arXiv:2611.28652v2 [math.SP] 24 Nov 2026

Zakharov–Shabat算子的逆问题及其同构，II

EVGENY KOROTYAEV 和 ZONGFENG ZHANG

摘要。我们研究具有一般边界条件的单位区间上 Zakharov–Shabat算子的同构逆谱问题。酉规范变换可将这些问题化为具有相应基本边界条件的问题，同时对谱参数进行显式平移。利用关于典范边界条件和四谱数据映射的既有结果，我们描述了 Zakharov–Shabat算子的同构逆谱问题。此外，我们还研究了其他逆问题，包括替换映射和典范关系。

目录

1. 引言与主要结果 1 2. 预备结果 7 3. 规范变换及其性质 12 4. 单位区间上的同构逆问题 15

1. 引言与主要结果

1.1. 引言。 我们研究具有一般边界条件的单位区间上的 Zakharov–Shabat 系统（ZS系统）的同构逆谱问题。逆谱问题得到了广泛研究，已有大量方法和成果，详见 [1, 19, 58, 60, 65, 70] 及其中的参考文献。一般而言，逆谱问题的研究包括以下几个部分：

(i) 唯一性：证明谱数据（特征值及某些附加参数）能够唯一确定势。

(ii) 重构：根据谱数据重构势。
(iii) 刻画：描述与给定势类相对应的所有谱数据。
(iv) 稳定性：获得联系势与谱数据的先验双边估计。
(v) 同构：证明谱映射是同构的。

我们的主要目标是讨论最后一个性质，即逆问题的同构。关于单位区间和圆上的 Sturm–Liouville 算子 [36], 、Jacobi算子 [54], 以及具有基本边界条件的 ZS算子 [55]之间逆谱问题的同构，已有相关研究。对于阻抗形式的算子，相关问题正在准备中的工作 [35]中进行研究。本文将 ZS 结果推广到分离的一般边界条件。利用关于典范边界条件和四谱数据映射的已有结果，我们描述了 Zakharov–Shabat算子。关键步骤是进行规范变换，该变换旋转势，并使每个特征值都平移相同的常数。这将解析参数化的结果归结为 [55] 中的结果，并给出所得逆问题之间的显式变换。

日期：2026年11月25日。关键词和短语：逆问题、Zakharov-Shabat算子、同构。

定义 1.1. 设 $f, f_0 : \mathcal{K} \to X$ 是从实希尔伯特空间 $\mathcal{K}$ 到集合 X的映射。若存在某个（不一定是）将 $\mathcal{K}$ 映到其自身的同构 U，使得 $f_0 = f \circ U$，则称它们同构 。

注意，如果 f 是双射，则交织映射由 $U = f^{-1} \circ f_0$ 唯一确定。同构映射具有相同的像，并且同时为单射或双射。当目标具有相应的解析结构时，解析参数化结果也会相应转移。将势 v 替换为 Uv 后，关于 f 的恒等映射会转移到 f_0。特别地，当 U 保持势范数不变时，原势范数中的先验界也保持不变。更一般的稳定性估计需要对 U 和 U^{-1} 进行定量控制。

我们研究 ZS系统的逆谱问题

$$Jy' + Vy = \lambda y \tag{1.1}$$

在区间 $[0,1]$, 上，满足四个不同的一般边界条件:

$$y_1(0) = 0, \qquad y_1(1)c_\alpha - y_2(1)s_\alpha = 0, \tag{1.2}$$

$$y_2(0) = 0, \qquad y_1(1)s_\alpha + y_2(1)c_\alpha = 0, \tag{1.3}$$

$$y_1(0) = 0, \qquad y_1(1)s_\alpha + y_2(1)c_\alpha = 0, \tag{1.4}$$

$$y_2(0) = 0, \qquad y_1(1)c_\alpha - y_2(1)s_\alpha = 0. \tag{1.5}$$

矩阵值势 V 和矩阵 J 定义为

$$V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_2 & -v_1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

这里， $v = (v_1, v_2)^\top$ 属于实希尔伯特空间 $\mathscr{H} = L^2((0,1)\ \mathbb{R}) \oplus L^2((0,1)\ \mathbb{R})$，其范数为 $\|v\|^2 = \int_0^1 (v_1^2 + v_2^2)\ dx$。全文中，我们使用记号 $c_\alpha = \cos\ \alpha$、 $s_\alpha = \sin \alpha$，并假设

$$\alpha \in \mathbb{A} := \big(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\big].$$

对于 $\alpha = 0$，问题 (1.2)–(1.5) 依次化为狄利克雷问题、诺伊曼问题和两个混合问题。对于 $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$，也会出现相同的四类边界条件，但顺序不同。这些特殊情形， $\alpha = 0$， $\pm\frac{\pi}{2}$，在 [55] 中进行了讨论。本文考虑一般情形 $\alpha \in \mathbb{A}$。

关于边界条件的备注。 $[0,1]$ 上的一般分离边值问题由 ZS系统及以下边界条件构成

$$Jy' + Vy = \lambda y, \qquad \begin{cases} y_1(0)c_\beta - y_2(0)s_\beta = 0 \\ y_1(1)c_\alpha - y_2(1)s_\alpha = 0 \end{cases}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{A}.$$

引理 2.8 表明，在采用旋转势和谱参数 $\lambda - \beta$ 的规范变换下，该问题可化为 (1.2)。因此，该算子与约化后的算子加上 $\beta \mathbb{1}_2$ 酉等价；谱平移是这种等价关系的一部分。对左端点处其他三种基本选择，也可进行类似的约化。

令 $Y(x,\lambda,v) = (\vartheta, \varphi)(x,\lambda,v)$ 表示系统 (1.1) 的基本矩阵解，并由 $Y(0,\lambda,v) = \mathbb{1}_2$ 归一化，其中 $\mathbb{1}_2$ 是恒等映射 2×2 矩阵。其列为向量值函数 $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2)^\top$ 和 $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^\top$，它们满足初始条件

$$\vartheta(0,\lambda,v) = (1,0)^\top, \qquad \varphi(0,\lambda,v) = (0,1)^\top.$$

对于 $n \in \mathbb{Z}$，令 $\mu_{\alpha,n}$, $\nu_{\alpha,n}$, $\tau_{\alpha,n}$ 和 $\varrho_{\alpha,n}$ 分别表示问题 (1.2)–(1.5) 的相应特征值。这些特征值已知是单的，并满足以下交错关系：

$$\ldots < \overline{\tau_{\alpha,1}, \varrho_{\alpha,1}} < \overline{\mu_{\alpha,1}, \nu_{\alpha,1}} < \overline{\tau_{\alpha,2}, \varrho_{\alpha,2}} < \overline{\mu_{\alpha,2}, \nu_{\alpha,2}} < \ldots,$$

其中，为简洁起见，$\overline{u,\ v}$ 表示 $\min\{u,v\} \leqslant \max\{u,v\}$。特征值具有如下渐近行为：

$$\nu_{\alpha,n}, \mu_{\alpha,n} = \mu^o_{\alpha,n} + o(1), \quad \tau_{\alpha,n}, \varrho_{\alpha,n} = \tau^o_{\alpha,n} + o(1) \quad \text{as } n \to \pm\infty,$$

其中，相应的未扰动特征值满足

$$\nu^o_{\alpha,n} = \mu^o_{\alpha,n} = \pi n - \alpha, \qquad \tau^o_{\alpha,n} = \varrho^o_{\alpha,n} = \pi\big(n - \tfrac{1}{2}\big) - \alpha, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

1.2. **主要结果**。设 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{S}$ 为实可分希尔伯特空间。记 $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}$ 和 $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ 为它们各自的复化。映射 $f\colon \mathcal{K} \to \mathcal{S}$ 是局部实解析同构，当且仅当，对每个 $y \in \mathcal{K}$，f 都存在解析延拓 f，将其延拓到 y 的复邻域 $\mathbb{V} \subset \mathcal{K}_{\mathbb{C}}$，使得 f 是 $\mathbb{V}$ 到某个开集 $f(\mathbb{V}) \subset \mathcal{S}_{\mathbb{C}}$的双射，并且 f和 f^{-1}分别在 $\mathbb{V}$和 $f(\mathbb{V})$上解析。若映射 f既是双射又是局部实解析同构，则称其为 $\mathcal{K}$ 与 $\mathcal{S}$ 之间的实解析双射（RAB）。

对于 $1 \leqslant p < \infty$，令 $\ell^p = \ell^p(\mathbb{Z})$ 表示由序列 $f = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 构成的实巴拿赫空间，其范数为 $\|f\|^p_{(p)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_n|^p < \infty$。当 $p = 2$ 时，我们记为 $\|f\| = \|f\|_{(2)}$。为表述主要结果，我们将四个单谱映射组合成一个谱差映射。沿用先前的工作 [36, 37], ，对于具有 $\alpha = 0$ 的 ZS算子，四谱映射在 [55] 中被引入。我们定义四谱映射 $\mathfrak{f}_\alpha : \mathscr{H} \to \ell^2$ 为

$$v \to \mathfrak{f}_\alpha(v) = (\mathfrak{f}_{\alpha,\ n}(v))_{n\in\mathbb{Z}}, \quad \mathfrak{f}_{\alpha,\ 2n-1} = \tfrac{1}{2}\ (\varrho_{\alpha,\ n} - \tau_{\alpha,\ n})\ \text{</style}\}, \quad \mathfrak{f}_{\alpha,\ 2n} = \tfrac{1}{2}\ (\nu_{\alpha,\ n} - \mu_{\alpha,\ n})\ \text{</style}\}, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{1.6}$$

我们证明，四谱映射是势函数空间与相应谱数据之间的实解析双射。

定理 1.2。令 $\alpha \in \mathbb{A}$。由 *(1.6)* 定义的四谱映射 $\mathfrak{f}_\alpha$： $\mathscr{H} \to \ell^2$ 是从 $\mathscr{H}$ 到 ℓ^2 的 *RAB*，并满足

$$\tfrac{1}{\sqrt{2}}\|\mathfrak{f}_\alpha(v)\| \leqslant \|v\| \leqslant 2\|\mathfrak{f}_\alpha(v)\|\big(1 + \|\mathfrak{f}_\alpha(v)\|\big), \qquad \forall\ v \in \mathscr{H}. \tag{1.7}$$

注。对于固定的 α，令 $\mathscr{D}_\alpha$ 由满足 $\mathfrak{f}_\alpha(v)$ 为有限支撑的那些 $v \in \mathscr{H}$组成。由于有限支撑序列在 ℓ^2 中稠密，且 $\mathfrak{f}_\alpha^{-1}$是连续的，$\mathscr{D}_\alpha$ 在 $\mathscr{H}$中稠密。该记号用于将此集合与第 2 节中使用的基本集合 $\mathscr{D}$ 区分开来。

继 Pöschel 和 Trubowitz [70], 之后，我们引入以下严格递增实数序列的集合：

$$\mathfrak{J}^o_\alpha = \Big\{s=(s_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \ldots < s_1 < s_2 < \ldots, \quad s_n = \pi n - \alpha + \check{s}_n, \qquad \check{s} = (\check{s}_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2\Big\},$$

$$\mathfrak{J}^1_\alpha = \Big\{s=(s_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \ldots < s_1 < s_2 < \ldots, \quad s_n = \pi(n - \tfrac{1}{2}) - \alpha + \check{s}_n, \qquad \check{s} = (\check{s}_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2\Big\},$$

$$\mathfrak{J}_\alpha = \Big\{t=(t_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \ldots < t_1 < t_2 < \ldots, \quad t_n = \tfrac{\pi n}{2} - \alpha + \check{t}_n, \qquad \check{t} = (\check{t}_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2\Big\}.$$

映射 $s = (s_n)_{n\in\mathbb{Z}} \leftrightarrow \check{s}$ 是 $\mathfrak{J}^o_\alpha$ 与某个开凸子集 $\check{\mathfrak{J}}^o_\alpha = \Big\{\check{s} = (\check{s}_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2 : \ldots < \mu^o_{\alpha,1} + \check{s}_1 < \mu^o_{\alpha,2} + \check{s}_2 < \ldots\Big\}$ of ℓ^2 之间的自然坐标映射。按照 [70]，我们使用此映射将 $\mathfrak{J}^o_\alpha$ 与 $\check{\mathfrak{J}}^o_\alpha$ 等同起来。下文将 $\check{s} = (\check{s}_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$ 称为 ℓ^2 上的标准

坐标系。与 [70] 中一样，这种等同使我们能够在 $\mathfrak{J}^o_\alpha$ 上进行分析，就好像它是 ℓ^2 的一个开凸子集一样。类似的标准坐标系也可以定义在 $\mathfrak{J}^1_\alpha$ 和 $\mathfrak{J}_\alpha$ 上。注意，对于 $\alpha=0$， $\mathfrak{J}^o_\alpha$、 $\mathfrak{J}^1_\alpha$、 $\mathfrak{J}_\alpha$ 分别化为 $\mathfrak{J}^o$、 $\mathfrak{J}^1$、 $\mathfrak{J}$。

为描述逆问题，我们引入单谱映射 μ_α， ν_α： $\mathscr{H}\to\mathfrak{J}^o_\alpha$，以及$\tau_\alpha$， ϱ_α： $\mathscr{H}\to\mathfrak{J}^1_\alpha$，其定义为

$$v\to\mu_\alpha=(\mu_{\alpha,n})_{n\in\mathbb{Z}},\quad v\to\nu_\alpha=(\nu_{\alpha,n})_{n\in\mathbb{Z}},\quad v\to\tau_\alpha=(\tau_{\alpha,n})_{n\in\mathbb{Z}},\quad v\to\varrho_\alpha=(\varrho_{\alpha,n})_{n\in\mathbb{Z}}.$$

给定两个严格递增且交错的特征值序列，我们定义相应的双谱映射。例如，对于 $\tau_\alpha=(\tau_{\alpha,\ n})_{n\in\mathbb{Z}}\in\mathfrak{J}^1_\alpha$ 和 $\nu_\alpha=(\nu_{\alpha,\ n})_{n\in\mathbb{Z}}\in\mathfrak{J}^o_\alpha$，满足

$$...<\tau_{\alpha,1}<\nu_{\alpha,1}<\tau_{\alpha,2}<\nu_{\alpha,2}<...,$$

双谱映射 $\tau_\alpha\star\nu_\alpha$： $\mathscr{H}\to\mathfrak{J}_\alpha$ 定义为

$$(\tau_\alpha\star\nu_\alpha)_{2n-1}=\tau_{\alpha,n},\qquad(\tau_\alpha\star\nu_\alpha)_{2n}=\nu_{\alpha,n},\qquad n\in\mathbb{Z}.$$

其他交错映射采用相同的奇偶索引。下面我们需要在 $\mathscr{H}$ 上定义的乘法算子 F_α 和 $\mathbb{1}_-$，其定义为

$$F_\alpha v=e^{\alpha xJ}v,\qquad\mathbb{1}_-v=-v,\qquad\alpha\in\mathbb{A}.\tag{1.8}$$

我们定义　　反射算子 $\mathcal{R}$ 以及反射型算子 $\mathscr{U}_1$， $\mathscr{U}_2$ 通过 $\mathscr{H}$作用于

$$(\mathcal{R}v)(x)=v(1-x),\quad x\in[0,1],\qquad\mathscr{U}_1=\begin{pmatrix}c_{2\alpha}&-s_{2\alpha}\\-s_{2\alpha}&-c_{2\alpha}\end{pmatrix}\mathcal{R},\qquad\mathscr{U}_2=-\mathscr{U}_1.\tag{1.9}$$

最后，定义平移算子 $\mathcal{S}_\alpha$： $\mathfrak{J}\to\mathfrak{J}_\alpha$ 通过

$$(\mathcal{S}_\alpha a)_n=a_n-\alpha,\qquad\mathcal{S}_\alpha(a,b)=(\mathcal{S}_\alpha a,\mathcal{S}_\alpha b).\tag{1.10}$$

