arXiv:2611.28606v1 [cs.LO] 21 Nov 2026

速率–突发安全语言：突发边界的 Farey 结构与擦除条件下的判别

LIHUI DONG [a] 和 ZHUO LI [b]

[a]西安精密机械研究所昆明分所，昆明，中国*e-mail address*：dlh1997999@163.com

[b]中国科学技术信息研究所，北京，中国*e-mail address*：liz@istic.ac.cn

Abstract. 速率为 ρ、突发量为 B 的漏桶约束规定，在任意连续 n 步组成的窗口中，高成本步骤最多为 $\rho n + B$ 步。满足该约束的无限 0/1 词构成一种安全语言。对于边代价为 0 或 1 的有限图，我们研究某条无限路径的代价词属于该语言时所需的最小突发量，并将其视为实数速率的函数。该函数表示监控器在通过擦除信道观测两个有限状态系统、且信道受漏桶界约束时，区分这两个系统的精确容限。该语言在每个有理速率下都是 ω-正则的，但当突发量达到 1 后，在无理速率下不再是正则语言，因此最终周期见证并非来自自动机理论。我们直接证明，在所有实数速率下，简单套索均足以构成见证；对于有 N 个顶点的图，边界的所有断点都属于阶数为 N 的 Farey 数列。一个套索的仿射段数量有紧确的 N 的 2/3 次方阶界，而路径的选择会造成向下跳跃，使边界既非凸也非凹。在每个法里区间的中项处进行一次求值，即可恢复仿射段和最优套索；而对递减的整数突发量进行最大不动点计算，则可在多项式时间和线性工作空间内求出整个函数。我们还计算了判别时域，并将 Farey 结构推广到轮流制安全博弈。

1. Introduction

速率–突发约束通过窗口长度的仿射函数，对每个时间窗口中的事件数量施加界。在网络演算中，由速率为 ρ、突发量为 B 的漏桶调节的流，在任意 n 个连续时隙中发送的单位数至多为 $\rho n + B$ [Cru91、LBT01、BT08]。本文将该约束施加于有限图的无限路径上的代价。设 $G = (V, E, S, c)$ 是一个具有 N 个顶点、M 条边、初始顶点集合 $S \subseteq V$ 以及边代价 c 的有向图：$E \to \{0, 1\}$。从 S 出发的无限路径 $e_1 e_2 \cdots$ 是 (ρ, B)-可行的，如果

$$\sum_{t=s+1}^{u} c(e_t) \le \rho(u - s) + B \qquad \text{for all } 0 \le s < u. \tag{1.1}$$

Key words and phrases: 安全语言，ω-正则语言、能量问题、参数综合、漏桶约束、法里序列、安全博弈。

© L.DongandZ.Licc
知识共享

本文的核心问题如下：对于每个实数速率 $\rho \in [0,1]$，使得存在一条 (ρ, B)-可行无限路径的最小突发量 $B_*(\rho)$ 是多少？函数B_* 如何在整个区间 $[0,1]$ 上描述和计算？

该问题源于有损观测下的模式判别。监控器观测一个以两种模式之一运行的系统，每种模式均由一个有限自动机给出，并必须判断当前处于哪种模式。输出通过时钟擦除信道传送到监控器：每个预定观测都会到达，但其中一些会作为擦除符号到达。现有的有损观测模型限制连续丢失的数量 [dCM20, dCM22] ，或限制其观测可能丢失的事件集合 [CBM12]。而漏桶界允许出现无限多次擦除，只要每个包含 n 次观测的窗口中至多有 $\rho n + B$ 次擦除。第 4 节表明，当且仅当两个模式的比较图满足 $B < B_*(\rho)$ 时，监控器才能在有限时间内作出决定。该比较图是两个自动机的积，其中两个输出不同时，边的代价为 1。因此，函数 B_* 正是监控器的精确容忍度曲线：对于每个持续擦除率，它给出两个模式首次能够永久保持混淆状态时的突发量。

在固定速率下，可行性是一个带弱上界的单维能量问题：能量 $E_t = \min\{B, E_{t-1} + \rho - c(e_t)\}$ 从 $E_0 = B$开始，高于 B 的能量会被丢弃，并且能量必须始终保持非负。多项式算法可以判定单一速率下的问题 [BFL+08、HMR22], ；对于有理速率，则可以通过对整数容量进行二分搜索来找到最小突发量。此类逐速率方法无法说明最优路径在何处发生变化、具有多少个仿射片段 B_* ，也无法说明是否只需有限次求值就能确定 B_* 在所有实数速率下的情况。参数化最短路径同样无法回答这些问题。最短路径距离作为参数的函数，是仿射函数的下包络，因此在有限处是凹且连续的 [KO81、YTO91]。突发量目标首先在窗口上取最大值，然后在无限路径上取最小值。由此得到的边界可能向下跳跃；即使边界连续，也可能既非凸也非凹（命题 6.5）。

这一约束在无限词理论中也有直接的解释。满足 (1.1) 的无限 0/1 词构成集合 $W(\rho,\ B)$，该集合在 Cantor 拓扑下是闭集，因此这一约束是一种安全性质，而 $B_*(\rho)$ 是使得某条 G 无限路径的代价词属于 $W(\rho,\ B)$ 的最小 B 。因此，在 $[0,1]$ 上计算 B_* 是一个参数综合问题：它刻画了所有使有限系统满足存在性安全要求的数对 $(\rho,\ B)$。速率是关键参数。当速率 p/q 为有理速率时，计数缩放负载的确定性自动机接受 $W(p/q,\ B)$，而对ω-正则语言进行空性检查会返回一个最终周期见证。当速率为无理速率且 $B \geq 1$ 时，集合 $W(\rho,\ B)$ 不是 ω-正则语言（定理 3.3）。因此这条思路行不通，我们转而直接证明套索见证的存在性。尽管如此，整体边界仍由有限个有理速率确定；每个法里区间内都存在一个分母不超过 $2N$ 的有理速率。

图 1 展示了一个小型示例。该图有两个经过其初始顶点 h 的环。沿环读取边代价，可得到代价词 10 和 11000，其平均代价分别为 $1/2$和 $2/5$。对于 $\rho < 2/5$，每个环的代价都超过其长度的 ρ 倍，因此对于任何有限的 B，较长的窗口都会违反 (1.1)。对于 $2/5 \leq \rho < 1/2$，一条可行路径必须无限次遍历环 11000，而其中连续的两条代价为 1 的边迫使 $B \geq 2 - 2\rho$；重复该环的路径达到了这一界。在 $\rho = 1/2$处，环 10 变得可用，这意味着其平均代价不再超过 ρ，并且只需要 $B = 1 - \rho$。因此，边界在 $\rho = 1/2$处从 1 降至 $1/2$ 。在判别解读中，代价为 1 的边是由一种模式发出的警告

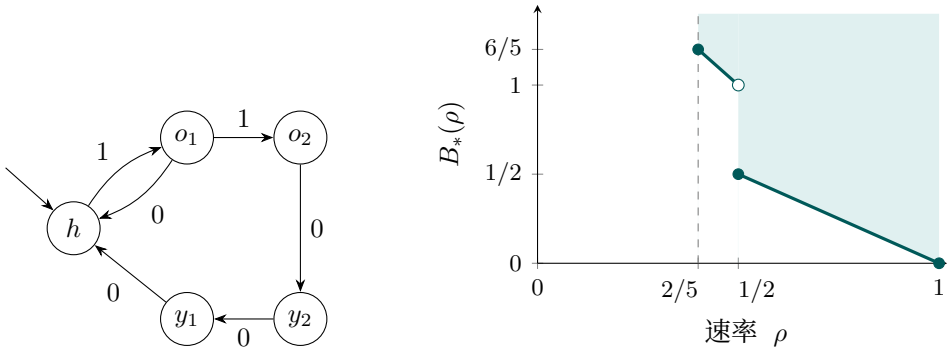

图 1：左：一个带有初始顶点 h 和两个简单环的图，ho_1h 的代价词为 10，$ho_1o_2y_2y_1h$ 的代价词为 11000。右：其突发边界，该边界在 $[0, 2/5)$ 上为无穷，在 $[2/5, 1/2)$ 上等于 $2-2\rho$，并在 $[1/2, 1]$ 上等于 $1-\rho$。阴影标记出允许可行无限路径的点对（ρ，B）。空心点不包含在内。

，而另一种模式发出普通报告；当 $2/5 \le \rho < 1/2$ 时，监控器可容忍略低于 $2-2\rho$ 的突发量，但当 $\rho \ge 1/2$时，只能容忍低于 $1-\rho$ 的突发量。

贡献。 我们的结果将单条路径的几何性质与图中可用的选择区分开来，表1列出了各项结果的证明位置。
(1) 可行词构成一种在每个有理速率下均为 ω-正则的安全语言；当 $B \ge 1$ 后，在无理数速率下则不是 ω-正则的。在每个实数速率下，只要存在可行无限路径，就存在可行简单套索。简单套索的突发要求在有限时是形如 $k - \ell\rho$ 且 $0 \le k \le \ell \le N-1$ 为整数的直线的最大值。单个简单套索在最坏情况下具有 $\Theta(N^{2/3})$ 个仿射片段，而以零代价自环结束的确定性路径可达到这一阶数。(2) 图的突发边界具有 $O(N^2)$ 个仿射片段，且其所有断点均位于 N 阶法里数列中。我们刻画了跳跃发生的条件，证明 $B_*(\rho)/(1-\rho)$ 是非递增的，并展示最后一段为 $R(1-\rho)$，其中 R 是无限路径上代价为 1 的边的最长连续段长度的可能最小值。某一类图具有 $(N+1)/3$ 个有限段和 $(N-2)/3$ 个向下跳跃。临界速率函数给出固定突发量下的最小速率，并且是连续的。(3) B_* 在法里区间的中项处的值决定了该区间上的仿射段，以及在该区间上达到最优的简单套索。通过对递减的整数容量进行扫描，并为每个顶点设置一个负载阈值，可以在 $O((N+M)N^4)$ 次算术运算和 $O(N+M)$ 工作空间内计算整体边界。(4) 在最小圈均值 μ 以下，对于每个突发量，判别时域都是有限的；在有理参数下可以精确计算，并以 $B/(\mu-\rho)$ 的速度增长。(5) 在具有完全观测、采用相同约束的轮流制安全博弈中，最小突发量具有相同的 Farey 结构，并且一个位置策略在每个法里区间内始终最优。B¨uchi 条件会破坏右连续性，即使在单顶点竞技场中也是如此。

该算法基于两个观察。在法里中项 p/q 处，整数 $qB_*(p/q) = qk - p\ell$ 决定系数 (k, ℓ)，因为 $\ell < q$。在 G 与负载自动机的积中，存在无限路径起点的状态构成前驱算子的最大不动点，这与所有安全目标的情形相同；并且在每个顶点处，这些状态的负载构成

表1：主要结果。 N 和 M 分别是图或竞技场的顶点数和边数。

问题	结果	位置
可行词	安全语言；在有理速率下为 ω-正则，而在当 $B \geq 1$ 时的无理数速率下	定理 3.3
见证路径	所有实数速率下，简单套索都足够	定理 5.1
一个套索	$\Theta(N^{2/3})$ 个部分（最坏情况）	定理 5.4
整体边界	$O(N^2)$ 个部分， $\mathcal{F}_N$ 中的断点，跳跃的刻画	定理 6.1，
	末端部分 $R(1-\rho)$	命题 6.3、6.4
形状	既非凸也非凹的连续示例；$(N-2)/3$ 跳跃	命题 6.5、6.7
固定突发	斜率位于.....的连续临界速率 $\{0\} \cup \{-1/\ell\}$	定理 6.8
计算	$O((N+M)N^4)$ 运算， $O(N+M)$ 工作空间	定理 7.5
判别时间	有理参数下的精确值；增长 $1/(\mu-\rho)$	命题 8.1， 定理 8.2
安全博弈	相同的 Farey 结构；每个区间	定理 9.3、9.4
B¨uchi 接受条件	右连续性不成立	命题 9.5

一个从 0 开始的区间。因此，每个顶点只需一个整数即可表示这个不动点；在容量递减的过程中维护这些整数，就能通过一次遍历找到最小可行容量。

第 2 节回顾相关工作。第 3 节定义可行词的安全语言和突发边界，并确定该语言何时为 ω-正则；第 4 节则从判别问题推导出该语言。第 5 节证明套索归约以及单个套索的紧确分段数界。第 6 节研究图的边界和临界速率函数，第 7 节给出算法。第 8 节计算判别时域，第 9 节讨论安全博弈，第 10 节作出总结。

