基础：一项计算与行为研究。*Journal of Neurophysiology*，114（3）：1806–1818，2015年。doi：10.1152/jn.00362.2015。

Shun-ichi Amari。侧向抑制型神经场中的模式形成动力学。*Biolog-ical Cybernetics*，27（2）：77–87，1977年。doi：10.1007/BF00337259。

Paul M. Bays 和 Masud Husain。人类视觉中有限工作记忆资源的动态转移。*Science*，321：851–854，2008年。

Carlos D. Brody、Ranulfo Romo 和 Adam Kepecs。《分级持续活动的基本机制：离散吸引子、连续吸引子和动态表征》。《神经生物学当前观点》，13(2):204–211，2003年。

Yoram Burak 和 Ila R. Fiete。《噪声神经元网络中持续活动的基本极限》。《美国国家科学院院刊》，109:17645–17650，2012年。

Michael A. Cohen and Stephen Grossberg. Absolute stability of global pattern formati在一个d竞争性神经网络中的并行记忆存储。*IEEE*《系统、人和控制论汇刊》，SMC-13:815–826，1983年。Albert Compte、Nicolas Brunel、Patricia S. Goldman-Rakic 和 Xiao-Jing Wang。皮层网络中支撑空间工作记忆的突触机制与网络动力学。《大脑皮层》，10:910–923，2000年。Fredrik Edin、Torkel Klingberg、Pär Johansson、Fiona McNab、Jesper Tegnér 和 Albert Compte。工作记忆容量自上而下控制的机制。《美国国家科学院院刊》，106:6802–6807，2009年。Ansgar D. Endress 和 Szilárd Szabó。干扰与记忆容量限制。《心理学评论》，124(5):551–571，2017年。Ansgar D. Endress 和 Szilárd Szabó。序列呈现可保护工作记忆免受灾难性干扰。《认知科学》，44(5):e12828，2020年。doi: 10.1111/cogs.12828。Stephen Grossberg。回响神经网络中的轮廓增强、短期记忆与恒常性。《应用数学研究》，52(3):213–257，1973年。Roger A. Horn 和 Charles R. Johnson。《矩阵分析》。剑桥大学出版社，第2版，2012年。Vladimir Itskov、David Hansel 和 Misha Tsodyks。短时程易化可能稳定参数化工作记忆痕迹。《计算神经科学前沿》，5:40，2011年。doi: 10.3389/fncom.2011.00040。Zachary P. Kilpatrick 和 Bard Ermentrout。随机神经场中的游走峰。《工业与应用数学学会应用动力系统杂志》，12(1):61–94，2013年。doi: 10.1137/120877106。Zachary P. Kilpatrick、Bard Ermentrout 和 Brent Doiron。通过皮层循环兴奋的异质性优化工作记忆。《神经科学杂志》，33(48):18999–19011，2013年。doi: 10.1523/JNEUROSCI.1641-13.2013。André Knops、Manuela Piazza、Rakesh Sengupta、Evelyn Eger 和 David Melcher。共享且灵活的神经映射架构反映了视觉短时记忆和枚举中的容量限制。《神经科学杂志》，34(30):9857–9866，2014年。doi: 10.1523/JNEUROSCI. 2758-13.2014。Steven J. Luck 和 Edward K. Vogel。视觉工作记忆对特征和特征结合的容量。《自然》，390:279–281，1997年。Wei Ji Ma、Masud Husain 和 Paul M. Bays。工作记忆概念的变迁。《自然·神经科学》，17:347–356，2014年。Alfonso Renart、Pengcheng Song 和 Xiao-Jing Wang。通过异质性皮层网络中的稳态突触缩放实现稳健的空间工作记忆。《神经元》，38(3):473–485，2003年。doi: 10.1016/S0896-6273(03)00255-1。

Rakesh Sengupta。使用具有距离依赖性抑制的递归中心兴奋周围抑制神经网络对视觉工作记忆进行建模。《科学报告》，15:23000，2025年。doi: 10.1038/s41598-025-06919-5。