我们对算子 $\mathfrak{J}^o\to\mathfrak{J}^o_\alpha$ 和 $\mathfrak{J}^1\to\mathfrak{J}^1_\alpha$使用相同的记号，并将其逐分量应用于谱的组。在标准序列坐标中，每个算子都是恒等映射，因此它是一个实解析同构，其逆为 $\mathcal{S}_{-\alpha}$。

我们建立了双谱映射之间的同构。

定理 1.3。 设 $\alpha\in\mathbb{A}$。那么所有双谱映射 $\tau_\alpha\star\mu_\alpha$、 $\tau_\alpha\star\nu_\alpha$、 $\varrho_\alpha\star\mu_\alpha$、 $\varrho_\alpha\star\nu_\alpha$从 $\mathscr{H}$到 $\mathfrak{J}_\alpha$ 两两同构。它们中的每一个都是从 $\mathscr{H}$到 $\mathfrak{J}_\alpha$ 上的 *RAB*，并满足

$$\tau_\alpha\star\mu_\alpha=(\varrho_\alpha\star\nu_\alpha)\circ\mathbb{1}_-=(\varrho_\alpha\star\mu_\alpha)\circ\mathscr{U}_1=(\tau_\alpha\star\nu_\alpha)\circ\mathscr{U}_2=\mathcal{S}_\alpha(\tau\star\mu)\circ F^*_{2\alpha}.\tag{1.11}$$

请注意，作者是在 $\alpha=0$ 属于 [55]的情形下证明这些结果的。

对于每个特征值 $\mu_{\alpha,\ n}$, $\varphi(x,\ \mu_{\alpha,\ n},\ v)$，相应的特征函数为。已知向量 $\varphi(\mathbf{1},\ \mu_{\alpha,\ n},\ v)$ 满足

$$(-1)^ne^{\mathfrak{r}_{\alpha,n}(v)}\varphi(1,\mu_{\alpha,n},v)=(\sin\alpha,\cos\alpha)^\top.$$

鉴于相应边值问题的这些归一化条件，我们将范数化常数$\mathfrak{r}_{\alpha,\ n}$、 $\mathfrak{s}_{\alpha,\ n}$、$\mathfrak{t}_{\alpha,\ n}$、$\mathfrak{u}_{\alpha,\ n}$ 以及相关的范数化映射定义为

$$\begin{aligned}\mathfrak{r}_{\alpha,n}&=-\ln\left|\frac{\varphi_2(1,\mu_{\alpha,n},v)}{c_\alpha}\right|,\qquad\mathfrak{s}_{\alpha,n}=-\ln\left|\frac{\vartheta_1(1,\nu_{\alpha,n},v)}{c_\alpha}\right|,\\\mathfrak{t}_{\alpha,n}&=-\ln\left|\frac{\varphi_1(1,\tau_{\alpha,n},v)}{c_\alpha}\right|,\qquad\mathfrak{u}_{\alpha,n}=-\ln\left|\frac{\vartheta_2(1,\varrho_{\alpha,n},v)}{c_\alpha}\right|,\end{aligned}\tag{1.12}$$

and

$$v \to \mathfrak{r}_\alpha = (\mathfrak{r}_{\alpha,n})_{n\in\mathbb{Z}}, \quad v \to \mathfrak{s}_\alpha = (\mathfrak{s}_{\alpha,n})_{n\in\mathbb{Z}}, \quad v \to \mathfrak{t}_\alpha = (\mathfrak{t}_{\alpha,n})_{n\in\mathbb{Z}}, \quad v \to \mathfrak{u}_\alpha = (\mathfrak{u}_{\alpha,n})_{n\in\mathbb{Z}}.$$

对所有 $n \in \mathbb{Z}$均成立。我们首先给出关于带范数化映射的单谱映射的同构逆问题的结果。

定理 1.4. 设 $\alpha \in \mathbb{A}$。则
i) 映射 $\mu_\alpha \times (\pm\mathfrak{r}_\alpha)$、 $\nu_\alpha \times(\pm\mathfrak{s}_\alpha)$: $\mathscr{H} \to \mathfrak{J}^o_\alpha \times \ell^2$ 彼此同构。它们各自都是从 $\mathscr{H}$到 $\mathfrak{J}^o_\alpha \times \ell^2$ 的 *RAB*，并满足

$$\begin{aligned} \mu_\alpha \times \mathfrak{r}_\alpha = (\nu_\alpha \times \mathfrak{s}_\alpha) \circ \mathbb{1}_- = \big(\mu_\alpha \times (-\mathfrak{r}_\alpha)\big) \circ \mathscr{U}_1 \\ = \big(\nu_\alpha \times (-\mathfrak{s}_\alpha)\big) \circ \mathscr{U}_2 = \big((\mathcal{S}_\alpha\mu) \times \mathfrak{r}\big) \circ F^*_{2\alpha}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

ii) 映射 $\varrho_\alpha \times(\pm\mathfrak{u}_\alpha)$、 $\tau_\alpha \times(\pm\mathfrak{t}_\alpha)$: $\mathscr{H} \to \mathfrak{J}^1_\alpha \times \ell^2$ 各自都是从 $\mathscr{H}$到$\mathfrak{J}^1_\alpha \times \ell^2$的 *RAB*。此外，它们彼此同构并满足

$$\begin{aligned} \tau_\alpha \times \mathfrak{t}_\alpha = (\varrho_\alpha \times \mathfrak{u}_\alpha) \circ \mathbb{1}_- = \big(\varrho_\alpha \times (-\mathfrak{u}_\alpha)\big) \circ \mathscr{U}_1 \\ = \big(\tau_\alpha \times (-\mathfrak{t}_\alpha)\big) \circ \mathscr{U}_2 = \big((\mathcal{S}_\alpha\tau) \times \mathfrak{t}\big) \circ F^*_{2\alpha}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

备注。 该定理表明这些逆问题彼此同构，并且相应的自同构可以用显式形式表示。每个逆问题都是从势函数空间到相应谱数据的实解析双射。

我们引入矩阵 $J_1 = \mathrm{diag}(1, -1)$ 以及对称子空间

$$\mathscr{H}_{eo} = \{v \in \mathscr{H} : v = J_1\mathcal{R}v\}, \qquad \mathscr{H}_\alpha = \{v \in \mathscr{H} : v = \mathscr{U}_1 v\}. \tag{1.15}$$

这里，偶和奇是指关于中点 $x = 1/2$ 为偶和奇。对称空间取决于谱的选择。

推论 1.5. 设 $\alpha \in \mathbb{A}$。那么，每个映射 $\mathcal{S}_\alpha\mu, \mathcal{S}_\alpha\nu : \mathscr{H}_{eo} \to \mathfrak{J}^o_\alpha$ 都是从$\mathscr{H}_{eo}$ 到 $\mathfrak{J}^o_\alpha$的 *RAB*。此外，映射 $\mathcal{S}_\alpha\tau, \mathcal{S}_\alpha\varrho : \mathscr{H}_{eo} \to \mathfrak{J}^1_\alpha$ 是从 $\mathscr{H}_{eo}$ 到 $\mathfrak{J}^1_\alpha$的 *RAB*。它们在空间 $\mathscr{H}_{eo}$上满足:

$$\mathcal{S}_\alpha(\mu, \nu, \tau, \varrho) = (\mu_\alpha, \nu_\alpha, \tau_\alpha, \varrho_\alpha) \circ F_{2\alpha}, \tag{1.16}$$

其中，映射 $F_{2\alpha} : \mathscr{H}_{eo} \to \mathscr{H}_\alpha$ 是从 $\mathscr{H}_{eo}$ 到 $\mathscr{H}_\alpha$的双射。

备注。 因此，映射 μ_α、 ν_α、 τ_α和 ϱ_α 在 $\mathscr{H}_{eo}$上是同构的。据我们所知，尚无关于单位区间 $[0, 1]$上薛定谔算子的类似结果；参见 [36]。

替换映射。 回顾一下，算子 $F_{2\alpha}$ 由 (1.8) 定义。我们定义映射 $\mathcal{U}_{\alpha,\sigma} : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$如下:

$$\mathcal{U}_{\alpha,\sigma} = F_{2\alpha} \circ \mathcal{U}_\sigma \circ F^*_{2\alpha}. \tag{1.17}$$

这里， $\mathcal{U}_\sigma$ 表示第2节中引入的灯夫映射。其性质将在后文讨论。由于 $\mathcal{U}_\sigma$ 是从 $\mathscr{H}$到其自身的 RAB，且 $F_{2\alpha}$ 是酉算子，(1.17)中的表示表明， $\mathcal{U}_{\alpha,\ \sigma} : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$同样是从 $\mathscr{H}$到其自身的 RAB。

现在我们讨论一种新型的逆问题。设给定单谱映射 $v \to \mu_\alpha = (\mu_{\alpha,\ n})_{n\in\mathbb{Z}}$，并假设我们用特征值 $\nu_{\alpha,\ n}$替换某些 $\mu_{\alpha,\ n}$。于是我们得到一个新的映射 $\mathfrak{c}$。例如，我们有 $\mathfrak{c} = (\ldots\ldots, \mu_{\alpha,\ 1}, \nu_{\alpha,\ 2}, \nu_{\alpha,\ 3}, \mu_{\alpha,\ 4}, \mu_{\alpha,\ 5}, \ldots\ldots)$。问题在于，所选取的特征值是否仍构成一个可容许谱序列，以及它们与一个互补序列配对时，是否能给出势的双射参数化。我们称之为

这些谱替换映射。设 $\mathbb{Z}_1$, $\mathbb{Z}_2 \subset \mathbb{Z}$ 为任意子集。我们定义替换映射 $v \to \zeta_\alpha = (\zeta_{\alpha,\ n})_{n\in\mathbb{Z}}$, $v \to \phi_\alpha = (\phi_{\alpha,\ n})_{n\in\mathbb{Z}}$ 及其分量如下:

$$\zeta_{\alpha,n} = \begin{cases} \varrho_{\alpha,n}, & \text{if} \quad n \in \mathbb{Z}_1 \\ \tau_{\alpha,n}, & \text{if} \quad n \notin \mathbb{Z}_1 \end{cases}, \qquad \phi_{\alpha,n} = \begin{cases} \nu_{\alpha,n}, & \text{if} \quad n \in \mathbb{Z}_2 \\ \mu_{\alpha,n}, & \text{if} \quad n \notin \mathbb{Z}_2 \end{cases}. \tag{1.18}$$

定义对角符号变换算子 $\sigma = \mathrm{diag}(\sigma_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 如下:

$$\sigma_{2j-1} = \begin{cases} -1 & \text{if } j \in \mathbb{Z}_1 \\ 1 & \text{if } j \notin \mathbb{Z}_1 \end{cases}, \quad \sigma_{2j} = \begin{cases} -1 & \text{if } j \in \mathbb{Z}_2 \\ 1 & \text{if } j \notin \mathbb{Z}_2 \end{cases}.$$

推论 1.6。 设 $\alpha \in \mathbb{A}$。通过（*1.18*）定义映射 $\zeta_\alpha = (\zeta_{\alpha,n})_{n\in\mathbb{Z}}$ 和 $\phi_\alpha = (\phi_{\alpha,n})_{n\in\mathbb{Z}}$。则映射 $\zeta_\alpha \star \phi_\alpha$: $\mathscr{H} \to \mathfrak{J}_\alpha$ 是从 $\mathscr{H}$到 $\mathfrak{J}_\alpha$ 的 *RAB*，并且满足

$$(\zeta_\alpha \star \phi_\alpha) \circ \mathcal{U}_{\alpha,\sigma} = \tau_\alpha \star \mu_\alpha. \tag{1.19}$$

Fo对于在 $\mathscr{H}$ 上可微的两个函数 $A(v)$ $B(v)$，我们定义辛形式

$$A \wedge B = \int_0^1 (A'(v), B'(v))_0 dx, \quad A'(v) = \frac{\partial A(v)}{\partial v}.$$

其中，对于列向量 $p, q \in \mathbb{R}^2$，函数 $(p, q)_0 = p^\top J q$。特别地， $A \wedge A = 0$。下面的典范关系确定了共轭谱坐标。

定理 1.7。 设 $\alpha \in \mathbb{A}$ 和 $v \in \mathscr{H}$。则对所有 n、 $j \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} &\mu_{\alpha,n}(v) \wedge \mu_{\alpha,j}(v) = 0, && \mathfrak{r}_{\alpha,n}(v) \wedge \mu_{\alpha,j}(v) = \delta_{nj}, && \mathfrak{r}_{\alpha,n}(v) \wedge \mathfrak{r}_{\alpha,j}(v) = 0, \\ &\nu_{\alpha,n}(v) \wedge \nu_{\alpha,j}(v) = 0, && \mathfrak{s}_{\alpha,n}(v) \wedge \nu_{\alpha,j}(v) = \delta_{nj}, && \mathfrak{s}_{\alpha,n}(v) \wedge \mathfrak{s}_{\alpha,j}(v) = 0, \\ &\tau_{\alpha,n}(v) \wedge \tau_{\alpha,j}(v) = 0, && \mathfrak{t}_{\alpha,n}(v) \wedge \tau_{\alpha,j}(v) = \delta_{nj}, && \mathfrak{t}_{\alpha,n}(v) \wedge \mathfrak{t}_{\alpha,j}(v) = 0, \\ &\varrho_{\alpha,n}(v) \wedge \varrho_{\alpha,j}(v) = 0, && \mathfrak{u}_{\alpha,n}(v) \wedge \varrho_{\alpha,j}(v) = \delta_{nj}, && \mathfrak{u}_{\alpha,n}(v) \wedge \mathfrak{u}_{\alpha,j}(v) = 0. \end{aligned} \tag{1.20}$$

此外，以下四组族 $\{\mu'_{\alpha,n}, \mathfrak{r}'_{\alpha,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$、 $\{\nu'_{\alpha,n},\ \mathfrak{s}'_{\alpha,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$、 $\{\tau'_{\alpha,n}, \mathfrak{t}'_{\alpha,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$、 $\{\varrho'_{\alpha,n}, \mathfrak{u}'_{\alpha,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 均为 $\mathscr{H}$ 的 *Riesz*基，其中 $\mu'_{\alpha,n} = \frac{\partial \mu_\alpha}{\partial v}{}_{,n}$、 $\mathfrak{r}'_{\alpha,n} = \frac{\partial \mathfrak{r}_\alpha}{\partial v}{}_{,n}$.....为简洁起见。

注意，这类典范关系已在 [20, 70], 中针对薛定谔算子建立，而具有基本边界条件的 ZS算子的相关典范关系则在 [42, 44, 55] 中得到。

1.3. 简短回顾。 我们简要回顾单位区间上微分算子逆谱理论中的已知结果。许多作者研究了反斯图姆–刘维尔问题，其中包括 Borg [6], Gel'fand-Levitan [24], Krein [57], 和 Marchenko [63]。但在所有这些工作中，必要条件与充分条件之间都存在缺口。Marchenko 和 Ostrovski[64] 弥合了这一缺口，解决了双谱映射的逆问题并给出了刻画，另见 Levitan 和 Gasymov [59] 对此的研究。这些结果构成了未来研究的背景之一。Trubowitz 及其合作者 [30, 31, 70, 73] 提出了一种基于势到谱数据映射性质的解析方法，以及只改变有限个 谱参数（特征值和定标常数）的显式变换。这一方法后来得到进一步发展，并应用于其他具有纯离散谱的逆问题：(a) 各种斯图姆–刘维尔问题 [15, 16, 21, 39],; (b) 受扰谐振子，见 [7, 8, 66]; (c) 单位区间上带有矩阵值势并满足狄利克雷边界条件的斯图姆–刘维尔问题，见 [10, 11]; (d) 雅可比矩阵，见 [54] 及其中的参考文献。