2. Related work

不可靠观测下的故障诊断。 离散事件系统的可诊断性由 Sampath 等人 [SSL+95]形式化提出，Cassandras 和 Lafortune 则在教科书 [CL21]中对此作了介绍。有些研究放宽了每个可观测事件都会到达诊断器这一假设。Athanasopoulou 等人 [ALH10] 在传感器以已知概率插入、删除或调换符号时，计算最可能的故障模式。Carvalho 等人 [CBM12] 通过语言膨胀对间歇性观测丢失进行建模，Oliveira 等人 [dCM20, dCM22]则对连续丢失的数量给出界。Lin [Lin14] 和 Nunes 等人 [NMA+18] 研究网络化监督控制和协同诊断中的通信延迟与丢失。Dong 等人 [DYL24] 用线性时序逻辑描述不可靠传感器，并采用了与命题 4.3 类似的紧致性论证。Lin 等人 [LLW24] 和 Li 等人 [LHWL25] 分析了存在删除、插入和替换的传感器攻击下的故障诊断。这些研究针对给定的丢失模型判定可诊断性。在我们的模型中，擦除符号保留

观测时钟，擦除数量可以无界，并且我们计算出所有能够使各模式在有限时间内得以区分的速率–突发对。

网络演算。窗口约束 (1.1) 是网络演算中的仿射到达曲线，用于描述由漏桶调节的流量 [Cru91, LBT01, BT08]。Zippo 等人 [ZNS23] 以本文采用的离散时间形式表述了该曲线，并给出了针对最终伪周期函数的算法。在网络演算中，速率和突发量描述给定的流。本文则在图的无限路径上优化二者，并在第 9 节中针对对手的行动进行优化。

能量问题。Chakrabarti 等人 [CdAHS03],和 Brim 等人 [BCD+11] 引入了能量问题，并通过不动点迭代计算最小初始信用值。Bouyer 等人 [BFL+08] 在多项式时间内判定整数权重下是否存在满足弱上界的无限运行，并证明在一维情形中，无记忆策略已足够。H´elou¨et 等人 [HMR22] 研究了具有宽松能量约束的可达性博弈，并证明：若某个弱上界允许存在无限运行，则不超过N 倍最大绝对权重的上界也允许存在。Juhl 等人 [JLR13] 将上界或某些转移的权重视为参数，并根据其极小元素构造可容许值集合。Dziadek 等人 [DFS25] 求解具有 B¨uchi 和奇偶接受条件的能量问题。法里数列和重新赋权也出现在均值收益算法中 [CR17]。所有这些方法每次只处理一个速率。本文的参数是速率，它会从每条边的权重中减去；我们将最小突发量描述为实数速率的函数。

参数优化。当每条边的边长在 $\{0,-1\}$ 中都含有参数系数时，最短路径距离作为参数的函数具有多项式数量的分段[KO81, YTO91]；超多项式下界则针对不受限制的仿射系数[Car83, MS01]。最短路径值在有限处为凹函数。对于单个套索，我们的分段数界利用了 Jarn´ık [Jar26] 对凸曲线的格点计数。

定量语言与参数综合。定量语言为每个无限词赋予一个值；Chatterjee 等人 [CDH10] 比较了加权自动机计算出的上确界、极限平均值和折扣值。对于固定速率，一个词的最小突发量 $\sup_{s<u}(\sum_{t=s+1}^{u} z_t - \rho(u-s))$ 就是这样一种值，而 $B_*(\rho)$ 是长度为 G 的代价词的最小值。这个值是对所有窗口而非前缀取上确界，并且取决于一个实参数。参数综合旨在求出系统满足某项性质时所有参数值；对于参数化时间自动机，仅空性问题就已不可判定 [AHV93]。在我们的设定中，参数线性地进入单计数器安全条件，可行对 $(\rho,\ B)$ 构成一个具有 Farey 分点的分段仿射函数的上图集，而该函数不一定是凸的。机械词 [Lot02] 在给定频率下使 1 的分布最为均匀。在无理速率下，它们属于 $W(\rho,\ 1)$，这正是定理 3.3 中非正则性的来源。

窗口目标。窗口目标限制累积收益必须恢复的时间。Chatterjee 等人 [CDRR15] 为博弈引入了窗口平均收益目标，而 Ji 等人 [JYL22]则为局部平均收益条件综合设计监督器。Benedikt 等人 [BPR14] 计算了修复正则语言的渐近逐字符成本，并将流式修复与平均收益博弈联系起来。我们的约束没有必须闭合的窗口：

不等式 (1.1) 必须对每个窗口成立，无论其长度和位置如何。命题 9.5 展示了 B¨uchi 要求如何改变所得边界。

3. Rate–burst safety languages and the burst boundary

我们首先陈述对词的约束，然后再陈述对路径的约束。对于 $\{0,1\}$上的有限词或无限词$z = z_1 z_2 \cdots$，窗口是一个因子 $z_{s+1} \cdots z_u$，其满足 $s < u$，并且其在速率 ρ下的超额 为 $\sum_{t=s+1}^{u} z_t - \rho(u-s)$。如果每个窗口的超额都至多为 B，则称该词是(ρ, B)-可行的；也就是说，如果它满足将 c替换为 z_t 后的（1.1）式，即满足e_t。令

$$W(\rho, B) = \{z \in \{0,1\}^{\omega} : z \text{ is } (\rho, B)\text{-feasible}\}. \tag{3.1}$$

无限词的每个窗口都包含在某个有限前缀中，因此，当且仅当其所有有限前缀都是可行的时，无限词才属于 $W(\rho, B)$。在 $\{0,1\}^{\omega}$上的 Cantor 拓扑中，这意味着 $W(\rho, B)$是闭集，也就是说，它是一个安全性质 [PP04]。

固定第 1 节中的 $G = (V,\ E,\ S,\ c)$，其中 $N = |V| \geq 1$、 $M = |E|$和 $S \neq \varnothing$。我们假设每个顶点都可从 S 到达，并允许存在平行边。除非另行指定起始顶点，否则路径从 S开始。对于有限路径 P，令 $|P|$为其边数，cost(P) 为其总代价。路径 $e_1 e_2 \cdots$的代价词为 $c(e_1)c(e_2)\cdots$，若路径的代价词可行，则称该路径可行。令 $L(G) \subseteq \{0,1\}^{\omega}$ 为无限路径的代价词集合。

沿着一个词或一条路径的代价词，反射负载为

$$x_0 = 0, \qquad x_t = \max\{0, x_{t-1} + c(e_t) - \rho\}. \tag{3.2}$$

对 t 进行归纳可得

$$x_t = \max_{0 \leq s \leq t} \Big(\sum_{j=s+1}^{t} c(e_j) - \rho(t-s) \Big), \tag{3.3}$$

其中， $s = t$ 处的空和为零。因此， x_t 是以时刻 t 结束的窗口的最大超额；若这些超额均为负，则为 0。当且仅当对所有 t， $x_t \leq B$ 成立时，路径才可行。在网络演算中， x_t 是以速率 ρ提供服务的虚拟队列的积压量。能量$E_t = B - x_t$ 按下式演变：

$$E_0 = B, \qquad E_t = T_{e_t}(E_{t-1}), \qquad T_e(\eta) = \min\{B, \eta + \rho - c(e)\}, \tag{3.4}$$

并且必须保持非负。这是 [BFL^{+}08、HMR22、DFS25]中研究的带弱上界的能量模型：超过容量 B 的能量会被丢弃。

定义 3.1。 G 的突发边界是函数 B_*： $[0,1] \to [0,\infty]$，定义如下

$$B_*(\rho) = \inf\{B \geq 0 : L(G) \cap W(\rho, B) \neq \varnothing\}, \tag{3.5}$$

其下确界为 $\varnothing = \infty$。等价地， $B_*(\rho)$ 是满足存在一条（ρ， B）-可行无限路径的突发量 B 的下确界。

限制条件 $\rho \leq 1$ 不会损失任何内容：在 $\rho = 1$ 时，每条无限路径对于 $B = 0$都是可行的，因此只要存在一条无限路径， $B_*(\rho)$ 对 $\rho \geq 1$ 就是 0。

引理 3.2。 对于每个 $\rho \in [0,1]$ 和 $B \geq 0$， G 存在可行无限路径，当且仅当它对每个长度都有可行有限路径。

证明。 可行的有限路径构成一棵前缀封闭的有限分支树。如果其深度无界，根据克尼格引理，树中存在一条无限分支，而该分支的每个窗口都包含在某个可行前缀中。反过来，取前缀即可得证。

□

该论证既不使用 ρ 的有理性，也不使用 B的整性。

3.1. 当可行词构成一个 ω-正则语言时。 在 $\{0,1\}$ 上的确定性安全自动机是一个三元组 $D=(Q,q_0,\delta)$，由一个有限状态集合 Q、一个初始状态 q_0 和一个部分转移函数 $\delta\colon Q\times\{0,1\}\to Q$ 构成。如果某个无限词从 q_0 出发的运行在每一步都有定义，则该自动机接受这个无限词。此类自动机接受的每种语言都是ω-正则的，并且在 [PP04] 下封闭。下一个定理表明，在每个有理速率下，$W(\rho,B)$ 都具有这种形式；而在存在 $B\geq 1$ 的无理速率下，它甚至不是 ω-正则的。

定理 3.3。 令 $B\geq 0$。
(1) 若 $\rho=p/q$ 满足 $0\leq p\leq q$ 且 $\gcd(p,q)=1$，令 $K=\lfloor qB\rfloor$。则 $W(\rho,B)$ 被具有状态集 $\{0,\dots,K\}$、初始状态为0、转移如下的确定性安全自动机 $D_{p,\,q,\,K}$ 接受

$$\delta(j,a)=\max\{0,\,j+qa-p\}\qquad \textit{whenever this value is at most } K. \tag{3.6}$$

(2) 若 $\rho\in(0,\,1)$ 是无理数且 $B\geq 1$，则 $W(\rho,B)$ 不是 ω-正则的。

证明。 对于 (1)，将 (3.6) 与 (3.2) 比较：读入 t 个字母后，只要此前所有状态都不超过 K，自动机就处于状态qx_t。缩放负载 qx_t 是一个整数，因此当且仅当 $qx_t\leq K$时，$x_t\leq B$成立。因此，当且仅当对所有 t都有 $x_t\leq B$ 时，运行才会永久定义，也就是说，此时该词是可行的。

对于（2），考虑机械字 $m_t=\lfloor t\rho\rfloor-\lfloor(t-1)\rho\rfloor$, $t\geq 1$。由于 $0<\rho<1$，其字母为 0 或 1，且每个窗口都满足

$$\sum_{t=s+1}^{u} m_t=\lfloor u\rho\rfloor-\lfloor s\rho\rfloor<\rho(u-s)+1, \tag{3.7}$$

因此 $m\in W(\rho,\;B)$。假设 $W(\rho,\;B)$ 是 ω-正则的。那么，其有限前缀集合 P 是一个正则语言 [PP04]。取一个关于 P 的确定性有限自动机，仅保留由 P 中的词到达的状态，并删除离开该集合的转移。在所得的确定性安全自动机 D 中，每个状态都有一个后继，因为 P 中的每个词都可以通过添加一个字母扩展为 P 中的词。自动机 D 在无限词上的运行当且仅当所有前缀都属于 P 时才会永远定义，因此 D 接受闭集 $W(\rho,\;B)$。

将 D 视为一张边带有字母作为代价的图，令 n 为其状态数，并令 m^* 为 D 的简单环的最大均值代价。D 在 m 的前 T 个字母上的运行可分解为一条至多含有 $n-1$ 条边的简单路径和若干简单环，因此

$$\rho T-1<\lfloor\rho T\rfloor=\sum_{t=1}^{T} m_t\leq n-1+m^*T\qquad(T\geq 1). \tag{3.8}$$

令 $T\to\infty$，得到 $m^*\geq\rho$。环的均值代价是有理数，而 ρ 不是，因此 $m^*>\rho$。设 β 是 D 的一个简单环，其均值代价为 m^*；再设 α 是一条从 q_0 到 β 中某个状态的路径。沿着 $\alpha\beta^{\omega}$ 读出的词被 D 接受。由 β 的标签的 k 个副本组成的窗口，其超额为 $k|\beta|(m^*-\rho)$；当 k 足够大时，该超额超过 B。这与 D 只接受可行词相矛盾。 □

定理 3.3 揭示了两个事实，而它们在 ω 正则规范中恰好相同。若 $M\subseteq\{0,1\}^{\omega}$ 是 ω 正则的，则当且仅当 $L(G)\cap M$ 包含一个最终周期词时，它才非空；空性检查还会生成这样一个词。在有理速率下，这适用于 $M=W(p/q,\;B)$，而 G 与 $D_{p,\;q,\;K}$ 的积就是第 7 节中使用的负载图。在无理速率下

上述论证不再适用，而定理 5.1 表明简单套索仍然足够。第 (2) 部分中的界 $B \geq 1$ 不能直接省略：若 $B < 1-\rho$，则任何窗口都不可能包含 1，并且 $W(\rho,\ B) = \{0^\omega\}$。自动机 $D_{p,\ q,\ K}$ 有 $\lfloor qB \rfloor + 1$ 个状态，其数量随分母 q 增大；第 7 节仅在分母至多为 $2N$ 的速率下评估 B_*。