Rakesh Sengupta、Bapi Raju Surampudi 和 David Melcher。视觉数感源自递归中心兴奋周围抑制神经网络的动力学。《脑研究》，1582：114–124，2014年。

Rakesh Sengupta、Surampudi Bapiraju 和 David Melcher。大数与小数：单一灵活机制用于数量感知的实证支持。《注意、知觉与心理物理学》，79(1)：253–266，2017年。doi: 10.3758/s13414-016-1221-5。

Rakesh Sengupta、Surampudi Bapiraju 和 Anindya Pattanayak。使用一种新颖的能量函数形式体系，探索循环神经网络的涌现特性。载于 Giuseppe Nicosia、Varun Ojha、Emanuele La Malfa、Gabriele La Malfa、Panos M. Pardalos 和 Renato Umeton（编），《机器学习、优化与数据科学（*LOD 2023*）》，第14505卷，《计算机科学讲义》。施普林格，Cham，2024年。doi：10.1007/978-3-031-53969-5_23。

Xiao-Jing Wang。支撑记忆持续活动的突触 reverberation。《神经科学趋势》，24(8):455–463，2001年。

Ziqiang Wei、Xiao-Jing Wang 和 Da-Hui Wang。从分布式资源到多项目工作记忆中的有限槽位：带归一化的脉冲网络模型。《神经科学杂志》，32:11228–11240，2012年。

Klaus Wimmer、Duane Q. Nykamp、Christos Constantinidis 和 Albert Compte。前额叶皮层中的活动峰动力学解释了空间工作记忆中的行为精度。《自然·神经科学》，17:431–439，2014年。

Weiwei Zhang 和 Steven J. Luck。视觉工作记忆中的离散固定分辨率表征。《自然》，453:233–235，2008年。

A 证明

对于所有情况，$y_i = F(x_i)$、$F\prime(x) = (1+x)^{-2}$对于 $x > 0$和 $F'(x) = 0$对于 $x < 0$。对于 $x > 0$，我们有 $F(x) < x$，其逆为 $x = y/(1-y)$。

定理1

(a) 由于 $\Phi'(x) = x/(1+x)^2 = xF'(x)$ 对于 $x > 0$ 成立（且两边在 $x < 0$时均为零），并且 W 是对称的，

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_i} = F'(x_i)\Big[\lambda x_i - I_i - \sum_j W_{ij} y_j\Big] = -F'(x_i)\,\dot{x}_i,$$

因此 $\dot{\mathcal{E}} = \sum_i (\partial \mathcal{E}/\partial x_i)\,\dot{x}_i = -\sum_i F'(x_i)\,\dot{x}_i^2 \le 0$。公式（5）是针对 $a_i \equiv 1$, $b_i(x) = -\lambda x + I_i$, $c_{ij} = -W_{ij}$和 $d_j = F$ 的 Cohen–Grossberg函数（Cohen和Grossberg，1983年）。

（*b*）非活跃单元对$\mathcal{E}$ 没有贡献（因为 $\Phi = F = 0$ 在那里），而在活动集上，以坐标 y_i表示，

$$\mathcal{E} = \sum_{i\in\mathcal{A}} \Big[\lambda(-\ln(1-y_i) - y_i) - I_i y_i\Big] - \tfrac{1}{2}\sum_{i,j\in\mathcal{A}} W_{ij} y_i y_j,$$

