arXiv:2611.28661v1 [math.QA] 21 Nov 2026

一类 C_2-余有限非有理主的 W-代数：类型 D_4

DRAŽEN ADAMOVIĆ 和 IVANA VUKOREPA

摘要。我们证明，简单主的 W-代数可以是 C_2-余有限且非有理的。对于中心荷为 -50 的 $\mathcal{W} = \mathcal{W}^{-38/7}(D_4, f_{\mathrm{reg}})$，D. Xie 预测存在十七个不可约模，以及一个最低共形权为 -2的对数模。我们确定朱代数 $A(\mathcal{W})$ 和泊松代数 $R_{\mathcal{W}} = \mathcal{W}/C_2(\mathcal{W})$。两者的维数均为 18，且$A(\mathcal{W}) \cong \mathbb{C}^{16} \times \mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$。我们利用$\mathcal{W}$ 作为 $L_{-14/3}(D_4) \otimes L_1(D_4)$ 中对角余集的实现，以及此前对范畴$\mathcal{O}$中不可约 $L_{-14/3}(D_4)$-模的分类，构造了全部十七个不可约$\mathcal{W}$-模。我们还构造了一个不可分解的$L_{-14/3}(D_4)$-模，并利用余集实现得到一个不可分解的对数型$\mathcal{W}$-模。其最低广义 $L(0)$-特征空间是二维的，而 $L(0)$ 在该空间上的作用由一个特征值为 -2 的非平凡 Jordan 块给出。

1. 引言

对受 C_2-余有限但非有理的顶点算子代数的研究，源于对数共形场论。 $L(0)$ 作用非半单的广义模解释了关联函数 [25]中对数项的出现。与此同时， C_2-余有限性施加了强有的有限性条件。对于一个 C_2-余有限且 U 为 CFT 类型的顶点算子代数，分次受限广义 U-模构成一个具有编织张量范畴结构的有限阿贝尔范畴 [27]。此外，通过使用伪迹函数 [33]，模不变性也得以扩展至有理情形之外。

基本例子包括三重态顶点算子代数 $\mathcal{W}(p)$，以及辛费米子顶点算子超代数 [1, 4]的偶部分 $SF(d)^+$。文献 [5]提出了一种通用变形方法，用于构造三重态代数及格顶点代数其他子代数的对数模。文献 [6] 和 [1, 3], 分别确定了结合代数 $A(\mathcal{W}(p))$ 和$A(SF(d)^+)$ 的结构。这些工作还证明了以下等式

$$\dim A(\mathcal{W}(p)) = \dim(\mathcal{W}(p)/C_2(\mathcal{W}(p))), \quad \dim A(SF(d)^+) = \dim(SF(d)^+/C_2(SF(d)^+)).$$

这些例子与单位根处量子群的表示论密切相关。三重态代数 $\mathcal{W}(p)$ 的对数型 Kazhdan–Lusztig对应由 [22, 23] 提出，并在 [34, 16]中进一步发展。Gannon 和 Negron [26] 证明了所有

p 对应的编织张量等价。Creutzig、Lentner 和 Rupert 在 [17]中给出了另一种证明。

本文研究简单主的 W-代数 $\mathcal{W}^{-38/7}(D_4, f_{\mathrm{reg}})$。我们通过推导该$C_2$-代数中生成元类之间的多项式关系，证明其 C_2-余有限性。为证明非有理性，我们为此 W-代数构造一个分次受限广义模，在该模上 $L(0)$ 具有非平凡的 Jordan 块。

该代数属于 Xie 和 Yan [36, 在表 13] 中预测为 C_2-余有限的一个族。它出现在他们表格的最后一 D_N行，其中 $(N, n, u) = (4, 4, 7)$。对于这个特定的代数，Xie 在 [35, 第6.1.1节和表 7]中预测了十七个不可约模，以及一个最低共形权为 -2的对数模；这些预测使用了广义仿射 Springer 纤维。

设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_8(\mathbb{C})$，并设 f_{reg} 是 $\mathfrak{g}$ 的主幂零元。记

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_{-38/7}(D_4, f_{\mathrm{reg}}). \tag{1.1}$$

日期：2026年11月19日。

此处 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_{\mathrm{reg}})$ 表示普适主 W-代数，而 $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f_{\mathrm{reg}})$ 表示其简单商。

[12, 13]的余集定理给出

$$\mathcal{W} \cong \left(L_{-14/3}(D_4) \otimes L_1(D_4)\right)^{\mathfrak{g}[t]}. \tag{1.2}$$

在此公式中， $\mathfrak{g}[t]$ 的作用是对角的。

我们利用 $V^{-14/3}(D_4)$的极大真理想是由三个奇异向量生成的理想这一描述（定理 3.1），以及来自 [8, 命题 3.4 和定理 3.6]的范畴 $\mathcal{O}$ 中不可约 $L_{-14/3}(D_4)$-模的分类。利用余集实现（1.2），我们构造了十七个两两不同构的不可约 $\mathcal{W}$-模和一个对数型$\mathcal{W}$-模。在其二维最低广义 $L(0)$特征空间上， $L(0)$具有一个特征值为 -2的非平凡 Jordan 块。

由于 f_{reg}是主的，普适 W-代数 $\mathcal{W}^{-38/7}(D_4,\ f_{\mathrm{reg}})$ 的 Zhu代数根据 [9, 定理 4.16.3(ii)] 同构于中心 $Z(U(\mathfrak{so}_8))$。因此，其商 $A(\mathcal{W})$ 是交换的。 $A(\mathcal{W})$ 在这些最低共形权空间上的作用给出了一个满射代数同态 $A(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathbb{C}^{16} \times \mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$（定理 7.3），从而 $\dim\ A(\mathcal{W}) \geq 18$。对于任意顶点算子代数 V，典范满射 $R_V \longrightarrow \mathrm{gr}\, A(V)$ 给出 $\dim\ A(V) \leq \dim\ R_V$ [14, 命题 3.3]。于是

$$18 \leq \dim A(\mathcal{W}) \leq \dim R_{\mathcal{W}}.$$

十七个简单 $\mathcal{W}$-模的最低共形权为

$$0,\quad (-1)^3,\quad -\frac{9}{7},\quad \left(-\frac{10}{7}\right)^3,\quad -\frac{11}{7},\quad \left(-\frac{12}{7}\right)^3,\quad \left(-\frac{13}{7}\right)^3,\quad -2,\quad -\frac{15}{7}.$$

这里，上标 3 表示三个最低共形权相同的模。 $A(\mathcal{W})$ 在这十七个一维最低共形权空间上的特征彼此不同，因此这些模两两不同构（定理 7.2）。

主要结果。 我们得到关于$\mathcal{W} = \mathcal{W}^{-38/7}(D_4, f_{\mathrm{reg}}$的如下结构定理).

定理1.1。 顶点算子代数 W 是 C_2-余有限且非有理的，其中心荷为 -50。此外，

$$A(\mathcal{W}) \cong \mathbb{C}^{16} \times \mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2), \qquad \dim R_{\mathcal{W}} = 18.$$

表 *1* 中的十七个简单 W-模穷尽了所有不可约 W-模，且它们都是普通模。存在一个分次受限广义 W-模，其最低广义 $L(0)$特征子空间为二维，且 $L(0)$ 在该空间上的作用由特征值为 -2 的非平凡 *Jordan* 块给出。

Arakawa 证明了极小系列 [10] 中主的 W-代数的有理性。定理 1.1 给出了层为 $k = -38/7$ 的一个 C_2-余有限、非有理的简单主 W-代数。根据 Kac–Wakimoto判据 [11, , 由于 $k + h^\vee = 4/7$ 的分子为 $4 < h^\vee = 6$，该层不是容许的命题 3.1], 。

我们还在定理 8.8 中给出了 $R_{\mathcal{W}}$ 的显式多项式表示。它是一个具有希尔伯特级数的分次代数

$$1 + q^2 + 3q^4 + 4q^6 + 4q^8 + 3q^{10} + q^{12} + q^{14}.$$

$\mathcal{W}$ 的 C_2-余有限性也可通过量子哈密顿约化，由 $L_{-38/7}(D_4)$的准光滑性质推出（参见 [7, 定理1.1和附录B，表 12]）。然而，我们需要对$\mathcal{W}$的朱代数和 C_2-代数作更明确的描述，因此给出一个独立证明。

证明思路。我们首先独立于这些表示构造$\mathcal{W}$-模。来自 [8], 的 $L_{-14/3}(D_4)$-模的最高权向量与 $L_1(\mathfrak{g})$的真空张量后，生成普通$\mathcal{W}$-模。其简单$\mathcal{W}$-模商给出十七个不同的代数同态 $A(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathbb{C}$; 见第7节。

为构造对数型 $\mathcal{W}$-模，令 $D = \mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ 和 $\lambda_D = -\frac{7}{3}\omega_2 - \varepsilon\alpha_2$。记 $A(L_{-14/3}(D_4)) = U(\mathfrak{g})/I$。命题 3.2 中的九个 Harish–Chandra 多项式在 λ_D 处均为零。因此， $IM_D \cap D = 0$ 属于由广义最高权空间 D 诱导得到的 $\mathfrak{g}$-模 M_D。诱导后得到一个 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次的弱 $L_{-14/3}(D_4)$-模 E。随后通过陪集构造得到 复数域 $= \mathcal{W} \cdot (D \otimes \mathbf{1}) \subset E \otimes L_1(\mathfrak{g})$，其最低广义 $L(0)$-特征空间为 $D \otimes \mathbf{1}$。在此空间上， $L(0) = -2\mathrm{id} + \frac{3}{7}\varepsilon$。其广义共形权空间的有限维性由直接证明得到。因此，复数域 是一个分次受限的广义 $\mathcal{W}$-模，而其非平凡 Jordan 块证明了其非有理性；见第 5 节和第 6 节。

令 $U = \mathcal{W}^{-38/7}(D_4,\ f_{\mathrm{reg}})$，并令 J 为其极大理想。在第 8 节中，我们从 J中的奇异向量出发，推导出$A(\mathcal{W})$ 和 $R_{\mathcal{W}}$ 中的关系。对 $V^{-38/7}(D_4)$ 中由来自 [29, 定理1.2(5)], 的三个共形权为 14 的奇异向量生成的子模应用主 Drinfeld–Sokolov 约化，我们得到三个线性无关的、共形权为八的奇异向量 $s_1,\ s_3,\ s_4 \in J$，并确定了 $A(U)$ 在每条最高权线 $\mathbb{C}s_i$上的作用。利用 Miura 同态，我们给出 s_i 的显式公式，并将它们的类$[s_i] \in A(U)$表示为多项式。这些多项式在 $A(\mathcal{W})$ 中为零。它们的权八分量表示了 $\bar{s}_i = s_i + C_2(U)$ 在 R_U中的类，并给出 $R_{\mathcal{W}}$中的三个关系。