4. Mode discrimination under a clocked erasure channel

本节将根据第 1 节所述的判别问题推导突发边界。令 Σ 为有限输出字母表。模式 $i \in \{0,1\}$ 是一个有限标记迁移系统

$$A_i = (Q_i, I_i, \Delta_i), \qquad \Delta_i \subseteq Q_i \times \Sigma \times Q_i, \qquad I_i \neq \varnothing. \tag{4.1}$$

从 I_i 出发、长度为 n 的运行会输出一个词 $a_1 \cdots a_n \in \Sigma^n$。允许存在非确定性迁移和多个初始状态。每次转移对应一个观测时刻，并且模式在观测开始时即被固定。

长度为 n 的擦除掩码是一个词 $z_1 \cdots z_n \in \{0,1\}^n$，而时刻 t 接收到的符号为

$$y_t = \begin{cases} a_t, & z_t = 0, \\ \perp, & z_t = 1, \end{cases} \qquad \perp \notin \Sigma. \tag{4.2}$$

因此，接收端可以看到哪些位置被擦除。相比之下，删除符号的信道会隐藏丢失的位置。如果掩码按照第 3 节的定义是一个 (ρ, B)-可行词，则称其为 (ρ, B)-可容许掩码，因此无限可容许掩码构成语言 $W(\rho, B)$。例如，连续 k 个擦除需要 $k(1-\rho) \leq B$。每个可容许的有限掩码都可以通过追加 0 扩展为可容许的无限掩码。

令 $\mathcal{O}_i^n(\rho,\ B)$ 表示在可容许掩码下由长度为 n 的 A_i 的运行所得到的接收词集合。如果一个接收词同时属于这两个集合，则称其存在歧义。

定义 4.1。判别时域为

$$H(\rho, B) = \min\{n \geq 1 : \mathcal{O}_0^n(\rho, B) \cap \mathcal{O}_1^n(\rho, B) = \varnothing\}, \tag{4.3}$$

当该集合为空时，$H(\rho,\ B) = \infty$。如果 $H(\rho,\ B) < \infty$，则模式在 $(\rho,\ B)$ 下是一致可区分的。

两个接收词集合在不同长度下都是前缀封闭的，因此，一旦歧义消失，就不会在更晚的长度处重新出现。因此，有限的 H 是一种一致保证：经过 H 次观测后，无论运行情况和可容许掩码如何，监控器都能确定模式。

A_0 和 A_1 的比较图将两个自动机并排运行。其顶点集是从 $S = I_0 \times I_1$ 可达的 $Q_0 \times Q_1$ 部分，并且每一对转移 $(q_0,\ a,\ q_0') \in \Delta_0$ 和 $(q_1,\ b,\ q_1') \in \Delta_1$ 都给出一条边 $(q_0,\ q_1) \to (q_0',\ q_1')$，其代价为

$$c(e) = \mathbf{1}_{\{a \neq b\}} \in \{0,1\}. \tag{4.4}$$

端点和代价相同的边会合并，这样可以保留路径的所有代价序列，因此比较图有 $M \leq 2N^2$ 条边。

引理 4.2. 这些模式存在长度为 n 的歧义接收词，当且仅当比较图存在长度为 n的可行路径。

证明。 假设在可容许掩码 z 和 z'下，两次运行产生了相同的接收词。由于 $\perp \notin \Sigma$，擦除位置是可见的，因此 $z = z'$，而且该掩码会擦除两个输出不同的每个位置。因此，比较图中对应路径的代价序列逐项不超过一个可容许掩码。降低各项不会违反式 (1.1) 中的任何上界，因此这条路径是可行的。反过来，恰好擦除可行路径上两个输出不同的位置，所得掩码是可容许的，并且在该掩码下，两次运行会产生相同的接收词。

□

命题 4.3。 设 $L(\rho, B) \in \{0, 1, \ldots\} \cup \{\infty\}$ 为比较图中可行路径长度的上确界。则

$$H(\rho, B) = L(\rho, B) + 1, \tag{4.5}$$

其中 $\infty + 1 = \infty$。特别地，$H(\rho, B) < \infty$ 当且仅当 $B < B_*(\rho)$。

证明。 等式 (4.5) 由引理 4.2 和前缀闭包得出。根据引理 3.2，$L = \infty$当且仅当存在可行无限路径；根据下文的推论 5.3，这又当且仅当 $B \geq B_*(\rho)$。

□

每个具有 0/1 边权的图都可以作为比较图。令 A_0 具有一个带自环的状态，该自环发出 0；令 A_1 为图自身，其边 e 发出 $c(e)$。这样得到的比较图就是原图。因此，下面的所有示例和下界对判别同样成立。

窗口约束必须在每个位置都成立，而不仅仅是对前缀成立。下面的例子说明了原因。考虑两个输出序列，它们前 t 步相同，之后每一步都不同，例如 a^ω 和 $a^t b^\omega$，并固定 $0 < \rho < 1$。假设信道只受前缀约束，

$$\sum_{j=1}^{n} z_j \leq \rho n + B \qquad (n \geq 1). \tag{4.6}$$

对于任意块长度 m，取满足 $\rho t + B \geq (1 - \rho)m$ 的 t。保留前 t 个输出并擦除接下来的 m 个输出，满足所有前缀约束，因此监控器在首次出现差异后会等待 m 步，而 m 无界。在 (1.1) 中，擦除块本身要求 $m(1 - \rho) \leq B$，无论此前一致的长度是多少。因此，窗口形式对首次出现差异后的延迟设定了上界。

5. 化简为简单套索

简单套索是一条无限路径 $\lambda = \alpha\beta^\omega$，其中 α 是从 S 出发的简单路径，β 是非空简单环，并且 α 与 β 仅共享 β 起始处的顶点。于是 $|\alpha| + |\beta| \leq N$。令 $\mathcal{L}$ 为简单套索的有限集合。其大小可能关于 N 呈指数增长。

定理 5.1。 对于每个 $\rho \in [0, 1]$ 和 $B \geq 0$，G 存在一条（ρ、B）-可行无限路径，当且仅当它存在一个（ρ、B）-可行简单套索。

证明。 简单套索是一条无限路径，因此只需证明正向结论。对于顶点 v，令 $W_v \subseteq [0, B]$ 为一组初始能量：从这些能量出发，存在一条从 v 开始的无限路径，使能量 (3.4) 始终非负。每个 T_e 都单调不减，因此 W_v 是上闭集。对于每个 h，存在一条从 v 开始、长度为 h 的路径且使能量始终非负的初始能量集合是闭集，因为它是有限个闭集的并，且每个 T_e 都是

连续的。根据 K¨onig 引理， W_v 是所有 h对应的这些闭集的交。因此，每个非空的 W_v 都是一个区间 $[\tau_v, B]$。

对于每个带有 $W_v \neq \varnothing$ 的顶点 v，固定一条从带有能量 τ_v 的 v 出发的无限路径的首条边 $e = (v, u)$，使得 $T_e(\tau_v) \geq \tau_u$。由于 T_e 非递减，从任意带有至少 τ_v 能量的顶点 v 沿固定边前进，能量都会保持至少达到当前顶点的阈值。设给定可行路径的首个顶点为 s。则 $B \in W_s$，因此从带有能量 B 的 s 出发并沿固定边前进是可行的。所得路径是可行路径，并且其下一条边只取决于当前顶点。因此，它是一个简单前缀后接一个重复的简单环，即一个简单套索。 □

这是 Bouyer 等人 [BFL+08] 针对带有弱上界的能量约束所提出的无记忆策略论证。我们将其纳入此处，是因为他们假设权重为整数，而这里的速率和突发量都是实数。根据定理 3.3， ω-正则语言的最终周期见证也无法覆盖无理数速率。第 9 节将该论证扩展到了博弈。

现在我们计算单个简单套索的最小突发量。对于 $\lambda = \alpha\beta^\omega$，令 $\mu_\lambda = \text{cost}(\beta)/|\beta|$ 表示其环平均值，并令 $\mathcal{I}_\lambda$ 表示满足以下条件的有序对 (k, ℓ) 的集合： $\alpha\beta\beta$ 的某个长度为 ℓ、至多包含 $N-1$ 条边且代价为 k 的非空窗口。因此

$$0 \leq k \leq \ell \leq N-1 \qquad \text{for all } (k,\ell) \in \mathcal{I}_\lambda. \tag{5.1}$$

如果一个环或套索的平均成本至多为 ρ，则它在 ρ 处是可用的。

引理 5.2。令突发要求 $\text{cap}_\lambda(\rho)$ 为使 λ 成为(ρ, B)-可行的最小 B。则对于 $\rho < \mu_\lambda$，有 $\text{cap}_\lambda(\rho) = \infty$；对于 $\rho \geq \mu_\lambda$，

$$\text{cap}_\lambda(\rho) = \max\big(\{0\} \cup \{k - \ell\rho : (k,\ell) \in \mathcal{I}_\lambda\}\big). \tag{5.2}$$

证明。如果 $\rho < \mu_\lambda$，则 β 的每个副本都具有正超额，因此包含大量副本的窗口会超过任意有限界。令 $\rho \geq \mu_\lambda$，并取 λ 的一个窗口，使其在 β^ω 中的部分至少包含$|\beta|$ 条边。其最后 $|\beta|$ 条边构成 β的一次循环移位，该移位的超额 $|\beta|(\mu_\lambda - \rho)$ 非正，因此删除这些边后会留下一个超额至少相同的更短窗口。重复此步骤，可将一个起始于 β^ω 的窗口变为 $\beta\beta$ 的一个可能为空且边数少于 $|\beta|$的窗口，并将一个起始于 α 的窗口变为 $\alpha\beta$ 的一个至多包含 $|\alpha| + |\beta| - 1 \leq N-1$条边的窗口。二者都是 $\alpha\beta\beta$的窗口，因此每个超额都至多为 (5.2) 右端的值。 $\alpha\beta\beta$ 的每个窗口都是 λ的窗口，因此该界可以达到。 □

推论 5.3。对于每个 $\rho \in [0,1]$，

$$B_*(\rho) = \min_{\lambda \in \mathcal{L}} \text{cap}_\lambda(\rho), \tag{5.3}$$

满足 最小值$\varnothing = \infty$。当且仅当 $B \geq B_*(\rho)$ 时，存在可行无限路径。

证明。根据引理 5.2，当 $\text{cap}_\lambda(\rho) < \infty$时，每个 λ 都是 $(\rho, \text{cap}_\lambda(\rho))$-可行的。根据定理 5.1，(3.5) 中的下确界是有限多个值 $\text{cap}_\lambda(\rho)$ 中的最小值，而且每个有限值都能取到。 □

5.1. 一个套索的精确复杂度。 一个套索的有限要求是 ρ 的凸函数，其直线的系数点 $(\ell,\ k)$ 位于边长为 $N-1$ 的三角形内。只有支撑最大值的点会产生分段，而这些点构成一条凸格链。按照 Jarník 的做法 [Jar26] 统计这类链，可得 $O(N^{2/3})$ 个分段，而非法里网格所允许的 $O(N^2)$ 个。为证明下界，我们将一个凹格多边形转化为二进制词，其窗口的界可以明确给出。

定理 5.4。 一个 N 个顶点图中的单个简单套索，其突发要求的有限部分至多有 $O(N^{2/3})$ 个最大仿射段。确定性图可以达到这一阶：对于每个充分大的 N，都存在一条以代价为 0 的自环结尾、含有 N 个顶点的有向路径，其突发边界有 $\Omega(N^{2/3})$ 个仿射段。

证明。 对于上界，引理 5.2 将有限要求表示为若干条具有整数系数的直线 $k-\ell\rho$ 的最大值 $0\le k\le \ell\le N-1$。设 r 为其有限定义域上的最大仿射段数。按 ℓ 递增的顺序排列其系数点 (ℓ,k)。相邻点之差的第一坐标为正，且其斜率是互不相同的数，均属于 $[0,1],$，因为这些斜率就是要求的断点。将每个差写成一个本原向量 (a,b) 的正整数倍，其中 $1\le a$ 且 $0\le b\le a$。这些本原向量互不相同，其第一坐标之和至多为 $N-1$。对于每个整数 $H\ge 1$，至多有 $H(H+3)/2$ 个这样的向量满足 $a\le H$，且至多有 $(N-1)/(H+1)$ 个满足 $a>H$。因此，

$$r\le 1+\frac{H(H+3)}{2}+\frac{N-1}{H+1}. \tag{5.4}$$

取 $H=\max\{1,\lfloor N^{1/3}\rfloor\}$ 即可证明上界。

对于下界，固定一个整数 $m\ge 1$，并取所有互质数对 $(u,v)\in\{1,\dots,m\}^2$。它们的数量 r_m 满足

$$r_m\ge m^2-\sum_{d=2}^{m}\lfloor m/d\rfloor^2\ge \frac{m^2}{4}, \tag{5.5}$$

因为 $\sum_{d=2}^{\infty} d^{-2}\le 1/4+\int_2^\infty x^{-2}\,dx=3/4$。将每一对替换为向量 $(a,b)=(3u+2v,u+v)$。行分别为 $(3,2)$ 和 $(1,1)$ 的矩阵的行列式为 1，因此该向量是本原的，且不同的数对给出不同的斜率。其斜率 $(u+v)/(3u+2v)$ 严格位于 $1/3$ 和 $1/2$ 之间，因为 $u,v\ge 1$。按斜率递减排列这些向量，并将它们首尾相接，形成凹折线函数 f 的边：$[0,L]\to\mathbb{R}$ with $f(0)=0$。其顶点 (x_i,y_i)、$0\le i\le r_m$ 具有整数坐标，并且

$$L=\sum a\le 5mr_m\le 5m^3. \tag{5.6}$$

定义二进制词 $w=w_1\cdots w_L$，其定义为 $w_j=\lfloor f(j)\rfloor-\lfloor f(j-1)\rfloor$。由于 f 的每个斜率都属于 $(1/3,1/2)$，因此每个字母都是 0 或 1。考虑这样一个确定性图：它的唯一无限路径具有代价词 $11w0^{\omega}$；该图使用 $L+3$ 个顶点。

