arXiv:2611.28647v1 [physics.ao-ph] 21 Nov 2026

LayerCake v1.0：用于低阶至中阶自动化模型开发的框架

Jonathan Demaeyer[1], Oisín Hamilton[2], 和 Stéphane Vannitsem[3]

[1]气象与气候研究服务处，比利时皇家气象研究所，比利时[2]新西兰统计局 - Tatauranga Aotearoa，基督城，新西兰[3]物理与数学科学学院 & 环境学院，南洋理工大学，新加坡

通讯作者：Jonathan Demaeyer(Jonathan.Demaeyer@meteo.be)

摘要。本文介绍了一种名为 LayerCake 的新型模型开发框架。该框架使用 Python 语言编写，依托 Sympy 符号计算包，对二维空间扩展地球物理模型进行伽辽金投影。这些投影在有限的一组模态上，给出了模型在谱空间中的时间演化算子。模型产生的趋势项既可通过数值方法求值（用于时间积分），也可通过符号方法求值（用于参数敏感性分析和分岔分析）。我们提供了若干简单的地球物理模型示例，以展示该框架的功能，并简要说明如何设计更复杂的系统。

1 引言

地球的大气构成了一个强迫耗散动力系统。该系统的内部变率源于数量极其庞大的过程之间的相互作用，这些过程跨越广泛的时空尺度，并受到来自太阳的辐射能驱动。该系统涌现出的复杂性极其庞大，意味着要在单一框架内评估其特性是不可能完成的任务。减少模型所描述的过程数量，是科学方法的核心，也是大气建模与预测取得成功的根源。

自科学计算以及现代大气和气候科学兴起以来，模型数量迅速增长，推动了高时空分辨率大气和气候模型的发展。除了准确、定量地描述实际动力学所必需的超高分辨率模型外，另外两类模型一直被视为理解大气动力学的基石，即简化模型和中阶模型。这些模型通过将描述限制在少数相互作用的过程上来构建

彼此结合，以评估和理解联合动力学的涌现（Ghil and Childress，1987；Nicolis and Nicolis，2007；Dijkstra，2013）。通常，降阶模型具有 1 到 100 个自由度，而对于中阶模型，变量数量的范围更广，通常为 1,000 到 100,000 个。这类模型的主要优势在于易于在现代计算机上实现。降阶模型的另一项优势是，其中一些解可以通过解析方法求得（Guckenheimer and Holmes，1983；Nicolis，1995；Kuznetsov，2023）。

在过去降阶模型的发展过程中，所考虑的变量数量通常较少。这一时期的著名模型包括 Henry Stommel（Stommel，1948）和 Walter Munk（Munk，1950）的风驱输运模型，以及 Barry Saltzman（Saltzman，1962）的对流模型；Ed Lorenz 以此证明了对初始条件的敏感性这一性质（Lorenz，1963）。对于某些地球物理过程，模型的维数甚至可以降至一个或两个变量，例如 Stommel（Stommel，1961）提出的双箱模型，用于描述北大西洋翻转环流的动力学；又如带有反照率反馈的 0 变量 Budyko-Sellers全球温度模型（Budyko，1969；Sellers，1969）。在低阶建模迈出这些关键的初步步伐之后，人们取得了长足进展，并建立了多个复杂程度各异的模型，用于描述大气流动（例如 Pedlosky，1970；Charney 和 Straus，1980；Pedlosky 和 Frenzen，1980；Cehelsky 和 Tung，1987；Yoden，1997）、海洋流动（例如 Pierini，1990；Jin 和 Ghil，1990；Simonnet 等，2003；Pierini，2011）以及多尺度海气耦合动力学（例如 Hasselmann，1976；Frankignoul 和 Hasselmann，1977；Lorenz，1984；Roebber，1995；Vannitsem 等，2015；Vannitsem，2015）等。

近期，我们开发了一系列开源的降阶多尺度模型（De Cruz 等，2016；Hamilton 等人，2023；Xavier 等，2024），并将其整合在同一代码库中，该代码库称为 qgs[1]（Demaeyer 等，2020）。这些模型允许用户选择模态数量、基函数和参数值，但每个模型组成部分（陆地、海洋、大气）的控制方程是固定的。在当前工作中，我们引入了一个新的框架，在该框架中，控制方程也可以自由选择。通过允许用户定义自己的控制方程、场投影、定义域、边界条件和参数值，该框架显著扩展了模型的功能和灵活性。这个新框架称为*LayerCake*。

下一节将介绍这一新的建模框架。第 3 节将介绍该新框架在正压状态行为、热带动力学以及过度简化的行星尺度运动方面的应用。框架的潜力及其扩展将在结论部分讨论。

2 一种新的建模框架

LayerCake 是一个新的 Python 框架，旨在简化低阶到中阶地球物理模型的开发。这些模型通过对偏微分方程（PDEs）进行谱离散化获得，这一过程称为 Galerkin 方法。由于地球物理流动通常具有分层特性，该框架专注于定义在地球二维域上的场。不过在实践中，用户可以利用该框架定义多个 PDE 层，以表示一个偏微分方程耦合系统。

用户必须在 Python 脚本中表达偏微分方程各项，从而使系统定义过程能够自动化。随后，该方法主要依赖 Sympy 符号计算框架（Meurer 等，2017），在一组由用户定义的空间模态构成的基上应用 Galerkin 方法。这包括执行符号或数值积分，以获得表示模型偏微分方程向该基投影的内积。通过这一过程，可得到一组常微分

[1]对于q准g地转s谱模型。

方程（常微分方程），其中包含模型预报场的投影系数。对这些常微分方程进行积分后，便可得到这些系数随时间的演化，从而在（截断的）谱空间中生成模型轨迹。

LayerCake 的一个特点是，其输出要么是经过 Numba 加速的 Python 可调用对象（Lam 等，2015）——可直接提供数值函数——要么是一组符号常微分方程趋势项，可以在任何受支持的语言中进行积分（目前包括 Fortran、Julia 和 Python，未来可能会添加其他语言）。这两种不同的输出使用户能够使用现代分析工具，而这些工具可用不同语言实现（Demaeyer 和 Hamilton，2025；Datseris，2018；Doedel 等，2007）。

2.1 复合偏微分方程

LayerCake 允许用户逐项组合和指定其方程组，其中包括作用于场 ψ 的基本项 $T[\psi](u,\ v)$，例如线性算子（∇，∇^2，∂_u，∂_v，...）。这些场定义在指定的空间坐标 u 和 v 上。也可以指定这些坐标的简单解析函数 $T(u,\ v)$。还可以将这些基本项进行函数复合和乘积运算，并将其指定为方程的组成部分，从而纳入非线性行为。最后，还提供了一些有用的算子，例如平流（雅可比算子）和场的梯度。

利用 LayerCake 提供的这些构建模块，可以定义一组二维偏微分方程（PDEs）

$$\partial_t \mathcal{F}_i^{LHS}\left[\psi_1,\ldots,\psi_N\right](u,v) = \mathcal{F}_i^{\mathrm{RHS}}\left[\psi_1,\ldots,\psi_N\right](u,v)\,, \qquad i=1,\ldots,N \tag{1}$$

在由其 u 和 v 坐标指定的特定定义域上，其中上述方程中使用的每个函数——无论位于左侧还是右端——都是前述项的总和：

$$\mathcal{F}_i\left[\psi_1,\ldots,\psi_N\right](u,v) = \sum_{m=1}^{M_i} T_m^i\left[\psi_1,\ldots,\psi_N\right](u,v) \tag{2}$$

其中，M_i 是偏微分方程 $\mathcal{F}_i$中的项数。上面所有 T_m^i 项都可以依赖于系统的任意场 ψ_j，从而允许这些偏微分方程彼此耦合。

这样，就可以使用 LayerCake“语言”编写完整且封闭的偏微分方程组.