Miura 同态将 R_U 嵌入 $R_{\mathcal{H}}$中，其中 $\mathcal{H}$ 是第 2.1 节中的秩四 Heisenberg 顶点代数。记 $q_i = b_i(-1)\mathbf{1} + C_2(\mathcal{H})$ 为其四个生成元的类。R_U上的泊松括号为零，而 $B(\bar{a},\ b) = a_{(1)}b$ 对 $a,\ b \in U$在 R_U上定义了一个双导子。在坐标 q_i中，它表示为

$$B(F,G) = 28\sum_{i=1}^{4} \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial q_i} \qquad (F,G \in R_U).$$

在第 8.2 节中，我们将此公式应用于 J 中一个向量的类 G。由此得到的关系给出 $\dim R_{\mathcal{W}} \leq 18$，从而得到 C_2-余有限性。

对 $\mathcal{C}$ 的二维最低广义 $L(0)$-特征子空间的作用，加上另外十六个代数同态 $A(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathbb{C}$, 根据定理 7.3 给出一个满射 $A(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathbb{C}^{16} \times D$。维数比较 $\dim A(\mathcal{W}) \leq \dim R_{\mathcal{W}}$ 与刚刚得到的界给出

$$18 \leq \dim A(\mathcal{W}) = \dim \mathrm{gr}\, A(\mathcal{W}) \leq \dim R_{\mathcal{W}} \leq 18.$$

等式将 $A(\mathcal{W})$ 与 $\mathbb{C}^{16} \times D$ 认定为同一对象，并证明这些多项式关系给出了 $R_{\mathcal{W}}$ 的一个表示。由此得到的 $A(\mathcal{W})$ 描述还证明，所构造的十七个单 $\mathcal{W}$-模穷尽了不可约 $\mathcal{W}$-模；参见定理 8.8。

2. 预备知识

固定一个三角分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$，其嘉当子代数为 $\mathfrak{h}$，并令 $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$。我们对 $\mathfrak{g}$ 上的不变形式 $(\cdot \mid \cdot)$ 作归一化，使根的平方长度为二，并用它将 $\mathfrak{h}$ 与 $\mathfrak{h}^*$ 识别。对偶考克斯特数为 6。设 W 为韦伊群，并令$\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}\alpha$ 和 $\rho^\vee = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}\alpha^\vee$。

对于顶点算子代数 V，我们使用

$$Y(u,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_{(n)}z^{-n-1}, \qquad Y(\omega,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L(n)z^{-n-2}.$$

对于齐次的 $u \in V$，令 $o(u) = u_{(\mathrm{wt}(u)-1)}$。令 $O(V)$ 为齐次的 $\sum_{j\geq 0}\binom{\mathrm{wt}(j^{u})}{}u_{(j-2)}v$) 和 $v \in V$ 所张成的空间。用 $[a] = a + O(V)$ 表示 $a \in V$在朱

代数 $A(V)=V/O(V)$中的等价类。其乘积为

$$[u]*[v]=\left[\sum_{j\ge 0}\binom{\mathrm{wt}(u)}{j}u_{(j-1)}v\right]\qquad (u\ \text{homogeneous},\ v\in V).$$

我们还记

$$C_2(V)=\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{u_{(-2)}v : u,v\in V\},\quad R_V=V/C_2(V),\quad X_V=\mathrm{Specm}\,R_V.$$

对于 $a\in V$，令 $\bar{a}=a+C_2(V)$。其乘积和泊松括号定义为

$$\bar{u}\,\bar{v}=\overline{u_{(-1)}v},\qquad \{\bar{u},\bar{v}\}=\overline{u_{(0)}v}.$$

我们将 X_V视为约化簇。若 $\dim R_V<\infty$，则称 V为 C_2-余有限的 .

引理 2.1. 设 V是一个顶点代数，且 R_V上的泊松括号为零。对于$a,b\in V$，公式

$$B_V(\bar{a},\bar{b})=\overline{a_{(1)}b}$$

¯定义了 R_V的对称双导子。若 K 是 V 的顶点代数理想，且 K =$(K+C_2(V))/C_2(V)$，则

$$B_V(R_V,\bar{K})\subseteq\bar{K}.$$

证明。 对于每个 $a\in V$，我们有 $a_{(0)}V\subseteq C_2(V)$。根据 [14, 引理 3.2]， $a_{(1)}$ 诱导出 R_V的一个导子。此外，由 [14, 引理 3.1(4)]可得 $a_{(1)}b=b_{(1)}a$ 。因此，该乘积仅取决于 $\bar{a}$和 b，并且对每个自变量都是一个导子。最后一个断言由 $a_{(1)}K\subseteq K$得出。□

若弱 V-模 M具有分次 $M=\bigoplus_{n\ge 0}M(n)$，使得对齐次的 $u\in V$、 $r\in\mathbb{Z}$和 $n\ge 0$，$u_{(r)}M(n)\subset M(n+\mathrm{wt}(u)-r-1)$，且对于 $j<0$，有 $M(j)=0$，则称其为 $\mathbb{Z}_{\ge 0}$-分次的。分次算子为 D_M，定义为 $D_M|_{M(n)}=n\,\mathrm{id}$。若每个$\mathbb{Z}_{\ge 0}$-分次的弱 V-模都完全可约，则称 V是有理的。若一个广义 V-模是有限维广义 $L(0)$ 特征空间的直和，且其共形权的实部有下界，则称其为分次受限。若这样的 V-模的 $L(0)$ 不是半单的，则称其为对数型。

与 $\mathfrak{g}$ 关联的仿射李代数为

$$\widehat{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]\oplus\mathbb{C}K.$$

对于 $x\in\mathfrak{g}$ 和 $r\in\mathbb{Z}$，记 $x(r)=x\otimes t^r$。李括号为

$$[x(r),y(s)]=[x,y](r+s)+r\delta_{r+s,0}(x\mid y)K,\qquad [K,\widehat{\mathfrak{g}}]=0.$$

我们称一个 $\widehat{\mathfrak{g}}$-模具有层 k，如果 K 作用为 $k\mathrm{id}$。 $V^k(\mathfrak{g})$中的向量 $x=x(-1)\mathbf{1}$ 和 $y=y(-1)\mathbf{1}$满足 $[x_\lambda y]=[x,y]+k(x\mid y)\lambda\mathbf{1}$。对于 $k\neq -6$，其共形向量为

$$\omega_k=\frac{1}{2(k+6)}\sum_{j=1}^{28}u_j(-1)u^j(-1)\mathbf{1},\tag{2.1}$$

其中$\{u_j\}$和$\{u^j\}$是关于$(\cdot\mid\cdot)$互为对偶的 $\mathfrak{g}$ 的基。二次卡西米尔元为$\Omega=\sum_{j=1}^{28}u_ju^j$。它在权为 λ 的最高权向量上的作用为$(\lambda\mid\lambda+2\rho)$。标准同构 $A(V^k(\mathfrak{g}))\cong U(\mathfrak{g})$ [24] 将 $[\omega_k]$ 与$\Omega/(2(k+6))$等同。我们记$L^k(n)=(\omega_k)_{(n+1)}$。 $V^k(\mathfrak{g})$的分次是 $L^k(0)$的特征空间分解。对于 $\lambda\in\mathfrak{h}^*$，令 $L_k(\lambda)$表示层为 k 的简单最高权 $\widehat{\mathfrak{g}}$-模，其最高权向量的 $\mathfrak{g}$-权为 λ；特别地， $L_k(0)=L_k(\mathfrak{g})$。对于 $k\neq -6$，令

$$\Delta_k(\lambda)=\frac{(\lambda\mid\lambda+2\rho)}{2(k+6)},\qquad D_\lambda^k=L^k(0)-\Delta_k(\lambda)\,\mathrm{id}\,.$$

算子 D_λ^k 在 $L_k(\lambda)$ 的最高权向量上为零，并且对 $x\in\mathfrak{g}, r\in\mathbb{Z}$ 满足 $[D_\lambda^k,x(r)]=-rx(r)$。其特征空间给出了 $L_k(\lambda)$ 上的 $\mathbb{Z}_{\ge 0}$-分次。

令 $U(\mathfrak{g})_0=\{u\in U(\mathfrak{g}):\ [h,u]=0\text{ 对于 }h\in\mathfrak{h}\}$。未移位的 Harish–Chandra 投影由

$$\mathrm{HC}:U(\mathfrak{g})_0\longrightarrow U(\mathfrak{h})=S(\mathfrak{h}),\tag{2.2}$$

三角分解得到。因此，$u \in U(\mathfrak{g})_0$ 作用于权为 λ 的最高权向量时，作用结果为 $\mathrm{HC}(u)(\lambda)$。

对于有限维单李代数 $\mathfrak{a}$ 和幂零元 $f \in \mathfrak{a}$，令$H^0_{\mathrm{DS},\ f}$ 表示与 f相关联的 Drinfeld–Sokolov复形的零阶上同调。通过量子哈密顿约化 [31] 定义的普适仿射 W-代数为

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{a}, f) = H^0_{\mathrm{DS},f}(V^k(\mathfrak{a})).$$

当 $\mathfrak{a} = \mathfrak{sl}_n$ 且 f 为主的时，这一构造归功于 Feigin和Frenkel [19]。我们将单分次商记作$\mathcal{W}_k(\mathfrak{a},\ f)$。

2.1. 主的 W-代数，类型为 D_4。 令 f_{reg} 为 $\mathfrak{g} = D_4$的负简单根向量之和。根据 Feigin–Frenkel对偶 [20], ，以 [13, 定理 5.6], 的形式，我们将$\mathcal{W}^{-38/7}(D_4,\ f_{\mathrm{reg}})$与$\mathcal{W}^{-17/4}(D_4,\ f_{\mathrm{reg}})$等同。类型$D$ 中生成元的自由场构造归功于 Luk'yanov 和 Fateev [32]。在 $\alpha_0 = 3/\sqrt{28}$处，令 R_4 表示按照 Ito和 Zhu [28, (3.16)]的归一化定义的四阶权生成元。设 $Q = 112R_4$。令$\mathcal{H}$ 为由 b_1、……、b_4生成的秩四 Heisenberg 顶点代数。记 $b_i(z) = Y(b_i,\ z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_i(n)z^{-n-1}$。于是

$$[b_{i\lambda}b_j] = 28\delta_{ij}\lambda\mathbf{1}.$$

我们赋予 $\mathcal{H}$ 式 (2.3) 中的共形向量 L。置 $\delta_z = 3\partial_z$。定义场 V_1、V_2、V_3、V_4为

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(z) &= (\delta_z + b_1(z))(\delta_z + b_2(z))(\delta_z + b_3(z))(\delta_z + b_4(z)) \\ &= \delta_z^4 + V_1(z)\delta_z^3 + V_2(z)\delta_z^2 + V_3(z)\delta_z + V_4(z),\end{aligned}$$

右侧含有 δ_z 的所有幂。常数项为

$$V_4(z) = \mathcal{D}(z)1 = (\delta_z + b_1(z))(\delta_z + b_2(z))(\delta_z + b_3(z))b_4(z).$$