对于 $0\le\rho\le 1/2$，令

$$T(\rho)=\max_{0\le j\le L}\{\lfloor f(j)\rfloor-\rho j\}=\max_{0\le i\le r_m}\{y_i-\rho x_i\}. \tag{5.7}$$

等式成立，是因为这些整点（$j,\ \lfloor f(j)\rfloor$）位于多边形上或其下方，且多边形的每个顶点都出现在这些点中。凹性和 $f(0)=0$给出 $f(j)-f(i)\le f(j-i)$

对于 $0 \le i < j \le L$，因此每个窗口 $w_{i+1} \cdots w_j$ 都满足

$$\sum_{t=i+1}^{j} w_t = \lfloor f(j) \rfloor - \lfloor f(i) \rfloor \le \lfloor f(j-i) \rfloor + 1. \tag{5.8}$$

因此，其超额至多为 $\lfloor f(j-i) \rfloor - \rho(j-i) + 1 \le T(\rho) + 1$。包含最初两条代价为 1 的边的前缀，其最大超额为 $2(1-\rho) + T(\rho)$，在此速率区间上至少为 $T(\rho) + 1$。任何与初始连续的 1 块相交的窗口，都可以向前延伸至起点而不降低其超额；删除末尾的 0 也绝不会降低超额。因此，该图的边界为

$$B_*(\rho) = 2(1-\rho) + T(\rho) \qquad (0 \le \rho \le 1/2). \tag{5.9}$$

多边形的 r_m 个不同斜率产生了 $(1/3,\ 1/2)$ 中 T 的 r_m 个不同断点，因此 B_* 至少有 $r_m + 1$ 个仿射段。对于任意充分大的 N，选取$m = \lfloor ((N-3)/5)^{1/3} \rfloor$，并在自环之前添加代价为 0 的边，直到图恰好有 N 个顶点。这些边不会改变突发要求，而 (5.5) 给出 $\Omega(N^{2/3})$ 个片段。 □

6. The Farey structure of the burst boundary

根据引理 5.2，每个有限突发要求都是以下族中直线的最大值

$$\mathcal{A}_N = \{k - \ell\rho : 0 \le k \le \ell \le N-1\}, \tag{6.1}$$

该族包含零直线 $k = \ell = 0$。$\mathcal{A}_N$ 中的两条不平行直线在 $\rho = (k-k')/(\ell-\ell')$处相交，该点是分母至多为 $N-1$ 的分数；并且每个环平均值的分母至多为 N。$[0,1]$中的所有这些速率都属于阶数为 N 的法里数列，

$$\mathcal{F}_N = \{a/b : 0 \le a \le b \le N,\ \gcd(a,b) = 1\}, \tag{6.2}$$

其中有 $O(N^2)$ 个元素。我们将 $\mathcal{F}_N$中相邻元素之间的开区间称为法里区间。

定理 6.1。 突发边界具有以下性质。
(1) 它在 $[0,1)$上单调不增且右连续，取值属于 $[0,\infty]$。(2) 在每个法里区间上，它要么恒为无穷大，要么等于 $\mathcal{A}_N$的一条直线 $k - \ell\rho$。(3) 它由 $O(N^2)$ 个仿射段组成，并且向下跳跃只能发生在简单套索的环平均值处。(4) 每个有限值都满足

$$B_*(\rho) \le (N-1)(1-\rho). \tag{6.3}$$

证明。 </style}增大 ρ 会放宽 (1.1)，因此 B_* 是非增的。每个上界函数λ 在 μ_λ 以下为无穷大，并在 $[\mu_\lambda, 1]$上连续，因此在 $[0,\infty]$上右连续；有限个此类函数的最小值 (5.3) 也如此。

对于 (2)，没有环平均值落在法里区间内，因此该区间内任意速率对应的有限要求套索集合都相同。$\mathcal{A}_N$ 的任意两条直线都不会在区间内相交，因此每个有限上界函数λ 在该区间内都等于 $\mathcal{A}_N$ 的一条直线，其最小值也如此。

对于 (3)，$\mathcal{F}_N$包含 $O(N^2)$ 个元素，因此 (2) 给出 $O(N^2)$ 个部分。在一个并非环平均值的速率附近，具有有限要求的套索集合保持不变，因此 B_* 在该处是连续函数的最小值，不会发生跳跃。

对于 (4)，(5.2) 中的每条直线都满足 $k - \ell\rho \le \ell(1-\rho) \le (N-1)(1-\rho)$，因为 $k \le \ell \le N-1$。 □

图中可能有指数多个简单套索，但它们的逐点最小值仅有 $O(N^2)$ 个部分。根据定理 5.4，每个单独的套索有 $O(N^{2/3})$ 个部分；在套索之间进行选择会增加部分数量，并可能产生不连续点。下一个推论确定了边界变为有限值的速率。

推论 6.2. 假设 G 有一个环，并令

$$\mu = \min_{\beta} \frac{\operatorname{cost}(\beta)}{|\beta|} \tag{6.4}$$

在简单环 β上取值。则 $B_*(\rho) < \infty$ 当且仅当 $\rho \ge \mu$。如果 G 没有环，则 B_* 恒等于无穷大。

证明。</style>在 ρ 处要求有限的套索，其环平均值至多为 ρ。反过来，从 S 到一个达到 μ 的环的简单路径，在该环上的首个顶点处停止，便构成一个简单套索，其在每个 $\rho \ge \mu$处的要求都有限。无环图没有无限路径。 □

Karp 算法可在 $O(NM)$ 时间 [Kar78] 内计算 μ。根据 (6.3)，当且仅当 $\rho \ge \mu$ 时，突发量 $B \ge (N-1)(1-\rho)$ 存在一条可行无限路径；更小的突发量则要求值为$B_*(\rho)$。

6.1. 跳跃与末端部分。

命题 6.3. 对于每个 $\rho_0 \in (0, 1]$,

$$B_*(\rho_0^-) = \min_{\lambda:\, \mu_\lambda < \rho_0} \operatorname{cap}_\lambda(\rho_0), \tag{6.5}$$

其中，空集的最小值为 ∞。若 $B_*(\rho_0) < \infty$，则会发生向下跳跃，即$B_*(\rho_0^-) > B_*(\rho_0)$，当且仅当在 ρ_0 处的每个最优套索的环平均值均为 ρ_0。在既约有理数 $\rho_0 = a/b$处，两个有限值之间的每个跳跃的高度都是 $1/b$的正整数倍。

证明。 图中只有有限多个简单套索。在足够接近 ρ_0 且位于其左侧时，只有那些满足 $\mu_\lambda < \rho_0$ 的套索才有有限要求，并且每个这样的要求都连续延伸至 ρ_0。取它们的最小值即可证明 (6.5)。因此， $B_*(\rho_0^-) = B_*(\rho_0)$ 当且仅当某个满足 $\mu_\lambda < \rho_0$ 的套索在 ρ_0处为最优。每个在 ρ_0 处具有有限要求的套索都满足 $\mu_\lambda \le \rho_0$，所以当且仅当每个最优套索都满足 $\mu_\lambda = \rho_0$时，才会发生跳跃。最后，(5.2) 在a/b 处取值时，只要有限，就是 $1/b$ 的整数倍；两个最小值也同样如此。 □

比值 $B_*(\rho)/(1-\rho)$ 表示以单个擦除步骤为单位衡量的突发量，因为由 k 条连续的代价为 1 的边组成的块恰好需要 $k(1-\rho)$。下一个结果将证明该比值具有单调性，并确定其最终值。

命题 6.4。对于 $0 \le \rho < \sigma < 1$ 满足 $B_*(\rho) < \infty$,

$$\frac{B_*(\sigma)}{1-\sigma} \le \frac{B_*(\rho)}{1-\rho}. \tag{6.6}$$

假设存在一条无限路径。将无限路径的全为1 窗口的长度上确界称为其最长连续段；如果该路径没有代价1边，则其值为0 ，并令 R 为无限路径的最小最长连续段。如果 $R<\infty$，那么 $R\le N-1$，并且

$$B_*(\rho)\ge R(1-\rho) \qquad (0\le\rho\le 1), \tag{6.7}$$

$$B_*(\rho)=R(1-\rho) \qquad \Big(\frac{R}{R+1}\le\rho\le 1\Big). \tag{6.8}$$

阈值 $R/(R+1)$ 是尖锐的。一旦边界与直线 $R(1-\rho)$ 相交，它就会在所有更大的速率下沿着该直线延伸。

证明。 一个包含 k 个 1 和 z 个 0 的窗口，其归一化超额为 $k-z\rho/(1-\rho)$，并且关于 ρ 非递增。将此应用于速率为 ρ 的最优套索，即可证明 (6.6)。令 $R<\infty$。在一条运行有界的路径上，某条代价为 0 的边会无限次出现，因此它位于某个环上；而穿过包含该边的简单环的简单套索，其运行长度至多为 $N-1$；因此$R\le N-1$。整数最小值 R 可以取到，并且每条无限路径都包含一个长度为 R 的全为 1 的窗口，这就得到 (6.7)。在最长连续段为 R 的路径上，每个包含 k 个 1 和 z 个 0 的窗口都满足 $k\le R(z+1)$，因此

$$k-\rho(k+z)\le R(1-\rho)+z\big(R-(R+1)\rho\big). \tag{6.9}$$

对于 $\rho\ge R/(R+1)$，最后一项非正，这就证明了 (6.8)。对于唯一的环的代价词为 1^R0 的图，在 $R/(R+1)$ 以下边界为无穷大，因此该阈值是紧的。根据 (6.6) 和 (6.7)，等式的持续性得以成立。

□

两个极端情形很简单。若 $R=0$，则存在一条全零无限路径，并且 B_* 恒等于零。若存在一个环但 $R=\infty$，则每个环都由代价为 1 的边组成，因此 B_* 在 $[0,1)$ 上为无穷大，并且 $B_*(1)=0$。

6.2. **边界的形状**。 跳跃并不是非凸性的唯一来源。下面的构造给出了一个没有跳跃的边界。

命题 6.5。 一个七顶点图具有一个在 $[0,1]$ 上有限且连续的边界，并且该边界既非凸也非凹。

证明。 取从初始顶点 h 到顶点 z 的两条内部不相交路径，其代价词分别为 11 和 10101，并在 z 处设置一个代价为 0 的自环。第一条路径要求 $2-2\rho$。第二条路径的一个正超额窗口可以修剪为以 1 开始和结束，因此其要求为 $\max\{1-\rho,2-3\rho,3-5\rho\}=\max\{1-\rho,3-5\rho\}$，因为 $2-3\rho$ 是另外两条直线的平均值。取最小值得

$$B_*(\rho)=\begin{cases}2-2\rho, & 0\le\rho\le 1/3,\\ 3-5\rho, & 1/3\le\rho\le 1/2,\\ 1-\rho, & 1/2\le\rho\le 1.\end{cases} \tag{6.10}$$

斜率 -2，-5，-1 证明了关于曲率的两个断言；图 2 绘出了边界。

□

接下来的两个构造表明，界 (6.3) 和 Farey阶 N 无法改进，而且跳跃的数量可以随 N 线性增长。

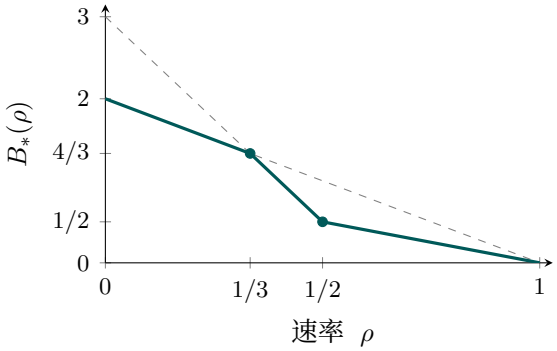

图 2：代价词 110^ω 和 101010^ω对应的两条路径的边界。虚线表示两个单独的要求；它们的最小值是连续的，斜率为–2、 −5、 −1。

命题 6.6. 对于每个 $N \geq 1$，都存在一个具有 N 个顶点的图满足 $B_*(\rho) = (N-1)(1-\rho)$，对所有 $\rho \in [0,1]$ 均成立；并且存在一个具有 N 个顶点的图，其断点的分母为 N。