2.2 LayerCake 背后的原理

一旦指定了偏微分方程（PDEs）集合和定义域，LayerCake 便能够通过自动化的 Galerkin 方法将该集合转换为一个常微分方程（ODEs）系统。该方法将所有场 ψ_j 投影到给定的函数基 $\phi_{j,\ k}$:

$$\psi_j = \sum_{k=1}^{n_j} \psi_{j,k}\,\phi_{j,k}\,. \tag{3}$$

由偏微分方程定义的空间连续模型所得到的离散表示，称为其在谱域中的（截断）表示。谱系数 $\psi_{j,\ k}$ 通过取特定的内积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 来确定，该内积由用户定义

为场 ψ_j 与函数基 $\phi_{j,\ k}$之间的内积:

$$\psi_{j,k} = \langle \phi_{j,k}, \psi_j \rangle \ . \tag{4}$$

也可以对上面的方程 (1) 应用内积，实际上，这相当于将组成方程的所有不同项投影到由函数基张成的子空间上，并为每一项生成张量表示:

$$\left\langle \phi_{j,k}, T_m^i \left[\phi_{1,k_1}, \ldots, \phi_{N,k_N} \right] \right\rangle \tag{5}$$

其中，张量的秩取决于 T_m^i 的实际形式及其对场 ψ_j 的依赖关系。

这一投影过程会得到一组关于系数 $\psi_{j,\ k}$ 的常微分方程。LayerCake 的最终目标是生成这些常微分方程组趋势项的数值或符号表示:

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) \ . \tag{6}$$

在此背景下， $\boldsymbol{u}$ 是由堆叠的谱系数组成的状态向量

$$\boldsymbol{u} = (\psi_{1,1}, \ldots, \psi_{1,n_1}, \ldots, \psi_{N,1}, \ldots, \psi_{N,n_N}) \ . \tag{7}$$

LayerCake 输出的结果可以是一个 Python 可调用对象，也可以是一组表示模型趋势项 $\boldsymbol{f}$ （以及其雅可比矩阵 $\boldsymbol{Df}$）的字符串，可用于:

– 对模型进行时间积分– 进行
敏感性分析– 进行分岔分析

以直接明了的方式。因此，该框架能够系统、可靠地为需要少量方程的特定问题提供一组相关的动力学方程，具有很高的价值。

2.3 已知局限与未来发展

目前，LayerCake 存在一些已知局限。首先，非解析函数难以用 Galerkin 方法表示，因此本软件不支持这类函数。例如，这使得涉及大气或陆地含水量的复杂地球物理系统难以构建。作者发现，实现 Lorenz 提出的综合性低阶气候模型（Lorenz，1984）颇具难度。因此，在 LayerCake 中，必须以某种方式使用解析函数对这些过程进行参数化。

另一个限制是计算内积 (5) 的数值求积所带来的计算成本：符号模式下使用 Sympy，数值模式下则使用数值求积。对于变量超过一百个的模型，这可能导致计算时间非常长。符号部分几乎没有进一步改进的空间，因为它直接受 Sympy 性能的影响，而 Sympy 并非为这类密集计算而设计。这限制了常微分方程倾向项的符号计算

只能应用于变量数少于数百个的低阶系统。不过，在数值计算的情况下，可以通过使用特定的数值求积规则来缓解这些性能问题，例如由用户提供的规则（LayerCake 目前依赖 dblquadScipy 例程（Virtanen 等人，2020）执行数值求积）。如何以简便流畅的方式为用户实现这一功能，仍有待探讨。因此，未来也将考虑改进计算性能的某些方面。

关于未来的发展，可以指出，目前可用于组合偏微分方程的组合规则和对象已经涵盖了相当数量的使用场景。不过，未来仍可依托 GitHub 上代码的开源开发，加入新类型的项。

此外，还可以利用 LayerCake 作为投影引擎，研究开发能够将偏微分方程的数学表达式（例如 LaTEX 或 Sympy 形式）转换为 Python 脚本的代理。

3 使用示例

本节介绍几个 LayerCake 的使用示例，涵盖不同的定义域几何形状和模型复杂度。我们首先介绍一个用于温带大气的知名“简单”六维模型，然后考察一个包含 78 个变量的热带大气系统，最后介绍一个描述球面上正压动力学的系统。这些示例体现了该框架的多功能性。

3.1 具有状态转换行为的六维正压模型

温带正压谱模型于20世纪80年代被提出，用于研究行星波与地形之间的相互作用如何产生稳定状态（以平衡点表示）（Charney 和 DeVore，1979）。后来，人们重新启用这类模型，并提出其中发现的异宿连接可能是状态转变的一种合理机制（Crommelin 等人，2004）。最近，该模型也被用于研究随机强迫与型态动力学之间的相互作用（Dorrington 和 Palmer，2023）。这些研究提出的方法是考虑正压方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi = -J(\psi, \nabla^2\psi + f + \gamma h) - C\nabla^2(\psi - \psi^*) \tag{8}$$

其中， $f = f_0 + \beta y$ 为线性化科里奥利参数， J 为通常的平流算子[2]，， h 为地形剖面；并将其投影到复模态上：

$$
\begin{aligned}
\phi_{01}(x,y) &= \sqrt{2}\cos(y/b) \\
\phi_{11}(x,y) &= \sqrt{2}e^{ix}\sin(y/b) \\
\phi_{-11}(x,y) &= \sqrt{2}e^{-ix}\sin(y/b) \\
\phi_{02}(x,y) &= \sqrt{2}\cos(2y/b) \\
\phi_{12}(x,y) &= \sqrt{2}e^{ix}\sin(2y/b) \\
\phi_{-12}(x,y) &= \sqrt{2}e^{-ix}\sin(2y/b)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

定义在无量纲β平面上（x， y） $\in [0,2\pi]\times[0,\pi b]$。正压流函数 ψ 随后由截断展开给出

$$
\psi(t,x,y) = \sum_{n=-1}^{1}\sum_{m=1}^{2}\psi_{nm}(t)\,\phi_{nm}(x,y) \tag{10}
$$