因为 $\ln(1+x) = -\ln(1-y)$ 且 $1/(1+x) = 1-y$。于是 $\partial\mathcal{E}/\partial y_i = \lambda x_i - I_i - \sum_j W_{ij} y_j = -\dot{x}_i$且 $\partial^2\mathcal{E}/\partial y_i \partial y_j = \lambda(1-y_i)^{-2}\delta_{ij} - W_{ij} = H_{ij}$。对于雅可比矩阵， $\partial\dot{x}_i/\partial x_j = -\lambda\delta_{ij} + W_{ij}F'(x_j)$。属于非活动单元的列具有 $F' = 0$，因此，按（活跃、非活跃）的顺序排列单元后，雅可比矩阵为具有非活跃块 $-\lambda I$ 的分块下三角矩阵。其谱由活跃块的谱以及 $-\lambda$ 组成。活跃块为 $J_{\mathcal{A}} = -\lambda I + W_{\mathcal{A}\mathcal{A}} D = -HD$，其中$D = \mathrm{diag}(F'(x_i))$，且我们使用了 $\lambda(1+x_i)^2 F'(x_i) = \lambda$。由于 $D \succ 0$， $J_{\mathcal{A}}$ 与 $-D^{1/2} H D^{1/2}$ 相似，而后者是对称的，并且与 $-H$ 合同。因此， $J_{\mathcal{A}}$ 的所有特征值都是实数；根据西尔维斯特惯性定律（Horn and Johnson，2012年）， $J_{\mathcal{A}}$ 具有与 H 的正、零、负特征值数量相同的负、零、正特征值。如果 $H \succ 0$，则雅可比矩阵的每个特征值都为负，由线性化稳定性原理可知其具有局部指数稳定性。如果 H 具有负特征值，则雅可比矩阵具有正特征值，且该平衡态不稳定。如果 H 是奇异的，则雅可比矩阵具有零特征值，此时由高阶项决定。

□

命题1

对于处于平衡态的活跃单元， $\lambda x_i = \alpha y_i - \sum_{j\neq i}\beta_{ij} y_j \le \alpha y_i < \alpha x_i$，因此 $\lambda < \alpha$。反过来，如果 $\alpha > \lambda$，那么 $x_w = \alpha/\lambda - 1 > 0$ 满足 $\lambda x = \alpha x/(1+x)$，且其他所有单元均处于 $x_l = -\beta_{lw} y_w/\lambda < 0$（对于 $\beta_{lw} > 0$）。其海森矩阵为标量 $\lambda(1+x_w)^{2} - \alpha = \alpha(\alpha-\lambda)/\lambda > 0$。

□

定理2和推论2

对于 S 个等量活跃单元，活跃单元满足 $\lambda x = \alpha y - \beta(S-1)y = A_S y$，因此 $1 + x_S = A_S/\lambda$。存在正解，当且仅当 $A_S > \lambda$。非活动单元满足 $\lambda x_l = -\beta S y_S < 0$。在$\mathcal{A}$上，

$$H = \Big(\tfrac{A_S^2}{\lambda} - \alpha - \beta\Big) I + \beta\,\mathbf{1}\mathbf{1}^{\top},$$

其特征值为 $A_S^2/\lambda - (\alpha+\beta)$，对应于（$S-1$）维子空间 $\mathbf{1}^{\top} v = 0$；以及$A_S^2/\lambda - \alpha + (S-1)\beta = A_S(A_S-\lambda)/\lambda$，沿方向**1**。仅当该状态存在时，第二个特征值才为正；对于 $S \ge 2$，仅当 $A_S^2 > \lambda(\alpha+\beta)$ 时，第一个特征值才为正。当 $D = (\lambda/A_S)^{2} I$ 且$W_{\mathcal{A}\mathcal{A}} = (\alpha+\beta) I - \beta\mathbf{1}\mathbf{1}^{\top}$时， $J_{\mathcal{A}} = -\lambda I + W_{\mathcal{A}\mathcal{A}} D$给出（8）。由于 $A_S > 0$，稳定性条件为$A_S > \sqrt{\lambda(\alpha+\beta)}$，整理后得到（9）。 $S_{\mathrm{st}} < S_{\max}$，因为 $\alpha+\beta > \lambda$ 意味着 $\sqrt{\lambda(\alpha+\beta)} > \lambda$。将 $(\alpha - (S-1)\beta)^{2} = \lambda(\alpha+\beta)$ 作为关于 α 的二次方程求解，得到根 $\tfrac{1}{2}[2(S-1)\beta + \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda S\beta}]$。在较小根处 $A_S < 0$，因此相关条件是 $\alpha > \alpha_S$，即较大根（10）。对于 $S = 1$，不存在横向子空间，稳定性条件退化为存在条件 $\alpha > \lambda$。