证明。 从初始顶点到代价为 0 的自环的一条由 $N-1$ 条代价为 1 的边组成的链只有一条无限路径，其最大超额由该链本身达到。一条带有代价词 10^{N-1} 的有向 N-环的均值为 $1/N$，其中 B_* 从无限变为有限。 □

命题 6.7。 对于每个整数 $m \geq 1$，令 $\mu_a = a/(3a-1)$ 对 $1 \leq a \leq m$成立。某个具有 $N = 3m-1$ 个顶点的图具有突发边界

$$B_*(\rho) = \begin{cases} \infty, & 0 \leq \rho < \mu_m, \\ a(1-\rho), & \mu_a \leq \rho < \mu_{a-1} \quad (2 \leq a \leq m), \\ 1-\rho, & \mu_1 \leq \rho \leq 1. \end{cases} \tag{6.11}$$

因此， B_* 具有 $m = (N+1)/3$ 个有限段和 $m-1$ 次向下跳跃。

证明。 取顶点 h、 o_1……、 o_m、 y_1……、 y_{2m-2}，初始顶点为 h，记作 $y_0 = h$。代价为 1 的边是 $h \to o_1$ 和 $o_{a-1} \to o_a$，其中 $2 \leq a \leq m$。代价为 0 的边是 $o_a \to y_{2a-2}$ （对于$1 \leq a \leq m$）和 $y_d \to y_{d-1}$ （对于 $1 \leq d \leq 2m-2$）。图 1 展示了 $m = 2$ 的情形，图 3 展示了 $m = 3$ 的情形。每个环都经过 h，而简单环就是从 h 向上攀升至某个 o_a，再经由 y_{2a-2}……、 y_1 下降至 h 的路径。经过 o_a 的环的代价词为 $\beta_a = 1^a 0^{2a-1}$，长度为 $3a-1$，均值为 μ_a。由于 h 位于每个环上，简单套索就是路径 β_a^ω。

固定 a 和 $\rho \geq \mu_a$。根据引理 5.2 的证明，只需考虑边数少于 $3a-1$ 的 $\beta_a\beta_a$ 窗口。若这样的窗口同时包含两个 1 块，则其中包含它们之间的$2a-1$ 个 0，因此至多有 $a-1$ 个 1。因此，每个这样的窗口中的 1 的数量都是某个 $j \leq a$，所以其超额至多为 $j(1-\rho) \leq a(1-\rho)$，而块1^a 达到这个值。因此，对于 $\rho \geq \mu_a$，上界函数 $\mathrm{cap}^{\beta_a^\omega}(\rho) = a(1-\rho)$。均值 $\mu_a = 1/(3-1/a)$ 随着 a 严格递减，因此在速率 ρ 下，有限要求的套索是满足 $a \geq a_\rho$ 的套索，其中 a_ρ 是满足 $\mu_a \leq \rho$ 的最小 a。推论 5.3 给出 $B_*(\rho) = a_\rho(1-\rho)$，即式 (6.11)。 □

这些跳跃的原因很简单。在 $\rho = \mu_{a-1}$ 处，环 β_{a-1} 变得可用。其平均成本高于此前可用的环，而其连续的 1 块更短，因此其

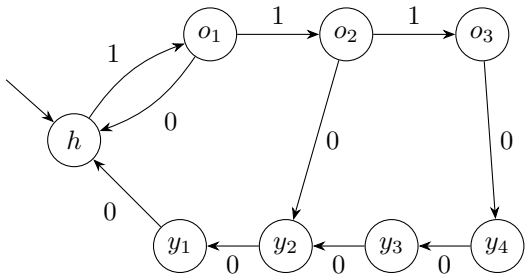

图 3：命题 6.7 对于 $m = 3$ 的图。其简单环的代价词为 10、11000 和 11100000，平均代价分别为 $1/2$、$2/5$ 和 $3/8$。突发边界在 $[3/8, 2/5)$ 上为 $3 - 3\rho$，在 $[2/5, 1/2)$ 上为 $2 - 2\rho$，在 $[1/2, 1])$ 上为 $1 - \rho$。

突发要求更小。同样的机制产生了图 1 中的跳跃。有限定义域内的跳跃排除了凸性和凹性，因为凸函数和凹函数在开区间上都是连续的。

6.3. **临界速率函数**。固定突发量而不是速率，会得到允许可行无限路径的最低速率。假设 G 有一个环，并定义

$$\rho_*(B) = \min\{\rho \in [0,1] : B \geq B_*(\rho)\} \qquad (B \geq 0). \tag{6.12}$$

在判别问题中，$\rho_*(B)$ 是这样的最低持续擦除率：具有突发量 B 的信道能够永远混淆这两种模式。定理 6.8 表明，该最小值存在，并且 ρ_* 是连续的，尽管 B_* 可能发生跳跃。

定理 6.8。对于每个套索 λ，令

$$\rho_\lambda(B) = \max\Big(\{\mu_\lambda, 0\} \cup \Big\{\frac{k-B}{\ell} : (k,\ell) \in \mathcal{I}_\lambda\Big\}\Big). \tag{6.13}$$

Then

$$\rho_*(B) = \min_{\lambda \in \mathcal{L}} \rho_\lambda(B). \tag{6.14}$$

函数 $\rho_*\colon [0,\infty) \to [0,1]$ 是连续、非增且分段仿射的，其斜率属于 $\{0\} \cup \{-1/\ell\colon 1 \leq \ell \leq N-1\}$。此外，对于每个 $B \geq B_*(\mu)$，都有 $\rho_*(B) = \mu$，并且在 $\rho = \rho_*(B)$处存在一条可行无限路径。

证明。对于固定的套索，(5.2) 不超过 B，当且仅当 $\rho \geq \mu_\lambda$ 且对 $\mathcal{I}_\lambda$ 中的每一对都有 $\rho \geq (k-B)/\ell$。这些下界都不超过 1，因为 $k \leq \ell$ 且 $B \geq 0$。因此，$\rho_\lambda(B)$ 是使 λ 成为 (ρ, B)-可行所需的最小速率。对所有套索取最小值，即可证明 (6.14)，并表明 (6.12) 中的最小值能够取到。

每个 ρ_λ 都是关于 B的有限个连续仿射函数的最大值，并且套索只有有限个。它们的最小值是连续分段仿射函数。在任意一个开仿射段上，起作用的表达式要么是环平均值常数，要么是直线 $(k-B)/\ell$，由此得到所列斜率。增大 B 会放宽约束，因此 ρ_* 是非递增的。最后，根据推论 6.2，低于 μ 的速率均不可行；而当 $B \geq B_*(\mu)$时，$\rho = \mu$ 即可行。□

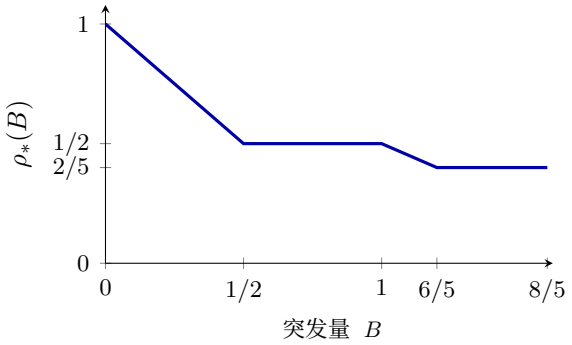

图 4：图 1 中图的临界速率函数。 B_* 在$\rho = 1/2$ 处的向下跳跃变成了 $[1/2, 1]$上的平台区间。

对于图 1 的图， B_* 在 $1/2$ 处的跳跃变成了 ρ_*的平台区间：

$$\rho_*(B) = \begin{cases} 1 - B, & 0 \le B \le 1/2, \\ 1/2, & 1/2 \le B \le 1, \\ 1 - B/2, & 1 \le B \le 6/5, \\ 2/5, & B \ge 6/5. \end{cases} \tag{6.15}$$

图 4 绘出了这个函数。可行对 $(\rho,\ B)$ 的集合不是凸集：它包含 $(2/5,\ 6/5)$ 和 $(1/2,\ 1/2)$，但不包含它们的中点 $(9/20,\ 17/20)$，因为 $B_*(9/20) = 11/10$。

7. 计算边界

该算法在每个法里区间内选取一个有理速率来计算 B_* 。对于最简形式下的有理速率$\rho = p/q$ ，缩放负载 $j_t = qx_t$ 是一个整数，并且满足

$$j_0 = 0, \qquad j_t = \max\{0, j_{t-1} + \delta_{e_t}\}, \qquad \delta_e = qc(e) - p. \tag{7.1}$$

对于整数容量 $K \ge 0$（其作用相当于缩放突发量 qB），负载图 $G_{p,q,K}$的状态为 (v, j)，满足 $v \in V$和 $0 \le j \le K$；当 $e = (v, u) \in E$且新负载不超过 K时，存在一条从 (v, j) 指向 $(u, \max\{0, j + \delta_e\})$ 的边。其初始状态为 $S \times \{0\}$。因此，$G_{p,q,K}$ 是 G 与定理 3.3 中自动机 $D_{p,q,K}$ 的积。从初始状态出发的 $G_{p,q,K}$ 路径，对应于 G 的 $(p/q, B)$-可行路径；对于所有满足 $\lfloor qB \rfloor = K$的 B，这一对应关系均成立，因为缩放负载都是整数。因此，当且仅当 $G_{p,q,\lfloor qB \rfloor}$ 中存在一条从初始状态出发的无限路径（即存在可达环）时，才存在一条 $(p/q, B)$-可行无限路径。图搜索可在 $O((N + M)(K + 1))$ 时间内判定这一点。第 7.1 节表明，可启动无限路径的状态可以用每个顶点对应的一个整数来描述，由此可通过一次扫描同时处理所有容量。

7.1. 每个顶点有一个阈值的递减容量。 若某个负载状态始于一条无限路径，则称其可行。若 (v, j) 可行，则对所有满足 $0 \le i \le j$ 的 (v, i)，它们也都可行，因为 (7.1) 中的每次更新都关于负载单调不减。将 $\theta_v(K)$ 记为最大的可行负载

在 v 处；若没有负载可行，则记为 -1，并称 v 存活当且仅当 $\theta_v \geq 0$，否则称为死亡。对于向量$\theta \in \{-1, 0, \ldots, K\}^V$，定义

$$A_v(\theta) = \max_{\substack{e=(v,u)\in E \\ \theta_u \geq 0}} (\theta_u - \delta_e), \qquad F_K(\theta)_v = \max\{-1, \min\{K, A_v(\theta)\}\}, \tag{7.2}$$

其中，空集上的最大值为 $-\infty$。边 $e = (v, u)$ 在 v 处支撑当前阈值，当且仅当

$$\theta_v \geq 0, \qquad \theta_u \geq 0, \qquad \theta_v \leq \theta_u - \delta_e. \tag{7.3}$$

这些不等式意味着，每个不超过 θ_v 的负载都可以使用 e，并到达不超过 θ的负载 u.

引理 7.1。向量 $\theta(K)$ 是 F_K的最大不动点。从 $\{-1, 0, \ldots, K\}^V$中任何一个从上方界定 $\theta(K)$ 的向量开始，反复将一个不受支撑的存活分量 θ_v 替换为 $F_K(\theta)_v$，即可得到 $\theta(K)$。

证明。从负载 $j \geq 0$出发，若边 $e = (v, u)$ 通向存活顶点 u，则当且仅当 $j \leq \theta_u - \delta_e$时，会到达 $[0, \theta_u]$ 中的负载。因此，$F_K(\theta)_v$是顶点 v处能够通过一条边通向 θ所保留状态的最大负载，并且 F_K 是单调的。每个可行状态都有一个可行后继，因此 $\theta(K) \leq F_K(\theta(K))$。若 $\theta \geq \theta(K)$，由单调性可得 $F_K(\theta) \geq \theta(K)$，所以更新不会移除任何可行状态。一个不受支撑的存活分量满足 $F_K(\theta)_v < \theta_v$，因此每次更新都会严格降低一个整数分量，过程最终终止。终止时，每个存活顶点都有一条支撑边，它能服务所有不超过其阈值的负载。沿着这类边前进，可从每个保留状态得到一条无限路径，因此最终向量等于 $\theta(K)$。同样的论证表明，任何不动点所保留的状态都是可行的，因此 $\theta(K)$本身也是一个不动点，且为最大不动点。

□

由 $\theta(K)$保留的状态构成负载图前驱算子的最大不动点，这是安全目标可实现时所对应状态的标准刻画。阈值向量为每个顶点存储一个整数来表示此不动点，而不是为每个负载状态存储一个比特。