Marchenko 和 Ostrovski [64]还利用共形映射解决了周期逆问题。Dubrovin [18] 得到了通过谱数据恢复周期势的著名方程，另见 [73]。文献 [70]中的解析方法被 Kargaev 和 Korotyaev [32] 应用于偶周期势，并由 Korotyaev [46, 48],推广到一般情形，包括周期分布 [43]。在这种情况下，在证明中，根据谱隙长度（或其他谱参数）对势进行先验估计十分重要。利用与准动量相关的共形映射理论，文献 [34, 41, 42, 44, 45, 47, 50] 得到了根据谱隙长度（或李雅普诺夫函数的参数）估计势的双边估计。文献[9, 32, 33, 49, 64]建立了相关共形映射的各种性质。我们回顾一下，Hilbert [28]得到了关于从多连通域到具有平行割线的域的共形映射的第一个结果。

关于周期系统已有大量研究成果，包括李雅普诺夫、Gel'fand-Lidskii [25], Gesztesy及其合作者、 [12, 13], Krein、 [56], Chelkak-Korotyaev [10], Korotyaev [38, 40] 等人的工作，详见其中的参考文献。矩阵势带来了新的问题。黎曼曲面具有多层结构，结构复杂，其分支点既可能是实数，也可能是复数。谱带的重数各不相同，其端点可能是分支点，也可能是周期特征值。对它们的控制并不简单。迄今为止，有限区间上的逆问题仅针对带矩阵值势的薛定谔算子（包括特征刻画） [10, 11] 以及一阶系统（仅有唯一性结果） [61, 62] 得到了解决。文献 [51] 讨论了带 3×3 矩阵值势的一阶周期系统。这些结果对于研究三次周期向量非线性薛定谔方程十分重要。

现在我们讨论 ZS 算子的逆问题，这类问题也已得到广泛研究。关于具有边界条件的单位区间上的系统，参见 [2–4, 17, 22, 29,60, 69, 72]；关于圆上的系统，参见 [5, 27, 42, 44, 50, 52, 53, 60] 及其中的参考文献。这些逆问题的唯一性与重构结果见 [12, 23, 60]；另见 [26, 29, 69, 71]。Misura 得出了双谱映射的完整结果 [67, 68]。Misura 还通过共形映射解决了周期逆问题,[67, 68]。事实上，她将 Machenko-Ostrovki 针对 Hill 算子的结果及其证明[64] 推广到了狄拉克算子。经过很长一段时间后，Albeverio 及其合作者 [2] 解决了双谱映射 $\varrho\star\nu$ 和映射 ϱ 的刻画问题，并给出了相应的归一化常数。Korotyaev 运用解析方法 [44] 重新证明了 Misura 关于周期情形的结果。此外，他还通过谱隙长度解决了周期逆问题，见 [42]。文献 [42, 44, 50]给出了势关于谱隙长度（及其他参数）的估计。

最后，我们讨论同构逆问题。Korotyaev [36] 描述了单位区间和圆上的Sturm–Liouville算子的同构逆问题。关于阻抗形式算子的相关问题，是正在准备中的工作 [35]的研究主题。文献 [54], 讨论了Jacobi算子的同构逆问题，文献 [55]讨论了单位区间和圆上的ZS算子的同构逆问题。这些工作引入并使用了四谱映射和灯夫映射，它们是研究同构逆问题的重要工具。

2. 初步结果

2.1. 关于 $\alpha=0$的基本问题。对于 $\alpha=0$，问题（1.2）—（1.5）可归结为四个相应的基本问题。本节介绍将在规范约化中使用的基本

问题的记号和结果。这些结果回顾自 [55]; 它们是下文论证所依据的输入，而不是本文在此证明的新论断。

基本边值问题是满足边界条件的ZS系统

$$Jy' + Vy = \lambda y,$$

（2.1）-（2.4）。这四个条件是 $\alpha = 0$时（1.2）-（1.5）的特殊情形，即狄利克雷和诺伊曼边界条件:

$$y_1(0) = y_1(1) = 0, \tag{2.1}$$

$$y_2(0) = y_2(1) = 0, \tag{2.2}$$

以及所谓的混合边界条件:

$$y_1(0) = y_2(1) = 0, \tag{2.3}$$

$$y_2(0) = y_1(1) = 0, \tag{2.4}$$

分别。令 μ_n、 ν_n、 τ_n 和 ϱ_n （$n \in \mathbb{Z}$）表示对应于这四个问题的特征值。所有这些特征值都是单的，并满足

$$..... < \overline{\tau_1, \varrho_1} < \overline{\mu_1, \nu_1} < \overline{\tau_2, \varrho_2} < \overline{\mu_2, \nu_2} < ...,$$
$$\nu_n, \mu_n = \mu_n^o + o(1), \quad \tau_n, \varrho_n = \tau_n^o + o(1) \quad \text{as } n \to \pm\infty,$$

其中，有序对约定与第1节中的相同， $\nu_n^o = \mu_n^o = \pi n$ 和 $\tau_n^o = \varrho_n^o = \pi\,(n - \frac{1}{2})$ $n \in \mathbb{Z}$ 是相应的未扰动特征值。

当 $\alpha = 0$ 时，实严格递增序列族 $\mathfrak{J}_\alpha^o$、 $\mathfrak{J}_\alpha^1$、 $\mathfrak{J}_\alpha$ 分别化为 $\mathfrak{J}^o$、 $\mathfrak{J}^1$、$\mathfrak{J}$,

$$\mathfrak{J}^o = \Big\{ s = (s_n)_{n\in\mathbb{Z}} : .... < s_1 < s_2 < ....., \quad s_n = \pi n + \breve{s}_n\,, \qquad \breve{s} = (\breve{s}_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2 \Big\},$$
$$\mathfrak{J}^1 = \Big\{ s = (s_n)_{n\in\mathbb{Z}} : .... < s_1 < s_2 < ....., \quad s_n = \pi(n - \tfrac{1}{2}) + \breve{s}_n\,, \qquad \breve{s} = (\breve{s}_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2 \Big\},$$
$$\mathfrak{J} = \Big\{ t = (t_n)_{n\in\mathbb{Z}} : ... < t_1 < t_2 < ....., \quad t_n = \frac{\pi n}{2} + \breve{t}_n\,, \qquad \breve{t} = (\breve{t}_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2 \Big\}.$$

2.2. 的结果 $\alpha = 0$。我们引入四谱映射 $\mathfrak{f}$: $\mathscr{H} \to \ell^2$ ，它从 [55] 出发。该映射由基本特征值定义，形式如下:

$$v \to \mathfrak{f}(v) = (\mathfrak{f}_n(v))_{n\in\mathbb{Z}}, \quad \mathfrak{f}_{2n-1} = \tfrac{1}{2}(\varrho_n - \tau_n), \qquad \mathfrak{f}_{2n} = \tfrac{1}{2}(\nu_n - \mu_n), \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.5}$$

我们回顾在 [55] 中证明的一个定理。

定理 2.1。 四谱映射 $\mathfrak{f}$: $\mathscr{H} \to \ell^2$ 是从 $\mathscr{H}$到 ℓ^2 的 *RAB*，并满足

$$\tfrac{1}{\sqrt{2}}\|\mathfrak{f}(v)\| \leqslant \|v\| \leqslant 2\|\mathfrak{f}(v)\|\big(1 + \|\mathfrak{f}(v)\|\big), \qquad \forall\, v \in \mathscr{H}. \tag{2.6}$$

令 $\mathscr{D}$ 为所有满足序列 $(\mathfrak{f}_n(v))_{n\in\mathbb{Z}}$ 有限支撑的 $v \in \mathscr{H}$ 所构成的集合，即对于所有充分大的 $|n|$, 都有 $\mathfrak{f}_n(v) = 0$ 。由于四谱映射 $\mathfrak{f}$: $\mathscr{H} \to \ell^2$ 是从 $\mathscr{H}$ 到 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 的 RAB，因此集合 $\mathscr{D}$ 在 $\mathscr{H}$ 中稠密。令 $\mathfrak{S}$ 为 ℓ^2 上所有对角算子$\sigma = \mathrm{diag}(\ldots, \sigma_1, \sigma_2, \ldots)$ 的集合，简记为 $\sigma = (\sigma_j)^{j\in\mathbb{Z}}$，其中对每个$j \in \mathbb{Z}$， $\sigma_j \in \{\pm 1\}$。集合 $\mathfrak{S}$ 定义了所谓的灯夫群；参见 [14]。对于每个 $\sigma \in \mathfrak{S}$，其中 $\mathfrak{f}$ 由 (2.5) 给出，我们定义灯夫映射 $\mathcal{U}_\sigma$ 为

$$\mathcal{U}_\sigma = \mathfrak{f}^{-1} \circ (\sigma\mathfrak{f}) : \mathscr{H} \to \mathscr{H}.$$

注意，对每个 $\sigma\in\mathfrak{S}$，$\mathcal{U}_\sigma:\mathscr{D}\to\mathscr{D}$。我们定义反射 $\mathcal{R}$ 以及作用于 $\mathscr{H}$ 上的反射型算子$\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2$，如下

$$(\mathcal{R}v)(x)=v(1-x),\quad x\in[0,1],\quad \text{and}\qquad \mathcal{R}_1=J_1\mathcal{R},\qquad \mathcal{R}_2=-\mathcal{R}_1.$$

定理2.2。 *i)* 每个映射 $\mathcal{U}_\sigma:\quad \mathscr{H}\to\mathscr{H},\sigma\in\mathfrak{S}$ 都是自身上的 *RAB*，并满足

$$\mathcal{U}_\sigma=\mathcal{U}_\sigma^{-1},\qquad \mathcal{U}_\sigma\circ\mathcal{U}_{\sigma'}=\mathcal{U}_{\sigma\sigma'}=\mathcal{U}_{\sigma'}\circ\mathcal{U}_\sigma\qquad\forall\ \sigma,\sigma'\in\mathfrak{S},$$
$$\|\mathcal{U}_\sigma(v)\|=\|v\|\qquad\forall\ v\in\mathscr{H}.$$

ii) 令$(\lambda_n^{\pm})_{n\in\mathbb{Z}}$ 表示 v的1周期延拓的周期特征值和反周期特征值，等价地，即 *2*-周期特征值。它们在每个 $\mathcal{U}_\sigma,\sigma\in\mathfrak{S}$下均保持不变，即

$$(\lambda_n^{\pm})_{n\in\mathbb{Z}}=(\lambda_n^{\pm})_{n\in\mathbb{Z}}\circ\mathcal{U}_\sigma\quad\forall\ \sigma\in\mathfrak{S},$$

对于特定的 $\sigma\in\mathfrak{S}$，映射 $\mathcal{U}_\sigma$ 具有如下形式:

$$\mathbb{1}_-=\mathcal{U}_\sigma,\quad \text{where }\ \sigma=\mathbb{1}_-,\qquad \begin{cases}\mathcal{R}_1=\mathcal{U}_\sigma, & \text{where}\quad \sigma_n=(-1)^n\qquad\forall\ n\in\mathbb{Z}\\ \mathcal{R}_2=\mathcal{U}_\sigma, & \text{where}\quad \sigma_n=-(-1)^n\qquad\forall\ n\in\mathbb{Z}\end{cases}.$$

iii) 如果 $\sigma=(\sigma_j)_{j\in\mathbb{Z}}\in\mathfrak{S}$，则对于每个 $n,j\in\mathbb{Z}$，我们有

$$\text{if }\ n=2j-1\Rightarrow\begin{cases}(\tau_j,\varrho_j)=(\varrho_j,\tau_j)\circ\mathcal{U}_\sigma, & \text{if}\quad \sigma_n=-1\\ (\tau_j,\varrho_j)=(\tau_j,\varrho_j)\circ\mathcal{U}_\sigma, & \text{if}\quad \sigma_n=1\end{cases},$$

$$\text{if }\ n=2j\Rightarrow\begin{cases}(\mu_j,\nu_j)=(\nu_j,\mu_j)\circ\mathcal{U}_\sigma, & \text{if}\quad \sigma_n=-1\\ (\mu_j,\nu_j)=(\mu_j,\nu_j)\circ\mathcal{U}_\sigma & \text{if}\quad \sigma_n=1\end{cases}.$$

我们通过下式定义单谱映射 $\mu,\ \nu:\ \mathscr{H}\to\mathfrak{J}^o$ 以及 $\tau,\ \varrho:\ \mathscr{H}\to\mathfrak{J}^1$

$$v\to\mu=(\mu_n)_{n\in\mathbb{Z}},\quad v\to\nu=(\nu_n)_{n\in\mathbb{Z}},\quad v\to\tau=(\tau_n)_{n\in\mathbb{Z}},\quad v\to\varrho=(\varrho_n)_{n\in\mathbb{Z}}.$$

将两个单谱映射 $\tau=(\tau_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\mathfrak{J}^1$ 和 $\mu=(\mu_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\mathfrak{J}^o$组合起来，其序列严格递增且彼此交错，由此构造一个从 $\mathscr{H}$到 $\mathfrak{J}$ 的双谱映射 $\tau\star\mu$：

$$v\to\tau\star\mu=(....,\tau_1,\mu_1,\tau_2,\mu_2,....).$$

我们引入实定标常数 $\mathfrak{r}_n,\ \mathfrak{s}_n,\mathfrak{t}_n,\ \mathfrak{u}_n,n\in\mathbb{Z}$ 以及相应的定标映射:

$$\mathfrak{r}_n=-\ln|\varphi_2(1,\mu_n)|,\quad \mathfrak{s}_n=-\ln|\vartheta_1(1,\nu_n)|,\quad \mathfrak{t}_n=-\ln|\varphi_1(1,\tau_n)|,\quad \mathfrak{u}_n=-\ln|\vartheta_2(1,\varrho_n)|,$$
$$v\to\mathfrak{r}=(\mathfrak{r}_n)_{n\in\mathbb{Z}},\quad v\to\mathfrak{s}=(\mathfrak{s}_n)_{n\in\mathbb{Z}},\quad v\to\mathfrak{t}=(\mathfrak{t}_n)_{n\in\mathbb{Z}},\quad v\to\mathfrak{u}=(\mathfrak{u}_n)_{n\in\mathbb{Z}}.$$

我们回顾文献 [55] 中建立的基本边值问题的同构。

定理 2.3. *i)* 所有从 $\mathscr{H}$到 $\mathfrak{J}$ 的双谱映射 $\tau\star\mu,\varrho\star\nu,\ \varrho\star\mu$ 和 $\tau\star\nu$ 彼此同构，且每个映射都是从 $\mathscr{H}$到 $\mathfrak{J}$ 上的 *RAB*，并且它们满足

$$\tau\star\mu=(\varrho\star\nu)\circ\mathbb{1}_-=(\varrho\star\mu)\circ\mathcal{R}_1=(\tau\star\nu)\circ\mathcal{R}_2.$$

ii) 从 $\mathscr{H}$到 $\mathfrak{J}^o\times\ell^2$的每个映射 $\mu\times(\pm\mathfrak{r})$、$\nu\times(\pm\mathfrak{s})$都是从 $\mathscr{H}$到 $\mathfrak{J}^o\times\ell^2$上的 *RAB*。此外，它们彼此同构，并满足

$$\mu\times\mathfrak{r}=(\nu\times\mathfrak{s})\circ\mathbb{1}_-=(\mu\times(-\mathfrak{r}))\circ\mathcal{R}_1=(\nu\times(-\mathfrak{s}))\circ\mathcal{R}_2.$$

iii) 从 $\mathscr{H}$到 $\mathfrak{J}^1\times\ell^2$ 的每个映射 $\tau\times(\pm\mathfrak{t})$ $\varrho\times(\pm\mathfrak{u})$都是从 $\mathscr{H}$到$\mathfrak{J}^1\times\ell^2$上的 *RAB*。此外，它们彼此同构，并满足

$$\tau\times\mathfrak{t}=(\varrho\times\mathfrak{u})\circ\mathbb{1}_-=(\varrho\times(-\mathfrak{u}))\circ\mathcal{R}_1=(\tau\times(-\mathfrak{t}))\circ\mathcal{R}_2.$$

