arXiv:2611.28627v1 [cond-mat.supr-con] 21 Nov 2026

单微波光子能量尺度下的高频磁通驱动直流超导量子干涉器件阈值探测器：数值可行性研究

M. Y. Wang、Y. Q. Chai、S. N. Wang 和 L. F. Wei*
HergD 合作组和信息量子技术实验室，信息科学与技术学院，西南交通大学，中国成都 610031（日期：2026年11月24日）

在我们近期的工作（《物理评论B》**113**, 224503 (2026)）中，我们通过数值计算表明，快速扫描电流偏置约瑟夫森结阈值探测器（CBJJ-JTD）的偏置电流会使其处于非平衡状态。这显著减弱了热噪声对微波探测的影响，并可能实现接近单个微波光子能量的阈值检测。该方案要求极低的阻尼（$\beta \leq 10^{-4}$）和极快的偏置电流扫描（$v/\beta \geq 1$），而利用现有约瑟夫森结和经过低通滤波的低温测量线路很难达到这两项要求。本文提出了一种实验上更易实现的非平衡阈值探测器，其基础是高频磁通驱动的直流超导量子干涉器件（DC-SQUID）；我们通过数值求解电阻电容并联约瑟夫森结（RCSJ）方程对其进行研究。外加磁通驱动环流超电流，使非平衡相位动力学在整个偏置电流扫描过程中持续存在，从而无需快速扫描，也无需由初始相位引发的瞬态振荡。采用典型的实验器件参数，我们计算了有无微波输入时驱动和未驱动超导量子干涉器件的开关电流分布（SCDs）。我们使用受试者工作特征（ROC）曲线及其曲线下面积（AUC）量化探测性能。模拟结果表明，高频磁通驱动可减弱热噪声的影响，并能在单光子能量尺度上实现对弱微波脉冲的统计判别。我们还通过数值计算估算了探测器的相位选择性、动态范围等特性。

I. 引言

高灵敏度微波探测器在无线通信[1], 无损安全筛查 [2]，医学成像 [3]，电子对抗 [4]，以及高频引力波 [5, 6] 和超轻暗物质电磁特征 [7–10]的搜寻中至关重要。在单微波光子能量尺度上实现弱信号的高保真探测仍是一项重大挑战 [11–13]。热噪声将传统金属天线微波接收器的灵敏度限制在约 10^{-21} W/√Hz [14]。目前已有多种新型器件用于探测微弱微波信号。石墨烯自开关二极管的噪声等效功率（NEP）约为 2.2×10^{-9} W/√Hz [15]。里德堡原子微波超外差接收器已实现约 55 nV cm^{-1}/√Hz [16]的电场灵敏度。尽管这些方法提升了弱信号探测能力，但要达到单微波光子能量尺度仍然具有挑战性。低温运行可降低热噪声，并显著提升微波探测灵敏度。

在基于半导体、石墨烯和超导器件 [17–21],的低温探测器中，约瑟夫森结（JJ）探测器具有强非线性和可控的相位动力学 [22, 23]。基于约瑟夫森结的微波探测方案大致分为两类。第一类中，超导量子比特会记录由单个微波光子引发的状态变化 [24–26]。将量子比特耦合到微波谐振器，通常可将入射的传播光子转换为驻波腔模，从而增强其与量子比特的相互作用。在色散耦合下，腔内光子会使量子比特跃迁频率发生偏移，通过读取该偏移即可探测光子。整体效率取决于光子注入、量子比特退相干和状态读取保真度。腔和量子比特的频率匹配要求通常会限制工作带宽。第二类利用电流偏置约瑟夫森结的电压切换来探测微弱微波信号[27–29]。在这种工作模式下运行的结称为约瑟夫森阈值探测器（JTD）。偏置电流与入射微波信号诱导的高频电流可共同使结从零电压态切换至有限电压态。在倾斜洗衣板模型中，这种切换对应于相位粒子逃逸出势阱。观测到的电压切换即为探测信号。由于无需与窄带腔模精确匹配，这种机制可实现宽带工作。诱导电流还取决于信号强度或光子数量，使 JTD 具备光子数分辨（PNR）的潜力。

即使在毫开尔文温度下，热噪声仍会限制 JTD 灵敏度，使其难以达到单个微波光子的能量尺度。在这些工作温度下，进一步冷却对提升灵敏度的实际作用有限。因此，我们试图利用 JTD 固有的非线性动力学来

* lfwei@swjtu.edu.cn

减轻热噪声的影响，同时保持或增强微波响应。在早期工作中 [30], 我们发现，快速偏置电流扫描会使 JTD 进入一种对热噪声不那么敏感、对微弱微波信号响应更强的非平衡相位状态，有望达到单光子能量尺度。该方法依赖于由初始结相位引发的瞬态振荡，而振荡会通过内部耗散逐渐衰减。因此，该方法既需要阻尼极低（或品质因数极高）的结 Q，也需要极快的电流扫描。我们的可行性分析表明，现有 JTD 并不具备该研究中所用的器件参数。此外，安装在偏置线上用于抑制环境噪声的铜粉滤波器和电阻—电容（RC）低通滤波器，其截止频率可能低至约 2 kHz [31, 32], ，这限制了可实现的扫描速率。

这些结果促成了一种在实验可实现的阻尼和偏置电流扫描速率下维持非平衡工作的方案。我们提出利用高频磁通驱动的直流超导量子干涉器件（DC-SQUID）对微弱微波信号进行阈值检测。外加磁通驱动环流，在整个偏置电流扫描过程中持续维持非平衡相位动力学。这种持续运动取代了我们先前工作中由单结初始相位激发、随后因耗散而衰减的振荡[30]。该方案可在适中的扫描速率和阻尼下运行。高频磁通驱动和电流扫描分别由独立线路承载，因此可以分别设计其滤波器和通带。这种安排使实验上更容易利用非平衡相位动力学。

第二节针对磁通驱动的直流超导量子干涉器件，建立电阻和电容分流结（RCSJ）模型[33] 。利用共模相位和差模相位，我们考察驱动如何调制瞬时势能和相位动力学，刻画非平衡运动，并说明如何计算开关电流分布（SCDs），以及量化有无微波信号时这些分布的可分性。第三节考察直流磁通偏置、高频磁通驱动的幅度和频率以及热噪声的影响，随后在优化的驱动条件下评估对连续波和脉冲微波信号的灵敏度。第四节总结研究结果，并讨论实验可行性和有待解决的问题。

II. 模型与方法

我们对磁通驱动直流超导量子干涉器件的相位动力学进行建模，并说明如何利用模拟得到的开关电流分布来量化微波探测灵敏度。

A. 外加磁通驱动下直流超导量子干涉器件的相位动力学

我们考虑一个对称直流超导量子干涉器件，它由两个相同的约瑟夫森结组成，并忽略超导回路外的额外互感耦合。图1 展示了等效电路。每个结由一个临界电流为 I_0的理想约瑟夫森元件组成，并联一个电阻器 R 和一个电容器 C。回路总自感为 L，两个结两端的相位差分别为 φ_1 和 φ_2。按照如下符号约定

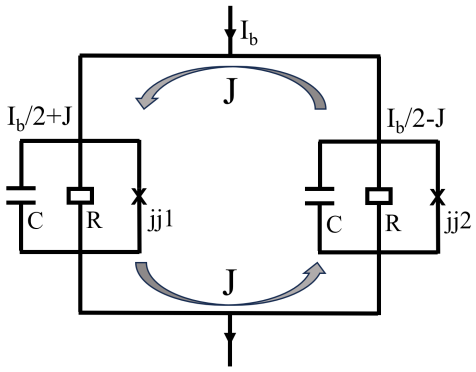

图 1. 对称直流超导量子干涉器件的 RCSJ 等效电路。J 表示回路中的环流超电流， I_b 为施加的偏置电流。

对于 J 图 1所示的情形，施加偏置 I_b 时，两个支路中的电流为

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{I_b}{2} + J + I_{n1}, \\ I_2 = \dfrac{I_b}{2} - J + I_{n2}. \end{cases} \tag{1}$$