定理 7.2. 固定 p/q 和一个整数 $K_{\max} \geq 0$。在$[0, K_{\max}]$中的最小可行整数容量（或不存在此容量这一事实）可以通过

$$O((N + M)(K_{\max} + 1)) \tag{7.4}$$

次算术运算和 $O(N + M)$ 个词的工作存储空间计算。在最小可行容量下，该算法还会构造一个最优简单套索。

证明。对每个顶点初始化 $\theta_v = K_{\max}$。对于 $K = K_{\max}, K_{\max} - 1, \ldots, 0$，先将$\theta_v$ 替换为 $\min\{\theta_v, K\}$，保持死亡分量 -1 不变。然后应用引理 7.1。根据引理 7.1，所得向量为 $\theta(K)$：初始向量从上方界定 $\theta(K_{\max})$，且$\theta(K) \leq \min\{\theta(K + 1)\ K\}$，因为每个对 K 可行的状态也对 $K + 1$可行。当且仅当存在某个 $s \in S$ 满足 $\theta_s(K) \geq 0$时，容量 K才可行。如果第一阶段不可行，则报告该范围内不存在可行容量。否则，保存最后一个可行向量；第一个不可行阶段 K 确定最优值 $K + 1$。如果阶段 0 仍然可行，则最优值为 0。

要实现一个阶段，为每条边存储支持指示器（7.3），并为每个顶点存储其支持出边的数量。截断后，在$O(N + M)$时间内重建这些指示器，并将每个支持计数为零的存活顶点加入队列。当从队列中移除这样的顶点 v 时，扫描其出边以计算 $F_K(\theta)_v$。降低 θ_v后，更新所有与 v 相邻的边上的指示器，以及这些边的源顶点的支持计数。将每个受影响且计数为零的存活顶点加入队列；如果 v 自身

仍然不受支持，也将其加入队列。如果取出的顶点已不存活或已获得支持，则忽略它。队列成员标记可避免重复入队。

在扫描过程中，标签不会增加，其取值属于 $\{-1,\dots,K_{\max}\}$，因此每个标签至多减少 $K_{\max}+1$ 次。一次减少的代价为 v，即 $O(1+\deg^+(v)+\deg^-(v))$。对顶点和减少次数求和，再加上 $K_{\max}+1$ 阶段初始化，即得到（7.4）。队列运算的代价计入这些初始化和关联边更新中。标签、保存向量、邻接表、支撑指示量、计数值和队列共占用 $O(N+M)$ 个词。

在最优情况下，在保存向量中为每个存活顶点选择一条支撑出边。从负载为 0 的存活初始顶点出发。所选边保持阈值不等式成立，因此保证可行性。由于选择仅取决于顶点，所得无限路径是一个简单套索。根据引理 5.2，其缩放后的要求 $q\mathsf{cap}_\lambda(p/q)$ 是整数，并且等于最小可行容量；更小的值将与最小性矛盾。 □

7.2. 根据中项恢复区间。

引理 7.3. 设 $a/b<c/d$ 是 $\mathcal{F}_N$ 的相邻元素，且 $p/q=(a+c)/(b+d)$。则 p/q 是最简形式，位于 $(a/b,c/d)$ 内，并满足

$$N<q\le 2N. \tag{7.5}$$

若 B_* 在 $(a/b,c/d)$ 上等于 $k-\ell\rho$，则 $K_*=qB_*(p/q)$ 是整数，且 K_* 通过下式确定 k 和 ℓ

$$\ell\equiv -p^{-1}K_* \pmod q,\quad 0\le \ell<q,\qquad k=(K_*+p\ell)/q. \tag{7.6}$$

证明。 相邻法里分数满足 $bc-ad=1$ 和 $b+d>N$ [（HW08，定理 28 和 30]）。$a+c$ 和 $b+d$ 的任意公因数都整除 $bc-ad=1$，因此中项已约至最简形式。它严格位于 a/b 和 c/d 之间，而 $b,d\le N$ 给出 (7.5)。由定理 6.1，$K_*=qk-p\ell$，因此 $K_*\equiv -p\ell$（模 q）。由于 $p\ge 1$ 模 q 和 $0\le \ell\le N-1<q$ 可逆，该同余式确定 ℓ，进而得到 k。 □

对于图 1，$N=5$，$2/5$ 和 $1/2$ 在 $\mathcal{F}_5$中相邻。它们的中项是 $3/7$，其中 $\delta_e=4$ 位于代价为 1 的边上，$\delta_e=-3$ 位于代价为 0 的边上。在 $K=8$处，h、o_1、o_2、y_2、y_1处的阈值分别为 0、4、8、6、3，且每个顶点都由环 11000 上的一条边支撑。在 $K=7$处，将 θ_{o_2} 截断至 7 后，o_1 失去支撑，其阈值降至 3，随后 θ_h 降至 -1；顶点 y_1、y_2、o_2、o_1 依次消亡。因此，扫描返回$K_*=7B_*(3/7)=8$。由于 $3^{-1}\equiv 5$（模 7），公式 (7.6) 给出 $\ell\equiv -40\equiv 2$（模 7）以及$k=(8+3\cdot 2)/7=2$，由此恢复了（$2/5$，$1/2$）上的直线 $2-2\rho$。

7.3. 完整算法。

算法 7.4 (突发边界)。
(1) 合并端点和代价均相同的边，并按 $\mathcal{F}_N$ 递增顺序流式处理。(2) 对每一对连续的 $a/b<c/d$，设置 $p=a+c$、$q=b+d$ 和 $K_{\max}=(N-1)(q-p)$。(3) 从 $K_{\max}$ 向下运行定理 7.2 的扫描过程。如果 $K_{\max}$ 不可行，则在 $(a/b,\ c/d)$ 上记录 ∞。(4) 否则，令 K_* 为最小可行容量，根据 (7.6) 恢复 ℓ 和 k，并在 $(a/b,\ c/d)$ 上记录直线 $k-\ell\rho$ 和最优套索。

(5) 将每个低于 1 的网格点赋值为其右侧直线的值；如果 G 有一个环，则设置 $B_*(1) = 0$，否则设置 $B_*(1) = \infty$；并合并系数相同且端点值相容的连续片段。

定理 7.5。 算法 *7.4* 使用

$$O((N + M)N^4) \tag{7.7}$$

次算术运算、 $O(N+M)$ 个词的工作存储空间，以及 $O(N^2)$ 个词用于输出。合并重复边后，所有整数均为 $O(\log(N + 1))$ 位。对于边界有限的每个法里区间，该算法还会给出一个在该区间及其左端点上均为最优的简单套索。

证明。 合并操作使用邻接表和一个以目标节点及代价为索引的数组，耗时为$O(N + M)$，且最终至多剩下 $2N^2$ 条边。根据引理 7.3， $qB_*(p/q)$ 的每个有限值都是整数，且根据 (6.3) 不超过 $K_{\max}$。如果 $[0, K_{\max}]$ 中没有可行的容量，根据定理 6.1，整个区间上的边界均为无穷大。否则，最小容量为$K_* = qB_*(p/q)$，而 (7.6) 可求得 k 和 ℓ。

设 λ 为在中项处返回的最优套索。在整个开法里区间内，有限要求对应的套索都相同，而且 $\mathcal{A}_N$ 的不同直线不会在此处相交。 λ 的最大化直线与定义 B_* 的直线在中项处重合，因此由引理 7.3可知，它们的系数相同。由此， λ 在整个区间内都是最优的。右连续性将这一相等关系延伸至 a/b。在 c/d处，值上界函数$\lambda(c/d) = B_*(c/d^-)$可能大于 $B_*(c/d)$。

法里数列有 $O(N^2)$个区间，而 $q \le 2N$给出 $K_{\max} = O(N^2)$。因此，定理 7.2给出（7.7）。要依次生成法里数列，先从 $0/1$开始， $1/N$；对于连续的a/b， c/d，下一个分数为（$tc - a$）/（$td - b$），其中 $t = \lfloor$（$N + b$）/$d\rfloor$，直到到达 $1/1$。此规则源自三个连续项的中项性质 [HW08，定理 29]，且只需常量额外存储空间。1以下网格点处的值由右连续性得出；在 $\rho = 1$ 处，每条无限路径都可行，且 $B = 0$。处理区间时即可返回套索；若存储所有套索，则需要额外的 $O(N^3)$个词。所有负载、系数、分母和支持计数在 N内均为多项式有界。 □

推论 7.6。 经过对 $\mathcal{F}_N$ 进行预处理后，可以通过与该网格进行 $O(\log(N + 1))$ 次比较、对位长度为 $O(\log(N + 1))$ 的整数进行 $N^2)$ 算术运算，以及在输入有理数处对一个仿射函数进行一次求值，获得 B_* 在任意有理速率 $\rho \in [0, 1]$ 下的值，其中 $O(N^2)$。每个使用的负载图都有 $O(N^3)$ 个状态，而与 ρ 的分母无关。

证明。 对于 $\rho < 1$，通过二分搜索在网格中定位 $a/b \le \rho < c/d$。仅在该区间的中项处计算边界。如果该值为无穷大，则返回 ∞；否则解码其直线，并在 ρ 处对其求值。右连续性涵盖 $\rho = a/b$ 的情形。在 $\rho = 1$ 处，只需进行环测试。比较和最终求值使用输入的位长度；扫描仅取决于 N 和 M。 □

将返回值与有理突发 B 进行比较，即可根据命题 4.3 判定 (ρ, B) 处的一致可区分性。若直接在 $\rho = p/q$ 处进行测试，则需要构造 $G_{p,\ q,\ \lfloor qB\rfloor}$，其规模会随 q增大；推论避免了这种增长，因为它只在分母至多为 $2N$ 的中项处计算 B_*。

备注 7.7. 对于 $\{0, \dots, W\}$ 中的整数成本，在满足 $W \ge 1$ 且速率属于 $[0, W]$ 的情况下，定理 5.1 和引理 5.2 仍然成立，并且这些直线满足 $0 \le k \le W\ell$ 和 $\ell \le N - 1$。该

断点位于 W $\mathcal{F}_N$ 的整数平移中，相邻网格点仍满足行列式恒等式，并且 $K_{\max} = (N-1)(Wq-p)$。扫描需要 $O((N+M)W^2N^4)$ 次算术运算和 $O(N+M)$ 个工作字，输出字数量为 $O(WN^2)$。这种依赖关系关于 W 是多项式的，而非关于其位长度是多项式的。在判别问题中，根据 (4.4)，代价是二进制的，因此 $W = 1$。

8. Discrimination horizons

当不存在可行无限路径时，定义 4.1 中的视界 $H(\rho,\ B)$ 用于衡量歧义能够持续多久。本节在有理参数下精确计算 H ，并确定其随 B 增大时的增长情况。

命题 8.1。 设 $\rho = p/q$ 和 $B \geq 0$ 为有理数，并令 $K = \lfloor qB \rfloor$。若从其初始状态可达的$G_{p,\ q,\ K}$ 部分包含一个环，则 $H(\rho, B) = \infty$。否则，设L 为从某个初始状态出发的最长路径的长度。则

$$H(\rho, B) = L + 1 \leq N(K+1), \tag{8.1}$$

并且 H 可通过 $O((N+M)(K+1))$ 次算术运算计算得出。

证明。 有环的情形由命题 4.3 以及$G_{p,\ q,\ K}$ 的路径与比较图中的可行路径之间的对应关系可得。无环的情形下，按拓扑序进行动态规划即可计算最长路径，而命题 4.3 给出 $H = L + 1$。无环可达部分中的路径至多经过 $N(K+1)$个状态，因此 $L \leq N(K+1) - 1$。□

命题 8.1 的运行时间是伪多项式的：它随 K 线性增长，因此也随 q 线性增长。定理 7.5 避免了这种增长，因为它会选择用于计算 B_*的分母。下一个定理将以闭式给出 H 的增长情况。

定理 8.2。 假设比较图中存在一个环，令 μ 为其最小圈均值(6.4)，固定 $0 \leq \rho < \mu$，并令

$$\delta = \mu - \rho > 0, \qquad C = (N-1)(1-\mu). \tag{8.2}$$

对于每个 $B \geq C$,

$$\left\lfloor \frac{B-C}{\delta} \right\rfloor + 1 \leq H(\rho, B) \leq \left\lfloor \frac{B + \mu(N-1)}{\delta} \right\rfloor + 1, \tag{8.3}$$

且该上界对每个 $B \geq 0$ 都成立。特别地，

$$\lim_{B \to \infty} \frac{H(\rho, B)}{B} = \frac{1}{\mu - \rho}. \tag{8.4}$$

证明。 取任意长度为 n 的可行路径。不断移除环，直到剩下简单路径。其长度至多为 $N-1$，且其代价非负。每个被移除的闭游走都可分解为若干简单环，这些简单环的平均代价均不小于 μ。因此，原路径的代价至少为 $\mu(n-(N-1))$。对整条路径应用窗口约束可得

$$\mu(n - (N-1)) \leq \rho n + B, \tag{8.5}$$

因此 $n \leq (B + \mu(N-1))/\delta$。由 (4.5) 可得上界。

对于下界，选择一个均值为 μ 的简单环，以及一条从 S 到该环上首个顶点的简单路径。它们构成一个简单套索 λ。在速率 μ 下，引理 5.2 和 (6.3) 将 λ 的每个窗口的超额界定为 C。在速率 $\rho = \mu - \delta$ 下，一个长度为 $\ell \leq n$ 的窗口具有