并将这些系数 ψ_{nm} 线性组合为实变量 x_i、 $i = 1$，.....6，最终得到以下常微分方程组：

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \tilde{\gamma}_1 x_3 - C(x_1 - x_1^*) \\
\dot{x}_2 &= -(\alpha_1 x_1 - \beta_1)x_3 - Cx_2 - \delta_1 x_4 x_6 \\
\dot{x}_3 &= (\alpha_1 x_1 - \beta_1)x_2 - \gamma_1 x_1 - Cx_3 + \delta_1 x_4 x_5 \\
\dot{x}_4 &= \tilde{\gamma}_2 x_6 - C(x_4 - x_4^*) + \varepsilon(x_2 x_6 - x_3 x_5) \\
\dot{x}_5 &= -(\alpha_2 x_1 - \beta_2)x_6 - Cx_5 - \delta_2 x_4 x_3 \\
\dot{x}_6 &= (\alpha_2 x_1 - \beta_2)x_5 - \gamma_2 x_4 - Cx_6 + \delta_2 x_4 x_2
\end{aligned}
\tag{11}
$$

其中，假定强迫 ψ^* 的某种分布（纯纬向，即仅 $x_1^* \equiv \psi_{01}^*/b$ 和 $x_4^* \equiv \psi_{02}^*/b$ 非零），且地形h 为一座山和一个山谷： h（x， y） $=$cos（x）sin（y/b）（即 $h_{11} = h_{-11} = 1/(2\sqrt{2})$ ）。系数$\gamma_{1,\ 2}$、 $\tilde{\gamma}_{1,\ 2}$、 $\alpha_{1,\ 2}$、 $\beta_{1,\ 2}$、 $\delta_{1,\ 2}$ 和 ε 的表达式见 Crommelin 等人（2004）。使用本文提出的参数（尤其是 $b = 0.5$），并令 $x_1^* = 0.95$ 和 $x_4^* = -0.801\,x_1^*$ 取值使系统接近同宿分岔，对该系统进行积分。该分岔会使系统轨迹远离一个平衡态，并在不抵达另外两个平衡态的情况下接近它们（Crommelin 等人，2004），如图1上图所示。

使用 La yerCake 符号模式，方程 (8) 可以用以下简单脚本编写 t:

```
# 定义定义域 ######################b
```

[2] $J(S,\ G) = \partial_x S\partial_y G - \partial_y S\partial_x G$。

```
参数 = [b_参数]

cs = 平面笛卡尔坐标系(extent=((0, 2*pi), (0, b*pi)))


# 为模型定义一个特定的基
########################################
基 = 符号基(cs, parameters)

# 坐标
x = 基.coordinate_system.coordinates_symbol_作为_列表[0]y =


基.functions.append(sqrt(2) * cos(y / b)) 基.functions.append(2







# 为三角函数创建带优化器的内积定义坐标_系统=基.坐标_系统内_积_定义 =标准符号内积定义(坐标_系统=坐标_系统, 优化器='trig',




# 定义场
######################
p = u'ψ'
psi = 场("psi", p, basis, 内_积_定义, 单位="[m^2][内_积^-2]", latex=r'\psi')

# 正压场方程定义
######################################

# 将左侧定义为涡度的时间导数涡度 = OperatorTerm(psi, Laplacian,



# 定义 α 平流项
平流_项 = 涡度_advection(psi, psi, basis.coordinate_system, sign=-1) 正压_


# 添加地形项
伽马 = 参数(0.2,          符号=符号(u'γ'),          latex=r'\gamma')
hh = np.zeros(len(基))
hh[1] = 0.5
h = 参数场('h', u'h',          hh, 基,      内积_乘积_定义)

地形_项 = 雅可比算子(psi,          h, 基.坐标_系, 符号=-1, 前因子=(gamma, gamma))

正压_方程.add_右端_项（地形_项）
```

```
# 添加 β项
beta  = 参数(1.25, 符号=符号(u'β'), LaTeX=r'\beta') beta_项 =


正压_方程.add_右端_项(beta_项)

# 添加牛顿冷却 C_参数  = Parameter(0.1, symbol=symbols('C')) 牛顿冷却_冷却1 = OperatorTerm(psi, 拉普拉斯算子, 基.
```

部分内容改编自随代码附带的相应示例。随后计算内积并得到最终的符号方程，生成一组定义待研究动力系统的上述方程。我们将该系统的演化与 Charney 和 DeVore（1979）提出的原始系统进行比较，并将方程（8）投影到实模态上：

$$
\begin{aligned}
\tilde{\phi}_1(x,y) &= \sqrt{2}\cos(y/b)\\
\tilde{\phi}_2(x,y) &= 2\cos(x)\sin(y/b)\\
\tilde{\phi}_3(x,y) &= 2\sin(x)\sin(y/b)\\
\tilde{\phi}_4(x,y) &= \sqrt{2}\cos(2y/b)\\
\tilde{\phi}_5(x,y) &= 2\cos(x)\sin(2y/b)\\
\tilde{\phi}_6(x,y) &= 2\sin(x)\sin(2y/b)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

使用内积

$$
\langle S, G\rangle = \frac{1}{2\pi^2 b}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi b} S(x,y)\,G(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \tag{13}
$$

从而得到一组方程，结合 $h(x,\ y) = h_2\tilde{\phi}_2(x,\ y)$、 $h_2 = \frac{1}{2}$和 $\psi^*(x,\ y) = \tilde{\psi}_1^*\,\tilde{\phi}_1(x,\ y) + \tilde{\psi}_4^*\,\tilde{\phi}_4(x,\ y)$，可将其改写为

$$
\begin{aligned}
\dot{\tilde{\psi}}_1 &= +C\tilde{\psi}_1^* - C\,\tilde{\psi}_1 + \tilde{\gamma}_1\,\tilde{\psi}_3 \\
\dot{\tilde{\psi}}_2 &= -C\,\tilde{\psi}_2 + \beta_1\,\tilde{\psi}_3 - \frac{\alpha_1}{b}\,\tilde{\psi}_1\,\tilde{\psi}_3 - \frac{\delta_1}{b}\,\tilde{\psi}_4\,\tilde{\psi}_6 \\
\dot{\tilde{\psi}}_3 &= -C\,\tilde{\psi}_3 - \gamma_1\,\tilde{\psi}_1 - \beta_1\,\tilde{\psi}_2 + \frac{\alpha_1}{b}\,\tilde{\psi}_1\,\tilde{\psi}_2 + \frac{\delta_1}{b}\,\tilde{\psi}_4\,\tilde{\psi}_5 \\
\dot{\tilde{\psi}}_4 &= +C\tilde{\psi}_4^* - C\,\tilde{\psi}_4 + \tilde{\gamma}_2\,\tilde{\psi}_6 + \frac{\varepsilon}{b}\left(\tilde{\psi}_2\,\tilde{\psi}_6 - \tilde{\psi}_3\,\tilde{\psi}_5\right) \\
\dot{\tilde{\psi}}_5 &= -C\,\tilde{\psi}_5 + \beta_2\,\tilde{\psi}_6 - \frac{\alpha_2}{b}\,\tilde{\psi}_1\,\tilde{\psi}_6 - \frac{\gamma_2}{b}\,\tilde{\psi}_3\,\tilde{\psi}_4 \\
\dot{\tilde{\psi}}_6 &= -C\,\tilde{\psi}_6 - \gamma_2\,\tilde{\psi}_4 - \beta_2\,\tilde{\psi}_5 + \frac{\alpha_2}{b}\,\tilde{\psi}_1\,\tilde{\psi}_5 + \frac{\delta_2}{b}\,\tilde{\psi}_2\,\tilde{\psi}_4\ .
\end{aligned}
\tag{14}
$$