下面的单谱结果涉及关于 $x=1/2$ 的偶奇势。

定理 2.4. 映射 $\mathcal{S}\mu$、 $\mathcal{S}\nu$、 τ和 ϱ 中的每一个都是从 $\mathscr{H}_{eo}$ 到 $\mathfrak{J}^1$ 、将 $\mathscr{H}_{eo}$映到 $\mathfrak{J}^1$ 上的 *RAB*。在 $\mathscr{H}_{eo}$上，它们满足

$$\mathcal{S}\mu=(\mathcal{S}\nu)\circ\mathcal{F}_o=\tau\circ\mathfrak{F}=\varrho\circ\mathcal{F}_o\circ\mathfrak{F},$$

其中算子 $\mathfrak{F}\colon\ \mathscr{H}_{eo}\to\mathscr{H}_{oe}$ 是从 $\mathscr{H}_{eo}$ 到 $\mathscr{H}_{oe}$上的一个双射。

按照 Marchenko [63], ，我们定义实归一化常数 $\mathfrak{a}_n$、 $\mathfrak{b}_n$、 $\mathfrak{c}_n$和 $\mathfrak{d}_n$、 $n\in\mathbb{Z}$，以及相应的规范化 映射如下

$$\begin{aligned}&e^{-\mathfrak{a}_n}=\|\varphi(\cdot,\mu_n)\|^2,\quad e^{-\mathfrak{b}_n}=\|\vartheta(\cdot,\nu_n)\|^2,\quad e^{-\mathfrak{c}_n}=\|\varphi(\cdot,\tau_n)\|^2,\quad e^{-\mathfrak{d}_n}=\|\vartheta(\cdot,\varrho_n)\|^2,\\&v\to\mathfrak{a}=(\mathfrak{a}_n)_{n\in\mathbb{Z}},\quad v\to\mathfrak{b}=(\mathfrak{b}_n)_{n\in\mathbb{Z}},\quad v\to\mathfrak{c}=(\mathfrak{c}_n)_{n\in\mathbb{Z}},\quad v\to\mathfrak{d}=(\mathfrak{d}_n)_{n\in\mathbb{Z}}.\end{aligned}\tag{2.7}$$

注意， $\mathfrak{a}(0)=\mathfrak{b}(0)=\mathfrak{c}(0)=\mathfrak{d}(0)=0$。我们遵循 [55], 讨论单谱映射和规范化映射的逆问题。

定理 2.5。 *i)* 由上述基本谱映射和 *(2.7)* 定义的映射 $\mu\times\mathfrak{a}$和 $\nu\times\mathfrak{b}$，均为从 $\mathscr{H}$到 $\mathfrak{J}^o\times\ell^2$ 的双射，并且满足

$$\mu\times\mathfrak{a}=(\nu\times\mathfrak{b})\circ\mathbb{1}_-.$$

ii) 由上述基本谱映射和 *(2.7)* 定义的映射 $\tau\times\mathfrak{c}$ 和 $\varrho\times\mathfrak{d}$，均为从 $\mathscr{H}$到 $\mathfrak{J}^1\times\ell^2$ 的双射，并且满足

$$\tau\times\mathfrak{c}=(\varrho\times\mathfrak{d})\circ\mathbb{1}_-.$$

以下关于基本特征值的典范关系已在 [55]中证明 .

定理 2.6。 设 $v\in\mathscr{H}$。那么对于任意 n、 $j\in\mathbb{Z}$，以下恒等式成立:

$$\begin{aligned}\mu_n(v)\wedge\mu_j(v)&=0,&\mathfrak{r}_n(v)\wedge\mu_j(v)&=\delta_{nj},&\mathfrak{r}_n(v)\wedge\mathfrak{r}_j(v)&=0,\\\nu_n(v)\wedge\nu_j(v)&=0,&\mathfrak{s}_n(v)\wedge\nu_j(v)&=\delta_{nj},&\mathfrak{s}_n(v)\wedge\mathfrak{s}_j(v)&=0,\\\tau_n(v)\wedge\tau_j(v)&=0,&\mathfrak{t}_n(v)\wedge\tau_j(v)&=\delta_{nj},&\mathfrak{t}_n(v)\wedge\mathfrak{t}_j(v)&=0,\\\varrho_n(v)\wedge\varrho_j(v)&=0,&\mathfrak{u}_n(v)\wedge\varrho_j(v)&=\delta_{nj},&\mathfrak{u}_n(v)\wedge\mathfrak{u}_j(v)&=0.\end{aligned}$$

此外，以下四个梯度族

$$\{\mu_n',\mathfrak{r}_n'\}_{n\in\mathbb{Z}},\quad\{\nu_n',\mathfrak{s}_n'\}_{n\in\mathbb{Z}},\quad\{\tau_n',\mathfrak{t}_n'\}_{n\in\mathbb{Z}},\quad\{\varrho_n',\mathfrak{u}_n'\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

是 $\mathscr{H}$ 的 *Riesz*基，其中为简便起见，$\mu_{\alpha,n}'=\frac{\partial\mu_\alpha}{\partial v^n}$、$\mathfrak{r}_{\alpha,n}'=\frac{\partial\mathfrak{r}_\alpha}{\partial v^n}$.....。

设 $\mathbb{Y}_1$ 和 $\mathbb{Y}_2$ 是 $\mathbb{Z}$的子集。我们将替换映射 $v\to\zeta=(\zeta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 和 $v\to\phi=(\phi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 定义为

$$\zeta_n=\begin{cases}\varrho_n, & \text{if}\quad n\in\mathbb{Y}_1\\ \tau_n, & \text{if}\quad n\notin\mathbb{Y}_1\end{cases},\qquad\phi_n=\begin{cases}\nu_n, & \text{if}\quad n\in\mathbb{Y}_2\\ \mu_n, & \text{if}\quad n\notin\mathbb{Y}_2\end{cases}.\tag{2.8}$$

定义对角符号变换算子 $\sigma=\mathrm{diag}(\sigma_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 如下

$$\sigma_{2j-1}=\begin{cases}-1 & \text{if } j\in\mathbb{Y}_1\\ 1 & \text{if } j\notin\mathbb{Y}_1\end{cases},\qquad\sigma_{2j}=\begin{cases}-1 & \text{if } j\in\mathbb{Y}_2\\ 1 & \text{if } j\notin\mathbb{Y}_2\end{cases}.$$

定理 2.7. 设映射 $\zeta = (\zeta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 和 $\phi = (\phi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 由 *(2.8)* 定义。则$\zeta \star \phi$： $\mathscr{H} \to \mathfrak{J}$ 是一个从 $\mathscr{H}$到 $\mathfrak{J}$ 的 *RAB*，并满足

$$(\zeta \star \phi) \circ \mathcal{U}_\sigma = \tau \star \mu.$$

2.3.一般边界条件。 我们考虑向量值函数 $f = (f_1, f_2)^\top$ 的以下一般边值问题

$$Jf' + Vf = \lambda f, \qquad \begin{cases} f_1(0)c_\beta - f_2(0)s_\beta = 0 \\ f_1(1)c_\alpha - f_2(1)s_\alpha = 0 \end{cases}. \tag{2.9}$$

我们证明，这个一般问题与问题（1.2）酉等价，其中势经过变换，谱参数也发生了平移。类似地，分别存在与问题（1.3）–（1.5）酉等价的相应一般问题。

对于 $\beta \in \mathbb{A}$，令 $\mathfrak{F}_\beta$，$\mathfrak{F}_{2\beta}$：$\mathscr{H} \to \mathscr{H}$ 表示由下式定义的酉乘法算子

$$\mathfrak{F}_\beta f = e^{\beta(x-1)J} f, \quad \text{and} \quad \mathfrak{F}_{2\beta} f = e^{2\beta(x-1)J} f, \qquad \mathfrak{F}_{2\beta} = \mathfrak{F}_\beta^2. \tag{2.10}$$

直接计算可得

$$\mathfrak{F}_\beta \big(J\tfrac{d}{dx} + V\big)\mathfrak{F}_\beta^* = J\tfrac{d}{dx} + \beta \mathbb{1}_2 + V_\beta,$$

其中

$$V_\beta = \mathfrak{F}_\beta V \mathfrak{F}_\beta^* = \mathfrak{F}_{2\beta} V = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_2 & -u_1 \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

and

$$u = \mathfrak{F}_{2\beta} v = \begin{pmatrix} v_1 c + v_2 s \\ -v_1 s + v_2 c \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} c = \cos\big(2\beta(x-1)\big) \\ s = \sin\big(2\beta(x-1)\big) \end{cases}.$$

下面的引理描述了一般边值问题如何在酉变换 $\mathfrak{F}_\beta$ 下变换。

引理 2.8. 设 α、$\beta \in \mathbb{A}$ 和 $v \in \mathscr{H}$。令 $\mathfrak{F}_\beta(x)$ 由 *(2.10)* 定义。*i)* 函数 f 是边值问题

$$Jf' + Vf = \lambda f, \quad x \in (0,1), \qquad \begin{cases} f_1(0)c_\beta - f_2(0)s_\beta = 0 \\ f_1(1)c_\alpha - f_2(1)s_\alpha = 0 \end{cases},$$

当且仅当 $y = \mathfrak{F}_\beta f$ 满足

$$Jy' + V_\beta y = (\lambda - \beta)y, \quad x \in (0,1), \qquad \begin{cases} y_1(0) = 0 \\ y_1(1)c_\alpha - y_2(1)s_\alpha = 0 \end{cases},$$

其中 V_β 由 *(2.11)* 给出。

ii) 基本矩阵解 $Y(x、\lambda、u)$，其中 $u = \mathfrak{F}_{2\beta} v$，满足

$$Y(1, \lambda - \beta, u) = \begin{pmatrix} c_\beta \vartheta_1 - s_\beta \varphi_1 & s_\beta \vartheta_1 + c_\beta \varphi_1 \\ c_\beta \vartheta_2 - s_\beta \varphi_2 & s_\beta \vartheta_2 + c_\beta \varphi_2 \end{pmatrix} (1, \lambda, v), \qquad Y(0, \cdot, u) = \mathbb{1}_2. \tag{2.12}$$

注记。 该引理表明，一般边界条件 $f_1(0)c_\beta - f_2(0)s_\beta = 0$可简化为狄利克雷条件 $y_1(0) = 0$，而 $x = 1$ 处的边界条件则保留其原有结构。

证明。 i) 设 $\mathfrak{F}_\beta(x) = e^{\beta(x-1)J}$。对系统 (2.9) 作规范变换，得到

$$\mathfrak{F}_\beta (J\frac{d}{dx} + V)\mathfrak{F}_\beta^* y = Jy' + V_{\mathbf{y}} = (\lambda - \beta)y, \qquad V_\beta = \mathfrak{F}_\beta V \mathfrak{F}_\beta^*. \tag{2.13}$$

根据线性常微分方程的标准存在唯一性定理，我们得到

$$y(x,\lambda-\beta,u)=\mathfrak{F}_\beta(x)f(x,\lambda,v),\qquad \text{where}\qquad u=\mathfrak{F}_{2\beta}v.$$

利用前述恒等映射直接计算可得

$$y(0,\lambda-\beta,u)=\mathfrak{F}_\beta(0)f(0,\lambda,v)=\begin{pmatrix}c_\beta f_1-s_\beta f_2\\ s_\beta f_1+c_\beta f_2\end{pmatrix}(0,\lambda,v),$$
$$y(1,\lambda-\beta,u)=\mathfrak{F}_\beta(1)f(1,\lambda,v)=\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix}(1,\lambda,v).$$

因此，我们得出变换后的解满足

$$y_1(0)=0\qquad\text{and}\qquad y_1(1)c_\alpha-y_2(1)s_\alpha=0.$$

这证明了 i)。

ii) 根据 (2.13)，我们推得基本矩阵解 Y 满足

$$Y(x,\lambda-\beta,u)=\mathfrak{F}_\beta(x)Y(x,\lambda,v)e^{\beta J},\qquad Y(0,\cdot,u)=\mathbb{1}_2,$$

这意味着 (2.12)。 ■

3. 规范变换及其性质

本节研究 ZS 系统在不同酉算子变换下的性质。我们描述谱数据、特征函数及其他相关量在这类变换下的变化。

利用作用于 $\mathscr{H}$ 上的酉算子 $F_\alpha(x)=e^{\alpha x J}$，我们得到

$$F_\alpha\big(J\frac{d}{dx}+V\big)F_\alpha^*=J\frac{d}{dx}+\alpha\mathbb{1}_2+V_\alpha,$$

其中

$$V_\alpha=F_\alpha V F_\alpha^*=F_{2\alpha}V=\begin{pmatrix}u_1 & u_2\\ u_2 & -u_1\end{pmatrix},$$

and

$$u=\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}=F_{2\alpha}v=\begin{pmatrix}c_{2\alpha x}v_1+s_{2\alpha x}v_2\\ -s_{2\alpha x}v_1+c_{2\alpha x}v_2\end{pmatrix}.$$

我们研究原算子的谱与变换后算子的谱之间的对应关系。

引理 3.1. 设 $\alpha\in\mathbb{A}$ 和 $v\in\mathscr{H}$。设 $F_{2\alpha}$ 和 $\mathcal{S}_\alpha$ 分别由 *(1.8)* 定义。则 *(1.10),*

i) 平移算子 $\mathcal{S}_\alpha:\ \mathfrak{J}\to\mathfrak{J}_\alpha$ 是从 $\mathfrak{J}$ 到 $\mathfrak{J}_\alpha$的实解析同构。对应的 $\mathfrak{J}^o$ 和 $\mathfrak{J}^1$平移也具有相同性质。

ii) 基本矩阵解 Y 具有如下形式

$$Y(x,\lambda-\alpha,u)=\begin{pmatrix}c_{\alpha x}\vartheta_1+s_{\alpha x}\vartheta_2 & c_{\alpha x}\varphi_1+s_{\alpha x}\varphi_2\\ -s_{\alpha x}\vartheta_1+c_{\alpha x}\vartheta_2 & -s_{\alpha x}\varphi_1+c_{\alpha x}\varphi_2\end{pmatrix}(x,\lambda,v),\quad u=F_{2\alpha}v.$$

iii) 由 *(1.12)* 定义的单谱映射 $\mu_\alpha,\nu_\alpha,\tau_\alpha,\varrho_\alpha$ 和范数化映射 $\mathfrak{r}_\alpha,\mathfrak{s}_\alpha,\mathfrak{t}_\alpha,\mathfrak{u}_\alpha$ 满足

$$(\mu_\alpha,\nu_\alpha,\tau_\alpha,\varrho_\alpha)\circ F_{2\alpha}=\mathcal{S}_\alpha(\mu,\nu,\tau,\varrho).\tag{3.1}$$
$$(\mathfrak{r}_\alpha,\mathfrak{s}_\alpha,\mathfrak{t}_\alpha,\mathfrak{u}_\alpha)\circ F_{2\alpha}=(\mathfrak{r},\mathfrak{s},\mathfrak{t},\mathfrak{u}).\tag{3.2}$$

证明。 i) 我们首先证明 $\mathcal{S}_\alpha$ 是单射。假设对于 $\mathfrak{J}$ 中的两个序列 $a=(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 和 $b=(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$，有 $\mathcal{S}_\alpha a=\mathcal{S}_\alpha b$。根据 $\mathcal{S}_\alpha$ 的定义，对于所有 $n\in\mathbb{Z}$，都有 $a_n=b_n$，因此 $a=b$。为证明其为满射，任取 $b=(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\mathfrak{J}_\alpha$，并按 $a_n=b_n+\alpha$ 定义 $a=(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$。于是 $a\in\mathfrak{J}$，且根据构造有 $\mathcal{S}_\alpha a=b$。因此 $\mathcal{S}_\alpha$ 是双射。在标准坐标下，它及其逆映射均为恒等映射，因此二者都是实解析的。同样的论证也适用于 $\mathfrak{J}^o$ 和 $\mathfrak{J}^1$。

ii) 设 $F_\alpha=e^{\alpha x J}$。系统 (1.1) 的规范变换给出

$$F_\alpha\big(J\tfrac{d}{dx}+V\big)F_\alpha^* f=Jf'+V_\alpha f=(\lambda-\alpha)f, \tag{3.3}$$