下述定理用 Miura 同态表述了 Luk'yanov 和 Fateev 的构造 [32]。其单射性由 [13, 第 5] 节推出。

定理 2.2（参见 [32], [13]）。*Miura* 同态

$$\mu : \mathcal{W}^{-38/7}(D_4, f_{\mathrm{reg}}) \longrightarrow \mathcal{H}$$

是单射的，并保持共形向量。它由 $Y(\mu(Q)\ z) = \frac{1}{7}V_4(z)$ 确定。在 $Y(Q,\ z)Y(Q,\ w)$ 中，阶数为 6、4、2 的极点系数分别是与 $Q_{(5)}Q$、$Q_{(3)}Q$ 和 $Q_{(1)}Q$ 对应的场，其共形权分别为 2、4、6。连同 Q，这些向量强生成 $W^{-38/7}(D_4,\ f_{\mathrm{reg}})$ [28, (3.16)–(3.18)]。

此后，我们将$\mathcal{W}^{-38/7}(D_4,\ f_{\mathrm{reg}})$与其在$\mathcal{H}$中的像等同。图自同构$\sigma$ 作用于 $b = (b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4)^{\mathsf{T}}$ 的方式为 $\sigma(b) = S^{\mathsf{T}}b$，其中

$$S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

命题 2.3. 万有的 W-代数 $W^{-38/7}(D_4, f_{\mathrm{reg}})$ 由其中心荷为 -50 的共形向量 $L = \omega$ 以及三个共形权分别为 P, Q, R 的初级向量强生成

向量的共形权分别为 4、4 和6。这些向量由下式给出

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{56}\sum_{i=1}^{4} b_i(-1)^2\mathbf{1} + \frac{3}{28}(3b_1+2b_2+b_3)(-2)\mathbf{1},\\
Q &= \frac{1}{7}(3L(-1)+b_1(-1))(3L(-1)+b_2(-1))(3L(-1)+b_3(-1))b_4(-1)\mathbf{1},\\
P &= -Q - 2\sigma(Q),\\
R &= P_{(1)}P + 224L(-2)P - 124L(-1)^2P\\
&\quad - \frac{832}{4747}(382944L(-6) - 143874L(-4)L(-2) - 50829L(-3)^2 + 14348L(-2)^3)\mathbf{1}.
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

证明。这些是 [32] 和 [15, 在第 6.3 节 3] 的 $\alpha_0 = 3/\sqrt{28}$ 处的生成元，其中 P，Q，R 按照 [28, (3.16)–(3.17)、(B.10)–(B.13)] 的记号分别规范化为 $112W_4$、$112R_4$ 和 $75264W_6$。采用这些规范化后，$Q_{(5)}Q = 126464L$ 和 $Q_{(3)}Q \equiv -208P$ 模去 $\mathbf{1}$ 的 Virasoro后裔。同样，$Q_{(1)}Q \equiv \frac{1}{3}R$ 模去 $\mathbf{1}$，P，Q 的 Virasoro 后裔。□

令 $U = \mathcal{W}^{-38/7}(\mathfrak{g},\ f_{\rm reg})$ 和 $q_i = \overline{b_i(-1)\mathbf{1}} \in R_{\mathcal{H}}$，其中 $1 \le i \le 4$。Miura 同态诱导出一个单射泊松代数同态

$$
\bar{\mu} : R_U \longrightarrow R_{\mathcal{H}} = \mathbb{C}[q_1,\dots,q_4], \qquad \bar{a} \longmapsto \overline{\mu(a)},
$$

其像为 $R^{W(D_4)}$ $_{\mathcal{H}}$ [13, (25) 和引理 6.1(1)]。我们将 R_U 视为多项式代数 $\mathbb{C}[x,y,z,t]$，其中

$$
\begin{aligned}
x &= \sum_{i=1}^{4} q_i^2, \qquad y = \sum_{1\le i<j\le 4} q_i^2 q_j^2,\\
z &= q_1q_2q_3q_4, \quad t = \sum_{1\le i<j<l\le 4} q_i^2 q_j^2 q_l^2.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

生成元 x，y，z，t 的权分别为 2，4，4，6。

对于 $1 \le i,\ j \le 4$，λ-括号 $[b_{i\lambda}b_j] = 28\delta_{ij}\lambda\mathbf{1}$ 给出 $(b_i)_{(0)}b_j = 0$ 和 $(b_i)_{(1)}b_j = 28\delta_{ij}\mathbf{1}$。由于 q_i 生成 $R_{\mathcal{H}}$，第一个恒等式蕴含泊松括号在 $R_{\mathcal{H}}$ 及其子代数 R_U 上为零。因此，根据引理 2.1，第一个乘积诱导出一个对称的 $\bar{}$ 双导子 $B_{\mathcal{H}}(\bar{a},\ b) = a_{(1)}b$，$a,\ b \in \mathcal{H}$。由第二个恒等式可得 $B_{\mathcal{H}}(q_i,\ q_j) = 28\delta_{ij}$。对于 $F,\ G \in R_{\mathcal{H}}$，令 $B_0(F,\ G) = \sum_{i=1}^{4}(\partial F/\partial q_i)(\partial G/\partial q_i)$。先对第二自变量、再对第一自变量应用莱布尼茨法则，可得

$$
\begin{aligned}
B_{\mathcal{H}}(q_i, G) &= \sum_{j=1}^{4} B_{\mathcal{H}}(q_i,q_j)\frac{\partial G}{\partial q_j} = 28\frac{\partial G}{\partial q_i},\\
B_{\mathcal{H}}(F, G) &= \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial F}{\partial q_i} B_{\mathcal{H}}(q_i, G) = 28\sum_{i=1}^{4} \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial q_i} = 28B_0(F,G).
\end{aligned}
$$

$\bar{}$对于 $a,\ b \in U$，恒等式 $\mu(a_{(1)}b) = \mu(a)_{(1)}\mu(b)$ 给出 $\bar{\mu}(\overline{a_{(1)}b}) = B_{\mathcal{H}}(\bar{\mu}(\bar{a})\ \bar{\mu}(b))$。将$R_U$ 与其像等同，我们得到

$$
\overline{a_{(1)}b} = 28B_0(\bar{a},\bar{b}) \qquad (a,b \in U).
\tag{2.5}
$$

将（2.3）投影到 R_U，并对 $P_{(1)}P$使用（2.5），我们得到

$$
\bar{\omega} = \frac{x}{56}, \qquad \bar{Q} = \frac{z}{7}, \qquad \bar{P} = \frac{4y-x^2}{56}, \qquad \bar{R} = \frac{92986}{1628221}x^3 - \frac{2}{7}xy + \frac{12}{7}t.
$$

3. 顶点代数 $L_{-14/3}(D_4)$

本节回顾我们近期论文 [8]中顶点代数$L_{-14/3}(D_4)$的结构和表示论。

我们采用简单根

$$\alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2, \qquad \alpha_2 = \epsilon_2 - \epsilon_3, \qquad \alpha_3 = \epsilon_3 - \epsilon_4, \qquad \alpha_4 = \epsilon_3 + \epsilon_4,$$

其中 $(\epsilon_i \mid \epsilon_j) = \delta_{ij}$。记

$$Q = \bigoplus_{i=1}^{4} \mathbb{Z}\alpha_i, \qquad Q_+ = \sum_{i=1}^{4} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i.$$

基本权为

$$\omega_1 = \epsilon_1, \qquad \omega_2 = \epsilon_1 + \epsilon_2, \qquad \omega_3 = \tfrac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4), \qquad \omega_4 = \tfrac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4).$$

特别地，$\rho = 3\epsilon_1 + 2\epsilon_2 + \epsilon_3$，$(\rho \mid \rho) = 14$，以及 $h^\vee = 6$。记 $h_i = \alpha_i^\vee$和 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$。设 σ 为由下式确定的图自同构

$$\alpha_1 \longmapsto \alpha_3 \longmapsto \alpha_4 \longmapsto \alpha_1, \qquad \sigma(\alpha_2) = \alpha_2.$$

其切瓦利提升作用于 $V^{-14/3}(\mathfrak{g})$。

我们回顾 [8] 中 $L_{-14/3}(\mathfrak{g})$ 的表示。那里使用的根向量的归一化，可在由 a_i、a_i^*, $1 \leq i \leq 4$ 生成的克利福德代数中指定，其中

$$a_i a_j + a_j a_i = a_i^* a_j^* + a_j^* a_i^* = 0, \qquad a_i a_j^* + a_j^* a_i = \delta_{ij}.$$

取：$uv := \frac{1}{2}(uv - vu)$，对于 $i < j$，令

$$e_{\epsilon_i - \epsilon_j} =: a_i a_j^* :, \quad e_{\epsilon_i + \epsilon_j} =: a_i a_j :,$$
$$f_{\epsilon_i - \epsilon_j} =: a_j a_i^* :, \quad f_{\epsilon_i + \epsilon_j} =: a_j^* a_i^* : .$$

卡当元素 $H_i =: a_i a_i^* :$ 与 ϵ_i 对偶。

定理 3.1 ([8, 定理 3.1 和 3.6])。存在一个奇异向量 $v_1 \in V^{-14/3}(\mathfrak{g})$，其共形权为 6，$\mathfrak{g}$-权为 $2\omega_1$。令 $v_3 = \sigma(v_1)$ 和 $v_4 = \sigma^2(v_1)$。极大真理想 $J \subset V^{-14/3}(\mathfrak{g})$ 由 v_1, v_3, v_4 生成。因此，

$$L_{-14/3}(\mathfrak{g}) = V^{-14/3}(\mathfrak{g})/\langle v_1, v_3, v_4 \rangle.$$

此处 v_1 采用补充文件 `D4-sing-v.nb` 中的归一化，该文件随附于定理 3.1]。$U(\mathfrak{g})$ 中与 $[v_1]$ 对应的元素见随附于第 3] 节的 `D4-category-O.nb` [8,。

在典范同构 $A(V^{-14/3}(\mathfrak{g})) \cong U(\mathfrak{g})$ 下，令 r_i为 $U(\mathfrak{g})$ 中与 $[v_i]$ 对应的元素，其中 $i = 1, 3, 4$。置

$$R^{(i)} = U(\mathfrak{g})_{\mathrm{ad}} r_i \quad (i = 1, 3, 4), \qquad R = R^{(1)} \oplus R^{(3)} \oplus R^{(4)}.$$

对于 $\mu \in \mathfrak{h}^*$，记作 $R_\mu = \{r \in R : [h, r] = \mu(h)r$ 对所有 $h \in \mathfrak{h}\}$ 以及 $R_\mu^{(i)} = R^{(i)} \cap R_\mu$。这三个直和项分别同构于最高权为$2\omega_1, 2\omega_3, 2\omega_4$的有限维单 $\mathfrak{g}$-模。特别地，当 $i = 1, 3, 4$ 时，$\dim R_0^{(i)} = 3$。定理 3.1 及诱导同态 $A(V^{-14/3}(\mathfrak{g})) \longrightarrow A(L_{-14/3}(\mathfrak{g}))$ 给出

$$A(L_{-14/3}(\mathfrak{g})) \cong U(\mathfrak{g})/I, \qquad I = U(\mathfrak{g})R. \tag{3.1}$$