~ ~我们可以看到，除平流项 $\psi_i\,\psi_j$ 外，得到的系统与 Crommelin 等人（2004）中的系统完全相同；对于这些平流项，前面会多出一个因子 $1/b$。对强迫 ψ^* 进行适当的重新缩放后，便可得到类似的动力学，如图1底部面板所示。

该案例是 LayerCake 代码附带的基本编码示例之一，在代码的 examples 文件夹中实现为示例 barotropic_one_layer.py（Demaeyer 和 Hamilton，2026）。

3.2 WTGT 热带模型的一个 78 维版本

最近，Vannitsem 和 Demaeyer（2026）提出了一种新的低阶“干”热带大气模型。该模型是一个正压单层大气模型，具有特定的辐散强迫 χ，从而产生作用于某些模态的乘性强迫。无量纲正压方程如下：

$$
\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi = -J(\psi,\nabla^2\psi) - \beta'\frac{\partial\psi}{\partial x} - \nabla\chi\cdot\nabla(\nabla^2\psi + f') - (\nabla^2\psi + f')\nabla^2\chi - r'\nabla^2\psi \tag{15}
$$

其中，无量纲强迫 χ 由下式给出：

$$
\chi = A'\cos^2(y)\cos(nx) + B'\sin(y)\cos(nx). \tag{16}
$$

关于这个有趣模型的更多细节，尤其是其稳定性特性，请参阅 Vannitsem 和 Demaeyer（2026）。其中展示的大部分符号推导和数值计算，都是借助 LayerCake 的功能完成的。使用该模型开展的最新实验之一展示在图 2 左图中，其中描绘了模型（15）的 78 模态版本的霍夫莫勒图。这幅图的一个显著特点是流函数 ψ 图中出现了精细的丝状结构。在该模型的低维版本中，这些结构并不存在（Vannitsem 和 Demaeyer，2026）。这可能部分是因为模型分辨率提高时，小尺度上缺乏耗散。为了引入这种耗散，我们利用 LayerCake 对偏微分方程进行建模的能力，在方程（15）中添加了一个 $A\nabla^4\psi$ 项，其大小与拉普拉斯算子的平方成正比。该项描述了湍流扩散导致的小尺度能量的运动学耗散（De Cruz 等人，2018；Van der Avoird 等人，2002），而且只需添加

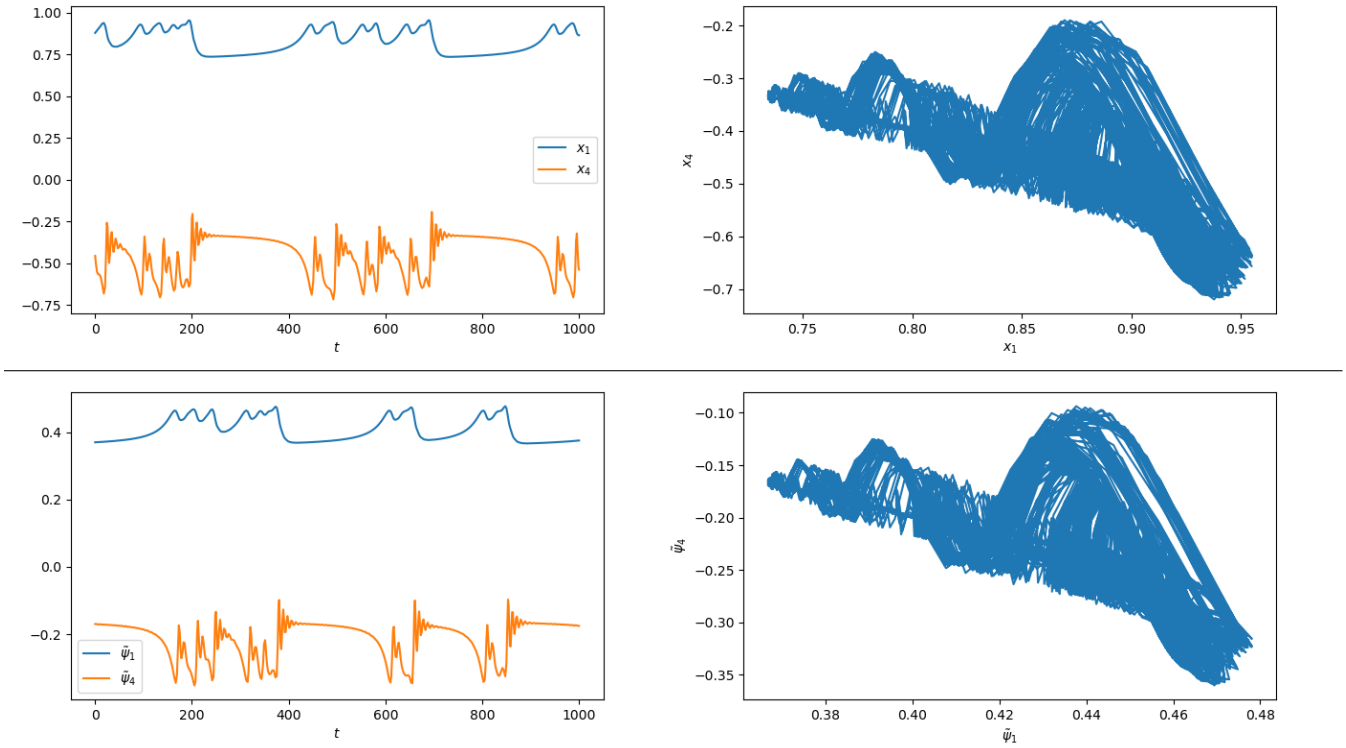


图 1. 上图：使用 Crommelin 等人（2004）中的参数（尤其是 $b = 0.5$）和 $(x_1^*,\ x_4^*) = (0.95,\ -0.76095)$ 得到的系统 (8) 的轨迹。下图：使用相同参数和 $(\tilde{\psi}_1^*,\ \tilde{\psi}_4^*) = (0.95b,\ -0.76095b)$ 得到的系统 (14) 的轨迹，由 LayerCake 直接以数值模式计算。