这里， I_{n1} 和 I_{n2} 是相互独立的有效热噪声电流。超导回路的磁通量子化条件为 [34]

$$\varphi_1 - \varphi_2 + \frac{2\pi L J}{\Phi_0} = \frac{2\pi \Phi_{\mathrm{ext}}(t)}{\Phi_0}, \tag{2}$$

由此可得环流

$$J = \frac{\Phi_0}{2\pi L}\left[\varphi_2 - \varphi_1 + \frac{2\pi \Phi_{\mathrm{ext}}(t)}{\Phi_0}\right]. \tag{3}$$

这里， Φ_0 是磁通量子， $\Phi_{\mathrm{ext}}(t)$是外加磁通。两个结相位的 RCSJ 方程为

$$\begin{cases} \dfrac{\Phi_0 C}{2\pi}\dfrac{d^2\varphi_1}{dt^2} + \dfrac{\Phi_0}{2\pi R}\dfrac{d\varphi_1}{dt} + I_0 \sin\varphi_1 = \dfrac{I_b}{2} + J + I_{n1}, \\ \dfrac{\Phi_0 C}{2\pi}\dfrac{d^2\varphi_2}{dt^2} + \dfrac{\Phi_0}{2\pi R}\dfrac{d\varphi_2}{dt} + I_0 \sin\varphi_2 = \dfrac{I_b}{2} - J + I_{n2}. \end{cases} \tag{4}$$

环流 J 耦合两个结，并由外加磁通 $\Phi_{\rm ext}(t)$驱动，我们将其写为

$$\Phi_{\rm ext}(t)=\Phi_{\rm dc}+\Phi_{\rm ac}\sin\left(\omega_{\rm ac}t+\psi_{\rm ac}\right), \tag{5}$$

这里， $\Phi_{\rm dc}$ 是静态磁通偏置， $\Phi_{\rm ac}$、 $\omega_{\rm ac}$和 $\psi_{\rm ac}$分别是高频磁通泵浦的振幅、角频率和初始相位。入射微波信号会产生额外电流，因此总偏置电流为

$$I_b(t)=v_I t+I_{\rm rf}\sin\left(\omega_{\rm rf}t+\psi_{\rm rf}\right), \tag{6}$$

这里 $v_I=dI_{\rm dc}/dt$是直流扫描速率，且 $I_{\rm rf}$、 $\omega_{\rm rf}$和 $\psi_{\rm rf}$分别是微波电流的振幅、角频率和初始相位。方程（4）–（6）描述了外加磁通、微波信号和偏置电流如何影响 SQUID 动力学。

我们对耦合方程进行数值求解。为此，我们将无量纲时间、电流和磁通定义为

$$\tau=\omega_J t,\qquad i_b=\frac{I_b}{I_0},\qquad f=\frac{\Phi_{\rm ext}}{\Phi_0},$$

并将方程（4）改写为

$$\begin{cases}\dfrac{d^2\varphi_1}{d\tau^2}+\beta\dfrac{d\varphi_1}{d\tau}+\sin\varphi_1=\dfrac{i_b(\tau)}{2}+\dfrac{\varphi_2-\varphi_1+2\pi f(\tau)}{\pi\beta_L}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +i_{n1}(\tau),\\ \dfrac{d^2\varphi_2}{d\tau^2}+\beta\dfrac{d\varphi_2}{d\tau}+\sin\varphi_2=\dfrac{i_b(\tau)}{2}-\dfrac{\varphi_2-\varphi_1+2\pi f(\tau)}{\pi\beta_L}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +i_{n2}(\tau).\end{cases} \tag{7}$$

这里， $\omega_J=\sqrt{2eI_0/(\hbar C)}$是单结等离子体频率， $\beta=1/(RC\omega_J)$是无量纲阻尼参数， $\beta_L=2LI_0/\Phi_0$是环路屏蔽参数。归一化热噪声电流为$i_{nj}=I_{nj}/I_0$，其中 $j=1,2$。归一化外加磁通和总偏置电流为

$$f(\tau)=f_{\rm dc}+a_{\rm ac}\sin\left(\Omega_{\rm ac}\tau+\psi_{\rm ac}\right), \tag{8}$$

$$i_b(\tau)=v\tau+A\sin\left(\Omega_{\rm rf}\tau+\psi_{\rm rf}\right), \tag{9}$$

归一化参数为 $f_{\rm dc}=\Phi_{\rm dc}/\Phi_0$, $a_{\rm ac}=\Phi_{\rm ac}/\Phi_0$、$\Omega_{\rm ac}=\omega_{\rm ac}/\omega_J$, $A=I_{\rm rf}/I_0$、$\Omega_{\rm rf}=\omega_{\rm rf}/\omega_J$ 和$v=v_I/(I_0\omega_J)$。我们将结的热噪声电流建模为高斯白噪声，因此其归一化形式满足

$$\begin{aligned}\langle i_{nj}(\tau)\rangle&=0,\\ \langle i_{nj}(\tau)i_{nk}(\tau')\rangle&=2\beta D\,\delta_{jk}\delta(\tau-\tau'),\end{aligned} \tag{10}$$

其中， $D=k_BT/E_{J0}$ 是归一化热噪声强度， $E_{J0}=\hbar I_0/(2e)$是单结约瑟夫森耦合能。

B. 持续磁通驱动下的非平衡相位动力学

约瑟夫森结的电压态可以用倾斜势中相位粒子的运动来描述。在直流超导量子干涉器件中，两个相位自由度 φ_1 和φ_2 构成一个二维势能。将两个结方程写为

$$\frac{\Phi_0 C}{2\pi}\ddot{\varphi}_j+\frac{\Phi_0}{2\pi R}\dot{\varphi}_j+\frac{2\pi}{\Phi_0}\frac{\partial U}{\partial\varphi_j}=I_{nj},\qquad j=1,2, \tag{11}$$

并代入式（3），得到直流超导量子干涉器件的势能

$$\begin{aligned}U(\varphi_1,\varphi_2,t)=&-E_{J0}\left(\cos\varphi_1+\cos\varphi_2\right)\\ &-\frac{\Phi_0 I_b(t)}{4\pi}\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\\ &+\frac{\Phi_0^2}{8\pi^2 L}\left[\varphi_1-\varphi_2-\frac{2\pi\Phi_{\rm ext}(t)}{\Phi_0}\right]^2,\end{aligned} \tag{12}$$

这里， $E_{J0}=\Phi_0 I_0/(2\pi)$ 是单结的约瑟夫森耦合能。这三项分别表示约瑟夫森耦合能、偏置电流产生的倾斜项以及回路的磁能。偏置电流驱动两个相位，而磁通量子化将它们的差与环流联系起来。为简化分析，我们引入共模相位 ϕ和差模相位 θ [34, 35]，

$$\phi=\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2},\qquad \theta=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2},$$