其中 $V_\alpha=F_\alpha V F_\alpha^*=F_{2\alpha}V$。设 $u=F_{2\alpha}v$ 且 $\zeta=\lambda-\alpha$。根据标准常微分方程理论，我们推得方程 (3.3) 的基本矩阵解 Y 满足

$$Y(x,\zeta,u)=F_\alpha(x)Y(x,\lambda,v)=\begin{pmatrix} c_{\alpha x}\vartheta_1+s_{\alpha x}\vartheta_2 & c_{\alpha x}\varphi_1+s_{\alpha x}\varphi_2\\ -s_{\alpha x}\vartheta_1+c_{\alpha x}\vartheta_2 & -s_{\alpha x}\varphi_1+c_{\alpha x}\varphi_2\end{pmatrix}(x,\lambda,v). \tag{3.4}$$

回忆一下，对于任意 $n\in\mathbb{Z}$，量 $\mu_{\alpha,\,n}$ $\nu_{\alpha,\,n}$，$\tau_{\alpha,\,n}$，$\varrho_{\alpha,\,n}$ 分别表示问题 (1.2)–(1.5) 的特征值。然后利用恒等映射 (3.4)，得到

$$\begin{aligned}
\big(c_\alpha\varphi_1-s_\alpha\varphi_2\big)(1,\zeta,u)&=\varphi_1(1,\lambda,v), \qquad \big(s_\alpha\varphi_1+c_\alpha\varphi_2\big)(1,\zeta,u)=\varphi_2(1,\lambda,v),\\
\big(c_\alpha\vartheta_1-s_\alpha\vartheta_2\big)(1,\zeta,u)&=\vartheta_1(1,\lambda,v), \qquad \big(s_\alpha\vartheta_1+c_\alpha\vartheta_2\big)(1,\zeta,u)=\vartheta_2(1,\lambda,v),
\end{aligned}$$

从而得到

$$\begin{aligned}
\mu_{\alpha,n}(u)&=\mu_n(v)-\alpha, \qquad \nu_{\alpha,n}(u)=\nu_n(v)-\alpha,\\
\tau_{\alpha,n}(u)&=\tau_n(v)-\alpha, \qquad \varrho_{\alpha,n}(u)=\varrho_n(v)-\alpha,
\end{aligned}$$

对所有 $n\in\mathbb{Z}$ 均成立。这就证明了 (3.1)。根据定标常数的定义，对所有 $n\in\mathbb{Z}$，我们得到:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{r}_{\alpha,n}(u)&=-\ln\left|\frac{\varphi_2(1,\mu_{\alpha,n},u)}{c_\alpha}\right|=-\ln|\varphi_2(1,\mu_n,v)|=\mathfrak{r}_n(v),\\
\mathfrak{s}_{\alpha,n}(u)&=-\ln\left|\frac{\vartheta_1(1,\nu_{\alpha,n},u)}{c_\alpha}\right|=-\ln|\vartheta_1(1,\nu_n,v)|=\mathfrak{s}_n(v),\\
\mathfrak{t}_{\alpha,n}(u)&=-\ln\left|\frac{\varphi_1(1,\tau_{\alpha,n},u)}{c_\alpha}\right|=-\ln|\varphi_1(1,\tau_n,v)|=\mathfrak{t}_n(v),\\
\mathfrak{u}_{\alpha,n}(u)&=-\ln\left|\frac{\vartheta_2(1,\varrho_{\alpha,n},u)}{c_\alpha}\right|=-\ln|\vartheta_2(1,\varrho_n,v)|=\mathfrak{u}_n(v).
\end{aligned}$$

这些恒等式推出恒等式(3.2)。 ∎

引理3.2。 设 $\alpha\in\mathbb{A}$ 和 $\mathscr{U}_1,\mathscr{U}_2$ 由*(1.8)*、*(1.9)*定义。则单谱映射μ_α, ν_α, τ_α, ϱ_α 以及范数化映射 $\mathfrak{r}_\alpha$, $\mathfrak{s}_\alpha$, $\mathfrak{t}_\alpha$, $\mathfrak{u}_\alpha$ 满足

$$(\mu_\alpha,\nu_\alpha,\tau_\alpha,\varrho_\alpha)=(\nu_\alpha,\mu_\alpha,\varrho_\alpha,\tau_\alpha)\circ\mathbb{1}_-=(\mu_\alpha,\nu_\alpha,\varrho_\alpha,\tau_\alpha)\circ\mathscr{U}_1=(\nu_\alpha,\mu_\alpha,\tau_\alpha,\varrho_\alpha)\circ\mathscr{U}_2, \tag{3.5}$$

and

$$(\mathfrak{r}_\alpha,\mathfrak{s}_\alpha,\mathfrak{t}_\alpha,\mathfrak{u}_\alpha)=(\mathfrak{s}_\alpha,\mathfrak{r}_\alpha,\mathfrak{u}_\alpha,\mathfrak{t}_\alpha)\circ\mathbb{1}_-=-(\mathfrak{r}_\alpha,\mathfrak{s}_\alpha,\mathfrak{u}_\alpha,\mathfrak{t}_\alpha)\circ\mathscr{U}_1=-(\mathfrak{s}_\alpha,\mathfrak{r}_\alpha,\mathfrak{t}_\alpha,\mathfrak{u}_\alpha)\circ\mathscr{U}_2. \tag{3.6}$$

注。 注意 $-(\mathfrak{r}_\alpha,\mathfrak{s}_\alpha,\mathfrak{u}_\alpha,\mathfrak{t}_\alpha)=(-\mathfrak{r}_\alpha,-\mathfrak{s}_\alpha,-\mathfrak{u}_\alpha,-\mathfrak{t}_\alpha)$.**证明**。 我们令

证明恒等式 (3.5)。系统 (1.1) 的规范变换给出

$$J\big(J\tfrac{d}{dx}+V\big)J^* f=Jf'-Vf=\lambda f,$$

s

因为 $JV = -VJ$。根据常微分方程理论的标准结果，我们推得前述方程的基本矩阵解 Y 满足

$$Y(1,\lambda,p) = JY(1,\lambda,v)J^* = \begin{pmatrix} \varphi_2 & -\vartheta_2 \\ -\varphi_1 & \vartheta_1 \end{pmatrix}(1,\lambda,v), \qquad p = \mathbb{1}_- v.$$

将这个矩阵恒等映射表示为 Y 的元素后，我们得到

$$\begin{aligned} (c_\alpha\varphi_1 - s_\alpha\varphi_2)(1,\lambda,p) &= -(c_\alpha\vartheta_2 + s_\alpha\vartheta_1)(1,\lambda,v), \\ (s_\alpha\vartheta_1 + c_\alpha\vartheta_2)(1,\lambda,p) &= -(c_\alpha\varphi_1 - s_\alpha\varphi_2)(1,\lambda,v), \\ (s_\alpha\varphi_1 + c_\alpha\varphi_2)(1,\lambda,p) &= (c_\alpha\vartheta_1 - s_\alpha\vartheta_2)(1,\lambda,v), \\ (c_\alpha\vartheta_1 - s_\alpha\vartheta_2)(1,\lambda,p) &= (s_\alpha\varphi_1 + c_\alpha\varphi_2)(1,\lambda,v). \end{aligned} \tag{3.7}$$

因此，对于任意 $n \in \mathbb{Z}$，相应的特征值满足

$$\mu_{\alpha,n}(p) = \nu_{\alpha,n}(v), \quad \nu_{\alpha,n}(p) = \mu_{\alpha,n}(v), \quad \tau_{\alpha,n}(p) = \varrho_{\alpha,n}(v), \quad \varrho_{\alpha,n}(p) = \tau_{\alpha,n}(v). \tag{3.8}$$

这些恒等式证明了与 $\mathbb{1}_-$ 相关的 (3.5) 式中的关系。结合 (3.7) 和 (3.8)，我们进一步得到以下关系：

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_{\alpha,n}(p) &= -\ln|(s_\alpha\varphi_1 + c_\alpha\varphi_2)(1,\mu_{\alpha,n}(p),p)| = -\ln|(c_\alpha\vartheta_1 - s_\alpha\vartheta_2)(1,\nu_{\alpha,n}(v),v)| = \mathfrak{s}_{\alpha,n}(v), \\ \mathfrak{s}_{\alpha,n}(p) &= -\ln|(c_\alpha\vartheta_1 - s_\alpha\vartheta_2)(1,\nu_{\alpha,n}(p),p)| = -\ln|(s_\alpha\varphi_1 + c_\alpha\varphi_2)(1,\mu_{\alpha,n}(v),v)| = \mathfrak{r}_{\alpha,n}(v), \\ \mathfrak{t}_{\alpha,n}(p) &= -\ln|(c_\alpha\varphi_1 - s_\alpha\varphi_2)(1,\tau_{\alpha,n}(p),p)| = -\ln|(s_\alpha\vartheta_1 + c_\alpha\vartheta_2)(1,\varrho_{\alpha,n}(v),v)| = \mathfrak{u}_{\alpha,n}(v), \\ \mathfrak{u}_{\alpha,n}(p) &= -\ln|(s_\alpha\vartheta_1 + c_\alpha\vartheta_2)(1,\varrho_{\alpha,n}(p),p)| = -\ln|(c_\alpha\varphi_1 - s_\alpha\varphi_2)(1,\tau_{\alpha,n}(v),v)| = \mathfrak{t}_{\alpha,n}(v). \end{aligned}$$

由于这些 关系对于任意 $n \in \mathbb{Z}$ 都成立，因此 (3.6) 中的第一个恒等式立即得出 y.

接下来，我们建立与 $\mathscr{U}_1$ 相关的恒等式。定义

$$\mathscr{U}_1 = \begin{pmatrix} c_{2\alpha} & -s_{2\alpha} \\ -s_{2\alpha} & -c_{2\alpha} \end{pmatrix}\mathcal{R}, \qquad U_\alpha = \begin{pmatrix} c_\alpha & -s_\alpha \\ -s_\alpha & -c_\alpha \end{pmatrix}\mathcal{R}.$$

对系统 (1.1) 作规范变换，得到

$$U_\alpha(J\tfrac{d}{dx} + V)U_\alpha^* f = Jf' + Wf = \lambda f, \tag{3.9}$$

其中

$$W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_2 & -w_1 \end{pmatrix} = U_\alpha V U_\alpha^*, \qquad \text{and} \qquad w = \mathscr{U}_1 v.$$

令 Y 表示 (3.9) 的归一化基本矩阵解。根据常微分方程理论中的标准结果，与 v 和 w 对应的基本矩阵满足关系

$$Y(1,\lambda,w) = \begin{pmatrix} -c_\alpha & s_\alpha \\ s_\alpha & c_\alpha \end{pmatrix} Y^{-1} \begin{pmatrix} -c_\alpha & s_\alpha \\ s_\alpha & c_\alpha \end{pmatrix}(1,\lambda,v). \tag{3.10}$$

对 (3.10) 中的各项作适当的线性组合，可得以下恒等式：

$$\begin{aligned} (c_\alpha\varphi_1 - s_\alpha\varphi_2)(1,\lambda,w) &= (c_\alpha\varphi_1 - s_\alpha\varphi_2)(1,\lambda,v), \\ (s_\alpha\vartheta_1 + c_\alpha\vartheta_2)(1,\lambda,w) &= (s_\alpha\vartheta_1 + c_\alpha\vartheta_2)(1,\lambda,v), \\ (s_\alpha\varphi_1 + c_\alpha\varphi_2)(1,\lambda,w) &= (c_\alpha\vartheta_1 - s_\alpha\vartheta_2)(1,\lambda,v), \\ (c_\alpha\vartheta_1 - s_\alpha\vartheta_2)(1,\lambda,w) &= (s_\alpha\varphi_1 + c_\alpha\varphi_2)(1,\lambda,v), \end{aligned}$$

这意味着相应的特征值满足

$$(\mu_{\alpha,n},\nu_{\alpha,n},\tau_{\alpha,n},\varrho_{\alpha,n}) \circ \mathscr{U}_1 = (\mu_{\alpha,n},\nu_{\alpha,n},\varrho_{\alpha,n},\tau_{\alpha,n}), \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}. \tag{3.11}$$

回顾朗斯基行列式满足 $\vartheta_1\varphi_2-\vartheta_2\varphi_1=1$。将此关系与（3.10）结合，对于每个 $n\in\mathbb{Z}$，我们得到

$$\begin{aligned} e^{-\mathfrak{r}_{\alpha,n}(w)} &= \big|\big(s_\alpha\varphi_1+c_\alpha\varphi_2\big)\big(1,\mu_{\alpha,n}(w),w\big)\big| = \big|\big(c_\alpha\vartheta_1-s_\alpha\vartheta_2\big)\big(1,\mu_{\alpha,n}(v),v\big)\big| \\ &= \big|\big(s_\alpha\varphi_1+c_\alpha\varphi_2\big)\big(1,\mu_{\alpha,n}(v),v\big)\big|^{-1} = e^{\mathfrak{r}_{\alpha,n}(v)}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

同理，我们得到

$$\begin{aligned} e^{-\mathfrak{s}_{\alpha,n}(w)} &= \big|\big(c_\alpha\vartheta_1-s_\alpha\vartheta_2\big)\big(1,\nu_{\alpha,n}(w),w\big)\big| = \big|\big(c_\alpha\vartheta_1-s_\alpha\vartheta_2\big)\big(1,\nu_{\alpha,n}(v),v\big)\big|^{-1} = e^{\mathfrak{s}_{\alpha,n}(v)}, \\ e^{-\mathfrak{t}_{\alpha,n}(w)} &= \big|\big(c_\alpha\varphi_1-s_\alpha\varphi_2\big)\big(1,\tau_{\alpha,n}(w),w\big)\big| = \big|\big(s_\alpha\vartheta_1+c_\alpha\vartheta_2\big)\big(1,\varrho_{\alpha,n}(v),v\big)\big|^{-1} = e^{\mathfrak{u}_{\alpha,n}(v)}, \\ e^{-\mathfrak{u}_{\alpha,n}(w)} &= \big|\big(s_\alpha\vartheta_1+c_\alpha\vartheta_2\big)\big(1,\varrho_{\alpha,n}(w),w\big)\big| = \big|\big(c_\alpha\vartheta_1-s_\alpha\vartheta_2\big)\big(1,\tau_{\alpha,n}(v),v\big)\big|^{-1} = e^{\mathfrak{t}_{\alpha,n}(v)}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

结合（3.11）–（3.13），我们建立了关于 $\mathscr{U}_1$ 的所有恒等式。此外，（3.8）和表明，对于所有 $n\in\mathbb{Z}$, (3.11)

$$\begin{aligned} \mu_{\alpha,n}\circ(\mathbb{1}_-\mathscr{U}_1) &= \nu_{\alpha,n}\circ\mathscr{U}_1=\nu_{\alpha,n}, \qquad \nu_{\alpha,n}\circ(\mathbb{1}_-\mathscr{U}_1)=\mu_{\alpha,n}\circ\mathscr{U}_1=\mu_{\alpha,n}, \\ \tau_{\alpha,n}\circ(\mathbb{1}_-\mathscr{U}_1) &= \varrho_{\alpha,n}\circ\mathscr{U}_1=\tau_{\alpha,n}, \qquad \varrho_{\alpha,n}\circ(\mathbb{1}_-\mathscr{U}_1)=\tau_{\alpha,n}\circ\mathscr{U}_1=\varrho_{\alpha,n}, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_{\alpha,n}\circ(\mathbb{1}_-\mathscr{U}_1) &= \mathfrak{s}_{\alpha,n}\circ\mathscr{U}_1=-\mathfrak{s}_{\alpha,n}, \qquad \mathfrak{s}_{\alpha,n}\circ(\mathbb{1}_-\mathscr{U}_1)=\mathfrak{r}_{\alpha,n}\circ\mathscr{U}_1=-\mathfrak{r}_{\alpha,n}, \\ \mathfrak{t}_{\alpha,n}\circ(\mathbb{1}_-\mathscr{U}_1) &= \mathfrak{u}_{\alpha,n}\circ\mathscr{U}_1=-\mathfrak{t}_{\alpha,n}, \qquad \mathfrak{u}_{\alpha,n}\circ(\mathbb{1}_-\mathscr{U}_1)=\mathfrak{t}_{\alpha,n}\circ\mathscr{U}_1=-\mathfrak{u}_{\alpha,n}. \end{aligned}$$