在 WTG 模型的 LayerCake 脚本中增加几行代码即可实现。添加该项后的结果见图 2 右图，其中场 ψ 显得更加平滑，残留的丝状结构也更大。

关于这两幅图，最后补充一点：该模型中的波主要向西传播，同时也存在一些局部有趣的向东传播现象；Vannitsem 和 Demaeyer（2026）已注意到这一特征，而且从这里的结果来看，它在更高分辨率下似乎依然存在。

3.3 球面上的低阶正压模型

最后，我们在此展示一个例子，其定义域的几何形状不同于前两个例子中的平面区域。我们考虑球面上的以下正压模型：

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi = -J(\psi, \nabla^2\psi + f(1 + h/H)) - C\nabla^2(\psi - \psi^*) \tag{17}$$

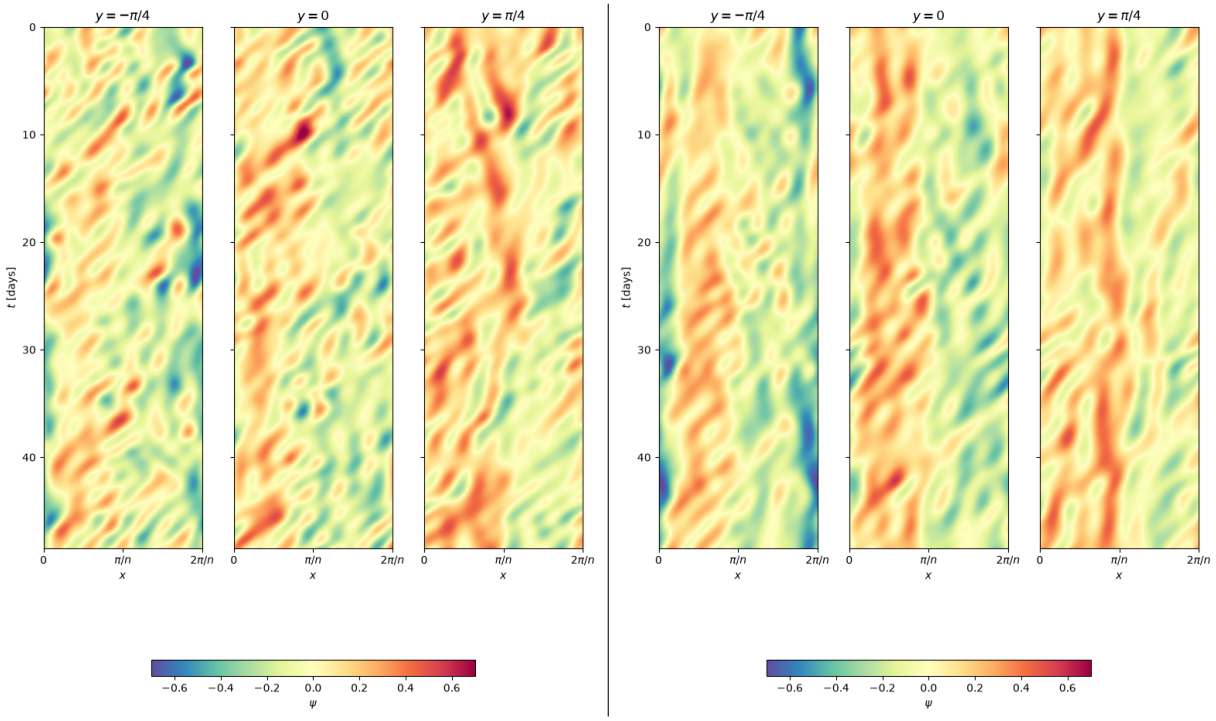


图 2. 左图：WTG 模型 (15) 的霍夫莫勒图，经 LayerCake 投影到 78 个傅里叶模态上。右图：加入湍流扩散项 $A\nabla^2\psi$ 后的 WTG 模型 (15) 的霍夫莫勒图，同样投影到 78 个傅里叶模态上。

它与方程 (8) 非常接近。随后，通过选择球谐函数作为模型的谱模态，赋予该模型球面特性。LayerCake 借助 Python 符号计算包 Sympy，能够计算球面上的内积，展现了其在模型开发中的灵活性。这个简单正压模型的 LayerCake 代码相当简单，如下所示：

```
# 定义定义域 ###################### # 无量纲地球球面半径参数 Rp = 参数(1., 符号=符号("R"), 单位='') 参数 = [Rp]基 = 球谐基
```

```
# 地球自转角速度
欧米伽 = 参数(7.292e-5,          符号=符号(u'ω'),          单位='[秒^-1]')

# 时间尺度参数
T = 参数(1.          / (2. * float(omega)),          符号=符号('T'),          单位='[s]')

# 定义场
########################
p = u'ψ'
psi  = 场("psi", p,      基,      内积_的_定义,                  单位="[m^2][^-2]",      latex=r'\psi')

# 正压场方程定义
########################################

# 将左侧定义为涡度的时间导数涡度 = 算子项(psi, 拉普拉斯算子, 基.coordinate_




# 定义平流项
平流_项 = 涡度_平流(psi, psi, 基.coordinate_system, sign=-1) 正压_方程.add_右端_项(平流_项)


# 添加地形项（sin theta * h）
正弦_第_小时 = np.array([-0.001711890606304873,   0.0022332703338084825,
                      0.0010014260540193253, 0.002428461633157703,
                      0.0016877961736783316, 0.0015782594096663554,
                      -0.003619193452466132, -0.006561605391195204,
                      0.0009603132306877926, -0.00197822560376025,
                      0.019943023135503446, -0.00420363112509415,
                      0.0074384102492688975, -0.014195299050184684,
                      -1.137858057111412e-05, -0.001941233058648731,
                      0.0009283207552447782, 0.0012240310990215871,
                      -0.004083320319716952, -0.007690520373983598,
                      -0.005570890927646672, -0.0014451628606521009,
                      -0.0009667440544924891, 0.002455772979125063])
地形 =参数场('h', u'h', sin_th_h, 基, 内积_乘积_定义                                    )

地形_项 = 雅可比算子(psi, 地形, 基.坐标_系, 符号=-1)

正压_方程.add_右端_项（地形_项）

# 添加β项β_项 = OperatorTerm(psi, D, llambda,



# 添加牛顿冷却
C_参数 =参数(0.00294, 符号=符号('C'))  # 大致对应 27天时间尺度牛顿_冷却1 = OperatorTerm(psi, 拉普拉斯算子, 基.坐标_系, 前


# 略显夸张的强迫（~10 倍）以在此T4模型中产生混沌psi_ast_数组 = np.array(.00144388, 0.00092015, -
```

```
        -0.0184391 , -0.02481095, -0.04143466, -0.01375496,  0.01036605,
        -0.06866103, -0.00700027,  0.00255661,  0.00643457, -0.00858923,
        -0.00973486,  0.01376331, -0.00086079, -0.02540955, -0.02291994,
        -0.02918463, -0.02469974, -0.01380329,  0.00674556])


psi_ast  = 参数场('psi_ast', p+u'*', psi_ast_array, 基, 内积定义, LaTeX=r'\psi^\ast') 牛顿冷却算子项(psi_ast, 拉普拉斯算子, 基
```