其中， ϕ 描述两个结的同相运动， θ是它们相位差的一半，描述反对称运动。差模相位与环流 J 之间的关系为

$$\theta-\pi f(t)=-\frac{\pi L}{\Phi_0}J, \tag{13}$$

其中， $f=\Phi_{\rm ext}/\Phi_0$ 是归一化外加磁通，L 是回路自感。利用三角恒等式$\cos\varphi_1+\cos\varphi_2=2\cos\phi\cos\theta$，以及 $\varphi_1+\varphi_2=2\phi$ 和 $\varphi_1-\varphi_2-2\pi f=2(\theta-\pi f)$，我们将式（12）中的二维势能改写为

$$\begin{aligned}U(\phi,\theta,t)=&-2E_{J0}\cos\phi\cos\theta-\frac{\Phi_0 I_b(t)}{2\pi}\phi\\ &+\frac{\Phi_0^2}{2\pi^2 L}\left[\theta-\pi f(t)\right]^2.\end{aligned} \tag{14}$$

通过包含 $\theta-\pi f(t)$的磁能项，外加磁通会使首选的差模相位随时间发生偏移。由此产生的 θ 变化通过约瑟夫森项 $-2E_{J0}\cos\phi\cos\theta$改变共模方向上势阱的深度，从而使相位粒子逃逸率发生周期性调制。

在单结约瑟夫森隧穿器件中，当倾斜势阱内的振荡持续到粒子逃逸时，会发生非平衡相位动力学 [30]。这些

振荡会影响开关电流分布，并降低对热噪声的灵敏度，从而提高微波检测灵敏度。振荡会因内部阻尼而衰减 β。因此，单约瑟夫森结需要足够低的阻尼和足够高的扫描速率 v，才能使振荡持续到逃逸。条件 $v > \beta$ 可作为该方案中非平衡工作的判据。这些苛刻的器件和扫描参数在实验上难以实现。直流超导量子干涉器件除了电流偏置外，还提供独立的磁通控制。持续磁通驱动可补充因耗散而损失的能量，并使相位振荡在整个扫描过程中得以维持。

为选择合适的驱动参数并建立非平衡工作的定量判据，我们考察电流偏置和外加磁通作用下的确定性轨迹。利用恒等式 $\sin(\phi+\theta)+\sin(\phi-\theta) = 2\sin\phi\cos\theta$ and $\sin(\phi+\theta)-\sin(\phi-\theta) = 2\cos\phi\sin\theta$，可得共模相位和差模相位方程

$$\begin{aligned}&\frac{d^2\phi}{d\tau^2}+\beta\frac{d\phi}{d\tau}+\sin\phi\cos\theta=\frac{i_b(\tau)}{2}+\eta_\phi(\tau),\\&\frac{d^2\theta}{d\tau^2}+\beta\frac{d\theta}{d\tau}+\cos\phi\sin\theta\\&\qquad=-\frac{2}{\pi\beta_L}\left[\theta-\pi f(\tau)\right]+\eta_\theta(\tau),\end{aligned}\tag{15}$$

相应的热噪声项为 $\eta_\phi = (i_{n1}+i_{n2})/2$ 和 $\eta_\theta = (i_{n1}-i_{n2})/2$。由方程（10）可得

$$\begin{aligned}&\langle\eta_\phi(\tau)\eta_\phi(\tau')\rangle=\beta D\,\delta(\tau-\tau'),\\&\langle\eta_\theta(\tau)\eta_\theta(\tau')\rangle=\beta D\,\delta(\tau-\tau'),\\&\langle\eta_\phi(\tau)\eta_\theta(\tau')\rangle=0.\end{aligned}\tag{16}$$

方程（15）表明，外加磁通直接作用于差模相位 θ，其系数为 $2/\beta_L$。它通过 $\sin\phi\cos\theta$ 项间接调制共模相位。这种耦合使磁通驱动能够控制相位逃逸动力学。

接下来，我们利用方程（15）量化系统偏离平衡态的程度。在此分析中，我们忽略热噪声，以隔离确定性响应。在非平衡区间内，相位粒子在势阱中振荡，并偏离瞬时势阱极小值。在外加电流 $i_b(\tau)$ 和磁通 $f(\tau)$ 作用下，我们用实际相位坐标 $[\phi_{\rm det}(\tau)\ \theta_{\rm det}(\tau)]$ 与瞬时极小值 $[\phi_m(\tau)\ \theta_m(\tau)]$，

$$\mathcal{D}_{\rm neq}(\tau)=|\phi_{\rm det}(\tau)-\phi_m(\tau)|+|\theta_{\rm det}(\tau)-\theta_m(\tau)|\tag{17}$$

它可用作非平衡相位动力学的度量。$\mathcal{D}_{\rm neq}(\tau)$ 包含两种模式的位移。我们通过数值求解式（15），得到确定性轨迹 $[\phi_{\rm det}(\tau)\ \theta_{\rm det}(\tau)]$。要确定瞬时势阱极小值，需在每个时刻 τ 对式（14）中的二维势能进行求值，以便电流 $i_b(\tau)$ 和磁通 $f(\tau)$。一阶导数，

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial\phi}&=2E_{J0}\sin\phi\cos\theta-\frac{\Phi_0 I_b}{2\pi},\\\frac{\partial U}{\partial\theta}&=2E_{J0}\cos\phi\sin\theta+\frac{\Phi_0^2}{\pi^2 L}\left[\theta-\pi f(\tau)\right].\end{aligned}\tag{18}$$

在局部极小值处消失。令两个导数均为零，并除以 $2E_{J0}=\Phi_0 I_0/\pi$，得到 $[\phi_m(\tau)\ \theta_m(\tau)]$,的归一化驻点方程

$$\begin{aligned}&\sin\phi_m\cos\theta_m=i_b(\tau)/2,\\&\cos\phi_m\sin\theta_m+\frac{2}{\pi\beta_L}[\theta_m-\pi f(\tau)]=0.\end{aligned}\tag{19}$$

二维势能的海森矩阵为

$$H_m=\begin{pmatrix}2E_{J0}\cos\phi_m\cos\theta_m & -2E_{J0}\sin\phi_m\sin\theta_m\\-2E_{J0}\sin\phi_m\sin\theta_m & 2E_{J0}\cos\phi_m\cos\theta_m+\dfrac{\Phi_0^2}{\pi^2 L}\end{pmatrix}\tag{20}$$

当海森矩阵的两个特征值均为正时，驻点方程的解对应一个瞬时局部极小值。

我们首先利用无磁通驱动时的方程（17）计算相对于局部极小值的位移。在缓慢的偏置电流扫描过程中，粒子通常会跟随移动的势阱极小值，因此位移很小，如图 2(a) 和 2(b) 所示。我们将仅有电流偏置时的最大位移作为识别非平衡动力学的参考尺度，

$$\mathcal{D}_0^{\rm pk}=\max_{0\le\tau<\tau_{\rm sw}^{(0)}}\mathcal{D}_{\rm neq}^{(0)}(\tau),\tag{21}$$

其中，上标 0 表示无磁通驱动，$\tau_{\rm sw}^{(0)}$ 为逃逸时间。在磁通驱动下，位移 $\mathcal{D}_{\rm neq}^{(1)}(\tau)$超过 $\mathcal{D}_0^{\rm pk}$ 意味着偏离无驱动响应。我们定义归一化位移 $\mathcal{R}_{\rm neq}(\tau)$，以区分不同的相位动力学状态，

$$\mathcal{R}_{\rm neq}(\tau)=\frac{\mathcal{D}_{\rm neq}^{1}(\tau)}{\mathcal{D}_0^{\rm pk}}\begin{cases}>1,\text{Non-equilibrium state}\\\le 1,\text{Equilibrium state}\end{cases}.\tag{22}$$

值 $\mathcal{R}_{\rm neq}(\tau) > 1$ 表示非平衡动力学，而值 $\mathcal{R}_{\rm neq}(\tau) \le 1$ 对应近似平衡态。