由于 $\mathscr{U}_2=\mathbb{1}_-\mathscr{U}_1$，这些恒等式建立了关于 $\mathscr{U}_2$ 的（3.5）和（3.6），从而完成证明。 ■

推论3 **.3.** 设 $\alpha\in\mathbb{A}$ 和 $F_{2\alpha},\mathscr{U}_1,\mathscr{U}_2$由（*1* *.8), (1.9)*

。*i*）所有双谱映射 $\tau_\alpha\star\mu_\alpha$、 $\tau_\alpha\star\nu_\alpha$、 $\varrho_\alpha\star\mu_\alpha$、 $\varrho_\alpha\star\nu_\alpha$ 都是同构的，并且满足

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\alpha(\tau\star\mu)\circ F_{2\alpha}^* &= \tau_\alpha\star\mu_\alpha=(\varrho_\alpha\star\nu_\alpha)\circ\mathbb{1}_- \\ &= (\varrho_\alpha\star\mu_\alpha)\circ\mathscr{U}_1=(\tau_\alpha\star\nu_\alpha)\circ\mathscr{U}_2. \end{aligned} \tag{3.14}$$

ii）所有映射 $\mathcal{S}_\alpha\mu\times\mathfrak{r}$、 $\mu_\alpha\times(\pm\mathfrak{r}_\alpha)$、 $\nu_\alpha\times(\pm\mathfrak{s}_\alpha)$ 都是同构的。同样，映射 $\mathcal{S}_\alpha\tau\times\mathfrak{t}$、$\varrho_\alpha\times(\pm\mathfrak{u}_\alpha)$ 和 $\tau_\alpha\times(\pm\mathfrak{t}_\alpha)$ 也是同构的。此外，它们满足

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_\alpha\mu\times\mathfrak{r})\circ F_{2\alpha}^* &= \mu_\alpha\times\mathfrak{r}_\alpha=(\nu_\alpha\times\mathfrak{s}_\alpha)\circ\mathbb{1}_- \\ &= (\mu_\alpha\times(-\mathfrak{r}_\alpha))\circ\mathscr{U}_1=(\nu_\alpha\times(-\mathfrak{s}_\alpha))\circ\mathscr{U}_2, \end{aligned} \tag{3.15}$$

and

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_\alpha\tau\times\mathfrak{t})\circ F_{2\alpha}^* &= \tau_\alpha\times\mathfrak{t}_\alpha=(\varrho_\alpha\times\mathfrak{u}_\alpha)\circ\mathbb{1}_- \\ &= (\varrho_\alpha\times(-\mathfrak{u}_\alpha))\circ\mathscr{U}_1=(\tau_\alpha\times(-\mathfrak{t}_\alpha))\circ\mathscr{U}_2. \end{aligned} \tag{3.16}$$

证明。 i）由引理 3.1 和 3.2 可知，双谱映射 $\mathcal{S}_\alpha$（$\tau\star\mu$）、 $\tau_\alpha\star\mu_\alpha$、 $\tau_\alpha\star\nu_\alpha$、$\varrho_\alpha\star\mu_\alpha$、 $\varrho_\alpha\star\nu_\alpha$ 是同构的，并且满足（3.14）。

ii）同样的引理表明，映射 $\mathcal{S}_\alpha\mu\times\mathfrak{r}$、 $\mu_\alpha\times(\pm\mathfrak{r}_\alpha)$、 $\nu_\alpha\times(\pm\mathfrak{s}_\alpha)$ 两两同构，映射 $\mathcal{S}_\alpha\tau\times\mathfrak{t}$、 $\varrho_\alpha\times(\pm\mathfrak{u}_\alpha)$ 和 $\tau_\alpha\times(\pm\mathfrak{t}_\alpha)$ 亦然。此外，所有这些映射都满足（3.15）和（3.16）。 ■

4. 单位区间上的同构逆问题

4.1. 主要定理的证明。现在，我们通过规范变换转移基本结果。在每个论证中，我们都会使用相同的谱平移和相同的势的幺正变换。

定理 1.2 的证明。设 $v \in \mathscr{H}$。回顾一下， $F_{2\alpha}$ 和 $\mathcal{S}_\alpha$ 分别在 (1.8) 和 (1.10) 中定义。由引理 3.1 中的 (3.1)，可得

$$\mathfrak{f}_{\alpha,2n-1} \circ F_{2\alpha} = \tfrac{1}{2}(\varrho_{\alpha,n} - \tau_{\alpha,n}) \circ F_{2\alpha} = \tfrac{1}{2}\big((\varrho_n - \alpha) - (\tau_n - \alpha)\big) = \tfrac{1}{2}(\varrho_n - \tau_n),$$
$$\mathfrak{f}_{\alpha,2n} \circ F_{2\alpha} = \tfrac{1}{2}(\nu_{\alpha,n} - \mu_{\alpha,n}) \circ F_{2\alpha} = \tfrac{1}{2}\big((\nu_n - \alpha) - (\mu_n - \alpha)\big) = \tfrac{1}{2}(\nu_n - \mu_n).$$

这些恒等式给出 $\mathfrak{f}_\alpha \circ F_{2\alpha} = \mathfrak{f}$。由于映射 $\mathfrak{f}\colon \mathscr{H} \to \ell^2$ 是一个 RAB，定理 2.1 和前面的关系表明，映射 $\mathfrak{f}_\alpha : \mathscr{H} \to \ell^2$ 也是一个 RAB。利用 $F_{2\alpha}$ 保持范数的性质并应用 (2.6)，我们得到以下估计：

$$\|\mathfrak{f}_\alpha(u)\| = \|\mathfrak{f}(v)\| \leqslant \sqrt{2}\|v\| = \sqrt{2}\|u\|,$$
$$\|u\| = \|v\| \leqslant 2\|\mathfrak{f}(v)\|\big(1 + \|\mathfrak{f}(v)\|\big) = 2\|\mathfrak{f}_\alpha(u)\|\big(1 + \|\mathfrak{f}_\alpha(u)\|\big),$$

其中 $u = F_{2\alpha}v$。这些结果确立了 (1.7)。 ∎

定理 4.1。设 $\alpha \in \mathbb{A}$。
i) 映射 $(\mathcal{S}_\alpha\mu) \times \mathfrak{r}\colon \mathscr{H} \to \mathfrak{J}^o_\alpha \times \ell^2$ 是一个 *RAB*，将 $\mathscr{H}$ 映射到 $\mathfrak{J}^o_\alpha \times \ell^2$。*ii)* 映射 $(\mathcal{S}_\alpha\tau) \times \mathfrak{t}\colon \mathscr{H} \to \mathfrak{J}^1_\alpha \times \ell^2$ 是一个 *RAB*，将 $\mathscr{H}$ 映射到 $\mathfrak{J}^1_\alpha \times \ell^2$。*iii)* 映射 $\mathcal{S}_\alpha\mu$: $\mathscr{H}_{eo} \to \mathfrak{J}^o_\alpha$ 是一个 *RAB*，将 $\mathscr{H}_{eo}$ 映射到 $\mathfrak{J}^o_\alpha$。

证明。在标准序列坐标下， $\mathcal{S}_\alpha$ 是一个解析同构。因此，i) 和 ii) 可由将定理 2.3 中的 RAB 与 $\mathcal{S}_\alpha \times I$ 复合得到，其中 I 是 ℓ^2 上的恒等映射。iii) 可由将定理 2.4 中的 RAB 与 $\mathcal{S}_\alpha$ 复合得到。 ∎

定理 1.3 的证明。根据定理 2.3，双谱映射 $\tau \star \mu$ 是从 $\mathscr{H}$ 到 $\mathfrak{J}$ 的一个 RAB。由于 $\mathcal{S}_\alpha$ 是从 $\mathfrak{J}$ 到 $\mathfrak{J}_\alpha$ 的实解析同构，复合映射 $\mathcal{S}_\alpha(\tau \star \mu)$ 也是从 $\mathscr{H}$ 到 $\mathfrak{J}_\alpha$ 的一个 RAB。此外，推论 3.3 表明，所有将 $\mathscr{H}$ 映射到 $\mathfrak{J}_\alpha$ 的双谱映射 $\mathcal{S}_\alpha(\tau \star \mu)$、 $\tau_\alpha \star \mu_\alpha$、 $\tau_\alpha \star \nu_\alpha$、 $\varrho_\alpha \star \mu_\alpha$、 $\varrho_\alpha \star \nu_\alpha$ 彼此同构。因此，这些映射中的每一个都是从 $\mathscr{H}$ 到 $\mathfrak{J}_\alpha$ 的 RAB，并满足 (1.11)。

定理 1.4 的证明。i）根据定理 4.1，映射 $(\mathcal{S}_\alpha\mu) \times \mathfrak{r}$： $\mathscr{H} \to \mathfrak{J}^o_\alpha \times \ell^2$ 是从 $\mathscr{H}$ 到 $\mathfrak{J}^o_\alpha \times \ell^2$ 上的 RAB。推论 3.3 进一步表明，从 $\mathscr{H}$ 到 $\mathfrak{J}^o_\alpha \times \ell^2$ 的映射 $(\mathcal{S}_\alpha\mu) \times \mathfrak{r}$、$\mu_\alpha \times(\pm\mathfrak{r}_\alpha)$、 $\nu_\alpha \times(\pm\mathfrak{s}_\alpha)$ 是同构的。因此，这些映射中的每一个都是从 $\mathscr{H}$ 到 $\mathfrak{J}^o_\alpha \times \ell^2$ 上的 RAB，并满足（1.13）。

ii）类似地，定理 4.1 蕴含，映射 $(\mathcal{S}_\alpha\tau) \times \mathfrak{t}$： $\mathscr{H} \to \mathfrak{J}^1_\alpha \times \ell^2$ 是从 $\mathscr{H}$ 到 $\mathfrak{J}^1_\alpha \times \ell^2$ 上的 RAB。根据推论 3.3，从 $\mathscr{H}$ 到 $\mathfrak{J}^1_\alpha \times \ell^2$ 的所有映射 $(\mathcal{S}_\alpha\tau) \times \mathfrak{t}$、 $\tau_\alpha \times (\pm\mathfrak{t}_\alpha)$、 $\varrho_\alpha \times (\pm\mathfrak{u}_\alpha)$ 都是同构的。因此，这些映射中的每一个都是从 $\mathscr{H}$ 到 $\mathfrak{J}^1_\alpha \times \ell^2$ 上的 RAB，并满足（1.14）。

推论 1.5 的证明。回顾一下，空间 $\mathscr{H}_{eo}$ 和 $\mathscr{H}_\alpha$ 定义于（1.15）中。我们证明 $F_{2\alpha} : \mathscr{H}_{eo} \to \mathscr{H}_\alpha$ 是一个双射。对于任意 $v \in \mathscr{H}_{eo}$，有

$$u(x) = F_{2\alpha}v(x) = \begin{pmatrix} c_{2\alpha x}v_1 + s_{2\alpha x}v_2 \\ -s_{2\alpha x}v_1 + c_{2\alpha x}v_2 \end{pmatrix},$$

根据 $\mathscr{H}_{eo}$ 的定义，我们得到

$$u(1-x) = \begin{pmatrix} c_{2\alpha}u_1 - s_{2\alpha}u_2 \\ -s_{2\alpha}u_1 - c_{2\alpha}u_2 \end{pmatrix}(x) = e^{2\alpha J}J_1u(x).$$

因此 $u \in \mathscr{H}_\alpha$。直接计算表明，对于每个 $u \in \mathscr{H}_\alpha$，存在唯一的 $v \in \mathscr{H}_{eo}$ 使得 $u = F_{2\alpha}v$。

由定理 2.3 和定理 2.4，我们推得单谱映射

$$\mathcal{S}_\alpha\mu, \mathcal{S}_\alpha\nu : \mathscr{H}_{eo} \to \mathfrak{J}^o_\alpha, \qquad \mathcal{S}_\alpha\tau, \mathcal{S}_\alpha\varrho : \mathscr{H}_{eo} \to \mathfrak{J}^1_\alpha,$$

全都是 RAB。将这些事实与 (3.1) 结合，便得到恒等映射 (1.16)。 ∎

推论 1.6 的证明。 回顾在 (1.17) 中定义的映射 $\mathcal{U}_{\alpha,\,\sigma}$ 是从 $\mathscr{H}$ 到其自身的 RAB。由定理2.2、2.7 和引理 3.1，我们推得

$$\big(\zeta_\alpha \star \phi_\alpha\big) \circ \mathcal{U}_{\alpha,\sigma} = \big(\zeta_\alpha \star \phi_\alpha\big) \circ (F_{2\alpha} \circ \mathcal{U}_\sigma \circ F_{2\alpha}^{*}) = \tau_\alpha \star \mu_\alpha,$$

这就得到 (1.19)。根据定理 1.3，双谱映射 $\tau_\alpha \star \mu_\alpha$ 是从 $\mathscr{H}$ 到 $\mathfrak{J}_\alpha$ 的 RAB。因此，映射 $\zeta_\alpha \star \phi_\alpha$ 也是从 $\mathscr{H}$ 到 $\mathfrak{J}_\alpha$ 的 RAB。 ∎

定理 1.7 的证明。 设 $a,\ b\colon \mathscr{H} \to \mathbb{R}$ 是连续 Fréchet可微函数。设 $F\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ 是如下形式的线性乘法算子

$$Fv = F(x)v(x),$$

其中 $F(x)$ 是一个 2×2矩阵。对 $v \in \mathscr{H}$，定义复合函数 $A(v) = a(Fv)$ 和 $B(v) = b(Fv)$。将梯度写成行向量并令 $u = Fv$，由链式法则得到

$$(A'_v, B'_v)_0 = (A'_{v_1}, A'_{v_2})^{\top} J (B'_{v_1}, B'_{v_2}) = (a'_{u_1}, a'_{u_2})^{\top} F^{\top} J F (b'_{u_1}, b'_{u_2}). \tag{4.1}$$

特别地，若 $FJF^{\top} = J$，则

$$A(v) \wedge B(v) = a(u) \wedge b(u).$$

由引理 3.1，我们可推出 $\mathcal{S}_\alpha \mu = \mu_\alpha \circ F_{2\alpha}$。将此恒等关系与定理 2.6、恒等式 (4.1) 以及 $F_{2\alpha}^{*} J F_{2\alpha} = J$ 这一事实结合起来，可得对所有 $n,\ j \in \mathbb{Z}$,

$$\mu_{\alpha,n}(u) \wedge \mu_{\alpha,j}(u) = \mu_n(v) \wedge \mu_j(v) = 0, \qquad \mathfrak{r}_{\alpha,n}(u) \wedge \mathfrak{r}_{\alpha,j}(u) = \mathfrak{r}_n(v) \wedge \mathfrak{r}_j(v) = 0,$$
$$\mathfrak{r}_{\alpha,n}(u) \wedge \mu_{\alpha,j}(u) = \mathfrak{r}_n(v) \wedge \mu_j(v) = \delta_{n,j},$$

这给出了 (1.20) 中的第一行。(1.20) 中其余恒等式可用类似论证推出；另见 [55]。根据泛函分析中的一个著名结果（见 [70]），梯度族 $\{\mu'_{\alpha,n}, \mathfrak{r}'_{\alpha,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 构成 $\mathscr{H}$ 的一组基，其他谱映射所对应的梯度族也如此。证毕。 ∎