对于根向量 f，记 $\mathrm{ad}(f)$ 为其在 $U(\mathfrak{g})$ 上的伴随算子。

命题 3.2 ([8, 引理 3.3])。令 $p_1, p_2, p_3 \in S(\mathfrak{h})$ 为 [8,引理 3.3] 中指定的多项式。它们构成 $\mathrm{HC}(R_0^{(1)})$ 的一组基。此外，

$$\mathrm{HC}(R_0) = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\sigma^j(p_i) : 1 \leq i \leq 3,\ 0 \leq j \leq 2\}.$$

对于 $1 \leq i \leq 3$ 和 $j = 1, 2$，设 $p_{3j+i} = \sigma^j(p_i)$。

对于 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$，最高权为 λ 的简单最高权 $\mathfrak{g}$-模在 (3.1) 条件下是一个 $A(L_{-14/3}(\mathfrak{g}))$-模，当且仅当

$$\sigma^j(p_i)(\lambda) = 0 \qquad (1 \le i \le 3,\ 0 \le j \le 2).$$

零点集由 [8, 命题 3.4 和定理 3.6] 中分类的 405 个权组成。下面的引理将在第5节中使用。

引理 3.3。令 t 为一个不定元，并令

$$\lambda(t) = -\tfrac{7}{3}\omega_2 - t\alpha_2 = t\omega_1 + (-\tfrac{7}{3} - 2t)\omega_2 + t\omega_3 + t\omega_4.$$

Then

$$\begin{aligned} p_1(\lambda(t)) &= 4t^2(3t+2)^2(3t+4)^2, \\ p_2(\lambda(t)) &= -4t^2(3t+2)^2(3t+4)^2, \\ p_3(\lambda(t)) &= 0. \end{aligned}$$

因此，$p_i(\lambda(\varepsilon)) = 0$ 属于 $\mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$，其中 $1 \le i \le 9$。

证明。将 $h_1 = h_3 = h_4 = t$ 和 $h_2 = -7/3 - 2t$ 代入 [8,引理 3.3] 中的多项式，得到三个恒等式。由于 $\sigma\lambda(t) = \lambda(t)$，这些恒等式同样适用于三重性变换。令 $t = \varepsilon$ 即可证明最后一个断言。□

4. Coset realization of $\mathcal{W}_{-38/7}(D_4, f_{\rm reg})$

我们将简单主的 W-代数 $\mathcal{W}^{-38/7}(D_4,\ f_{\rm reg})$ 实现为一个交换子。

$\widehat{\mathfrak{g}}$ 的对角作用定义了一个顶点代数同态

$$\varphi : V^{-11/3}(\mathfrak{g}) \longrightarrow L_{-14/3}(\mathfrak{g}) \otimes L_1(\mathfrak{g}), \qquad x(-1)\mathbf{1} \longmapsto x(-1)\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes x(-1)\mathbf{1}.$$

记 $x^{\varphi}(n) = \varphi(x(-1)\mathbf{1})_{(n)}$ 为 $x \in \mathfrak{g}$, $n \in \mathbb{Z}$。交换子为

$$\begin{aligned} &\mathrm{Com}(\varphi(V^{-11/3}(\mathfrak{g})), L_{-14/3}(\mathfrak{g}) \otimes L_1(\mathfrak{g})) \\ &\quad = \{v \in L_{-14/3}(\mathfrak{g}) \otimes L_1(\mathfrak{g}) : x^{\varphi}(n)v = 0 \text{ for all } x \in \mathfrak{g},\ n \ge 0\}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

取 (2.1) 中的 ω_k Sugawara向量，交换子的共形向量为

$$\omega^{\mathcal{W}} = \omega_{-14/3} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \omega_1 - \varphi(\omega_{-11/3}). \tag{4.2}$$

根据 [12, 定理 4.3], ，余集同构于 $\mathcal{W}^{-17/4}(\mathfrak{g}, f_{\rm reg})$。Feigin–Frenkel对偶将此顶点代数与 $\mathcal{W}^{-38/7}(\mathfrak{g}, f_{\rm reg})$ 识别。我们用自己的记号回顾 [12] 中的论证。

命题 4.1。存在一个共形顶点代数同构

$$\mathrm{Com}(\varphi(V^{-11/3}(\mathfrak{g})), L_{-14/3}(\mathfrak{g}) \otimes L_1(\mathfrak{g})) \cong \mathcal{W}_{-38/7}(\mathfrak{g}, f_{\rm reg}).$$

特别地，W 的中心荷为 -50。

证明。由于 $-14/3 + 6 = 4/3 \notin \mathbb{Q}_{\le 0}$ [13, 定理 8.7(2)] 给出

$$\mathcal{W}^{-38/7}(\mathfrak{g}, f_{\rm reg}) \cong (V^{-14/3}(\mathfrak{g}) \otimes L_1(\mathfrak{g}))^{\mathfrak{g}[t]}.$$

$\widehat{\mathfrak{g}}$ 的对角作用的层为 $k_0 = -11/3$。令 KL^{k_0} 表示由 $\widehat{\mathfrak{g}}$构成的、层为 k_0且 $\mathfrak{g}[t]$局部有限作用的光滑模的 O类。张量积 $V^{-14/3}(\mathfrak{g}) \otimes L_1(\mathfrak{g})$ 和 $L_{-14/3}(\mathfrak{g}) \otimes L_1(\mathfrak{g})$ 均属于此类。由于 $k_0 + 6 = 7/3 \notin \mathbb{Q}_{\le 0}$，$\widehat{\mathfrak{g}}$-模 $V^{k_0}(\mathfrak{g})$ 在 KL^{k_0} [13, 引理 2.1]中是射影的。因此，将 $\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathfrak{g}}}(V^{k_0}(\mathfrak{g}),\ -)$ 应用于到 $L_{-14/3}(\mathfrak{g}) \otimes L_1(\mathfrak{g})$ 上的自然满射，可得一个满射

$$\mathcal{W}^{-38/7}(\mathfrak{g}, f_{\rm reg}) \longrightarrow (L_{-14/3}(\mathfrak{g}) \otimes L_1(\mathfrak{g}))^{\mathfrak{g}[t]}. \tag{4.3}$$

顶点代数 $L_{-14/3}(\mathfrak{g}) \otimes L_1(\mathfrak{g})$ 按 $L^{-14/3}(0) \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes L^1(0)$ 分为 $\mathbb{Z}_{\ge 0}$ 级，其零次子空间为 $\mathbb{C}\mathbf{1}$，且其齐次子空间均为有限维。它具有一个非退化不变双线性形式。对角向量 $\varphi(x(-1)\mathbf{1})$（其中 $x \in \mathfrak{g}$）是初级的

，共形权为一。应用层为 $-11/3$ 的简单性定理 [12, Theorem 4.1], ，可知 $(L_{-14/3}(\mathfrak{g})\otimes L_1(\mathfrak{g}))^{\mathfrak{g}[t]}$ 是简单的。因此，(4.3) 将这个交换子与 $\mathcal{W}^{-38/7}(\mathfrak{g},\ f_{\mathrm{reg}})$ 的简单商对应起来。根据余集定理，共形向量彼此对应。由 (4.2)，中心荷为 $c_{\mathcal{W}}=-98+4+44=-50$。□

5. 关于 $L_{-14/3}(D_4)$ 的广义最高权模

我们构造第6节中用于得到对数型 $\mathcal{W}$模的广义最高权 $L_{-14/3}(D_4)$-模。令 $D=\mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$，并令 $\lambda_0=-\frac{7}{3}\omega_2$和 $\lambda_D=\lambda_0-\varepsilon\alpha_2$。权 λ_0 出现在 [8]的分类中。通过令 D 成为一个 $\mathfrak{b}$-模

$$\mathfrak{n}_+D=0,\qquad h\cdot d=\lambda_D(h)d\quad(h\in\mathfrak{h},\ d\in D).$$

于是 $h\cdot\varepsilon=\lambda_0(h)\varepsilon$ 且 $h\cdot 1=\lambda_0(h)-\varepsilon\alpha_2(h)$。特别地，$\varepsilon$ 是权为 λ_0的最高权向量，而 1 是一个广义最高权向量。

考虑诱导的 $\mathfrak{g}$-模及其商

$$M_D=U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{b})}D\cong U(\mathfrak{n}_-)\otimes D,\qquad T=M_D/IM_D,$$

其中 I 是（3.1）中的理想。于是 T 是一个 $A(L_{-14/3}(\mathfrak{g}))$-模。我们将证明典范映射 $D\longrightarrow T$ 是单射。

引理 5.1。 我们有 $IM_D\cap D=R_0D$，其中 R_0 是 $\mathfrak{h}$ 在 R上的伴随作用的零权空间。

证明。 由于 $I=U(\mathfrak{g})R$是一个双边理想，且 D生成 M_D，我们有 $IM_D=U(\mathfrak{g})RD$。空间 R 在 $\mathfrak{g}$的伴随作用下保持不变，而 D 是一个 $\mathfrak{b}$-模。因此，由于对于 $x\in\mathfrak{b}$、 $r\in R$ 和 $d\in D$，有 $x(rd)=[x,r]d+r(xd)$，故 RD 在 $\mathfrak{b}$下保持不变。由此可得 $IM_D=U(\mathfrak{n}_-)RD$。

由于 $M_D\cong U(\mathfrak{n}_-)\otimes D$，其广义 $\mathfrak{h}$-权空间是有限维的，其权属于 λ_0-Q_+，且权为 λ_0 的广义权空间是 D。对于伴随权分解 $R=\bigoplus_{\mu\in Q}R_\mu$，我们有 $R_\mu D\subseteq(M_D)^{\mathrm{gen}}_{\lambda_0+\mu}$。由于 $\mathfrak{n}_-$ 降低权，$U(\mathfrak{n}_-)RD$ 中权为 λ_0 的广义权空间恰好是 R_0D。因此 $IM_D\cap D=R_0D$。□

命题 5.2。 以下陈述等价:

(1) 典范映射 $D\longrightarrow T$ 是单射。(2) $p_i(\lambda_D)=0$，对于所有 $i=1,\ldots\ldots,9$。

证明。 根据引理 5.1，典范映射 $D\longrightarrow T$的核为 $IM_D\cap D=R_0D$。由于 $\mathfrak{n}_+D=0$，Harish–Chandra 投影给出

$$r\cdot d=\mathrm{HC}(r)(\lambda_D)d\qquad(r\in R_0,\ d\in D).$$

根据 [8, 引理 3.3], ，多项式 $p_1,\ldots\ldots,\ p_9$ 张成 $\mathrm{HC}(R_0)$。因此，当且仅当所有九个多项式在 λ_D 处均为零时，$R_0D=0$。□