图2 通过方程（15）和（18）–（20的数值解展示了这一判据。图2（a、b）和2（c、d）分别展示了无磁通驱动和有磁通驱动时相位粒子及势阱极小值的轨迹。在扫描开始时，粒子位于极小值处，因此 $\mathcal{D}_{\rm neq}(0) = 0$。没有磁通驱动时，势阱缓慢演化，粒子跟随其极小值移动，使位移保持在由 $\mathcal{D}_0^{\rm pk}$ 所确定的较小尺度内。在持续的高频磁通驱动下，势能发生振荡，粒子滞后于移动的极小值。位移 $\mathcal{D}_{\rm neq}^{1}(\tau)$ 持续振荡且振幅不断增大，达到方程（22）定义的非平衡区间，如图2（e）所示。

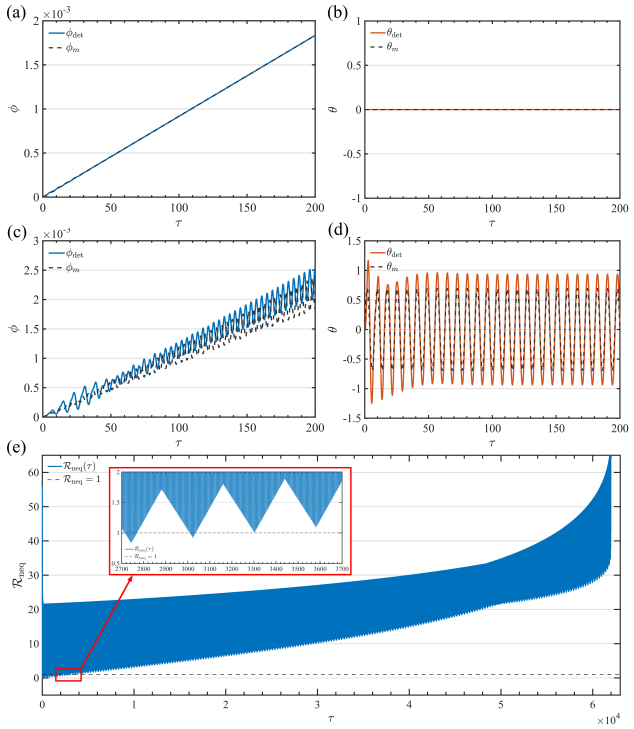

图 2. 相位粒子坐标 $[\phi_{\rm det}(\tau)\ \theta_{\rm det}(\tau)]$ 和瞬时势阱极小值$[\phi_m(\tau)\ \theta_m(\tau)]$随时间的演化：(a,b) 无磁通驱动，(c,d) 有磁通驱动。(e) 根据这些轨迹，使用方程 (17) 和 (22) 计算得到的归一化位移 $\mathcal{R}_{\rm neq}(\tau)$。横轴为无量纲时间 $\tau=\omega_J t$，因此从偏置扫描开始到 (e) 中轨迹结束的时间间隔（$\tau\simeq 6.2\times10^4$）约为 3.0 μ 秒。偏置电流扫描速率为 $v=1.8355\times10^{-5}$。磁通参数为 $a_{\rm ac}=0.35$、$f_{dc}=0$、$\Omega_{ac}=0.8012$ 和 $\psi_{ac}=0$。全文使用的无量纲积分步长为 $h=0.02$ [36]。

C. 数值模拟与统计分析

在刻画了非平衡相位动力学的条件后，下面说明如何求解方程（7），并分析其解以量化微波探测灵敏度。

与我们的单结研究一样，[14, 30]，我们通过区分有无微波输入时的切换电流分布来检测微弱微波信号。对于每种条件，我们使用随机Heun预测-校正算法反复积分方程（7）[37, 38]。状态变量为两个结相位及其时间导数，即（φ_1、$\dot\varphi_1$、φ_2、$\dot\varphi_2$），从而得到四个一阶随机微分方程。在每个积分步内，对于给定结，在预测阶段和校正阶段使用相同的噪声样本。结噪声电流为

$$i_{nj}^{(m)}=\sqrt{\frac{2\beta D}{h}}\,\mathcal{N}_j^{(m)}(0,1),\qquad j=1,2, \tag{23}$$

这里，$\mathcal{N}_j^{(m)}(0,1)$ 是一个标准高斯变量，其均值为零、方差为单位方差，适用于结 j 在时间步m。各结之间以及各时间步之间的样本彼此独立。我们采用具有实验代表性的参数$I_0=140$ nA、$R=480\ \Omega$、$C=1$ pF 和 $L=3$ nH [29]，分别对应 $\beta\simeq0.101$ 和 $\beta_L\simeq0.406$。浴温为 $T=30$ mK。

直流偏置从零开始，并以 v_I =0.053 A/s的速率增加。我们分别根据方程（8）和（9）施加磁通驱动和连续波微波电流。微波输入功率在阻抗为 $Z_0=50\ \Omega$的参考端口处进行校准，

$$P_{\rm rf}=\frac{Z_0 I_{\rm rf}^2}{2},\qquad A=\frac{1}{I_0}\sqrt{\frac{2P_{\rm rf}}{Z_0}}. \tag{24}$$

这里 $I_{\rm rf}$ 表示输入总电流的峰值，$P_{\rm rf}$ 以瓦特为单位表示，而 $P_{\rm dBm}=10\log_{10}[P_{\rm rf}/(1\,{\rm mW})]$。我们假设全部电流都流入 SQUID，并忽略线路损耗和阻抗失配。经过校准的端口功率不同于结并联电阻中的耗散功率。第 III D 节介绍脉冲能量校准和注入时序。我们从 $[-0.1,0.1]$ 中独立抽样初始结相位，并将两个初始相速度均设为零，对应于初始处于超导状态的器件。施加磁通时，我们在与外加磁通直流分量对应的零电流平衡相位上，叠加从 $[-0.01,0.01]$ 中独立抽样的扰动。

遵循单结的数值切换判据[39]，，我们采用

$$\varphi_{\rm th}(\tau)=\pi-\arcsin[\frac{i_{\rm b}(\tau)}{2}] \tag{25}$$

作为电压切换的通用相位阈值。当 $\varphi_1>\varphi_{\rm th}$ 或 $\varphi_2>\varphi_{\rm th}$ 首次发生时，我们记录切换时间 $\tau_{\rm sw}$。对应的切换电流为 $i_{\rm sw}=v\tau_{\rm sw}$。电流集合 $i_{\rm sw}^{(j)}$（对于 $j=1$，2，3，……，N）构成指定条件下的切换电流分布。我们采用 $N=10\,000$ 次实现。

我们将无微波信号和有微波信号时模拟得到的切换电流分布分别记为 P_0 和 P_1。[图 3(a)]我们通过接收者操作特征（ROC）曲线的曲线下面积（AUC）来量化它们的可分性。图 3(b) 展示了 ROC-AUC（$\mathcal{R}_{AUC}$）计算所依据的混淆矩阵。$\mathcal{R}_{AUC}$为 0.5 对应于机会水平判别，而$\mathcal{R}_{AUC}$ 为 1 则对应于完全分离。根据我们先前的工作 [30]，，当 $\mathcal{R}_{AUC}\geq0.7$时，我们将该信号归类为可检测信号。该方法的实现及其理论依据见参考文献 [30]。