根据推论， $\alpha_S(\beta)$ 随着 S 增大，因此 $\alpha \le \alpha_2$ 意味着对于每个 $S \ge 2$， $\alpha \le \alpha_S$。于是，所有多项等激活状态都不稳定，而单个项目对于每个$\alpha > \lambda$都稳定。

□

命题 2

令 $u_i = 1 + x_i$ 和 $c = \alpha + \beta$。当 $y = 1 - 1/u$ 时，处于平衡态的活跃单元满足 $\lambda x_i - c\, y_i = -\beta Y$，其中 $Y = \sum_{j\in\mathcal{A}} y_j$，也就是说，

$$\lambda u_i + \frac{c}{u_i} = K, \qquad K = \lambda + c - \beta Y,$$

因此，每个活跃单元 u_i 都是同一个二次方程 $\lambda u^2 - Ku + c = 0$的根。因此，活跃单元至多取两个值 $u_l \le u_h$；如果二者不同，则 $u_l u_h = c/\lambda$。记作 $d_i = \lambda u_i^2 - c$，于是$H = \mathrm{diag}(d_i) + \beta \mathbf{1}\mathbf{1}^\top$。 H 是 $\mathrm{diag}(d_i)$ 的正秩一更新，因此根据特征值交错定理（Horn and Johnson, 2012年），第二小的 d_i 至少等于 H的最小特征值。如果$H \succ 0$，则至多有一个 d_i 为非正。

假设某个稳定平衡态具有不相等的激活。利用 $u_l u_h = c/\lambda$和 $\Delta = u_h - u_l > 0$，我们得到 $d_l = \lambda u_l(u_l - u_h) = -\lambda u_l \Delta < 0$和 $d_h = \lambda u_h \Delta > 0$。由于至多有一个 d_i为非正，因此恰好有一个单元取值为 u_l，而 $S-1$ 个单元取值为 u_h。由于恰好有一个负对角元素， H 至多有一个非正特征值，因此 $H \succ 0$ 当且仅当 $\det H > 0$。由于 $\det H = \prod_i d_i\,(1 + \beta \sum_i d_i^{-1})$ 且 $\prod_i d_i < 0$，这要求

$$\frac{\beta}{\lambda u_l \Delta} > 1 + \frac{\beta(S-1)}{\lambda u_h \Delta}.$$

乘以 $\lambda u_l u_h \Delta > 0$ 并使用 $\lambda u_l u_h = c$ 得到 $\beta u_h > c\Delta + \beta(S-1)u_l$。代入$u_h = u_l + \Delta$后，变为 $-\alpha\Delta > \beta(S-2)u_l$。当 $S \ge 2$时，左侧为负，而右侧为非负，产生矛盾。因此，每个稳定平衡态都具有相等激活。 □

命题 3（概要）

对于相同单元和输入，方程在置换下保持不变，因此相等激活的子空间是不变的。在该子空间上，当 $A_S \le \lambda$时， $\dot{x} = -\lambda x + A_S F(x) < 0$ for $x > 0$，因此$x \to 0^+$；对于 $S > S_{\max}$ ($A_S < \lambda$)，这种衰减最终呈指数形式。在 $x = 0^+$附近， $F(x) \approx x$，且活跃单元的线性化动力学为 $\dot{x}_i = (\alpha - \lambda)x_i - \beta \sum_{j\ne i} x_j$。均匀模态的速率为 $\alpha - \lambda - (S-1)\beta = A_S - \lambda < 0$，而每个横向模态的速率为 $\alpha - \lambda + \beta > 0$。因此，相对不对称性 ε相对于均值以 $(\alpha + \beta - \lambda) + (\lambda - A_S) = S\beta$的速率增长，并在 $\ln(1/\varepsilon)/(S\beta)$后达到数量级一。在这段时间内，均值衰减了一个因子 $\varepsilon^{(\lambda - A_S)/(S\beta)}$，由此得到（11）。当差异达到数量级一时，领先单元会抑制其他单元并恢复。偏移量 t_0 是从初始状态接近线性区间所需的时间。