命题 5.3。 典范映射 $D\longrightarrow T$ 是单射。因此，T 是一个非零的 $A(L_{-14/3}(\mathfrak{g}))$-模，包含二维广义最高权空间 D。其广义$\mathfrak{h}$-权空间是有限维的，并且通过 ε 的乘法定义了 T上的一个非零平方为零的端同态。此外，

$$\Omega|_T=-\frac{112}{9}\,\mathrm{id}+\frac{8}{3}\varepsilon. \tag{5.1}$$

证明。 根据引理 3.3，$p_i(\lambda_D)=0$ 在 D 中对 $1\le i\le 9$成立。因此，由命题 5.2 可知 $D\longrightarrow T$ 是单射。在 M_D 上乘以 ε 与 $U(\mathfrak{g})$可交换，并保持 IM_D不变。因此，它在 T 上诱导出一个自同态，其在 D 上的限制将 1 映为 $\varepsilon\neq 0$。T 的广义 $\mathfrak{h}$-权空间是有限维的，因为 M_D 的广义权空间是有限维的。

对于 $\lambda(t) = \lambda_0 - t\alpha_2$，利用 $\lambda_0 = -7\omega_2/3$ 和 $(\alpha_2 \mid \alpha_2) = 2$展开双线性表达式，得到

$$(\lambda(t) \mid \lambda(t) + 2\rho) = -\frac{112}{9} + \frac{8}{3}t + 2t^2.$$

因此，(5.1) 在广义最高权空间上成立。Ω 与乘以 ε的操作均与 $U(\mathfrak{g})$ 对易，且该空间生成 $\mathfrak{g}$-模 T，所以该恒等式在 T 上成立。□

命题 5.4。 存在一个不可分解的 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次的弱 $L_{-14/3}(\mathfrak{g})$-模 $E = \bigoplus_{n\geq 0} E(n)$，由 $E(0) = T$ 生成，并且在该模上，乘以 ε 可扩张为一个平方为零的端同态。对于每个 $n \geq 0$，它满足

$$L^{-14/3}(0)|_{E(n)} = \left(n - \frac{14}{3}\right)\mathrm{id} + \varepsilon. \tag{5.2}$$

其分次算子为 $D_E = L^{-14/3}(0) + \frac{14}{3}\,\mathrm{id} - \varepsilon$。每个广义 $\mathfrak{h}$-权空间 $E(n)$ 都是有限维的。

证明。 根据 Zhu 定理 [37, 定理 2.2。1], 存在一个 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次的弱 $L_{-14/3}(\mathfrak{g})$-模，其零次子空间作为 $A(L_{-14/3}(\mathfrak{g}))$-模为 T。令 E 为由 T生成的子模，并令 D_E 在 $E(n)$ 上作为 $n\,\mathrm{id}$ 作用。

对于 $x \in \mathfrak{g}$ 和 $r \in \mathbb{Z}$，我们有 $[L^{-14/3}(0)\ x(r)] = [D_E, x(r)] = -rx(r)$。因此

$$N = L^{-14/3}(0) - D_E + \frac{14}{3}\,\mathrm{id}$$

与每个 $x(r)$ 交换，因而也与 $L_{-14/3}(\mathfrak{g})$-作用交换。由 (2.1) 和 (5.1)，其在 T上的限制是乘以 ε。因此 N^2在 T上消失，进而也在 E上消失，因为 T生成 E。记 ε 为 N，便得到 (5.2)。

由于 $L_{-14/3}(\mathfrak{g})$ 由 $\mathfrak{g}$生成，存在一个分次向量空间的满射

$$U(\mathfrak{g} \otimes t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]) \otimes T \longrightarrow E, \tag{5.3}$$

其中，对于 $r \geq 1$，$\deg x(-r) = r$。 (5.3) 中第一个张量因子的固定次数子空间是有限维的。每个这样的子空间只具有有限多个 $\mathfrak{h}$-权。由于 T的广义$\mathfrak{h}$-权空间是有限维的，由 (5.3) 可得，对于每个 $n \geq 0$ 和$\mu \in \mathfrak{h}^*$，$\dim E(n)^{\mathrm{gen}}_{\mu} < \infty$。

每个 $L_{-14/3}(\mathfrak{g})$-模的 E 的自同态都保持 $E(0)$，即特征值为 $-14/3$的广义 $L^{-14/3}(0)$-特征子空间，以及权为 λ_0的广义 $\mathfrak{h}$-权空间 D。由于 h_1在 D 上的作用是乘以 ε，将其限制到 D 上便定义了一个代数同态

$$\mathrm{End}_{L_{-14/3}(\mathfrak{g})}(E) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}[\varepsilon]}(D) \cong D.$$

这个同态是单射，因为 D 生成 E。代数 D 没有非平凡幂等元，因此 $\mathrm{End}_{L_{-14/3}(\mathfrak{g})}(E)$也没有非平凡幂等元。因此 E 是不可分解的。□

6. A logarithmic $\mathcal{W}_{-38/7}(D_4, f_{\mathrm{reg}})$-module

我们构造一个最低共形权为 -2的对数型 $\mathcal{W}^{-38/7}(D_4, f_{\mathrm{reg}})$-模，正如 [35]中所预言的那样。

利用命题 4.1，将 $\mathcal{W}$ 视为 $L_{-14/3}(\mathfrak{g})\otimes L_1(\mathfrak{g})$的余集子代数。于是，$E\otimes L_1(\mathfrak{g})$是一个弱 $L_{-14/3}(\mathfrak{g}) \otimes L_1(\mathfrak{g})$-模，并且通过限制，它也是一个弱 $\mathcal{W}$-模。令 $v = 1 \otimes \mathbf{1}$ 和$w = \varepsilon \otimes \mathbf{1}$ 属于 $D \otimes \mathbf{1} \subset E \otimes L_1(\mathfrak{g})$。定义

$$\mathcal{C} = \mathcal{W} \cdot (D \otimes \mathbf{1}) \subset E \otimes L_1(\mathfrak{g}). \tag{6.1}$$

在第一个张量因子上乘以 ε 保持 复数域 不变，且与 $\mathcal{W}$-作用对易。令 $D_{\mathrm{tot}} = D_E \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes L^1(0)$。该算子在 $E \otimes L_1(\mathfrak{g})$ 上定义了一个 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次。

定理 6.1。 空间 $\mathcal{C}$ 是一个分次受限广义 W-模。对于 $n \geq 0$，令 $\mathcal{C}(n) = \{c \in \mathcal{C} :\ D_{\mathrm{tot}}c = nc\}$。那么

$$\mathcal{C} = \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{C}(n), \qquad \mathcal{C}(0) = \mathbb{C}v \oplus \mathbb{C}w,$$

and

$$L^{\mathcal{W}}(0)|_{\mathcal{C}(n)} = (n-2)\,\mathrm{id} + \frac{3}{7}\varepsilon. \tag{6.2}$$

特别地，

$$(L^{\mathcal{W}}(0)+2)v = \frac{3}{7}w, \qquad (L^{\mathcal{W}}(0)+2)w = 0, \qquad w \neq 0. \tag{6.3}$$

此外，$\mathrm{End}_{\mathcal{W}}(\text{复数域}) \cong D$，因此复数域是不可分解的。

证明。 对于 $x \in \mathfrak{g}$ 和 $r \in \mathbb{Z}$，对角算子 $x^{\varphi}(r)$ 通过以下方式作用于 $E \otimes L_1(\mathfrak{g})$：

$$x^{\varphi}(r)(e \otimes a) = x(r)e \otimes a + e \otimes x(r)a.$$

由于$\mathcal{W}$ 是 $\varphi(V^{-11/3}(\mathfrak{g}))$ 的交换子，每个 $x^{\varphi}(r)$ 都与$\mathcal{W}$的所有模交换。因此，该作用在 $D \otimes \mathbf{1}$ 上诱导出，在由此子空间生成的$\mathcal{W}$ 模复数域 上，

$$\begin{aligned} x^{\varphi}(r)\mathcal{C} &= 0 && (x \in \mathfrak{g},\ r \geq 1),\\ x^{\varphi}(0)\mathcal{C} &= 0 && (x \in \mathfrak{n}_+),\\ h^{\varphi}(0)|_{\mathcal{C}} &= \lambda_0(h)\,\mathrm{id} - \alpha_2(h)\varepsilon && (h \in \mathfrak{h}). \end{aligned} \tag{6.4}$$

这里， ε 作用于第一个张量因子。

在 $D \otimes \mathbf{1}$ 上，算子 $x^{\varphi}(0)$ 作为 $x(0)$ 作用于 D，因为 $x(0)\mathbf{1} = 0$ 在 $L_1(\mathfrak{g})$ 中。因此，层 $-11/3$ 处的 Sugawara 公式与（5.1）给出

$$\varphi(\omega_{-11/3})_{(1)}\big|_{D\otimes\mathbf{1}} = \frac{3}{14}\left(-\frac{112}{9}\,\mathrm{id} + \frac{8}{3}\varepsilon\right) = -\frac{8}{3}\,\mathrm{id} + \frac{4}{7}\varepsilon.$$

$\varphi(\omega_{-11/3})_{(1)}$ 和 ε 与 $\mathcal{W}$ 的所有模对易，因此同一恒等式在 复数域 上也成立。根据命题 5.4，

$$L^{-14/3}(0) \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes L^1(0) = D_{\mathrm{tot}} - \frac{14}{3}\,\mathrm{id} + \varepsilon.$$

由（4.2）可知，在 复数域 上， $L^{\mathcal{W}}(0) = D_{\mathrm{tot}} - 2\mathrm{id} + \frac{3}{7}\varepsilon$。特别地， D_{tot}保持 复数域 不变。限制到 复数域(n) 后得到（6.2）。

根据 (6.4)，复数域 属于算子 $h^{\varphi}(0)$ 的广义 $\mathfrak{h}$-权空间，其权为 λ_0。在总次数 n 下，张量积为

$$\bigoplus_{j=0}^{n} E(j) \otimes L_1(\mathfrak{g})_{n-j},$$

其中， $L_1(\mathfrak{g})_m$ 表示共形权 m 子空间。每个 $L_1(\mathfrak{g})_m$ 都是有限维的，且仅具有有限多个 $\mathfrak{h}$-权。对于每个这样的权 μ，根据命题 5.4， $E(j)$ 中权为 $\lambda_0 - \mu$ 的广义 $\mathfrak{h}$-权空间是有限维的。因此，$\dim$复数域$(n) < \infty$。

在总次数零时，张量积为 $T \otimes \mathbf{1}$，其权为 λ_0 的广义 $\mathfrak{h}$-权空间是 $D \otimes \mathbf{1}$。由于 $D \otimes \mathbf{1} \subset$ 复数域，我们有 复数域$(0) = D \otimes \mathbf{1} = \mathbb{C}v \oplus \mathbb{C}w$。现在，由 (6.2) 和 $\varepsilon v = w \neq 0, \varepsilon w = 0$ 可得 (6.3)。空间 复数域(n) 是权为 $n-2$ 的广义共形权空间，因此 复数域 是分次受限的。

每个$\mathcal{W}$-模自同态都保持复数域 $(0) = D \otimes \mathbf{1}$，并根据 (6.2) 与其上的 ε 可交换。将其限制到复数域(0)，可得一个单同态 $\mathrm{End}_{\mathcal{W}}(\text{复数域}) \to \mathrm{End}_D(D) = D$，因为复数域$(0)$生成复数域。其像包含由 ε 给出的乘法，该乘法作用于整个复数域。因此 $\mathrm{End}_{\mathcal{W}}(\text{复数域}) \cong D$。由于 D 没有非平凡幂等元，复数域 是不可分解的。□