III. 数值结果与物理解释

我们利用上述模型和统计分析，考察磁通驱动如何影响直流超导量子干涉器件对微弱微波信号的检测灵敏度。

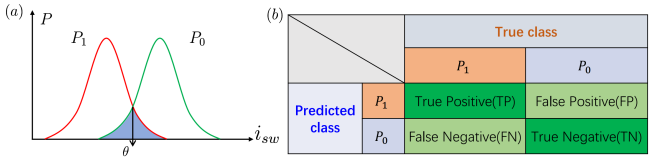

图3. 开关电流分布的 ROC-AUC 分析。(a) 有微波输入和无微波输入时的开关电流分布。(b) 二分类的混淆矩阵。

A. 磁通驱动对弱信号判别的影响

直流磁通偏置会调制直流超导量子干涉器件的临界电流，如图 4(a) 所示。我们首先评估这种调制本身是否能提高灵敏度。对于每个直流磁通 $f_{\mathrm{dc}} = \Phi_{\mathrm{dc}}/\Phi_0$，我们分别在有无微波信号的情况下求解方程（7），并根据所得的开关电流分布计算 $\mathcal{R}_{AUC}$。图 4(a) 显示，临界电流达到

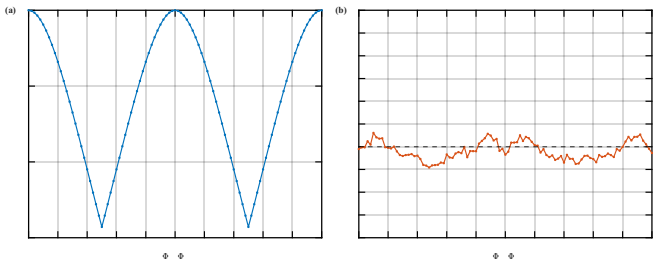

图4. (a) 直流超导量子干涉器件临界电流随直流磁通偏置的变化。(b) 模拟微波探测灵敏度随直流磁通偏置的变化。微波频率和功率分别为 2.63 GHz 和 −120 dBm。

在半整数磁通量子附近出现极小值，周期约为一个磁通量子。在固定输入为−120 dBm 时，$\mathcal{R}_{AUC}$ 仅在约 0.65 至 0.73[图 4(b)], 表明通过调谐获得的灵敏度增益很小I_c。

接下来设定 $f_{\mathrm{dc}} = 0$，并研究高频交流（AC）磁通驱动。第II B节中的方程（15）指出，驱动振幅和频率是关键参数。我们将微波频率和功率分别固定为 2.63 GHz 和 −125 dBm。在每个驱动频率和振幅下，我们计算有微波输入和无微波输入时的开关电流分布，并使用 $\mathcal{R}_{AUC}$评估其可分性。我们将两个初始相位都设为零，并使驱动频率独立于微波频率进行扫描。

图 5 展示了驱动频率—振幅平面中 $\mathcal{R}_{AUC}$ 的局域高值区域。在 $\Phi_{\mathrm{ac}} = 0$，$\mathcal{R}_{AUC}$ 约为 0。6。在交流磁通驱动下，若干频率与振幅组合均可产生 $\mathcal{R}_{AUC} > 0.9$。由于器件参数、噪声强度和微波输入均保持不变，这种变化反映了磁通驱动对两个切换电流分布之间间隔的影响。高 $\mathcal{R}_{AUC}$

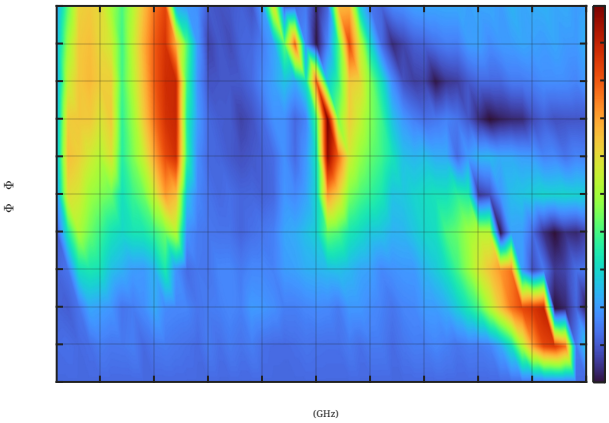

图5. 直流超导量子干涉器件 $\mathcal{R}_{AUC}$ 与高频磁通驱动的频率和幅度的关系。微波频率为 2.63 GHz，输入功率为 −125 dBm，静态磁通偏置为零。

区域随磁通幅度呈非单调变化，反映了受迫相位运动、微波激励与非线性动力学之间的相互作用。在接下来的分析中，我们选择 $f_{\mathrm{ac}} = 2.63$ GHz 和 $\Phi_{\mathrm{ac}} = 0.35\Phi_0$，以最大化微波响应。

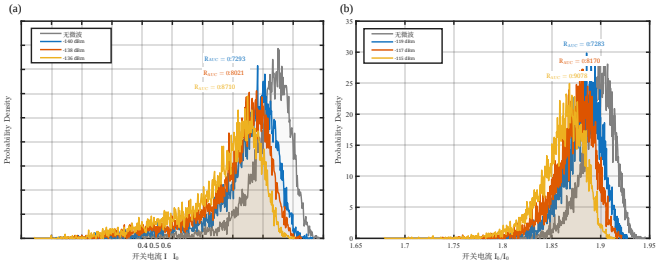

图6. 不同连续波微波功率下的开关电流分布：（a）有高频磁通驱动；（b）无高频磁通驱动。

图6比较了有无高频磁通驱动时的判别性能。在没有驱动时，−119 dBm信号产生 $\mathcal{R}_{AUC} = 0.7283$，高于0.7的检测阈值。在 −117 dBm和−115 dBm下，$\mathcal{R}_{AUC}$ 分别增至0.8170和0.9078。采用高频磁通驱动时，−140 dBm信号产生 $\mathcal{R}_{AUC} = 0.7293$。在 −138 dBm和−136dBm下，$\mathcal{R}_{AUC}$ 分别达到0.8021和0.8710。该驱动显著提高了微波探测灵敏度。

B. 高频磁通驱动下热噪声影响减弱

模拟表明，高频磁通驱动能够维持非平衡相位动力学，并提高弱信号灵敏度。我们的单结研究 [30] 将

增强归因于非平衡区间内热噪声影响的减弱。我们检验同一机制是否适用于直流超导量子干涉器件。在没有微波输入的情况下，我们比较了在 $T = 30$、35、40 和 45 毫开尔文下，有无高频磁通驱动时的切换电流分布。

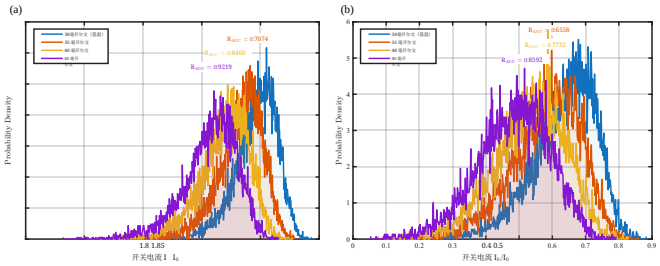

图 7. 不同温度下直流超导量子干涉器件的开关电流分布：（a）无交流磁通驱动；（b）有交流磁通驱动。每个 $\mathcal{R}_{AUC}$ 量化了给定温度下的开关电流分布与 30 毫开尔文下开关电流分布之间的差异。其余模拟设置与图 5相同。