4.2. **规范化映射**。 我们引入规范化映射 $\mathfrak{a}_\alpha = (\mathfrak{a}_{\alpha,\,n})_{n\in\mathbb{Z}}$, $\mathfrak{b}_\alpha = (\mathfrak{b}_{\alpha,\,n})_{n\in\mathbb{Z}}$, $\mathfrak{c}_\alpha = (\mathfrak{c}_{\alpha,\,n})_{n\in\mathbb{Z}}$, $\mathfrak{d}_\alpha = (\mathfrak{d}_{\alpha,\,n})_{n\in\mathbb{Z}}$，其分量定义如下：

$$\begin{aligned} e^{-\mathfrak{a}_{\alpha,n}} &= \|\varphi(\cdot, \mu_{\alpha,n}, v)\|^2, \qquad & e^{-\mathfrak{b}_{\alpha,n}} &= \|\vartheta(\cdot, \nu_{\alpha,n}, v)\|^2, \\ e^{-\mathfrak{c}_{\alpha,n}} &= \|\varphi(\cdot, \tau_{\alpha,n}, v)\|^2, \qquad & e^{-\mathfrak{d}_{\alpha,n}} &= \|\vartheta(\cdot, \varrho_{\alpha,n}, v)\|^2. \end{aligned} \tag{4.2}$$

引理4.2. 令 $\alpha \in \mathbb{A}$ 和 $F_{2\alpha}$ 由*(1.8)*定义。那么，由*(4.2)*定义的规范化映射 $\mathfrak{a}_\alpha$、 $\mathfrak{b}_\alpha$、$\mathfrak{c}_\alpha$、 $\mathfrak{d}_\alpha$满足

$$(\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b}_\alpha, \mathfrak{c}_\alpha, \mathfrak{d}_\alpha) \circ F_{2\alpha} = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}). \tag{4.3}$$

证明。 令 $u = F_{2\alpha} v$适用于 $v \in \mathscr{H}$。引理 3.1 给出，例如， $\varphi(x,\ \mu_{\alpha,\,n}(u)\ u) = F_\alpha(x)\varphi(x,\ \mu_n(v)\ v)$。这些特征函数具有相同的范数，即

$$\mathfrak{a}_{\alpha,n}(u) = -\ln \int_0^1 \varphi^2(x, \mu_{\alpha,n}, u)dx = -\ln \int_0^1 \big(F_\alpha(x)\varphi(x, \mu_n, v)\big)^2 dx = \mathfrak{a}_n(v), \quad \forall\ n \in \mathbb{Z}.$$

对另外三个特征函数采用同样的论证，我们得到以下对所有 $n\in\mathbb{Z}$均成立的恒等式,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{b}_{\alpha,n}(u) &= -\ln\int_0^1 \vartheta^2(x,\nu_{\alpha,n},u)dx = -\ln\int_0^1 \big(F_\alpha(x)\vartheta(x,\nu_n,v)\big)^2dx = \mathfrak{b}_n(v),\\
\mathfrak{c}_{\alpha,n}(u) &= -\ln\int_0^1 \varphi^2(x,\tau_{\alpha,n},u)dx = -\ln\int_0^1 \big(F_\alpha(x)\varphi(x,\tau_n,v)\big)^2dx = \mathfrak{c}_n(v),\\
\mathfrak{d}_{\alpha,n}(u) &= -\ln\int_0^1 \vartheta^2(x,\varrho_{\alpha,n},u)dx = -\ln\int_0^1 \big(F_\alpha(x)\vartheta(x,\varrho_n,v)\big)^2dx = \mathfrak{d}_n(v).
\end{aligned}$$

这些证明了恒等映射 (4.3)。 ∎

我们将归一化常数 $\mathfrak{a}_n,\mathfrak{b}_n,\mathfrak{c}_n,\mathfrak{d}_n$ （对于 $n\in\mathbb{Z}$）表示为定标常数 $\mathfrak{r}_n,\mathfrak{s}_n,\mathfrak{t}_n,\mathfrak{u}_n$ 的形式如下:

$$\begin{aligned}
e^{-\mathfrak{a}_n} &= -\dot\varphi_1(1,\mu_n)\varphi_2(1,\mu_n) = e^{\mathfrak{a}_n^\bullet-\mathfrak{r}_n}, \qquad \mathfrak{a}_n^\bullet = \ln|\dot\varphi_1(1,\mu_n)|,\\
e^{-\mathfrak{b}_n} &= \dot\vartheta_2(1,\nu_n)\vartheta_1(1,\nu_n) = e^{\mathfrak{b}_n^\bullet-\mathfrak{s}_n}, \qquad \mathfrak{b}_n^\bullet = \ln|\dot\vartheta_2(1,\nu_n)|,\\
e^{-\mathfrak{c}_n} &= \dot\varphi_2(1,\tau_n)\varphi_1(1,\tau_n) = e^{\mathfrak{c}_n^\bullet-\mathfrak{t}_n}, \qquad \mathfrak{c}_n^\bullet = \ln|\dot\varphi_2(1,\tau_n)|,\\
e^{-\mathfrak{d}_n} &= -\dot\vartheta_1(1,\varrho_n)\vartheta_2(1,\varrho_n) = e^{\mathfrak{d}_n^\bullet-\mathfrak{u}_n}, \qquad \mathfrak{d}_n^\bullet = \ln|\dot\vartheta_1(1,\varrho_n)|,
\end{aligned}\tag{4.4}$$

其中 $\dot u=\frac{\partial u}{\lambda}$。我们建立定标映射与归一化映射之间的关系。

引理 4.3。 设 $\alpha\in\mathbb{A}$。那么对于任意 $n\in\mathbb{Z}$，由 *(4.2)* 定义的归一化常数满足

$$\begin{aligned}
e^{-\mathfrak{a}_{\alpha,n}} &= \int_0^1 |\varphi(x,\mu_{\alpha,n})|^2dx = e^{A_n^\bullet-\mathfrak{r}_{\alpha,n}}, \qquad A_n^\bullet = \ln|c_\alpha\dot\varphi_1(1,\mu_{\alpha,n}) - s_\alpha\dot\varphi_2(1,\mu_{\alpha,n})|,\\
e^{-\mathfrak{b}_{\alpha,n}} &= \int_0^1 |\vartheta(x,\nu_{\alpha,n})|^2dx = e^{B_n^\bullet-\mathfrak{s}_{\alpha,n}}, \qquad B_n^\bullet = \ln|s_\alpha\dot\vartheta_1(1,\nu_{\alpha,n}) + c_\alpha\dot\vartheta_2(1,\nu_{\alpha,n})|,\\
e^{-\mathfrak{c}_{\alpha,n}} &= \int_0^1 |\varphi(x,\tau_{\alpha,n})|^2dx = e^{C_n^\bullet-\mathfrak{t}_{\alpha,n}}, \qquad C_n^\bullet = \ln|s_\alpha\dot\varphi_1(1,\tau_{\alpha,n}) + c_\alpha\dot\varphi_2(1,\tau_{\alpha,n})|,\\
e^{-\mathfrak{d}_{\alpha,n}} &= \int_0^1 |\vartheta(x,\varrho_{\alpha,n})|^2dx = e^{D_n^\bullet-\mathfrak{u}_{\alpha,n}}, \qquad D_n^\bullet = \ln|c_\alpha\dot\vartheta_1(1,\varrho_{\alpha,n}) - s_\alpha\dot\vartheta_2(1,\varrho_{\alpha,n})|.
\end{aligned}\tag{4.5}$$

证明。 设 $u=F_{2\alpha}v$ 对于 $v\in\mathscr{H}$。由 (3.4) 可得

$$\big(c_\alpha\varphi_1 - s_\alpha\varphi_2\big)(1,\zeta,u) = \varphi_1(1,\lambda,v), \qquad \zeta=\lambda-\alpha.$$

求导 对谱参数应用这一恒等映射并利用 (3.1)，我们得到

$$\big(c_\alpha\dot\varphi_1 - s_\alpha\dot\varphi_2\big)(1,\mu_{\alpha,n},u) = \dot\varphi_1(1,\mu_n,v), \qquad \frac{\varphi_2(1,\mu_{\alpha,n},u)}{c_\alpha} = \varphi_2(1,\mu_n,v), \qquad \forall\, n\in\mathbb{Z}. \tag{4.6}$$

对基本矩阵的其余元素应用相同的论证，可得以下恒等式，它们对所有 $n\in\mathbb{Z}$ 均成立，

$$\begin{aligned}
\big(s_\alpha\dot\varphi_1+c_\alpha\dot\varphi_2\big)(1,\tau_{\alpha,n},u)&=\dot\varphi_2(1,\tau_n,v), &\qquad \frac{\varphi_1(1,\tau_{\alpha,n},u)}{c_\alpha}&=\varphi_1(1,\tau_n,v),\\
\big(c_\alpha\dot\vartheta_1-s_\alpha\dot\vartheta_2\big)(1,\varrho_{\alpha,n},u)&=\dot\vartheta_1(1,\varrho_n,v), &\qquad \frac{\vartheta_2(1,\varrho_{\alpha,n},u)}{c_\alpha}&=\vartheta_2(1,\varrho_n,v),\\
\big(s_\alpha\dot\vartheta_1+c_\alpha\dot\vartheta_2\big)(1,\nu_{\alpha,n},u)&=\dot\vartheta_2(1,\nu_n,v), &\qquad \frac{\vartheta_1(1,\nu_{\alpha,n},u)}{c_\alpha}&=\vartheta_1(1,\nu_n,v).
\end{aligned}\tag{4.7}$$

将（4.4）与（4.3）、（4.6）和（4.7）结合起来，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}_{\alpha,n}(u)=\mathfrak{a}_n(v)&=-\ln\left|\frac{\varphi_2(1,\mu_{\alpha,n},u)}{c_\alpha}\big(c_\alpha\dot\varphi_1-s_\alpha\dot\varphi_2\big)(1,\mu_{\alpha,n},u)\right|\\
&=-\ln\left|\frac{\varphi_2(1,\mu_{\alpha,n},u)}{c_\alpha}\right|-\ln\Big|(c_\alpha\dot\varphi_1-s_\alpha\dot\varphi_2)(1,\mu_{\alpha,n},u)\Big|,\\
\mathfrak{b}_{\alpha,n}(u)=\mathfrak{b}_n(v)&=-\ln\left|\frac{\vartheta_1(1,\nu_{\alpha,n},u)}{c_\alpha}\big(s_\alpha\dot\vartheta_1+c_\alpha\dot\vartheta_2\big)(1,\nu_{\alpha,n},u)\right|\\
&=-\ln\left|\frac{\vartheta_1(1,\nu_{\alpha,n},u)}{c_\alpha}\right|-\ln\Big|(s_\alpha\dot\vartheta_1+c_\alpha\dot\vartheta_2)(1,\nu_{\alpha,n},u)\Big|,\\
\mathfrak{c}_{\alpha,n}(u)=\mathfrak{c}_n(v)&=-\ln\left|\frac{\varphi_1(1,\tau_{\alpha,n},u)}{c_\alpha}\big(s_\alpha\dot\varphi_1+c_\alpha\dot\varphi_2\big)(1,\tau_{\alpha,n},u)\right|\\
&=-\ln\left|\frac{\varphi_1(1,\tau_{\alpha,n},u)}{c_\alpha}\right|-\ln\Big|(s_\alpha\dot\varphi_1+c_\alpha\dot\varphi_2)(1,\tau_{\alpha,n},u)\Big|,\\
\mathfrak{d}_{\alpha,n}(u)=\mathfrak{d}_n(v)&=-\ln\left|\frac{\vartheta_2(1,\varrho_{\alpha,n},u)}{c_\alpha}\big(c_\alpha\dot\vartheta_1-s_\alpha\dot\vartheta_2\big)(1,\varrho_{\alpha,n},u)\right|\\
&=-\ln\left|\frac{\vartheta_2(1,\varrho_{\alpha,n},u)}{c_\alpha}\right|-\ln\Big|(c_\alpha\dot\vartheta_1-s_\alpha\dot\vartheta_2)(1,\varrho_{\alpha,n},u)\Big|.
\end{aligned}$$

这些恒等式证明了（4.5）。■

引理4.4。设 $\alpha\in\mathbb{A}$。在（*4.2*）中定义的规范化映射 $\mathfrak{a}_\alpha$、$\mathfrak{b}_\alpha$、$\mathfrak{c}_\alpha$、$\mathfrak{d}_\alpha$ 满足

$$(\mathfrak{a}_\alpha,\mathfrak{b}_\alpha,\mathfrak{c}_\alpha,\mathfrak{d}_\alpha)=(\mathfrak{b}_\alpha,\mathfrak{a}_\alpha,\mathfrak{d}_\alpha,\mathfrak{c}_\alpha)\circ\mathbb{1}_-.\tag{4.8}$$

证明。利用（4.5），我们推 deduce，对于所有 $n\in\mathbb{Z}$，归一化常数满足

$$\mathfrak{a}_{\alpha,n}=\mathfrak{r}_{\alpha,n}-A_n^\bullet,\quad \mathfrak{b}_{\alpha,n}=\mathfrak{s}_{\alpha,n}-B_n^\bullet,\quad \mathfrak{c}_{\alpha,n}=\mathfrak{t}_{\alpha,n}-C_n^\bullet,\quad \mathfrak{d}_{\alpha,n}=\mathfrak{u}_{\alpha,n}-D_n^\bullet,$$

设 $p=-v$。对（3.7）中的恒等式关于谱参数求导，我们得到

$$\begin{aligned}
(c_\alpha\dot\varphi_1-s_\alpha\dot\varphi_2)(1,\lambda,p)&=-(c_\alpha\dot\vartheta_2+s_\alpha\dot\vartheta_1)(1,\lambda,v),\\
(s_\alpha\dot\vartheta_1+c_\alpha\dot\vartheta_2)(1,\lambda,p)&=-(c_\alpha\dot\varphi_1-s_\alpha\dot\varphi_2)(1,\lambda,v),\\
(s_\alpha\dot\varphi_1+c_\alpha\dot\varphi_2)(1,\lambda,p)&=(c_\alpha\dot\vartheta_1-s_\alpha\dot\vartheta_2)(1,\lambda,v),\\
(c_\alpha\dot\vartheta_1-s_\alpha\dot\vartheta_2)(1,\lambda,p)&=(s_\alpha\dot\varphi_1+c_\alpha\dot\varphi_2)(1,\lambda,v).
\end{aligned}\tag{4.9}$$

将 (4.9) 与 (3.5) 结合，我们得到以下恒等式，对所有 $n\in\mathbb{Z}$ 均成立：

$$A_n^\bullet(p)=\ln\big|\big(c_\alpha\dot\varphi_1-s_\alpha\dot\varphi_2\big)(1,\mu_{\alpha,n}(p),p)\big|=\ln\big|\big(s_\alpha\dot\vartheta_1+c_\alpha\dot\vartheta_2\big)(1,\nu_{\alpha,n}(v),v)\big|=B_n^\bullet(v),$$

$$B_n^\bullet(p) = \ln|\big(s_\alpha\dot\vartheta_1 + c_\alpha\dot\vartheta_2\big)(1,\nu_{\alpha,n}(p),p)| = \ln|\big(c_\alpha\dot\varphi_1 - s_\alpha\dot\varphi_2\big)(1,\mu_{\alpha,n}(v),v)| = A_n^\bullet(v),$$
$$C_n^\bullet(p) = \ln|\big(s_\alpha\dot\varphi_1 + c_\alpha\dot\varphi_2\big)(1,\tau_{\alpha,n}(p),p)| = \ln|\big(c_\alpha\dot\vartheta_1 - s_\alpha\dot\vartheta_2\big)(1,\varrho_{\alpha,n}(v),v)| = D_n^\bullet(v),$$
$$D_n^\bullet(p) = \ln|\big(c_\alpha\dot\vartheta_1 - s_\alpha\dot\vartheta_2\big)(1,\varrho_{\alpha,n}(p),p)| = \ln|\big(s_\alpha\dot\varphi_1 + c_\alpha\dot\varphi_2\big)(1,\tau_{\alpha,n}(v),v)| = C_n^\bullet(v).$$