推论 6.2. 顶点算子代数 W 不是有理的。

证明. 弱 $\mathcal{W}$-模 复数域 是 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次的，而且 $L(0)$ 在 复数域(0) 上不是半单的。如果顶点算子代数 U 是有理的，那么每个不可约的 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次弱 U–模都是普通的 [18,定理 8.1],，并且每个 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次弱 U–模都是不可约 U–模的直和。这与 (6.3) 矛盾。□

注记 6.3。 作为一个 $\hat{\mathfrak{g}}$–模， E 由广义最高权空间 D生成。它不属于 $\mathfrak{g}$的通常范畴$\mathcal{O}$ ，因为 $\mathfrak{h}$ 在 D上并非半单作用。例如，在 D的基$\mathbf{1}, \varepsilon$ 中，

$$h_i \cdot 1 = \varepsilon \quad (i = 1, 3, 4), \qquad h_2 \cdot 1 = -\frac{7}{3} 1 - 2\varepsilon.$$

空间 $E(0) = T$ 是无限维的；(6.1)中使用的子空间是其二维广义最高权空间。

7. Simple $\mathcal{W}_{-38/7}(D_4, f_{\mathrm{reg}})$-modules

本节利用余集实现，从$L_{-14/3}(D_4)$-模构造十七个两两不同构的简单$\mathcal{W}$-模。它们的完备性将由第 8 节中对 $A(\mathcal{W})$的确定得出。

令 $\Lambda \subset \mathfrak{h}^*$ 为分类中范畴$\mathcal{O}$内不可约 $L_{-14/3}(\mathfrak{g})$-模的405个最高权构成的集合；参见 [8, 命题 3.4 和定理 3.6]。对于 $\lambda \in \Lambda$，令 v_λ 为 $L_{-14/3}(\lambda)$的一个最高权向量，并设

$$\mathcal{C}_\lambda = \mathcal{W} \cdot (v_\lambda \otimes \mathbf{1}) \subset L_{-14/3}(\lambda) \otimes L_1(\mathfrak{g}).$$

作用 由余集实现给出。在 $L_{-14/3}(\lambda) \otimes L_1(\mathfrak{g})$ 上，我们使用分次算子 r

$$D_{\lambda,\mathrm{tot}} = D_\lambda^{-14/3} \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes L^1(0).$$

命题 7.1. 对于 $\lambda \in \Lambda$，W-模 复数域$_\lambda$ 是普通的，其最低共形权空间为一维，最低共形权为

$$h_\lambda = \frac{9}{56}(\lambda \mid \lambda + 2\rho). \tag{7.1}$$

它有一个唯一的不可约 W-模商，记为 S_λ。对于 $\lambda, \mu \in \Lambda$,

$$S_\lambda \cong S_\mu \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda + \rho \in W(\mu + \rho). \tag{7.2}$$

证明。 令 $u_\lambda = v_\lambda \otimes \mathbf{1}$。在 $L_{-14/3}(\lambda) \otimes L_1(\mathfrak{g})$ 上，张量积作用给出

$$x^\varphi(r) u_\lambda = x(r) v_\lambda \otimes \mathbf{1} + v_\lambda \otimes x(r)\mathbf{1} \qquad (x \in \mathfrak{g},\ r \in \mathbb{Z}).$$

由于 $\mathcal{W}$ 是 $\varphi(V^{-11/3}(\mathfrak{g}))$ 的交换子，算子 $x^\varphi(r)$ 与 $\mathcal{W}$ 作用对易。因此， u_λ 上的最高权条件给出

$$x^\varphi(r)c = 0 \quad (x \in \mathfrak{g},\ r \geq 1), \qquad x^\varphi(0)c = 0 \quad (x \in \mathfrak{n}_+), \qquad h^\varphi(0)c = \lambda(h)c \quad (h \in \mathfrak{h})$$

对每个 $c \in$ 复数域$_\lambda$ 都成立。由 Sugawara 公式可知， $\varphi(^{\omega_{-11/3}}(1)$ 在 复数域$_\lambda$ 上的作用为 $\Delta_{-11/3}(\lambda)$。因此，由 (4.2) 得

$$L^{\mathcal{W}}(0) = D_{\lambda,\mathrm{tot}} + \big(\Delta_{-14/3}(\lambda) - \Delta_{-11/3}(\lambda)\big)\,\mathrm{id} = D_{\lambda,\mathrm{tot}} + \frac{9}{56}(\lambda \mid \lambda + 2\rho)\,\mathrm{id} \qquad \text{on } \mathcal{C}_\lambda.$$

在每个总次数下，张量积中权为 λ 的 $\mathfrak{h}$-权空间都是有限维的： $L_1(\mathfrak{g})$ 的分次分量是有限维的，而 $L_{-14/3}(\lambda)$ 的分次分量具有有限维的 $\mathfrak{h}$-权空间。在零次时，此权空间恰为 $\mathbb{C}u_\lambda$。因此，复数域$_\lambda$ 是普通的，其最低共形权 h_λ 由 (7.1) 给出。由于 u_λ 生成 复数域$_\lambda$，每个真子模的零次分量都为零。因此，这些真子模之和就是唯一的极大子模。

接下来需要确定 $A(\mathcal{W})$ 在 $\mathbb{C}u_\lambda$ 上的特征。我们首先在 $\mathscr{R}$ of [13, Definition 2.4], 的系数环上工作，层参数为 K，并令 $\kappa = (K+6)/(K+7)$。 [13, Theorem 8.7] 的余集嵌入保持共形权不变，因为 Sugawara算子

$L(0)$ 对角作用在交换子上为零。Zhu代数上的诱导同态，再将 $A(L_1(\mathfrak{g}))$ 作用于其真空线并进行求值，得到

$$A(\mathcal{W}^{\kappa-6}(\mathfrak{g}, f_{\mathrm{reg}})) \longrightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes \mathscr{R}.$$

它的像包含于 $Z(U(\mathfrak{g})) \otimes \mathscr{R}$ 中。事实上，余集与对角 $\mathfrak{g}$-作用对易。在真空线上取值后，对于每个 $x \in \mathfrak{g}$，与 $x(0)$ 的交换子就是 $U(\mathfrak{g})$ 中与 x 的交换子。由 Harish–Chandra 同构可知，像中的每个元素在权为 λ 的最高权线上，作用表现为一个关于 λ 的多项式，其系数属于 $\mathscr{R}$。

令 $\Upsilon_Z\colon\ A(\mathrm{W}^{\kappa-6}(\mathfrak{g}, f_{\mathrm{reg}})) \to S(\mathfrak{h}) \otimes \mathscr{R}$ 为由 Miura 同态诱导的同态。对于 $\nu \in \mathfrak{h}^* \otimes \mathscr{R}$，令 $\chi_\nu = \mathrm{ev}_\nu \circ \Upsilon_Z$ 如 [13, (27)] 中所示。对于无理数 K 和占优整权 λ，分支公式 [13, 定理 11.1]，在最高权为 λ、层为 K 和 $K+1$，且真空模的层为一时，将所得的最高权线上的特征与 $\chi_{(1-\kappa)\lambda}$ 等同。对于 $A(\mathrm{W}^{\kappa-6}(\mathfrak{g}, f_{\mathrm{reg}}))$ 中每个属于 $\mathscr{R}$ 的元素，两个特征值都是关于 λ 的多项式，系数属于 $\mathscr{R}$。在每个无理数 K 处，它们的差在占优整权上消失，而这些权在 $\mathfrak{h}^*$ 中 Zariski 稠密。因此，其系数对每个无理数 K 都为零，进而在 $\mathscr{R}$ 中也为零。由于 $K+6 = 4/3 \notin \mathbb{Q}_{\le 0}$ 在此层成立，$\mathscr{R}$ 中的元素在 $K = -14/3$ 处是正则的。经过特化并取 $L_{-14/3}(\lambda) \otimes L_1(\mathfrak{g})$ 后，代数 $A(\mathrm{W}^{-38/7}(\mathfrak{g}, f_{\mathrm{reg}}))$ 在 $\mathbb{C}u_\lambda$ 上的特征为

$$\chi_{3\lambda/7}. \tag{7.3}$$

根据 [13, 命题 6.2], 的证明，这就是最高权为 $\frac{3}{7}\lambda - \frac{4}{7}\rho$ 的 $\mathfrak{g}$-Verma 模的中心特征。其移位的 Harish–Chandra 参数为

$$\frac{3}{7}\lambda + \rho - \frac{4}{7}\rho = \frac{3}{7}(\lambda + \rho).$$

根据 [13, (29)], ，当且仅当两个移位参数属于同一个 Weyl 轨道时，相应的两个特征才相同。S_λ 的最低共形权空间是 $\mathbb{C}u_\lambda$。因此，朱对应给出：当且仅当 $\lambda + \rho \in W(\mu + \rho)$ 时，有 $S_\lambda \cong S_\mu$。□

我们使用第 3 节的标准正交坐标，对集合 Λ进行完整的轨道计算。对于 $q = 3(\lambda + \rho)$，令 $A(q)$ 为 $(|q_1|, |q_2|, |q_3|, |q_4|)$ 的非递减重排，并令 $P(q) = q_1 q_2 q_3 q_4$。由于 $W(D_4)$ 由带符号置换组成，且变号次数为偶数，因此，二元组 $(A(q)\ Pq)$ 决定了 q 的轨道。

定理 7.2。当 λ 遍历 Λ 的全部 405 个元素时，W-模 S_λ 恰好给出17个同构类。各类的代表元以及 Λ 中对应于每一类的最高权数目列于表 *1*。

证明。设 $\lambda_1, \dots, \lambda_{17}$ 是表 1 第一列中的权，并令

$$\Lambda_i = \Lambda \cap (W(\lambda_i + \rho) - \rho).$$

[8, 命题 3.4 和定理 3.6] 中的显式分类给出 $|\Lambda_i| = N_i$，其中 N_i 是最后一列中的条目。这些有序对 $(A(3(\lambda_i + \rho))\ P(3(\lambda_i + \rho)))$ 互不相同。因此，各集合Λ_i 两两不交，并且

$$\sum_{i=1}^{17} |\Lambda_i| = 1 + 3\cdot 8 + 4 + 3\cdot 8 + 24 + 3\cdot 32 + 3\cdot 24 + 96 + 64 = 405 = |\Lambda|.$$