无磁通驱动时 [图 7(a)], 随着温度升高，开关电流分布向较低电流方向移动，其低电流尾部变宽。相对于 30 毫开尔文，在 35、40 和 45 毫开尔文下， $\mathcal{R}_{AUC}$ 分别为 0.7074、0.8460 和 0.9219，表明热效应显著。在高频磁通驱动下 [图 7(b)], 随着温度升高，分布向较低电流方向移动，但位移明显较小。相对于 30 毫开尔文，在 35、40 和 45 毫开尔文下， $\mathcal{R}_{AUC}$ 分别为 0.6558、0.7732 和 0.8592。与单结情形一样，受驱动器件对热噪声不那么敏感。

无磁通驱动时，热激活主导相粒子逃逸。逃逸率随温度呈指数增长，使切换电流分布强烈依赖于温度。在高频磁通驱动下，相位粒子和势垒都会持续振荡。此时，受迫相位动力学在很大程度上决定逃逸，而热噪声仅起较小的扰动作用。温度升高相同幅度时，所得切换电流分布之间的差异较小，如较低的 $\mathcal{R}_{AUC}$ 所示。

C. 检测灵敏度对相对相位的依赖

此前的模拟将磁通驱动和微波信号的初始相位都设为零。现在我们考察它们的相对相位如何影响直流超导量子干涉器件的灵敏度。

对于 -135dBm、频率为 $f_{\rm rf}$ =2.63 GHz 的微波信号，我们改变相对相位 $\Delta\phi = \psi_{\rm ac} - \psi_{\rm rf}$，并在每种设置下根据有微波信号和无微波信号时的 $\mathcal{R}_{AUC}$ 切换电流分布计算 图 8 显示，$\mathcal{R}_{AUC}$ 随 $\Delta\phi$呈周期性变化，在 0.931 和 0.930 附近分别出现峰值，而在 151° 和 332°附近出现接近 0.5 的极小值。相对相位会显著影响对相同信号的灵

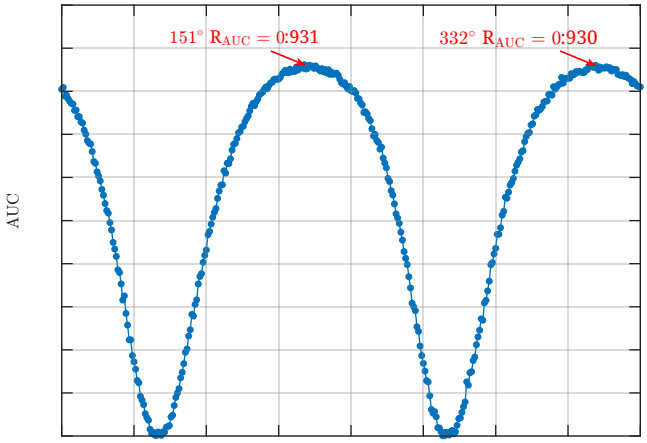

图 8. 固定微波信号下模拟得到的 $\mathcal{R}_{AUC}$ 随磁通驱动与微波信号之间的相对相位 $\Delta\phi$ 的变化。微波功率为 $P_{\rm rf} = -135$ dBm，频率为 $f_{\rm rf} = f_{\rm ac} = 2.63$ GHz，磁通幅度为 $\Phi_{\rm ac} = 0.35\Phi_0$。

敏度。对于频率和相位已知的弱微波信号，当磁通驱动与其频率匹配且相位差保持在某个 $\mathcal{R}_{AUC}$ 最大值附近时，预期可获得最高灵敏度。

采用图 8中的设置，我们针对一系列微波输入功率模拟开关电流分布，并评估 $\mathcal{R}_{AUC}$，如图 9所示。当微波信 -142 dBm号功率为

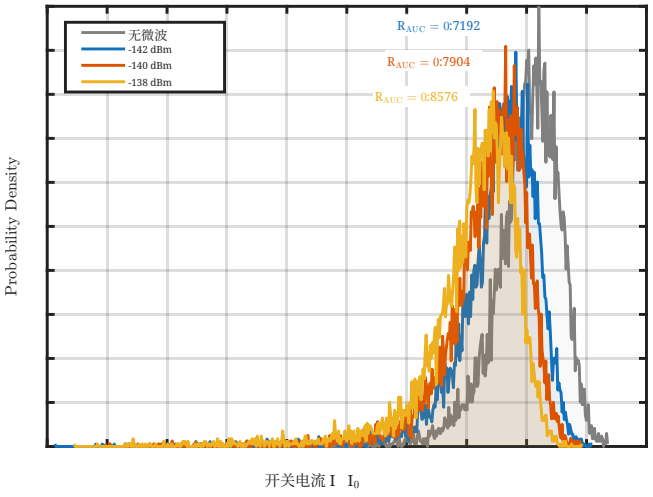

图 9. 不同微波输入功率下模拟得到的直流超导量子干涉器件开关电流分布以及 $\mathcal{R}_{AUC}$。相对相位为 $\Delta\phi = 151°$。其余设置与图 8相同。

号仍可检测到，此时 $\mathcal{R}_{AUC} = 0.7192 > 0.7$。因此，估算得到的最小可检测功率为 $P_{\rm min} \simeq -142$dBm，比图 6中的无驱动值低约 23 dB。

为便于与其他探测器进行比较，我们

将该最小功率表示为带宽归一化形式。在最大偏置电流为 $I_{b,\max} = 2.02I_0$ 且扫描速率为 $v_I = 0.053$ A/s 的情况下，一次扫描的持续时间为

$$T_{\rm r} = \frac{I_{b,\max}}{v_I} \simeq 5.34\ \mu\text{s}. \tag{26}$$

将此持续时间视为均匀积分时间，我们估算单边等效噪声带宽为

$$\Delta f_{\rm eff} \sim \frac{1}{2T_{\rm r}} \simeq 9.4 \times 10^4\ \text{Hz}. \tag{27}$$

利用此估算带宽 $\Delta f_{\rm eff}$ 以及满足检测准则的最小功率 $P_{\min} = -142\,\text{dBm} \simeq 6.31 \times 10^{-18}\,\text{W}$，可得

$$\mathcal{P}_{\rm norm} \equiv \frac{P_{\min}}{\sqrt{\Delta f_{\rm eff}}} \simeq 2 \times 10^{-20}\ \text{W}/\sqrt{\text{Hz}}. \tag{28}$$

这里，$\mathcal{P}_{\rm norm}$ 是按估算带宽平方根归一化的最低可检测功率。

D. 少光子微波脉冲的阈值响应与判别

接下来，我们考察直流超导量子干涉器件对弱微波脉冲的响应，这些脉冲的能量相当于少数几个光子。遵循我们先前的单结研究 [30], 我们将高斯包络微波脉冲加入总 SQUID 偏置电流中，

$$I_{\rm rf}^{(N_{\rm ph})}(t) = \sqrt{N_{\rm ph}}\, I_{1\rm ph} \exp\left[-\frac{(t-t_d)^2}{2\sigma_t^2}\right] \times \cos[2\pi f_{\rm rf}(t-t_d)]\,, \tag{29}$$

这里 $N_{\rm ph}$ 表示光子数，t_d 表示脉冲中心时间，σ_t 表示电流包络的高斯宽度，而 $I_{1\rm ph}$ 表示对应于一个光子能量的峰值电流。在模拟中，$I^{(N_{\rm ph})}{}_{\rm rf}\,(t)/I_0$ 替代了方程（9）中的连续波项。我们假设电流与 SQUID 完全耦合，并忽略阻抗失配和传输损耗。脉冲能量为

$$E_{\rm p} = Z_0 \int_{-\infty}^{\infty} \left[I_{\rm rf}^{(N_{\rm ph})}(t)\right]^2 dt = N_{\rm ph} h_{\rm P} f_{\rm rf}, \tag{30}$$