至多为 $C+\delta\ell \le C+\delta n$ 的超额。因此，当 $B \ge C$ 且 $H \ge n+1$ 时，套索的前 $n=\lfloor(B-C)/\delta\rfloor$ 条边构成一条可行路径。将两个界都除以 B，并令 B 增大，即可证明 (8.4)。□

对于单个代价为 1 的自环，$N=1$ 和 $\mu=1$，而长度为 n 的每条路径都需要突发量 $n(1-\rho)$。因此，对于 $0 \le \rho < 1$，$H(\rho,\ B) = \lfloor B/(1-\rho)\rfloor + 1$，且 (8.3) 中的两个界都取等号。如果比较图是无环的，则对于所有参数，歧义最多持续 $N-1$ 步，因此 $H \le N$。

在固定突发量下，视界也可能随着速率增大，从有限值跃变为无穷大。设比较图为双边环，其代价词为 10，且代价为 1 的边位于前面，并固定 $B=1/2$。若 $\rho < 1/2$，则第一个差异无法被擦除，因为单步约束要求 $1 \le \rho + 1/2$。在 $\rho = 1/2$时，反射负载在 $1/2$ 和 0 之间交替，因此歧义会永远持续。因此

$$H(\rho, 1/2) = \begin{cases} 1, & 0 \le \rho < 1/2, \\ \infty, & 1/2 \le \rho \le 1. \end{cases} \tag{8.6}$$

定理 8.2 描述了沿另一轴的增长：当 B 以低于 μ 的固定速率增加时，H 的变化情况。

9. Rate–burst synthesis in safety games

当控制器选择部分转移、对手选择其余转移时，Farey 结构依然存在。考虑一个有限回合制竞技场

$$\mathcal{G} = (V_C, V_E, E, s, c), \qquad V = V_C \dot\cup V_E, \tag{9.1}$$

其初始顶点为 s，边代价为 $c : E \to \{0,1\}$，且每个顶点至少有一条出边。记 $N=|V|$ 和 $M=|E|$。控制器在 V_C 中的顶点选择一条出边，环境则在 V_E 中的顶点选择一条出边。双方都能观察当前顶点和已执行的边。如果每一种由此产生的无限对局都满足 (1.1)，则控制器的策略在 $(\rho,\ B)$ 上是获胜的。令

$$B_{\mathcal{G}}(\rho) = \inf\{B \ge 0 : \text{the controller has a winning strategy at } (\rho, B)\}. \tag{9.2}$$

代价为 1 的边标记消耗一个单位受监管资源的步骤，例如在整形链路上发送一条消息；该博弈要解决的问题是：控制器能够将每次运行的资源使用量控制在速率–突发界内时，所需的最小突发量是多少。控制器可以观察竞技场的顶点，因此该博弈建模的是资源约束调度，而非诊断。删除所有无法开始无限路径的顶点后，第 3 节中只有一个初始顶点的问题，便是控制器拥有所有顶点时的特例。

9.1. 实参数的位置策略。 位置策略在每个控制器顶点选择一条出边，且不依赖于历史和当前负载。下面的引理将定理 5.1 的证明推广到两名玩家。

引理 9.1。 对于任意实数 $\rho \in [0,1]$ 和 $B \ge 0$，存在获胜策略，当且仅当存在获胜位置策略。可以选取一个位置策略，使其从所有存在某种策略可获胜的配置出发均能获胜。

证明。 使用式 (3.4) 中的能量更新 T_e。令 $W_v^h \subseteq [0,B]$ 为控制器能够从 v 开始，在 h 步内保持能量非负的初始能量集合。设 $W_v^0 = [0,B]$。在控制器顶点处， W_v^{h+1} 是对所有出边 $e = (v,\ u)$ 对应集合 $[0,B] \cap T_e^{-1}(W_u^h)$ 的并集；在环境顶点处则为它们的交集。每个 T_e 都连续且单调不减，因此每个 W_v^h 都是闭集和上闭集，并且这些集合随 h 增大而递减。

设 $W_v = \bigcap_{h\geq 0} W_v^h$。每个非空 W_v都有一个最小的 τ_v。如果 $v \in V_C$，那么对于每个 h，存在某条出边 $e = (v,\ u)$ 满足 $T_e(\tau_v) \in W_u^h$。由于边集是有限的，必有一条边对无穷多个 h 具有此性质，而嵌套性给出 $T_e(\tau_v) \in W_u$，即 $T_e(\tau_v) \geq \tau_u$。在 v 处固定这样一条边。如果 $v \in V_E$，则每条出边都满足同一个不等式。 T_e 的单调性表明，这些选择沿着从 $E_0 \in W_{v_0}$ 开始的每个对局都保持 $E_t \geq \tau_{v_t}$，因此它们永远获胜。反过来，任何存在某个策略可以获胜的配置，都属于每个有限时域集合 W_v^h。 □

9.2. **每个位置策略的有限表达式**。 固定一个位置策略 σ。在每个控制器顶点保留其选定的边，保留所有环境边，并限制到从 s 可达的顶点。将所得的图记为 G_σ。令 $\mathcal{P}_\sigma$ 为 G_σ 的非空简单路径集合，这些路径从 G_σ 的任意顶点出发，并定义

$$\nu_\sigma = \max_{\beta \text{ a simple cycle of } G_\sigma} \frac{\mathrm{cost}(\beta)}{|\beta|}. \tag{9.3}$$

该最大值存在，因为 G_σ 有限，且每个顶点都有一条出边。简单路径至多包含 $N-1$ 条边。

引理 9.2。 使 σ 获胜所需的最小突发量等于

$$F_\sigma(\rho) = \begin{cases} \infty, & \rho < \nu_\sigma, \\ \max\big(\{0\} \cup \{\mathrm{cost}(P) - \rho|P| : P \in \mathcal{P}_\sigma\}\big), & \rho \geq \nu_\sigma. \end{cases} \tag{9.4}$$

证明。 若 G_σ 中存在均值大于 ρ的环，环境便可到达该环并不断重复，且任何有限突发量都无法界定由此产生的超额。 $\mathcal{P}_\sigma$ 中的每条路径都是 s中某场对局的一个窗口，因为其起始顶点可达，且每个顶点都有后继，因此该路径的超额是一个下界。

反过来，设 $\rho \geq \nu_\sigma$，并取 G_σ中任意一场对局的任意窗口。每当某个顶点重复出现时，就移除一个简单环。每个被移除的环都具有非正超额，因此移除它不会降低该窗口的超额。剩余的游走是一条简单路径或为空，所以其超额至多为（9.4）中的最大值。 □

定理 9.3。 对于一个带有 *0/1* 代价的轮流制安全博弈场，

$$B_{\mathcal{G}}(\rho) = \min_{\sigma\ positional} F_\sigma(\rho), \tag{9.5}$$

且每个有限值都能取到。该边界单调不增且右连续，具有$O(N^2)$ 个仿射片段，满足 $B_{\mathcal{G}}(\rho) \leq (N-1)(1-\rho)$ （只要其值有限），并且在每个阶数为 N 的法里区间上，要么恒为无穷，要么是 $\mathcal{A}_N$ 的一条直线。此外，每个 $B_{\mathcal{G}}$ 有限的法里区间都存在一个位置策略 σ，使得 $F_\sigma = B_{\mathcal{G}}$ 在整个区间及其左端点处均成立。

证明。 位置策略的数量有限。根据引理 9.1 和 9.2，策略 σ 当且仅当 $B \geq F_\sigma(\rho)$ 时获胜，由此可得 (9.5) 以及取到性。每个阈值 ν_σ 都是一个简单环的均值，因此属于 $\mathcal{F}_N$；而 (9.4) 中的每个仿射项都属于$\mathcal{A}_N$。定理 6.1 的证明可原样应用。

在边界有限的法里区间内部选取一点，并选择使 F_σ 最小的策略。区间内没有两条不同的 $\mathcal{A}_N$ 直线相交，也没有阈值 ν_σ 位于其中，因此同一策略在整个区间内都使其最小。其阈值不大于左端点，并且 F_σ 和 $B_{\mathcal{G}}$ 在该处均右连续，因此等式在左端点处也成立。

□

设 $\nu_* = \min_\sigma \nu_\sigma$。则 $B_{\mathcal{G}}(\rho)$ 有限当且仅当 $\rho \geq \nu_*$。命题 6.6 中的链和环仅包含强制移动，这表明突发界和法里网格的阶对博弈而言也是紧的。

定理 *9.4*。*</style>*边界 $B_{\mathcal{G}}$ 以及每个边界有限的法里区间对应的一个最优位置策略，都可以通过

$$O((N+M)N^4 \log(N+1)) \tag{9.6}$$

对 $O(\log(N+1))$ 位整数进行算术运算。边界使用 $O(N^2)$ 个输出字，而显式存储所有策略则使用 $O(N^3)$ 个词。

证明。 在中项 p/q 和整数容量 K 处，构造状态为 (v, j) 且满足$0 \leq j \leq K$的负载博弈。每个状态保留 v 的所有者，转移遵循 (7.1)，任何新负载超过 K 的移动都会导向一个失败吸收状态。在 $(p/q, B)$ 且满足$\lfloor qB \rfloor = K$ 时获胜，恰好等同于避免进入该状态。这个安全博弈的获胜区域通过反向传播计算：只要环境状态有一个后继状态失败，该状态就会失败；而控制器状态只有在其所有后继状态都失败时才会失败。维护后继计数所需的时间与负载博弈的规模呈线性关系，即 $O((N+M)(K+1))$。

定理 9.3 给出 $K_{\max} = (N-1)(q-p) = O(N^2)$。测试该容量；若其为获胜容量，则对最小获胜整数 K_*进行二分搜索；获胜性关于 K 单调。最小突发量的形式为 $k - \ell p/q$，因此 $K_* = qk - p\ell$ 是整数，而引理 7.3 的模计算可恢复直线。对所有法里区间重复上述过程，即得 (9.6)。

要提取策略，只需在 K_* 处再求解一次负载博弈。对于具有某些获胜负载的每个顶点 v，获胜负载构成一个初始段 $\{0, \ldots, h_v\}$，因为较小的负载只会带来帮助。在控制器顶点，选择一条边，使其从 $(v,\ h_v)$ 通向一个获胜状态。根据负载更新的单调性，同一条边也会使所有满足 $j \leq h_v$ 的 $(v,\ j)$ 通向获胜状态。在环境顶点，$(v,\ h_v)$ 的每个后继都是获胜状态，所有更小的负载也同样如此。由此得到的位置策略从 $(s,\ 0)$ 出发能够获胜，因此在中项处达到最小突发量。根据定理 9.3，该策略在整个区间及其左端点处都达到边界。

□

9.3. **一种在法里区间之间切换的最优策略**。下图所示的七顶点竞技场（见图5）与图 1 中图的边界相同，但环境有实际的选择。控制器拥有 v，并在一条长路径$v \to a \to b \to c \to d \to v$（其代价词为 11000）和一条以代价为 1 的边 $v \to u$开头的短路径之间进行选择。环境拥有 u，可以选择以代价 0 返回 v，或以代价 0 移至顶点 z，而该顶点有一条被迫采取的代价为 0 的边通向 v。所有其他顶点都只有被迫采取的移动。因此，在短路径上，环境可以在代价词 10 和 100 之间选择。

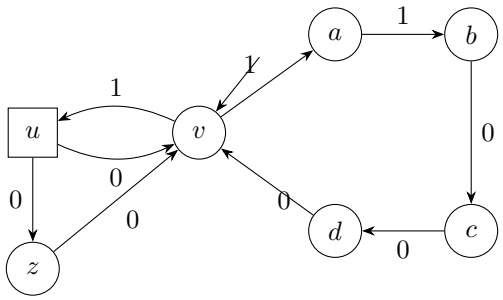

图5：一个安全竞技场，其中控制器顶点为 v，环境顶点为 u（方形）。其他顶点的移动均被强制。最优位置策略在 $[2/5, 1/2$ 处选择长路径，在 $[1/2, 1$ 处选择短路径。

始终选择长路径的策略，其阈值为 $2/5$，且在该阈值以上的要求为 $2 - 2\rho$。始终选择短路径的策略，其阈值为 $1/2$，因为在低于该阈值时，环境可以永远重复 **10**。对于 $\rho \geq 1/2$，短路径上连续的代价为 **1** 的边之间至少隔着一条代价为 **0** 的边，因此，包含 $k \geq 1$ 个 **1** 的窗口长度至少为 $2k - 1$，且超额至多为

$$k - (2k-1)\rho = (1-\rho) + (k-1)(1-2\rho) \leq 1 - \rho, \tag{9.7}$$

而一条代价为 **1** 的边即可达到此界。这是仅有的两种位置策略，因此定理 **9.3** 给出了图 **1** 的边界。在 $[2/5, 1/2$ 处，长路径是最优选择；在 $[1/2, 1$ 处，短路径严格更优；最优策略在 Farey 点$1/2$处发生变化。