□

命题 4

在两个活跃单元之间存在抑制 $b = \beta_{ij}$ 时，一个活跃单元满足 $\lambda x = (\alpha - b)y$。在这两个活跃单元上， H 的对角元为 $(\alpha - b)^2/\lambda - \alpha$，非对角元为 b，其特征值为 $(\alpha - b)^2/\lambda - \alpha \pm b$。较小特征值为正当且仅当 $(\alpha - b)^2 > \lambda(\alpha + b)$，即 $b^2 - (2\alpha + \lambda)b + \alpha^2 - \lambda\alpha > 0$。该二次方程的较大根超过 α（得到 $\alpha - b < 0$），因此条件为 $b < \beta^*$，如式 (12) 所示。存在性 $(\alpha - b > \lambda)$ 随之成立，因为 $(\alpha - b)^2 > \lambda(\alpha + b) > \lambda^2$。

其他单元同时受到两个项目的抑制，因此处于非活跃状态。当 $\beta_{ij} = \beta_0 e^{-d^2/2\text{感受野}^2}$，时，条件 $\beta_{ij} < \beta^*$ 为 $d > d^*$，满足该条件的最小整数 d 为 $\lfloor d^* \rfloor + 1$（至少为 1）。 □

命题 5

在抑制固定为 $m > 0$和 $I_l = 0$时，单元 l 满足 $\dot{x} = -\lambda x - m$（当 $x \le 0$时），因此它停留在 $-m/\lambda$，且对于 $x > 0$，$\dot{x} = h(x) - m$。这里 $h(0) = 0$，$h'(0) = \alpha - \lambda > 0$，且 $h'' < 0$；h 在 $(1+x)^2 = \alpha/\lambda$ 时达到最大值，最大值为 $(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\lambda})^2$。若 $m \ge h_{\max}$，则对所有 $x > 0$，$\dot{x} \le 0$，且该单元会回落至阈值以下。否则，$h(x) = m$ 在 (x_u, x_s) 上有两个正根 $x_u < x_s$、$\dot{x} > 0$，而一个将该单元从 $-m/\lambda$ 带到高于 x_u 的位置的扰动会使其到达 x_s。若 $m = 0$，则 $x_u = 0$。 □

B 分流 OCOS 网络

在 OCOS 网络的分流变体中（Grossberg，1973年；Cohen和Grossberg，1983年），兴奋和抑制受单元自身激活的门控：

$$\dot{x}_i = -x_i + (B - x_i)F(x_i) - (D + x_i)\sum_{k \ne i} F(x_k) + I_i, \qquad B, D > 0. \tag{14}$$

它也具有 Cohen–Grossberg 形式，其中 $a_i(x) = D + x > 0$ on $(-D, \infty)$，因此定理1(b)同样适用：在非退化平衡态 $J_{\mathcal{A}} = -\text{diag}(a_i)\, H\, \Lambda$ with $\Lambda = \text{diag}(F'(x_i))$ and H 能量海森矩阵处，该矩阵与 $-SHS$ with $S = \text{diag}(a_i F'(x_i))^{1/2}$ 相似。因此，在正则区域内，能量判据与线性稳定性再次一致；在该区域中，$a_i > 0$, $F'(x_i) > 0$ on 活动集，且没有单元处于阈值。

命题6。设 $I = 0$ 是正则区域中的一个平衡态（对所有单元均有 $x_i > -D$，活跃单元严格高于阈值，非活跃单元严格低于阈值），且其稳定性满足定理*1*的严格线性意义。则具有 n 个等量活跃单元的状态有 $x[n] = (B - 1 - (n-1)D)/(n+1)$。当且仅当 $c_n = B - (n-1)D > 1$ 时，该状态存在；也就是说，$n < n_{\max} = 1 + (B-1)/D$。非活跃单元彼此解耦，活跃模态为

$$\mu_{\parallel} = -\frac{(n+1)x[n]}{1 + x[n]} < 0, \qquad \mu_{\perp} = -1 - \frac{n\,x[n]}{1 + x[n]} + \frac{B + D}{(1 + x[n])^2}.$$