其中 $h_{\rm P}$ 为普朗克常数，$Z_0 = 50\ \Omega$ 为端口阻抗。在 $2\pi f_{\rm rf}\sigma_t \gg 1$的极限下，对式（29）中的电流平方积分可得

$$I_{1\rm ph} \simeq \sqrt{\frac{2h_{\rm P} f_{\rm rf}}{Z_0\sqrt{\pi}\,\sigma_t}}. \tag{31}$$

因此，$N_{\rm ph}$ 是根据输入脉冲能量定义的等效光子数。

我们采用 $f_{\rm rf} = 2.63$ GHz 和 $\sigma_t = 5$ ns。相应的单光子能量为 $h_{\rm P} f_{\rm rf} = 1.743 \times 10^{-24}$ J，由此根据公式（31）得到 $I_{1\rm ph} \simeq 2.805$ nA 。参考第 III C 节，我们将高频磁通驱动设为

$$\Phi_{\rm ext}(t) = 0.33\Phi_0 \cos[2\pi f_{\rm rf}(t-t_d) + 150^\circ]\,. \tag{32}$$

直流磁通为零，高频驱动与脉冲载波频率匹配，脉冲中心的磁通相位为 150°。对于无驱动对照，我们设定 $\Phi_{\rm ext} = 0$。有限包络和相位设置适用于脉冲方案，其相位依赖性不同于连续波情形。磁通驱动会使开关电流范围发生偏移，因此脉冲时序不同于我们此前的单结方案；在该方案中，脉冲位于偏置扫描 [30] 的中点附近。对于每种磁通条件，我们以 $N_{\rm ph} = 0$切换电流分布作为参考，并将脉冲中心置于其低电流一侧、靠近逃逸起始点的位置。扫描持续时间为$T_{\rm r} = I_{b,\max}/I_b$，我们采用

$$\frac{t_d}{T_{\rm r}} = \begin{cases} 0.495, & \Phi_{\rm ac} = 0.33\Phi_0, \\ 0.9249, & \Phi_{\rm ac} = 0. \end{cases} \tag{33}$$

对于$I_{b,\max} = 2.02I_0$、$I_b = 0.053$ A/s和 $T_{\rm r} \simeq 5.336\ \mu$s，这些设置分别得到 $t_d \simeq 2.641\ \mu$s和 $4.935\ \mu$s。脉冲中心处对应的偏置电流分别为139.986 nA和261.555 nA。在这些电流下，模拟得到的累积开关比例分别为9.94%和6.80%。因此，两个脉冲中心均位于背景分布的低电流侧，而大多数试验仍处于零电压态。在 $T = 30$ mK的浴温下，我们计算了两种磁通条件下每个脉冲SCD与其背景SCD之间的 $\mathcal{R}_{AUC}$，如图10所示。在没有高频磁通驱动时，$\mathcal{R}_{AUC}$ 随脉冲能量增加而增大。对于 $N_{\rm ph} = 40$、42和43，$\mathcal{R}_{AUC}$ 分别为0.6859、0.6972和0.7056，从而得到43的最小可检测等效光子数。在有高频磁通驱动时，能量为一个光子的脉冲产生 $\mathcal{R}_{AUC} = 0.7075$，略高于0.7这一名义检测阈值。对于 $N_{\rm ph} = 2$ 和4，相应的曲线下面积分别为0.8343和0.8957。此外，图10还显示了一个范围，在该范围内，不同等效光子数会产生可区分的响应。高频磁通驱动提高了灵敏度，但缩小了这一动态范围。$\mathcal{R}_{AUC}$ 在无驱动时的 $N_{\rm ph} \in [43, 110]$ 以及有驱动时的 $N_{\rm ph} \in [1, 4]$ 上均近似线性变化。

IV. 结论与讨论

在对利用单个约瑟夫森结的非平衡动力学进行弱微波探测的数值研究基础上，我们研究了用高频磁通驱动直流超导量子干涉器件进入非平衡状态、以提高弱信号探测能力的可行性。与单结情形

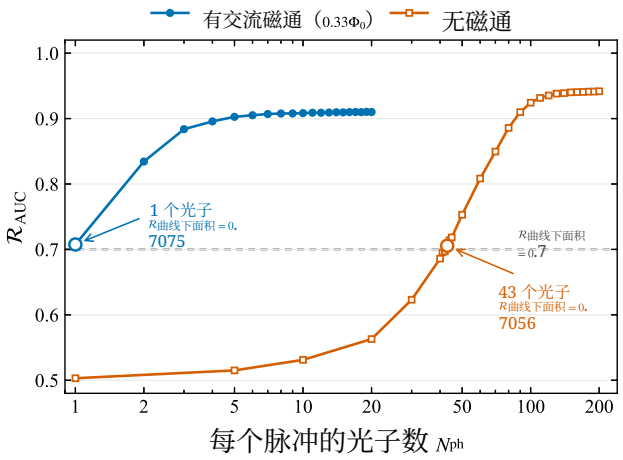

图 10. 微波脉冲的直流超导量子干涉器件 $\mathcal{R}_{AUC}$ 与等效光子数的关系。蓝色圆圈表示高频磁通驱动，橙色方块表示无驱动情况。水平虚线标示检测阈值 $\mathcal{R}_{AUC} = 0.7$。脉冲载波频率为 2.63 GHz，高斯宽度为 5 ns。

一样，非平衡直流超导量子干涉器件对热噪声不那么敏感，因此能够接近单微波光子能量尺度。根据所采用的二元分类判据，模拟结果表明，该器件在单光子能量尺度上具有统计判别能力。

该探测器还显示出随光子数变化的响应，但动态范围较窄。所提出的协议能够区分通过重复试验获得的两种开关电流分布。因此，所展示的灵敏度适用于系综统计，而单次探测仍超出该协议的范围。与非平衡单结方案相比，磁通驱动的直流超导量子干涉器件在实验上更易实现，因为它能够在适中的 Q 和偏置电流扫描速率下运行。对于相敏操作，高频磁通驱动必须与微波信号同步。

模拟纳入了热噪声，并描述了理想化的运行条件。宏观量子隧穿、外部磁通涨落、结临界电流、电阻和电容的不匹配，以及非对称驱动耦合，也可能影响检测灵敏度，因此需要在实验中加以考虑。应选择合适的磁通驱动幅度和频率、偏置电流扫描速率，以及微波脉冲注入时序和耦合方式，以最大限度地提高灵敏度。

V. 致谢

本研究部分受地方科技发展中央引导资金（编号：2025ZYD0154）和国家重点研发计划（NKRDC）（项目编号：2021YFA0718803）资助。

[1] J. Deng、P. Burasa 和 K. Wu，面向集成微波与太赫兹传感和通信系统的联合多频段线性干涉接收机，IEEE 微波理论与技术汇刊 **72**，5550（2024）。[2] K. Brinker、M. Dvorsky、M. T. Al Qaseer 和 R. Zoughi，微波与毫米波无损检测与评估进展综述：原理与应用，Philos. Trans. R. Soc. A **378**，20190585（2020）。[3] R. Chandra、H. Zhou、I. Balasingham 和 R. M. Narayanan，微波医疗传感与成像的机遇与挑战，IEEE 生物医学工程汇刊 **62**，1667（2015）。[4] L. Jia、Y. Wang、Y. Song、W. Cui、Z. Chen、R. Wang、Y. Liu、W. Zhang 和 M. Bao，高功率微波检测技术综述，IEEE 仪器与测量汇刊 **73**，1（2024）。[5] A. Berlin、D. Blas、R. T. D'Agnolo、S. A. Ellis、R. Harnik、Y. Kahn 和 J. Schütte-Engel，利用微波腔探测高频引力波，Phys. Rev. D **105**，116011（2022）。[6] H. Zheng、L. Wei、H. Wen 和 F. Li，引力波穿过交变磁场时的电磁响应：一种探测高频引力波的方案，Phys. Rev. D **98**，064028（2018）。[7] R. Bradley、J. Clarke、D. Kinion、L. J. Rosenberg、K. van Bibber、S. Matsuki、M. Mück 和 P. Sikivie，微波