组合 将这一观察与 (3.6) 以及 (3.8) 中的谱交换结合起来，我们得出 t

$$\mathfrak{a}_{\alpha,n}\circ\mathbb{1}_- = \mathfrak{s}_{\alpha,n} - B_n^\bullet = \mathfrak{b}_{\alpha,n}, \qquad \mathfrak{b}_{\alpha,n}\circ\mathbb{1}_- = \mathfrak{r}_{\alpha,n} - A_n^\bullet = \mathfrak{a}_{\alpha,n}, \quad \forall n\in\mathbb{Z},$$
$$\mathfrak{c}_{\alpha,n}\circ\mathbb{1}_- = \mathfrak{u}_{\alpha,n} - D_n^\bullet = \mathfrak{d}_{\alpha,n}, \qquad \mathfrak{d}_{\alpha,n}\circ\mathbb{1}_- = \mathfrak{t}_{\alpha,n} - C_n^\bullet = \mathfrak{c}_{\alpha,n}, \quad \forall n\in\mathbb{Z},$$

这些恒等式证明了 (4.8)。 ■

定理 4.5. 设 $\alpha\in\mathbb{A}$。则

i) 映射 $(\mathcal{S}_\alpha\mu)\times\mathfrak{a}$、 $\mu_\alpha\times\mathfrak{a}_\alpha$和 $\nu_\alpha\times\mathfrak{b}_\alpha$是从 $\mathscr{H}$到 $\mathfrak{J}_\alpha^o\times\ell^2$的双射。此外，它们满足

$$\mu_\alpha\times\mathfrak{a}_\alpha = (\nu_\alpha\times\mathfrak{b}_\alpha)\circ\mathbb{1}_- = (\mathcal{S}_\alpha\mu\times\mathfrak{a})\circ F_{2\alpha}^*. \tag{4.10}$$

ii) 每个映射 $(\mathcal{S}_\alpha\tau)\times\mathfrak{c}$、 $\tau_\alpha\times\mathfrak{c}_\alpha$ 和 $\varrho_\alpha\times\mathfrak{d}_\alpha$ 都是从 $\mathscr{H}$到 $\mathfrak{J}_\alpha^1\times\ell^2$的双射。此外，它们满足

$$\tau_\alpha\times\mathfrak{c}_\alpha = (\varrho_\alpha\times\mathfrak{d}_\alpha)\circ\mathbb{1}_- = (\mathcal{S}_\alpha\tau\times\mathfrak{c})\circ F_{2\alpha}^*.$$

证明。 我们首先证明 i)。根据定理 2.5， $\mu\times\mathfrak{a}$ 是从 $\mathscr{H}$到 $\mathfrak{J}^o\times\ell^2$的双射。由于$\mathcal{S}_\alpha$是双射，因此映射 $(\mathcal{S}_\alpha\mu)\times\mathfrak{a}$是从 $\mathscr{H}$到 $\mathfrak{J}_\alpha^o\times\ell^2$的双射。结合谱恒等式 (3.1)、(3.5) 与归一化恒等式 (4.3) 和 (4.8)，我们得到 (4.10)。此外，引理 3.1 、 3.2 和 4.2 表明，映射 $\mathcal{S}_\alpha\mu\times\mathfrak{a}$、 $\mu_\alpha\times\mathfrak{a}_\alpha$和$\nu_\alpha\times\mathfrak{b}_\alpha$是从 $\mathscr{H}$到 $\mathfrak{J}_\alpha^o\times\ell^2$的双射。

ii) 部分可通过类似的论证得到。 ■

致谢。 E. Korotyaev 的研究得到 PJSC "Gazprom Neft" 的支持，协议编号为 GPN- 26/03000/00502/R。本文的各个部分是在中国人民大学、中国北京撰写的。E. K. 感谢该校的热情接待。

参考文献

[1] M. J. Ablowitz、B. Prinari 和 A. D. Trubatch，《离散与连续非线性薛定谔系统》，伦敦数学会讲义系列，第 302 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2004年。[2] S. A. Albeverio、R. O. Hryniv 和 Y. V. Mykytyuk，具有可求和势的狄拉克算子的逆谱问题，《Russ. J. Math. Phys.》12（2005），第 4 期，406–423。[3] L. Amour，AKNS 算子的坐标系 $\mu\times\kappa$ 在 $L^2([0,1])\times L^2([0,1])$ 上，《Math. Phys. Anal. Geom.》17（2014），第 1–2 期，83–93。[4] L. Amour，具有分离边界条件的 AKNS 系统的逆谱理论，《逆问题》9（1993），第 5 期，507–523。[5] D. Bättig 等，三次非线性薛定谔方程的相空间叶状分解，《组合数学》85（1993），第 2 期，163–199。[6] G. Borg，《Sturm–Liouville 特征值问题的逆问题：由特征值确定微分方程》，《数学学报》78（1946），1–96。[7] D. Chelkak、P. Kargaev 和 E. L. Korotyaev，受势扰动的谐振子的逆问题：刻画，《Comm. Math. Phys.》249（2004），第 1 期，133–196。[8] D. Chelkak 和 E. L. Korotyaev，半直线上带狄利克雷边界条件的受扰谐振子的逆问题，《亨利·庞加莱年刊》8（2007），第 6 期，1115–1150。[9] D. Chelkak；E. L. Korotyaev，实数轴上具有周期矩阵势的薛定谔算子的谱估计。《国际数学研究通知》2006，文章编号 60314，41 页。[10] D. Chelkak 和 E. L. Korotyaev，向量值 Sturm–Liouville 问题的等谱集参数化，《J. Funct. Anal.》241（2006），第 1 期，359–373。

[11] D. Chelkak 和 E. L. Korotyaev，单位区间上向量值 Sturm–Liouville 算子的 Weyl-Titchmarsh 函数，《J. Funct. Anal.》257（2009），第 5 期，1546–1588。[12] S. L. Clark 和 F. Gesztesy，狄拉克算子的 Weyl-Titchmarsh M-函数渐近行为、局部唯一性结果、迹公式及 Borg 型定理，《Trans. A mer. Math. Soc.》354（2002），第 9 期，3475–3534。[13] S. Clark；H. Holden；F. Gesztesy；B. Levitan，矩阵值薛定谔算子和狄拉克算子的 Borg 型定理，《J. Diff. Eqs.》167（2000），181–210。[14] M. Clay 和 D. Margalit，《与一位几何群论学家的办公时间》，普林斯顿大学出版社，2017年。[15] C. F. Coleman 和 J. R. McLaughlin，具有可积导数的阻抗的逆谱问题解，I，《Comm. Pure Appl. Math.》46（1993），第 2 期，145–184。[16] C. F. Coleman 和 J. R. McLaughlin，具有可积导数的阻抗的逆谱问题解，II，《Comm. Pure Appl. Math.》46（1993），第 2 期，185–212。[17] V. B. Daskalov 和 E. K. Khristov，正则 Dirac 算子逆问题的显式公式，《逆问题》16（1）（2000），247–258。[18] B. A. Dubrovin，有限谱隙势类中的 Korteveg de Vries 方程周期问题，《Funct. Anal. Appl.》9（1975），215–223。[19] L. D. Faddeev 和 L. A. Takhtajan，《孤子理论中的哈密顿方法》，Springer 苏联数学丛书，Springer，柏林，1987年。[20] H. Flaschka 和 D. W. McLaughlin，具有周期边界条件的 Korteweg-de Vries 方程和 Toda 格的正则共轭变量，《Progr. Theoret. Phys.》55（1976），第 2 期，438–456。[21] J. B. Garnett 和 E. Trubowitz，一维周期薛定谔算子的谱隙与能带，II，《Comment. Math. Helv.》62（1987），第 1 期，18–37。[22] M. G. Gasymov 和 T. T. Jabiyev，从两个谱确定 Dirac 微分方程组，载于《算子谱理论与群表示理论暑期学校论文集》（巴库，1968）（俄文），Izdat. Elm，巴库，1975年，第 46–71 页。[23] M. G. Gasymov 和 B. M. Levitan，Dirac 系统的逆问题，《Dokl. Akad. Nauk SSSR》167（1966），967–970。[24] I. M. Gel’fand 和 B. M. Levitan，由谱函数确定微分方程，《Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.》15（1951），309–360。[25] I. M. Gel’fand 和 V. B. Lidskiĭ，具有周期系数的线性典范微分方程组稳定区域的结构，《Uspehi Mat. Nauk》（新系列）10（1955），第 1（63）期，3–40。[26] F. Gesztesy、A. Kiselev 和 K. A. Makarov，矩阵值薛定谔算子、Jacobi 算子和 Dirac 型算子的唯一性结果，《Math. Nachr.》239/240（2002），103–145。[27] B. Grébert 和 J.-C. Guillot，一维周期 AKNS 系统的谱隙，《Forum Math.》5（1993），第 5 期，459–504。[28] D. Hilbert，共形映射理论，《Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.》（1909），314–323。[29] M. Horvath，薛定谔算子和狄拉克算子的逆谱理论，《Trans. Amer. Math. Soc.》353（10）（2001），4155–4171。[30] E. L. Isaacson 和 E. Trubowitz，反斯图姆–刘维尔问题，I，《Comm. Pure Appl. Math.》36（1983），第 6 期，767–783。[31] E. L. Isaacson、H. P. McKean 和 E. Trubowitz，反斯图姆–刘维尔问题，II，《Comm. Pure Appl. Math.》37（1984），第 1 期，1–11。[32] P. Kargaev 和 E. L. Korotyaev，Hill 算子的逆问题：直接方法，《Invent. Math.》129（1997），第 3 期，567–593。[33] P. Kargaev 和 E. L. Korotyaev，有效质量与共形映射，《Comm. Math. Phys.》169（1995），第 3 期，597–625。[34] M. Klein 和 E. L. Korotyaev，用谱隙长度参数化周期加权算子，《逆问题》16（2000），第 6 期，1839–1860。[35] E. L. Korotyaev，同构逆阻抗问题，准备中。[36] E. L. Korotyaev，同构逆问题，《Russ. J. Math. Phys.》32（2025），第 2 期，314–340。

[37] E. L. Korotyaev，非博格条件下的反斯图姆–刘维尔问题，J. Inverse Ill-Posed Probl. 27 (2019)，第3期，445–452.[38] E. Korotyaev，单值矩阵的共形谱理论，Trans. Amer. Math. Soc. 362 (2010)，3435–3462.[39] E. L. Korotyaev 和 D. Chelkak，混合边界条件下的反斯图姆–刘维尔问题，St. Petersburg Math. Journal. 21(2009)，第5期，114–137.[40] E. Korotyaev，矩阵值周期狄拉克算子的谱估计，Asymptotic Analysis, 59(2008)，第3-4期，195–225.[41] E. L. Korotyaev，Hill 算子的估计，II，J. Differential Equations. 223 (2006)，第2期，229–260.[42] E.L. Korotyaev，周期扎哈罗夫–沙巴特系统的逆问题与估计，J. Reine Angew. Math. 583 (2005)，87–115.[43] E. Korotyaev，具有周期分布的薛定谔算子谱的刻画。《国际数学研究通知》2003(2003) 第37期，2019–2031.[44] E. L. Korotyaev，周期扎哈罗夫–沙巴特系统的马尔琴科–奥斯特罗夫斯基映射，J. Differential Equations. 175 (2001)，第2期，244–274.[45] E. L. Korotyaev，Hill 算子的估计，I，J. Differential Equations. 162 (2000)，第1期，1–26.[46] E. L. Korotyaev，Hill 算子的逆问题与迹公式，II，Math. Z. 231 (1999)，第2期，345–368.[47] E. L. Korotyaev，根据谱隙长度估计周期势，Comm. Math. Phys. 197 (1998)，第3期，521–526.[48] E. L. Korotyaev，Hill 算子的逆问题，I，《国际数学研究通知》1997，第3期，113–125.[49] E. L. Korotyaev，根据有效质量估计周期势，Comm. Math. Phys. 183 (1997)，第2期，383–400.[50] E. L. Korotyaev，复平面平行割线上的共形映射的度量性质，《国际数学研究通知》1996，第10期，493–503.[51] E. L. Korotyaev，周期向量非线性薛定谔方程的谱理论，预印本.[52] E. L. Korotyaev 和 D. Mokeev，半直线上周期狄拉克算子的杜布罗温方程，Appl. Anal. 101 (2022)，第1期，337–365.[53] E. L. Korotyaev 和 D. Mokeev，带位错的周期狄拉克算子，J. Differential Equations. 296 (2021)，369–411.[54] E. L. Korotyaev 和 E. O. Leonova，Jacobi算子的同构逆问题，Linear Algebra Appl. 754 (2027)，1–33.[55] E. Korotyaev 和 Z. Zhang，Zakharov–Shabat算子的逆问题及其同构，J. Differential Equations. 489(2027)，论文编号114862.[56] M. Krein，具有周期系数的线性微分方程典范系统的 λ稳定区的基本命题。纪念 A. A. Andronov，413–498页。苏联科学院出版社，莫斯科，1955年.[57] M. G. Krein，反斯图姆–刘维尔问题的解，Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.). 76 (1951年)，21–24.[58] B. M. Levitan，反斯图姆–刘维尔问题，VSP，Zeist，1987年[59] B. M. Levitan 和 M. G. Gasymov，根据两个谱确定一个微分方程，Uspehi Mat. Nauk 19 (1964)，第2期(116)，3–63.[60] B. M. Levitan 和 I. S. Sargsyan，斯图姆–刘维尔算子与狄拉克算子，俄文译本，Mathematics and its Applications (Soviet Series)，59，Kluwer Acad. Publ.，Dordrecht，1991.[61] M.M. Malamud，有限区间上微分方程组逆问题中的唯一性问题，Trans. Mosc. Math. Soc.，60 (1999)，173–224.[62] M.M. Malamud，根据部分单值矩阵唯一确定一个系统，Funct. An. Its Appl.，49 (2015)，264–278.[63] V. O. Marchenko，关于二阶微分算子理论，Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) 72 (1950)，457–460。

[64] V. O. Marchenko 和 I. V. Ostrovskiĭ，Hill 算子谱的刻画，Mat. Sb. (N.S.) 97(139) (1975年)，第4期(8)，540–606.[65] V. O. Marchenko，斯图姆–刘维尔算子及其应用，Birkhäuser，Basel，1986；修订版，AMS Chelsea Publ.，Providence, RI，2011.[66] H. P. McKean 和 E. Trubowitz，量子力学谐振子的谱类，Comm. Math. Phys. 82 (1981/82)，第4期，471–495.[67] T. V. Misyura，刻画由狄拉克算子生成的周期与反周期边值问题的谱，Teor. Funktsiĭ i Funktsional. Anal. i Prilozhen. 30 (1978)，90–101.[68] T. V. Misyura，刻画由狄拉克算子生成的周期与反周期边值问题的谱，II，Teor. Funktsiĭ i Funktsional. Anal. i Prilozhen. 31 (1979)，102–109.[69] K. Mochizuki 和 I. Y. Trooshin，有限区间上狄拉克算子内部谱数据的逆问题，Publ. Res. Inst. Math. Sci. 38 (2002)，第2期，387–395.[70] J. Pöschel 和 E. Trubowitz，逆谱理论，纯粹与应用数学，130，Academic Press，Boston, MA，1987.[71] R. R. del Río Castillo 和 B. Grébert，部分势信息下 AKNS 系统的逆谱结果，Math. Phys. Anal. Geom. 4 (2001)，第3期，229–244.[72] I. S. Sargsjan，一维狄拉克系统逆问题解的唯一性定理，载于《常微分方程的一些边值问题》（Univ. Druzhby Narodov，莫斯科，1970），第3–13页.[73] E. Trubowitz，周期势的逆问题，Comm. Pure Appl. Math. 30 (1977)，第3期，321–337。

圣彼得堡国立大学分析系，俄罗斯圣彼得堡Universitetskaya nab. 7/9，199034，korotyaev@gmail.com

东北师范大学高级跨学科研究院，中国长春，zhangzf@nenu.edu.cn