因此，当且仅当 $c_n\,(c_n + n) > (B + D)\,(n + 1)$ 时，该状态是稳定的。

证明。平衡态可由固定点方程乘以 $1+x$ 得到。在对称状态下对（14）求导，活跃单元之间的对角元素为 $-1 - y + (B - x)y' - (n-1)y$，非对角元素为 $-(D+x)y'$，其中 $y' = (1+x)^{-2}$。恒等式 $1 + x[n] = (c_n + n)/(n+1)$、$1 + (n+1)x[n] = c_n$ 和 $B - (n-1)D - n x[n] = 1 + x[n]$ 给出了两个模态和稳定性条件。

□

门控将活动限制在 $(-D, B)$ 范围内，但并未消除存在性上限 $n_{\max}$，因此分流本身无法防止高负载下的项目丢失。对于 $(B, D) = (3, 0.2)$、$(4, 0.5)$、$(2.5, 0.1)$ 和 $(6, 0.3)$，最大的稳定 n 分别为 3、3、4 和 6，而 $n_{\max} = 11$ 分别为 7、16 和 17.7。在每种情况下，上述条件都与每个 $n < n_{\max}$ 处数值计算所得的雅可比矩阵一致。

C 数值方法

积分。 方程 (1) 使用欧拉方法进行积分，步长为 0.01；对于噪声，则使用欧拉–丸山方法，每步加入 $\sigma\sqrt{0.01}\,\xi_i$，并采用相互独立的标准正态分布ξ_i。项目通过在一个单元上施加振幅为 1 的线索、持续 5 个时间单位来创建，随后在 60 个时间单位内不施加输入。

稳定性门控与对称性破缺。 只有当某个状态的最大残差 $|\dot{x}_i|$ 低于 10^{-3} 且其雅可比矩阵的所有特征值均为负时，才将该状态判定为记忆状态。未通过判定的状态会沿其主特征向量方向受到幅度为 10^{-4} 的扰动，并叠加小幅随机分量；扰动仅施加于活跃单元，随后再经过 60 个时间单位的稳定过程。此过程最多重复六次。将扰动限制在活跃单元上很重要：根据命题5(c)，若对远处的静息单元施加扰动，就会产生伪项目。设置这一门控有两个原因。单单元线索具有镜像对称性，因此动力学可能无限期地停留在对称鞍点上（例如，某个项目以一个单元为中心，而其稳定形式则以两个单元之间的位置为中心）。此外，在接近隆起吸引子端时，弛豫时间 $1/|\mu_{\mathrm{top}}|$ 可能超过稳定过程的时长。若不设置此门控，在较大的 σ_e 下，干扰范围和容量会被高估；其中一个案例中的高估幅度达三倍。

项目计数。 对于 $\sigma_e > 0$ ，一个项目是由一段连续的活跃单元组成。当邻居兴奋低于自激的 1%（$\sigma_e < 0.33$）时，每个活跃单元都计为独立项目，否则相邻的单单元项目会合并成一个簇。项目中心是F加权的圆周均值。

测量指标。 干扰范围 $d_{\min}$ 由间距为$d = 1$、2、.....的同时提示信号计算得出；它是指这样一个最小 d，从该间距开始，所有更大的测试间距都不会导致合并或项目丢失。尚未稳定下来的配对单独计数，不视为失败。更新线索以固定距离 2RF 施加 10 个时间单位，振幅在 0.005 到 5 之间按对数等距取 25 个值。结果不一定随振幅单调变化，因此对整个网格进行分类，并用局部二分法细化第一个“已添加”边界。对于噪声运行，“移动”指位移至少达到 0.75 个位点：中心位于两个单元之间的项目可能被推向一侧半个位点，但这不算真正移动。有效扩散系数是项目中心均方位移随时间变化斜率的一半，根据始终保持恰好一个项目的运行计算得出。