暗物质轴子的腔体搜寻，《现代物理评论》**75**, 777 (2003). [8] R. Lasenby，轴子暗物质电磁搜寻的参数化，《物理评论D》**103**, 075007 (2021). [9] S. Staggs、J. Dunkley 和 L. Page，宇宙微波背景的最新发现：近期进展综述，《物理进展报告》**81**, 044901 (2018). [10] A. Senanian、S. Prabhu、V. Kremenetski、S. Roy、Y. Cao、J. Kline、T. Onodera、L. G. Wright、X. Wu、V. Fatemi，等，使用模拟量子储备计算机进行微波信号处理，《自然·通讯》**15**, 7490 (2024). [11] E. Il'ichev，微波光子探测器，《固体物理》**58**, 2160 (2016). [12] X. Zou、B. Lu、W. Pan、L. Yan、A. Stöhr 和 J. Yao，用于微波测量的光子学，《激光与光子学评论》**10**, 711 (2016). [13] E. Albertinale、L. Balembois、E. Billaud、V. Ranjan、D. Flanigan、T. Schenkel、D. Estève、D. Vion、P. Bertet 和 E. Flurin，利用微波光子计数器通过荧光探测自旋，《自然》**600**, 434 (2021). [14] Y. Chai、S. Wang、P. OuYang 和 L. Wei，通过电流偏置约瑟夫森结测量微弱微波信号：趋近能量探测的量子极限，《物理评论B》**111**, 024501 (2025). [15] A. Westlund、M. Winters、I. G. Ivanov、J. Hassan、P.-Å. Nilsson、E. Janzén、N. Rorsman 和 J. Grahn，石墨烯

作为零偏置微波探测器的自开关二极管，《应用物理快报》**106** (2015). [16] M. Jing、Y. Hu、J. Ma、H. Zhang、L. Zhang、L. Xiao 和 S. Jia，基于微波缀饰里德伯光谱学的原子超外差接收机，《自然·物理》**16**, 911 2020( ). [17] C. H. Wong 和 M. G. Vavilov，基于半导体双量子点的单微波光子探测器的量子效率，《物理评论A》**95**, 012325 (2017). [18] G.-H. Lee、D. K. Efetov、W. Jung、L. Ranzani、E. D. Walsh、T. A. Ohki、T. Taniguchi、K. Watanabe、P. Kim、D. Englund，等，基于石墨烯约瑟夫森结的微波辐射热计，《自然》**586**, 42 (2020). [19] K. C. Fong 和 K. Schwab，低温下石墨烯的超灵敏宽带热测量，《物理评论X》**2**, 031006 (2012). [20] B. G. Oripov、D. S. Rampini、J. Allmaras、M. D. Shaw、S. W. Nam、B. Korzh 和 A. N. McCaughan，拥有40万个像素的超导纳米线单光子相机，《自然》**622**, 730 (2023). [21] K. Inomata、Z. Lin、K. Koshino、W. D. Oliver、J.-S. Tsai、T. Yamamoto 和 Y. Nakamura，利用人工 λ型三级系统的单微波光子探测器，《自然·通讯》**7**, 12303 (2016). [22] Y.-F. Chen、D. Hover、S. Sendelbach、L. Maurer、S. Merkel、E. Pritchett、F. Wilhelm 和 R. McDermott，基于约瑟夫森结的微波光子计数器，《物理评论快报》**107**, 217401 (2011). [23] A. Pankratov、A. Gordeeva、A. Chiginev、L. Revin、A. Blagodatkin、N. Crescini 和 L. Kuzmin，利用欠阻尼约瑟夫森结探测单模热微波光子，《自然·通讯》**16**, 3457 (2025). [24] S. Kono、K. Koshino、Y. Tabuchi、A. Noguchi 和 Y. Nakamura，传播中的微波光子的量子无损测量，《自然·物理》**14**, 546 (2018). [25] L. Balembois、J. Travesedo、L. Pallegoix、A. May、E. Billaud、M. Villiers、D. Estève、D. Vion、P. Bertet 和 E. Flurin，灵敏度达10^{-22} W/Hz的循环运行微波单光子计数器，《物理评论应用》**21**, 014043 (2024). [26] C. Braggio、L. Balembois、R. Di Vora、Z. Wang、J. Travesedo、L. Pallegoix、G. Carugno、A. Ortolan、G. Ruoso、U. Gambardella，等，利用基于transmon的单微波实现轴子暗物质的量子增强传感光子计数器，《物理评论X》**15**，021031（2025）。[27] J. Govenius、R. Lake、K. Tan 和 M. Möttönen，利用邻近效应诱导的约瑟夫森结中的电热反馈探测仄焦耳微波脉冲，《物理评论快报》**117**，030802（2016）。[28] Y. Chai、M. Wang、S. Wang、P. Ouyang 和 L. Wei，不受热噪声影响的宽带单微波光子探测器，《物理评论B》**113**，014515（2026）。[29] J.-X. He、P.-H. Ouyang、Y.-Q. Chai、H. Chang、Q. He 和 L.-F. Wei，宽带微波光子约瑟夫森阈值探测器的实验演示，《应用物理快报》**126** （2025）。[30] Y. Chai、M. Wang、S. Wang、P. Ouyang 和 L. Wei，利用电流偏置约瑟夫森结测量微弱微波信号：通过快速偏置电流扫描抑制其热噪声，《物理评论B》**113**，224503（2026）。[31] J. M. Martinis、M. H. Devoret 和 J. Clarke，宏观自由度量子行为的实验检验：约瑟夫森结两端的相位差，《物理评论B》**35**，4682（1987）。[32] I. A. Nazhestkin、G. I. Gubochkin、J. Shvartzberg、S.-p. M. Rajam、S. V. Egorov、V. L. Gurtovoi、V. V. Ryazanov、V. S. Stolyarov 和 D. S. Yakovlev，提高约瑟夫森结构测量中的信号纯度，《先进物理研究》**4**，e2500032（2025）。[33] W. C. Stewart，约瑟夫森结的电流-电压特性，《应用物理快报》**12**，277（1968）。[34] B. Chesca、R. Kleiner 和 D. Koelle，超导量子干涉器件理论，载于《超导量子干涉器件手册》（John Wiley & Sons, Ltd，2004），第2章，第29–92页。[35] A. Kamal、J. Clarke 和 M. H. Devoret，微波超导量子干涉器件放大器中的增益、方向性和噪声：输入-输出方法，《物理评论B》**86**，144510（2012）。[36] E. Arad、O. Farago 和 N. Grønbech-Jensen，用于软物质模拟中精确构型采样的g-jf恒温器，《以色列化学杂志》**56**，629（2016）。[37] K. Heun 等，用于近似积分单一自变量微分方程的新方法，《数学物理杂志》**45**，7（1900）。[38] R. L. Honeycutt，随机龙格-库塔算法。I. 白噪声，《物理评论A》**45**，600（1992）。[39] C. Cheng、G. Salina、N. Grønbech-Jensen、J. A. Blackburn、M. Lucci 和 M. Cirillo，在零温或极低温下对一维势阱中逃逸过程的建模，《应用物理杂志》**127**，143901（2020）。