该模型的完整代码以示例文件 barotropic_planetary_flow.py 的形式实现，位于 LayerCake 的示例集（Demaeyer 和 Hamilton，2026）中，采用非常低阶的 T4 截断，从而得到一个 24 维常微分方程。该模型解析行星波 1–4 和宽广的纬向平均急流结构，但无法解析更小尺度。图 3 以霍夫莫勒图展示了一次积分示例，其中的强迫 $C\nabla^2\psi^*$ 有些随意且被夸大，耗散 C 则对应 27天时间尺度。特意这样设置是为了使非线性项占主导，并驱动系统进入混沌区域。图中显示，北半球中纬度的波向东传播，而南半球则出现定常波，这可能与两者之间的强迫差异有关（即两个半球之间的地形和气候差异）。

本文还提供了一段补充视频，展示该 T4 高度截断模型中球面上的流函数 ψ 的演变（Demaeyer 等，2026）。

3.4 其他可用应用

迄今为止介绍的三个示例都只包含一个二维偏微分方程，但正如地球科学中常见的做法，可以对分层流体模型进行离散化，并设计由分层偏微分方程组成的系统来表示它们（Vallis，2017）。典型示例包括中纬度大气的斜压模型（Charney 和 Straus，1980；Reinhold 和 Pierrehumbert，1982），以及较新的海洋-大气或陆地-大气耦合模型（Vannitsem 等，2015；Xavier 等，2024）。

能够对这类分层系统进行建模是 LayerCake 的主要目标。在这方面值得注意的是，LayerCake 已复现包含 10 个模态的双层斜压模型（Reinhold 和 Pierrehumbert（1982）开发的模型），以及包含 18 个模态的 MAOOAM 海洋-大气模型（De Cruz 等，2016）；这些模型也被列为代码示例文件夹中的基础示例（De maeyer 和 Hamilton，2026）。

4 结论

本文介绍了 LayerCake，这是一种新的 Python框架，用于开发由分层且相互耦合的偏微分方程组成的系统；这类系统在地球科学理论研究中经常出现。随后，LayerCake 会自动将这些系统投影到空间模态集合上，生成其由常微分方程组成的约化时间演化算子（通常每个空间模态对应一个方程），从而可以在现代计算机上轻松进行积分。

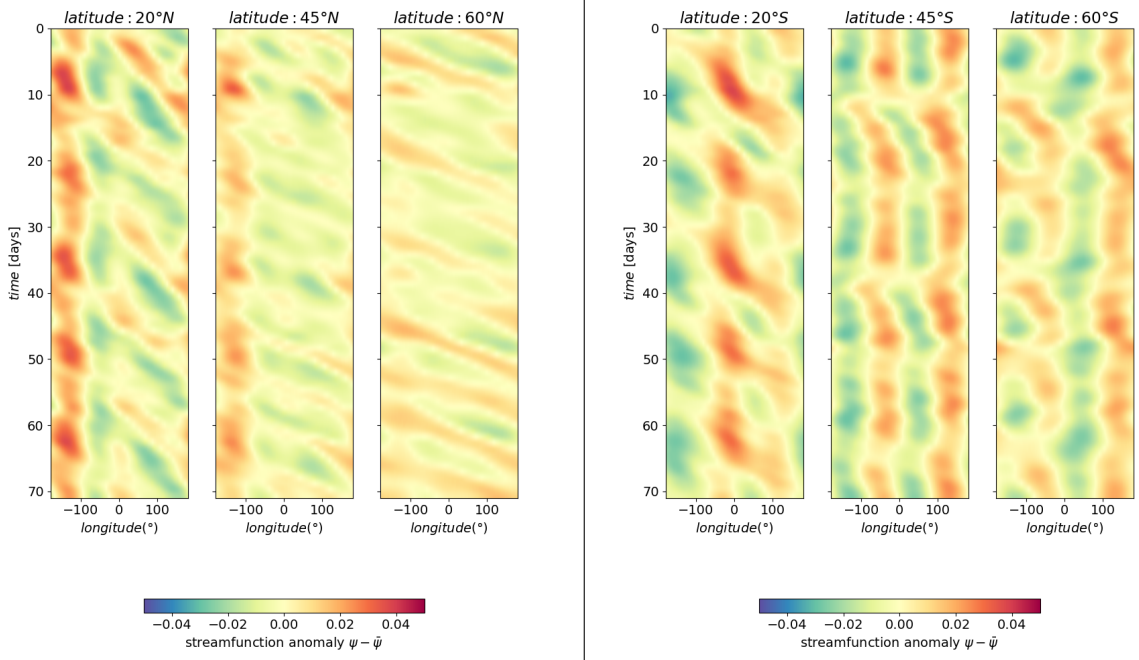


图 3。 左图：T4 截断系统（17）北半球不同纬度处的霍夫莫勒图，显示向东传播波。右图：同一模型在南半球不同纬度处的霍夫莫勒图，显示定常波。

这项工作使研究复杂度更高的模型成为可能，无论是在模态数量方面，还是在系统设计方面。事实上，如第 3.2 节所示，可以轻松地向偏微分方程中添加新项，以改变模型或引入新的过程。本文通过几个广为人知的简单大气模型展示了 LayerCake 的功能，以说明 LayerCake 的潜力。我们相信，该软件包能够通过设计定制的低阶模型来探索新的研究问题，并在逐步提高复杂性和真实性的过程中检验结果。

LayerCake 旨在解决以往框架的局限性，例如 MAOOAM（De Cruz 等人（2016 年），使用 Fortran 和 Lua 语言）或 qgs （Demaeyer 等人（2020 年），使用 Python 语言）。在这些框架中，用户可以更改模型的模态数量和参数，但无法更改模型本身的方程。这使得想要修改这些方程的用户不得不深入模型代码进行更改，而始终存在引入错误的可能性。然而，

只要计算机能够访问符号计算系统，就可以轻松复现生成这些方程的底层伽辽金过程。Sympy（Meurer 等人，2017 年）的发展为此打开了大门。通过减少内积计算所需的计算机资源，将其扩展到更高维系统的工作仍有待进一步探索。