由此可得

$$\Lambda = \coprod_{i=1}^{17} \Lambda_i.$$

现在由命题 7.1 即可得证。□

对数型$\mathcal{W}$-模和十七个简单$\mathcal{W}$-模给出了 $A(\mathcal{W})$ 的以下商。

λ	$A(3(\lambda+\rho))$	$P(3(\lambda+\rho))$	h_λ	N
0	$(0,3,6,9)$	0	0	1
$-\frac{4}{3}\omega_1$	$(0,3,5,6)$	0	-1	8
$-\frac{4}{3}\omega_3$	$(1,\ 2,\ 4,\ 7)$	56	-1	8
$-\frac{4}{3}\omega_4$	$(1,2,4,7)$	-56	-1	8
$-\omega_2$	$(0,3,3,6)$	0	$-\frac{9}{7}$	4
$-\frac{8}{3}\omega_1$	$(0,\ 1,\ 3,\ 6)$	0	$-\frac{10}{7}$	8
$-\frac{8}{3}\omega_3$	$(1,\ 2,\ 4,\ 5)$	-40	$-\frac{10}{7}$	8
$-\frac{8}{3}\omega_4$	$(1,\ 2,\ 4,\ 5)$	40	$-\frac{10}{7}$	8
$-\frac{4}{3}\omega_2$	$(0,2,3,5)$	0	$-\frac{11}{7}$	24
$-\frac{4}{3}(\omega_1+\omega_3)$	$(1,\ 2,\ 3,\ 4)$	24	$-\frac{12}{7}$	32
$-\frac{4}{3}(\omega_1+\omega_4)$	$(1,\ 2,\ 3,\ 4)$	-24	$-\frac{12}{7}$	32
$-\frac{4}{3}(\omega_3+\omega_4)$	$(0,1,2,\ 5)$	0	$-\frac{12}{7}$	32
$-\frac{2}{3}\omega_1-\frac{4}{3}\omega_2$	$(0,\ 2,\ 3,\ 3)$	0	$-\frac{13}{7}$	24
$-\frac{2}{3}\omega_3-\frac{4}{3}\omega_2$	$(1,1,2,4)$	8	$-\frac{13}{7}$	24
$-\frac{2}{3}\omega_4-\frac{4}{3}\omega_2$	$(1,\ 1,\ 2,\ 4)$	-8	$-\frac{13}{7}$	24
$-\frac{7}{3}\omega_2$	$(0,\ 1,\ 2,\ 3)$	0	-2	96
$-\frac{2}{3}\omega_1-\frac{5}{3}\omega_2-\frac{2}{3}\omega_3$	$(0,\ 1,\ 1,\ 2)$	0	$-\frac{15}{7}$	64

表 1. 由$L_{-14/3}(\mathfrak{g})$-模的最高权向量得到的 17 个简单$\mathcal{W}$-模。数目 N 统计了所示平移后的 Weyl 轨道中 Λ 的权。

定理 7.3。 存在一个满射代数同态

$$A(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathbb{C}^{16} \times \mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2). \tag{7.4}$$

特别地， $A(\mathcal{W})$ 不是半单的，并且 $\dim A(\mathcal{W}) \geq 18$。

证明。 设 $D = \mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$。对数型 $\mathcal{W}$-模 复数域 C 的最低广义 $L(0)$-特征空间是自由的秩一 D-模 D。其 $A(\mathcal{W})$-作用与乘以ε相交换，因此给出一个同态

$$\phi : A(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathrm{End}_D(D) = D.$$

由定理 6.1， $L(0)$ 在此空间上 $= -2 + \frac{3}{7}\varepsilon$ ，因此

$$\phi([\omega] + 2[\mathbf{1}]) = \frac{3}{7}\varepsilon.$$

因此， ϕ是满射。模 ε约化后，它是对应于 $\lambda_* = -\frac{7}{3}\omega_2$的特征标；这是由在命题 7.1 的证明中构造的同态 $A(\mathcal{W}^{-38/7}(\mathfrak{g}, f_{\mathrm{reg}})) \longrightarrow Z(U(\mathfrak{g}))$ 给出的。

令 $\mathfrak{a} =$核 ϕ，并令 $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_{16}$为定理 7.2 中其他十六个特征标的核。元素 $([\omega] + 2[\mathbf{1}])^2$ 属于 $\mathfrak{a}$。在这十六个特征标上，它的取值为 $(h+2)^2,$，其中 h是相应的最低共形权。表 1 给出了每种情况下的 $h \neq -2$。因此，对于每个 i， $\mathfrak{a} + \mathfrak{m}_i = A(\mathcal{W})$。这些 $\mathfrak{m}_i$ 是互不相同的极大理想，因此两两互素。中国剩余定理给出 (7.4)。□

命题 8.6 中的界 $\dim R_{\mathcal{W}} \leq 18$ 将推出 (7.4) 是一个同构。

8. $\mathcal{W}$的 Zhu代数与 C_2-代数

在本节中，我们完成定理1.1的证明。我们确定 Zhu代数 $A(\mathcal{W})$ 和泊松代数 $R_{\mathcal{W}}$，并证明

$$A(\mathcal{W}) \cong \mathbb{C}^{16} \times \mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2), \qquad \dim A(\mathcal{W}) = \dim R_{\mathcal{W}} = 18.$$

特别地，$\mathcal{W}$ 是 C_2-余有限的。对 $A(\mathcal{W})$的描述还表明，第7节构造的十七个简单$\mathcal{W}$-模穷尽了不可约$\mathcal{W}$-模。由于第6节构造的对数型$\mathcal{W}$-模存在，故$\mathcal{W}$是非有理的。

8.1. **共形权重八的$\mathcal{W}^{-38/7}(\mathfrak{g},\ f_{\mathrm{reg}})$ 中的奇异向量**。令 J 为$\mathcal{W}^{-38/7}(\mathfrak{g},\ f_{\mathrm{reg}})$的极大理想，使得

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}^{-38/7}(\mathfrak{g}, f_{\mathrm{reg}})/J.$$

记为 $J_n = J \cap (\mathcal{W}^{-38/7}(\mathfrak{g},\ f_{\mathrm{reg}}))_n$。我们首先利用主 Drinfeld–Sokolov 约化找出三个共形权重为八的奇异向量，然后使用 Miura 同态给出它们的显式公式。

命题 8.1. 存在三个线性无关的向量 s_1、s_3、$s_4 \in J_8$，使得对于每个$i \in \{1、3、4\}$，$\mathbb{C}s_i$ 都是 $W^{-38/7}(\mathfrak{g}, f_{\mathrm{reg}})$的一个最高权子模的最低共形权空间，该子模包含于 $W^{-38/7}(\mathfrak{g}, f_{\mathrm{reg}})$中。相应的 $A(W^{-38/7}(\mathfrak{g}, f_{\mathrm{reg}}))$-特征为 $\gamma_{2\omega_i - \frac{4}{7}\rho}$，其中 γ_ν 表示最高权为 ν 的 $\mathfrak{g}$-*Verma* 模的中心特征。

证明。 在本证明中，对于仿射权，将次数导子 d 与 $[d, x(r)] = rx(r)$一并加入。令 Λ_0，δ 在 $\mathfrak{h}$ 上为零，并分别与 K，d对偶。将有限权在 K，d上延拓为零，并令 $\widehat{\rho} = \rho + 6\Lambda_0$。根据 [29, 定理1.2(5)], ，仿射顶点代数 $V^{-38/7}(\mathfrak{g})$包含奇异向量 v_i、$i = 1$，3，4，其权为

$$\Lambda_i = -\frac{38}{7}\Lambda_0 - 14\delta + 2\omega_i.$$

令 N_i 为由 v_i生成的 $\widehat{\mathfrak{g}}$-子模。它是 Verma 模 $M(\Lambda_i)$的一个商，并具有简单商 $L(\Lambda_i)$。

我们验证 [9, (385)]的条件。对于 $\mathfrak{g}$ 的每个正根 β 以及 $1 \le n \le \mathrm{ht}\,\beta$，都有 $n \le 5$ 以及

$$\left\langle \Lambda_i + \widehat{\rho}, (-\beta + n\delta)^\vee \right\rangle = \frac{4n}{7} - \langle 2\omega_i + \rho, \beta^\vee \rangle \notin \mathbb{Z}. \tag{8.1}$$

$-\frac{38}{7}\Lambda_0$也满足相同的条件。根据[9, 定理9.1。3], 函子 H^0_+ 在范畴$\mathcal{O}$的相应块上是正合的。因此我们得到满射

$$H^0_+(M(\Lambda_i)) \twoheadrightarrow H^0_+(N_i) \twoheadrightarrow H^0_+(L(\Lambda_i))$$

以及一个嵌入 $H^0_+(N_i) \to \mathcal{W}^{-38/7}(\mathfrak{g},\ f_{\mathrm{reg}})$。根据 [9, 命题 9.2.1 和 9.2.3、引理 9.2.4], ，首项和末项的最低共形权空间均为一维，且二者的特征均为 $\gamma_{2\omega_i - \frac{4}{7}\rho}$。它们的最低共形权为

$$\frac{7}{8}(2\omega_i \mid 2\omega_i + 2\rho) - \langle 2\omega_i, \rho^\vee \rangle = 14 - 6 = 8.$$

由此可知，$H^0_+(N_i)$没有低于八的共形权，并且其权为八的空间非零且为一维。取 $0 \neq s_i \in H^0_+(N_i)_8 \subset \mathcal{W}^{-38/7}(\mathfrak{g},\ f_{\mathrm{reg}})$。

权 $2\omega_i + \frac{3}{7}\rho$、$i = 1$、3、4 互不相同，且均严格支配。因此，它们属于不同的 Weyl 轨道。由 Harish–Chandra 同构可知，中心特征标 $\gamma_{2\omega_i - \frac{4}{7}\rho}$两两不同。因此，$s_1$，$s_3$，$s_4$ 线性无关。

最后，令$\mathcal{I}$为 $V^{-38/7}(\mathfrak{g})$的极大理想。每个 N_i 都包含于$\mathcal{I}$中。由于 $-\frac{38}{7}j \notin \mathbb{Z}$适用于 $1 \le j \le 6$, [9, , 推论 9.1.6(ii)] 给出 $H^0_+(L_{-38/7}(\mathfrak{g})) \cong \mathcal{W}$。由正合性，$H^0_+(\mathcal{I})$在$\mathcal{W}^{-38/7}(\mathfrak{g}, f_{\mathrm{reg}})$中的像为 J。因此 $s_i \in J$。□

我们用式 (2.3) 中的初等生成元 Q、P、R来表示命题 8.1 的奇异向量。定义算子

$$\begin{aligned}\mathcal{D} = {} & 88L(-4) + 64L(-3)L(-1) - 56L(-2)^2 \\ & + 48L(-2)L(-1)^2 - 9L(-1)^4\end{aligned}$$

以及下述共形权重八的向量：

$$\begin{aligned} w = {} & L(-2)R - \frac{1}{4}L(-1)^2R \\ & + \frac{16}{4747}(-12543054L(-8) + 3623856L(-6)L(-2) \\ & \quad + 2549580L(-5)L(-3) + 1408005L(-4)^2 \\ & \quad - 825006L(-4)L(-2)^2 - 572268L(-3)^2L(-2) \\ & \quad + 48287L(-2)^4)\mathbf{1}. \end{aligned}$$