9.4. B¨uchi 接受条件。 B¨uchi 条件要求某条指定边无限次出现。Dziadek 等人 [DFS 25] 研究了带有此类条件的能量问题。下面的单顶点示例表明，B¨uchi 条件会破坏定理 **5.1** 的右连续性和有界周期性质。

命题 9.5。 *考虑一个带有代价为 0 的自环和代价为 1的自环的顶点，并要求代价为 1 的自环无限次出现。最小突发量为*

$$B_{\mathrm{acc}}(\rho) = \begin{cases} \infty, & \rho = 0, \\ 1 - \rho, & 0 < \rho \leq 1. \end{cases} \tag{9.8}$$

该函数在 0 处不是右连续的，并且在 $B = 1$ 处可行速率的下确界为0，但不存在最小值。对于 $\rho = 1/q$ 和 $B = 1 - 1/q$，每个被接受的最终周期代价序列的周期长度至少为 q。

证明。 在 $\rho = 0$处，前缀约束将代价为 **1** 的边总数限制为 B，因此没有被接受的无限博弈对于有限的 B是可行的。在 $\rho > 0$处，一个被接受的对局包含一条代价为 **1** 的边，而其长度为 **1** 的窗口要求 $B \geq 1 - \rho$。令 $L = \lceil 1/\rho \rceil$。周期词 $(10^{L-1})^{\omega}$ 是被接受的，且其周期的超额为 $1 - L\rho \leq 0$。从任意窗口中移除完整周期后，剩下的窗口长度小于 L，其中至多包含一条代价为 **1** 的边，其超额至多为 $1 - \rho$。这证明了 **(9.8)** 以及关于右连续性和下确界的论断。

最后，一个被接受的最终周期词在其重复块中至少含有一条代价为 **1** 的边。如果该块的长度为 d，且包含 $k \geq 1$ 条这样的边，那么要使任意多次重复都可行，必须满足

多次重复都要求 $k/d \le 1/q$。因此 $d \ge qk \ge q$，尽管竞技场只有一个顶点。

□

10. Conclusion

本文研究：对于边代价为 0/1 的图，作为实数速率的函数，使图存在可行无限路径所需的最小突发量。可行词构成一种安全语言：在有理速率下，当 $B \ge 1$ 时它是 ω-正则的；而在无理速率下则不是，因此无理速率下的套索见证需要直接论证。答案结合了单条路径的凸窗口几何与环之间的离散选择。固定的简单套索具有紧确的 $\Theta(N^{2/3})$ 分段数界，而套索之间的选择可能破坏凸性与凹性，并产生向下跳跃。所有断点都位于阶数为 N 的法里数列中，在每个法里区间的中项处求值一次，即可恢复仿射段和一个最优套索。通过对递减的整数容量进行扫描，并为每个顶点设置一个负载阈值，可用 $O((N+M)N^4)$ 次算术运算和线性工作空间计算出整体边界。对于通过漏桶擦除信道区分两种有限状态模式的监控器，该边界划分了有限时间判别与永久歧义；低于最小圈均值时，判别时域按 $B/(\mu-\rho)$ 增长。同样的法里划分也适用于轮流制安全博弈，每个法里区间对应一个最优位置策略；而 B¨uchi 条件会破坏右连续性。

目前还有两个问题尚未解决。第一个问题是一个 N 顶点图的边界最多有多少段；其数量介于 $\Omega(N)$ 和 $O(N^2)$ 之间。由于一个套索仅贡献 $O(N^{2/3})$ 段，因此，若要构造出超线性数量的段，就必须使用无界多个套索。第二个问题涉及一种只观测接收输出而不观测图顶点的监控器或控制器；这会导致不完全信息博弈，而我们尚未刻画这类博弈的突发边界。

References

[AHV93] R. Alur、T. A. Henzinger 和 M. Y. Vardi。参数化实时推理。载于 *Proceedings of the 25th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC 1993)* 592 601 ，第 – 页。美国计算机协会，1993年。doi:10.1145/167088.167242。[ALH10] E. Athanasopoulou、L. Li 和 C. N. Hadjicostis。不可靠观测下有限状态机中的最大似然故障诊断。 *IEEE Transactions on Automatic Control*，55 3 579 593，2010 10 1109 2009 2039548 ( ): –。doi: 。/TAC。 。[BCD+11] L. Brim、J. Chaloupka、L. Doyen、R. Gentilini 和 J.-F. Raskin。更快速的均值收益博弈算法。 *Formal Methods in System Design*，38(2):97–118，2011年。doi:10.1007/ s10703-010-0105-x。[BFL+08] P. Bouyer、U. Fahrenberg、K. G. Larsen、N. Markey 和 J. Srba。具有能量约束的加权定时自动机中的无限运行。载于 *Formal Modeling and Analysis of Timed Systems (FORMATS 2008)* 5215 *Lecture Notes in Computer Science* 33 47 ，第 卷，第 – 页。Springer，2008年。doi:10.1007/978-3-540-85778-5_4。[BPR14] M. Benedikt、G. Puppis 和 C. Riveros。修复词语言的逐字符代价。*Theoretical Computer Science*，539:38–67，2014年。doi:10.1016/j.tcs.2014.04.021。[BT08] A. Bouillard 和 ´E. Thierry。网络演算的算法工具箱。 *Discrete Event Dynamic Systems* 18 1 3 49, 2008 10 1007 10626 007 0028 ，( ): –。doi: 。/s - - -x。[Car83] P. J. Carstensen。某些参数化整数规划和网络规划问题的复杂度。*Mathematical Programming*，26(1):64–75，1983年。doi:10.1007/BF02591893。

[CBM12] L. K. Carvalho、J. C. Basilio 和 M. V. Moreira。针对间歇性观测丢失的离散事件系统鲁棒诊断。 *Automatica*，48(9):2068–2078，2012年。doi:10.1016/j. automatica.2012.06.042。[CdAHS03] A. Chakrabarti、L. de Alfaro、T. A. Henzinger 和 M. Stoelinga。资源接口。载于 *Embedded Software (EMSOFT 2003)* 2855 *Lecture Notes in Computer Science* 117 133，第 卷，第 – 页。Springer，2003 年。doi:10.1007/978-3-540-45212-6_9。[CDH10] K. Chatterjee 、 L. Doyen 和 T. A. Henzinger。定量语言。 *ACM Transactions on Computational Logic* 11 4 23 1 23 38, 2010 10 1145 1805950 1805953 ，( ): : – :。 doi: 。/ 。 。[CDRR15] K. Chatterjee、L. Doyen、M. Randour 和 J.-F. Raskin。通过窗口考察均值收益和总收益。 *Information and Computation*，242:25–52，2015年。doi:10.1016/j.ic.2015.03. 010。[CL21] C. G. Cassandras 和 S. Lafortune。 *Introduction to Discrete Event Systems*。Springer，Cham，第三版，2021年。doi:10.1007/978-3-030-72274-6。[CR17] C. Comin 和 R. Rizzi。均值收益博弈值问题和最优策略合成的改进伪多项式界。 *Algorithmica*，77(4):995–1021，2017年。doi:10.1007/ s00453-016-0123-1。[Cru91] R. L. Cruz。网络时延演算，第一部分：孤立状态下的网络元素。 *IEEE Transactions on Information Theory* 37 1 114 131, 1991 10 1109 18 61109 ，( ): –。 doi: 。/ 。 。[dCM20] V. de Souza Lima Oliveira、F. G. Cabral 和 M. V. Moreira。离散事件系统的 K-损失鲁棒可诊断性。 *IFAC-PapersOnLine*，53(4):250–255，2020年。doi:10.1016/j.ifacol.2021. 04.064。[dCM22] V. de Souza Lima Oliveira、F. G. Cabral 和 M. V. Moreira。离散事件系统的 K-损失鲁棒协同可诊断性。 *Automatica*，140:110222，2022年。doi:10.1016/j.automatica.2022. 110222。[DFS25] S. Dziadek、U. Fahrenberg 和 P. Schlehuber。 *Formal Aspects of* -正则能量问题。 *Computing* 37 1 1 30, 2025 10 1145 3678265 ，( ): –。doi: 。/ 。[DYL24] W. Dong、X. Yin 和 S. Li。利用线性时序逻辑对具有不可靠传感器的离散事件系统进行诊断的统一框架。 *IEEE Transactions on Automatic Control*，69 1 145 160，2024 10 1109 2023 3266021 ( ): –。doi: 。/TAC。 。[HMR22] L. H´elou¨et、N. Markey 和 R. Raha。具有宽松能量约束的可达性博弈。*Information and Computation*，285:104806，2022年。doi:10.1016/j.ic.2021.104806。[HW08] G. H. Hardy 和 E. M. Wright。 *An Introduction to the Theory of Numbers*。牛津大学出版社，牛津，第六版，2008年。由 D. R. Heath-Brown 和 J. H. Silverman 修订。[Jar26] V. Jarn´ık。凸曲线上的格点。 *Mathematische Zeitschrift* 24 500 518, 1926 10 1007 01216795 ，( ): –。doi: 。/BF 。 JLR[L. Juhl、K. G. Larsen 和 J.-F. Raskin。多权重和参数化能量博弈的最优界。载于 13] ，第 卷，第 – 页。Springer，。doi: 。/ - - - -。 *Theories of Programming and Formal Methods* 8051 *Lecture Notes in Computer Science* 244 255 2013 10 1007 978 3 642 39698 4_15 JYL[Y. Ji、X. Yin 和 S. Lafortune。离散事件系统的局部均值收益监督控制。22] ，67(5):2282–2297，2022年。doi:10.1109/TAC。 2021.3075186。 *IEEE Transactions on Automatic Control*Kar[R. M. Karp。有向图中最小环平均值的刻画。78] ，23 3 309 10 1016 0012 365 78 90011 0 ( ): –311，1978年。doi: 。/ - X( ) -。 *Discrete Mathematics*KO[R. M. Karp 和 J. B. Orlin。参数化最短路径算法及其在周期性人员配置中的应用。81] ，3(1):37–45，1981年。doi:10.1016/0166-218X(81)90026-3。 *Discrete Applied Mathematics*LBT[J.-Y. Le Boudec 和 P. Thiran。01] ，第 卷。Springer，柏林，海德堡，2001年。doi:10.1007/3-540-45318-0。 *Network Calculus: A Theory of Deterministic Queuing Systems for the Internet* 2050 *Lecture Notes in Computer Science* LHWL[Y. Li、C. N. Hadjicostis、N. Wu 和 Z. Li。成本约束下离散事件系统中的防篡改可诊断性分析与篡改可检测性。25] ，171:111971，2025年。doi:10.1016/j.automatica.2024.111971。 *Automatica*Lin[F. Lin。网络化离散事件系统的控制：处理通信延迟和丢失。14] ，52(2):1276–1298，2014年。doi:10.1137/130914942。

[LLW24] F. Lin、S. Lafortune 和 C. Wang. 传感器攻击下离散事件系统的可诊断性与攻击检测. *Discrete Event Dynamic Systems*, 34:465–495, 2024. doi:10.1007/ s10626-024-00401-6.[Lot02] M. Lothaire. *Algebraic Combinatorics on Words* 90 *Encyclopedia of Mathematics and* , 第 of 卷. 剑桥大 *its Applications* 2002 10 1017 9781107326019 学出版社, . doi: . /CBO . [MS01] K. Mulmuley 和 P. Shah. 最短路径问题的一个下界. *Journal of Computer and System Sciences* 63 2 253 267, 2001 10 1006 2001 1766 , ( ): – . doi: . /j css. . . [NMA+18] C. E. V. Nunes、M. V. Moreira、M. V. S. Alves、L. K. Carvalho 和 J. C. Basilio. 受通信延迟和间歇性观测丢失影响的网络化离散事件系统的协同可诊断性. *Discrete Event Dynamic Systems*, 28(2):215–246, 2018. doi: 10.1007/s10626-017-0265-6.[PP04] D. Perrin 和 J.-É. Pin. *Infinite Words: Automata, Semigroups, Logic and Games*, 第 141 卷, 属于 *Pure and Applied Mathematics*. Elsevier, 2004. [SSL+95] M. Sampath、R. Sengupta、S. Lafortune、K. Sinnamohideen 和 D. Teneketzis. 离散事件系统的可诊断性. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(9):1555–1575, 1995. doi:10.1109/9.412626.[YTO91] N. E. Young、R. E. Tarjan 和 J. B. Orlin. 更快的参数化最短路径和最小平衡算法. *Networks*, 21(2):205–221, 1991. doi:10.1002/net.3230210206. [ZNS23] R. Zippo、P. Nikolaus 和 G. Stea. 扩展最终伪周期函数的网络演算算法工具箱：伪逆与复合. *Discrete Event Dynamic Systems* 33 181 219, 2023 10 1007 10626 022 00373 5 , : – . doi: . /s - - - .

本作品采用知识共享署名许可协议授权。要查看该许可协议副本，请访问 https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/，或致信知识共享组织，地址：美国加利福尼亚州旧金山市第二街171号300室，邮编94105；或德国柏林Eisenacher Strasse 2号，邮编10777。