关于前沿人工智能模型的发展，最后还必须说明一点。LayerCake 的开发始于2024年，当时智能体大语言模型能力仍处于起步阶段。此后，人们已经证明这些模型能够解决研究级数学中的开放性问题，表明将这些工具用于研究是可行的。尽管这些工具已经证明了其在数学和科学研究中的重要性，但它们不适合作为执行长时间或重复性符号计算的唯一引擎。此外，研究人员很难以简便的方式验证大语言模型所生成的符号计算结果，而重复计算还可能导致方程展开形式不同，从而进一步增加验证难度。我们不再要求人工智能执行 Galerkin 展开，而是认为可以利用人工智能生成运行 LayerCake 的 Python 脚本。这样既能为研究人员提供一种快速构建此类模型的方法，又能提供易于验证和检查的输出结果。

我们计划继续使用和开发 LayerCake，用于构建未来的大气和气候模型，例如对弱温度梯度热带模型的分析（Vannitsem 和 Demaeyer，2026年）。欢迎科学界使用这一工具解决自身的研究问题，并在 GitHub 上为其开发作出贡献。

代码可用性。 LayerCake 代码可在 GitHub 上获取：https://github.com/Climdyn/LayerCake。未来将在该平台上继续进行开源开发。此外，代码也已存档于 Zenodo：https://doi.org/10.5281/zenodo.24166282（Demaeyer 和 Hamilton，2026年）。

第 3.2 节示例中使用的热带弱温度梯度模型（Vannitsem 和 Demaeyer，2026年）的代码可在 GitHub 上获取：https://github.com/Climdyn/WTG-TM。此外，代码也已存档于 Zenodo：https://doi.org/10.5281/zenodo. 20760509（Demaeyer，2026年）。

视频补充材料。 视频展示了正压 T4 模型流函数场的时间演化，可在线获取（Demaeyer 等，2026年），并突显了 LayerCake 在球面上提供的建模能力。

作者贡献。 受 O. H. 对 qgs 符号部分所作贡献的启发（Demaeyer 等，2020），J.D. 发起了 LayerCake 代码的开发。O.H. 对代码的某些特定部分作出了贡献。所有作者——O.H.、S.V. 和 J.D.——共同讨论并开发了降阶模型示例，共同生成并讨论了结果，并撰写了本文。

利益冲突。 作者声明不存在利益冲突。

致谢。 S. Vannitsem 部分研究经费由新加坡教育部通过学术研究基金（AcRF）一级资助项目 RG15/26 提供。

参考文献

Budyko, M. I.：《太阳辐射变化对地球气候的影响》，Tellus，21，611–619，https://doi.org/10.1111/j.2153-3490.1969.tb00466.x，1969年。Cehelsky, P. 和 Tung, K. K.：《多重平衡与天气型态理论——批判性再考察。第二部分：斜压双层模型》，大气科学杂志，44，3282–3303，https://doi.org/10.1175/1520- 0469(1987)044<3282:TOMEAW>2.0.CO;2，1987年。Charney, J. G. 和 DeVore, J. G.：《大气中的多重流动平衡与阻塞》，大气科学杂志，36，1205–1216，1979年。Charney, J. G. 和 Straus, D. M.：《斜压地形强迫行星波系统中的形状阻力不稳定性、多重平衡与传播行星波》，大气科学杂志，37，1157–1176，https://doi.org/10.1175/1520- 0469(1980)037<1157:FDIMEA>2.0.CO;2，1980年。Crommelin, D. T., Opsteegh, J. 和 Verhulst, F.：《大气型态行为的一种机制》，大气科学杂志，61，1406–1419，2004年。Datseris, G.：《DynamicalSystems.jl：用于混沌与非线性动力学的 Julia 软件库》，《开放源代码软件杂志》，3，598，https://doi.org/10.21105/joss.00598，2018年。De Cruz, L., Demaeyer, J. 和 Vannitsem, S.：《模块化任意阶海洋—大气模型：MAOOAM v1.0》，《地球科学模型开发》，9，2793–2808，2016年。De Cruz, L., Schubert, S., Demaeyer, J., Lucarini, V. 和 Vannitsem, S.：《探索高维大气与气候模型的李雅普诺夫不稳定性特征》，《地球物理学非线性过程》，25，387–412，2018年。Demaeyer, J.：《Climdyn/WTG-TM：v1.0.0 alpha 版本》，https://doi.org/10.5281/zenodo.20760509，2026年。Demaeyer, J. 和 Hamilton, O.：《auto-AUTO：用于自动运行 AUTO-07p 延拓软件的 Python 层》，《开放源代码软件杂志》，10，8079，https://doi.org/10.21105/joss.08079，2025年。Demaeyer, J. 和 Hamilton, O.：《LayerCake：1.0.8 版》，https://doi.org/10.5281/zenodo.24166282，2026年。Demaeyer, J., De Cruz, L. 和 Vannitsem, S.：《qgs：用于降阶多尺度气候模型的灵活 Python 框架》，《开放源代码软件杂志》，5，2597，2020年。Demaeyer, J., Hamilton, O. 和 Vannitsem, S.：《使用 LayerCake 框架构建的球面超截断 T4正压全球谱模型》，Copernicus Publications，https://doi.org/10.5446/74135，2026年。Dijkstra, H. A.：《非线性气候动力学》，剑桥大学出版社，2013年。Doedel, E. J., Champneys, A. R., Dercole, F., Fairgrieve, T. F., Kuznetsov, Y. A., Oldeman, B., Paffenroth, R., Sandstede, B., Wang, X. 和 Zhang, C.：《AUTO-07P：用于常微分方程的延拓与分岔软件》，2007年。Dorrington, J. 和 Palmer, T.：《随机强迫与型态动力学的相互作用》，《地球物理学非线性过程》，30，49–62，2023年。Frankignoul, C. 和 Hasselmann, K.：《随机气候模型，第二部分：海表温度异常与温跃层变率的应用》，Tellus，29，289–305，https://doi.org/10.3402/tellusa.v29i4.11362，1977年。Ghil, M. 和 Childress, A. S.：《地球物理流体动力学专题：大气动力学、发电机理论与气候动力学》，应用数学科学丛书第60卷，Springer-Verlag，纽约，ISBN 3-540-96475-4，1987年。