慢模态、能量与边缘裕度。平移重叠度为 $Q = |v \cdot t|/(\|v\|\,\|t|)$，其中 v是活跃单元雅可比矩阵中对应于 μ_{top}的右特征向量，而 $t_i = (x_{i+1} - x_{i-1})/2$是项目轮廓的离散导数；二者均限定在活跃单元上。能量（5）在两个镜像对称状态下进行评估：一个线索指向单个单元（以该单元为中心）的项目，以及一个线索等量指向两个相邻单元（以两者之间为中心）的项目。没有扰动时，动力学保持在相应的对称子空间中，因此无论是否稳定，这两个状态都是完整网络的平衡态；两者均经过 200 个时间单位的演化。边缘裕度

在松弛项目处为 $m_{\text{edge}} = -\lambda x_e$，其中 e 是项目边缘之外的第一个单元（施加位移探针的单元）。

电路成本。对于运行 A 和 B 的每个单元，均按照第 2.3 节的方法形成一个单个项目。我们记录了其活跃单元数量、总输出 $\sum_i F(x_i)$ 和最慢弛豫时间$\tau = 1/|\mu_{\text{top}}|$ (`cost_analysis.py`)。其余成本（$d_{\min}$、容量和 a_{add}）取自主扫描。

精细过渡扫描。运行 A 使用 $\beta_0 = 0.3$和 $\sigma_e = 2.0$，2。1，.....，3。0；运行 B 使用 $\beta_0 = 0.15$和 $\sigma_e = 4.5$，4。75，.....，6。0。每个单元均采用与主扫描相同的测量指标进行分析，但不包括干扰范围和容量。

噪声研究。运行 A 配置，$\beta_0 = 0.2$、$\sigma_e \in \{0, 1, 2, 3\}$，噪声 $\sigma = 0.03$；每种条件进行 1000 次试验，每次持续 100 个时间单位。在固定 条件下，每个单元中的 $\theta = 0.08$ 。在校准的条件下，通过对 $[0, 0.2]$ 进行二分法搜索，为每个单元选择 θ ；每次评估进行 200 次试验，使未存储项目的网络在 5% 的试验中获得一个伪项目。随后，使用 500 次独立试验重新估计达到的虚警率。比例以威尔逊 95% 置信区间报告。项目中心轨迹每个时间单位采样一次。

检查。每次扫描前，代码都会在 $\sigma_e = 0$ 运行表1中的五项检查；若有任何一项未通过，便拒绝继续。另一个独立脚本会将第3节的每个闭式结果与模拟进行对照复现（图 2）。

表 3： 各组运行的参数。所有运行均使用： $\lambda = 1$，欧拉步长为 0.01，提示振幅为 1，持续 5 个时间单位；稳定过程持续 60 个时间单位；在 2RF 处施加更新提示，持续 10 个时间单位；噪声运行持续 100 个时间单位（A–D组每个单元运行 100 次，噪声研究中每种条件运行 1000 次）。

Run	兴奋	α	N	RF	β_0	σ_e	噪声（σ； θ）
A	固定总量	4	160	6	0.2, 0.3	0, 0.5, . . ., 3	0.03；0.08，0.1
B	固定总量	4	320	12	0.1, 0.15	0, 1, 2, 3, 4, 6	0.03；0.05，0.08
C	固定总量	2.2	160	6	0.2, 0.3	0, 0.25, ⋯⋯ , 1.25	0.02；0.05，0.08
D	固定自重	2.2	160	6	0.3、0.6、1.0	0、0.5、.....、3	0.05; 0.15
精细级别 A	固定总量	4	160	6	0.3	2.0, 2.1, . . ., 3.0	–
精细级别 B	固定总量	4	320	12	0.15	4.5, 4.75, . . ., 6.0	–
噪声	固定总量	4	160	6	0.2	0、1、2、3	0.03；0.08 / 校准的

软件。使用 Python 3 和 NumPy 进行模拟，使用 Matplotlib 绘制图表。在不添加噪声的情况下，运行 A 的扫描在单个 CPU 核心上大约需要 2 分钟，运行 B 大约需要 6 分钟。添加噪声的运行每个单元还需额外几分钟。