Guckenheimer, J. 和 Holmes, P.：《非线性振荡、动力系统与向量场分岔》，应用数学科学丛书第42卷，Springer-Verlag，纽约，ISBN 0-387-90819-6，1983年。Hamilton, O., Demaeyer, J., Vannitsem, S. 和 Crucifix, M.：《耦合海洋–大气降阶模型中的多稳态：非线性温度方程》，英国皇家气象学会季刊，149，3423–3439，2023年。Hasselmann, K.：《随机气候模型，第一部分：理论》，Tellus，28，473–485，https://doi.org/10.3402/tellusa.v28i6.11316，1976年。Jin, F.-F. 和 Ghil, M.：《大尺度海洋环流模式的分岔结构与低频变率。第一部分：稳态解与周期解》，物理海洋学杂志，20，465–483，https://doi.org/10.1175/1520- 0485(1990)020<0465:BSALFV>2.0.CO;2，1990年。Kuznetsov, Y. A.：《应用分岔理论要素》，应用数学科学丛书第112卷，Springer International Publishing，Cham，瑞士，第四版，ISBN 978-3-031-22006-7，2023年。Lam, S. K., Pitrou, A. 和 Seibert, S.：《Numba：基于 LLVM 的 Python 即时编译器》，载于：第二届 LLVM 编译器基础设施 HPC 研讨会论文集，LLVM '15，第1–6页，ACM，https://doi.org/10.1145/2833157.2833162，2015年。Lorenz, E. N.：《确定性非周期流》，大气科学杂志，20，130–141，https://doi.org/10.1175/1520- 0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2，1963年。Lorenz, E. N.：《湿大气环流低阶模型的构建》，大气科学杂志，41，1933–1946，https://doi.org/10.1175/1520-0469(1984)041<1933:FOALOM>2.0.CO;2，1984年。Meurer, A., Smith, C. P., Paprocki, M., ˇ Certík, O., Kirpichev, S. B., Rocklin, M., Kumar, A., Ivanov, S., Moore, J. K., Singh, S., Rathnayake, T., Vig, S., Granger, B. E., Muller, R. P., Bonazzi, F., Gupta, H., Vats, S., Johansson, F., Pedregosa, F., Curry, M. J., Terrel, A. R., Rouˇcka, Š., Saboo, A., Fernando, I., Kulal, S., Cimrman, R. 和 Scopatz, A.：《SymPy：Python 中的符号计算》，PeerJ 计算机科学，3，e103，https://doi.org/10.7717/peerj-cs.103，2017年。Munk, W. H.：《风驱动海洋环流》，气象学杂志，7，80–93，https://doi.org/10.1175/1520- 0469(1950)007<0080:OTWDOC>2.0.CO;2，1950年。Nicolis, G.：《非线性科学导论》，剑桥大学出版社，剑桥，1995年。Nicolis, G. 和 Nicolis, C.：《复杂系统基础：非线性动力学、统计物理学、信息与预测》，World Scientific，哈肯萨克，新泽西州，ISBN 9789812700438，2007年。Pedlosky, J.：《有限振幅斜压波》，大气科学杂志，27，15–30，https://doi.org/10.1175/1520- 0469(1970)027<0015:FABW>2.0.CO;2，1970年。Pedlosky, J. 和 Frenzen, C.：《有限振幅斜压波的混沌与周期行为》，大气科学杂志，37，1177–1196，https://doi.org/10.1175/1520-0469(1980)037<1177:CAPBOF>2.0.CO;2，1980年。Pierini, S.：《封闭海盆风驱动海洋波动的发散准地转模型》，大气与海洋动力学，14，259–277，https://doi.org/10.1016/0377-0265(90)90019-9，1990年。Pierini, S.：《黑潮延伸体低阶模型中的低频变率、相干共振与相位选择》，物理海洋学杂志，41，1585–1602，https://doi.org/10.1175/JPO-D-10-05018.1，2011年。Reinhold, B. B. 和 Pierrehumbert, R. T.：《天气型态动力学：准定常波与阻塞》，月刊天气评论，110，1105–1145，1982年。Roebber, P. J.：《低阶耦合大气–海洋模型中的气候变率》，Tellus A：动力气象学与海洋学，47，473–494，https://doi.org/10.1034/j.1600-0870.1995.t01-3-00006.x，1995年。

Saltzman, B.：有限振幅自由对流作为初值问题—I，《大气科学杂志》，19，329–341，https://doi.org/10.1175/1520-0469(1962)019<0329:FAFCAA>2.0.CO;2，1962年。Sellers, W. D.：基于地球-大气系统能量平衡的全球气候模型，《应用气象与气候学杂志》，8，392–400，https://doi.org/10.1175/1520-0450(1969)008<0392:AGCMBO>2.0.CO;2，1969年。Simonnet, E.、Ghil, M.、K. Ide、R. Temam 和 S. Wang：风驱动海洋环流浅水模型中的低频变率。第一部分：稳态解，《物理海洋学杂志》，33，712–728，https://doi.org/10.1175/1520- 0485(2003)33<712:LVISMO>2.0.CO;2，2003年。H. Stommel：风驱动海流的向西增强，《Eos：美国地球物理联合会汇刊》，29，202–206，https://doi.org/10.1029/tr029i002p00202，1948年。H. Stommel：具有两种稳定流动状态的温盐对流，《Tellus》，13，224–230，https://doi.org/10.1111/j.2153- 3490.1961.tb00079.x，1961年。G. K. Vallis：《大气与海洋流体动力学：基础与大尺度环流》，剑桥大学出版社，英国剑桥，第2版，https://doi.org/10.1017/9781107588417，2017年。E. Van der Avoird、H. Dijkstra、J. Nauw 和 C. Schuurmans：中等复杂度中纬度海洋-大气耦合模型中的非线性诱导低频变率，《气候动力学》，19，303–320，2002年。S. Vannitsem：海洋混合层在北大西洋涛动发展中的作用：动力系统视角，《地球物理研究快报》，42，8615–8623，https://doi.org/10.1002/2015GL065974，2015年。S. Vannitsem 和 J. Demaeyer：热带大气中混沌的出现：弱温度梯度系统研究，《EGUsphere》，2026年，1–20，https://doi.org/10.5194/egusphere-2026-3631，2026年。S. Vannitsem、J. Demaeyer、De Cruz, L. 和 Ghil, M.：低阶非线性海洋-大气耦合模型中的低频变率与热输送，《Physica D：非线性现象》，309，71–85，https://doi.org/10.1016/j.physd.2015.07.006，2015年。Virtanen, P.、Gommers, R.、Oliphant, T. E.、Haberland, M.、Reddy, T.、Cournapeau, D.、Burovski, E.、Peterson, P.、Weckesser, W.、Bright, J.、van der Walt, S. J.、Brett, M.、Wilson, J.、Millman, K. J.、Mayorov, N.、Nelson, A. R. J.、Jones, E.、Kern, R.、Larson, E.、Carey, C. J.、Polat, ̇I.、Feng, Y.、Moore, E. W.、VanderPlas, J.、Laxalde, D.、Perktold, J.、Cimrman, R.、Henriksen, I.、Quintero, E. A.、Harris, C. R.、Archibald, A. M.、Ribeiro, A. H.、Pedregosa, F.、van Mulbregt, P. 以及 SciPy 1.0 Contributors：SciPy 1.0：Python科学计算的基础算法，《Nature Methods》，17，261–272，https://doi.org/10.1038/s41592-019-0686-2，2020年。A. K. Xavier、J. Demaeyer 和 S. Vannitsem：降阶陆地-大气耦合模型的变率与可预报性，《地球系统动力学》，15，893–912，2024年。S. Yoden：地球物理流体动力学与气候动力学中简单低阶模型的分类，《Nonlinear Analysis-theory Methods & Applications》，30，4607–4618，https://api.semanticscholar.org/CorpusID:13549973，1997年。