Prop命题 8.2. 命题 *8.1* 中的三个奇异向量 s_1、s_3、s_4 可以选取为 *as*

$$\begin{aligned} s_1 &= P_{(-1)}P - 2Q_{(-1)}Q + \frac{5}{3}\mathcal{D}P + \frac{1}{3}w, \\ s_3 &= P_{(-1)}P + 10P_{(-1)}Q - 7Q_{(-1)}Q + \frac{10}{3}\mathcal{D}P - 10\mathcal{D}Q - \frac{4}{3}w, \\ s_4 &= P_{(-1)}P - 10P_{(-1)}Q - 7Q_{(-1)}Q + \frac{10}{3}\mathcal{D}P + 10\mathcal{D}Q - \frac{4}{3}w. \end{aligned} \tag{8.2}$$

对于 $X \in \{P, Q, R\}$ 和 $n \in \mathbb{Z}$，记 $X(n) = X_{(n+\mathrm{wt}(X)-1)}$。$P(0)$、$Q(0)$ 和 $R(0)$ 在直线 $\mathbb{C}s_i$ 上的特征值为

	s_1	s_3	s_4
$P(0)$	-4160	2080	2080
$Q(0)$	0	-2080	2080
$R(0)$	$\frac{32065200128}{4747}$	$\frac{32065200128}{4747}$	$\frac{32065200128}{4747}$

(8.3)

采用这一记号，场的展开式为

$$Y(P,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} P(n)z^{-n-4},\ Y(Q,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} Q(n)z^{-n-4},\ Y(R,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} R(n)z^{-n-6}.$$

证明。对于 $a, b \in \{P, Q\}$ 以及 $m = 1, 2$，Virasoro 对易子给出

$$L(m)(a_{(-1)}b) = (3m+4)a_{(m-1)}b.$$

例如，由 (2.3) 中的表达式和 Virasoro 关系可得

$$P_{(1)}Q = 224L(-2)Q - 124L(-1)^2Q = \tfrac{1}{10}L(2)\mathcal{D}Q.$$

由于 $s_3 - s_4 = 20(P_{(-1)}Q - \mathcal{D}Q)$，因此得到 $L(2)(s_3 - s_4) = 0$。对二次项应用相同的对易子，并对 $\mathcal{D}P, \mathcal{D}Q, w$ 应用 Virasoro 关系，得到

$$L(1)s_i = L(2)s_i = 0, \qquad i \in \{1, 3, 4\}.$$

因此，s_1, s_3, s_4 是共形权重八的 Virasoro 主向量。

Let

$$U_8 = \mathrm{span}_{\mathbb{C}} \left\{ L(-n_1)\cdots L(-n_r)X \;\middle|\; \begin{array}{c} X \in \{\mathbf{1}, P, Q, R\}, \quad r \geq 0, \\ n_i \geq 1\ (1 \leq i \leq r), \quad \sum_{i=1}^{r} n_i = 8 - \mathrm{wt}(X) \end{array} \right\}.$$

普适主的 W-代数 [9, 命题 4.12.1(iii)]，的基定理，结合上述确立的生成元变换，给出了 $(\mathcal{W}^{-38/7}(\mathfrak{g},\ f_{\mathrm{reg}}))_8$ 的一组基，由表 2 第一列中的 22 个向量组成。其中 19 个向量属于 U_8，其余三个是 $P_{(-1)}P$、$P_{(-1)}Q$ 和 $Q_{(-1)}Q$。因此，$\dim U_8 = 19$，且 $\dim(\mathcal{W}^{-38/7}(\mathfrak{g},\ f_{\mathrm{reg}}))_8/U_8 = 3$。$s_1$，$s_3$，$s_4$ 相对于该商中 $P_{(-1)}P$、$P_{(-1)}Q$、$Q_{(-1)}Q$ 的类的系数组成矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 10 & -7 \\ 1 & -10 & -7 \end{pmatrix},$$

其行列式为 -100。因此，s_1，s_3，s_4 线性无关。为应用 Kac 行列式公式 [30, 21],，写作 $c = 13 - 6(\tau + \tau^{-1})$。在 $c = -50$ 处，我们有 $\tau + \tau^{-1} = 21/2$，且 τ 是无理数。对于正整数 r，s，权重

$$h_{r,s} = \frac{(r\tau - s)^2 - (\tau - 1)^2}{4\tau}$$

仅当 $r = s$ 时才是有理的，此时 $h_{r,\ r} = 17(r^2 - 1)/8$。4 和 6 均不出现。对于最高权为零的情形，仅出现 $(r,\ s) = (1,\ 1)$，并且相应的奇异向量根据 $L(-1)\mathbf{1} = 0$ 在真空模中消失。因此，由$\mathbf{1}$，P，Q，R 生成的 Virasoro 模均不包含非零的八权主向量。这些模根据上述基定理构成直和。由此可知，自然投影

$$\left(\mathcal{W}^{-38/7}(\mathfrak{g}, f_{\mathrm{reg}})\right)_8 \longrightarrow \left(\mathcal{W}^{-38/7}(\mathfrak{g}, f_{\mathrm{reg}})\right)_8 / U_8$$

在八权 Virasoro 主向量空间上是单射，因此该空间的维数至多为三。因此，s_1，s_3，s_4 构成该空间的一组基。

根据命题 8.1，极大理想 J 中有三个共形权为 8 的线性无关奇异向量。由于每个奇异向量都是 Virasoro 主向量，我们得出 s_1、s_3、s_4 属于 J，且对所有 $n \geq 1$，它们均被 $P(n)$、$Q(n)$、$R(n)$ 消去。通过将 $P_{(3)}$、$Q_{(3)}$ 和 $R_{(5)}$ 作用于这些 H 中的表达式，并使用 $[b_i(m)\ b_j(n)] = 28m\delta_{ij}\delta_{m+n}$,0 id 对于 $1 \leq i,\ j \leq 4$ 和 m、$n \in \mathbb{Z}$，可得到它们在 (8.3) 中的特征值。对于 $\eta_i = 7(2\omega_i + \frac{3}{7}\rho)$，$\eta_1$、$\eta_3$、$\eta_4$ 的标准正交坐标分别为 (23, 6, 3, 0)、(16, 13, 10, -7) 和 (16, 13, 10, 7)。在第 8.2 节的移位坐标中计算这些点处的 $[P]$ 和 $[Q]$，得到 (-4160, 0)、(2080, -2080) 和 (2080, 2080)。与 (8.3) 比较可知，$\mathbb{C}s_i$ 对应于命题 8.1 中特征为 $\gamma_{2\omega_i - \frac{4}{7}\rho}$ 的最高权线。□

命题 8.3。表 *2* 给出了命题 *8.2* 中奇异向量 s_1、s_3、s_4 在其第一列所列出的共形权重八的基下的系数。

表 2：奇异向量 s_1、s_3、s_4 的展开式。

基向量	s_1	s_3	s_4
$P(-4)^2\mathbf{1}$	1	1	1
$P(-4)Q(-4)\mathbf{1}$	0	10	-10
$Q(-4)^2\mathbf{1}$	-2	-7	-7
$L(-4)P(-4)\mathbf{1}$	$\frac{440}{3}$	$\frac{880}{3}$	$\frac{880}{3}$
$L(-3)P(-5)\mathbf{1}$	$\frac{320}{3}$	$\frac{640}{3}$	$\frac{640}{3}$
$L(-2)^2P(-4)\mathbf{1}$	$-\frac{280}{3}$	$-\frac{560}{3}$	$-\frac{560}{3}$
$L(-2)P(-6)\mathbf{1}$	160	320	320
$P(-8)\mathbf{1}$	-360	-720	-720
$L(-4)Q(-4)\mathbf{1}$	0	-880	880
$L(-3)Q(-5)\mathbf{1}$	0	-640	640
$L(-2)^2Q(-4)\mathbf{1}$	0	560	-560
$L(-2)Q(-6)\mathbf{1}$	0	-960	960
$Q(-8)\mathbf{1}$	0	2160	-2160
$L(-2)R(-6)\mathbf{1}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$
$R(-8)\mathbf{1}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$L(-8)\mathbf{1}$	$\frac{66896288}{4747}$	$\frac{267585152}{4747}$	$\frac{267585152}{4747}$
$L(-6)L(-2)\mathbf{1}$	$\frac{19327232}{4747}$	$\frac{77308928}{4747}$	$\frac{77308928}{4747}$
$L(-5)L(-3)\mathbf{1}$	$\frac{13597760}{4747}$	$\frac{54391040}{4747}$	$\frac{54391040}{4747}$
$L(-4)^2\mathbf{1}$	$\frac{7509360}{4747}$	$\frac{30037440}{4747}$	$\frac{30037440}{4747}$
$L(-4)L(-2)^2\mathbf{1}$	$\frac{4400032}{4747}$	$\frac{17600128}{4747}$	$\frac{17600128}{4747}$
$L(-3)^2L(-2)\mathbf{1}$	$\frac{3052096}{4747}$	$\frac{12208384}{4747}$	$\frac{12208384}{4747}$

基向量	s_1	s_3	s_4
$L(-2)^4\mathbf{1}$	$\frac{772592}{14241}$	$\frac{3090368}{14241}$	$\frac{3090368}{14241}$

证明。对于 $X\in\{P、\ Q、\ R\}$ 和 $n\geq 0$，平移协变性给出

$$L(-1)^n X = n!\,X(-\mathrm{wt}(X)-n)\mathbf{1}.$$

将$\mathcal{D}$ 和 w 的定义代入 s_1,s_3,s_4，再结合这一恒等式，即可得到表 2 中的系数。□

8.2. 的结构 $A(\mathcal{W})$ 和 $R_{\mathcal{W}}$。如第 2.1 节所述，令 $U=\mathcal{W}^{-38/7}(\mathfrak{g},\ f_{\mathrm{reg}})$。在 $A(\mathcal{H})$ 中，令

$$\xi_i=[b_i(-1)\mathbf{1}]-3\rho_i[\mathbf{1}]\quad(1\leq i\leq 4),\qquad(\rho_1,\rho_2,\rho_3,\rho_4)=(3,2,1,0).$$

在嵌入 $A(\mu)\colon A(U)\to A(\mathcal{H})$ 下，根据 $[a]\mapsto[\mu(a)]$ [13, 引理 6.1],，记 $x,\ y,\ z,\ t$为 (2.4) 中四个多项式在 $(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \xi_4)$ 处的取值。它们的首符号是 R_U 的生成元 $x,\ y,\ z,\ t$。$\omega,\ P,\ Q$ 的公式给出

$$[\omega]=\frac{x-126}{56},\qquad[P]=\frac{4y-x^2}{56},\qquad[Q]=\frac{z}{7}.$$

命题 8.4。对于表 2 中给出的奇异向量 $s_1、\ s_3、\ s_4\in J$，在 $A(U)$ 中有以下恒等式：

$$\begin{aligned}12544[s_1]&=128xt-5376t+15x^4-840x^3+15288x^2-79200x+299376\\&\quad+64y^2-80x^2y+3136xy-38080y-512z^2,\\-196[s_3]&=8xt-336t-y^2+28z^2-14xy+1190y+63x^2-4950x+18711\\&\quad-20yz+420xz-7140z,\\-196[s_4]&=8xt-336t-y^2+28z^2-14xy+1190y+63x^2-4950x+18711\\&\quad+20yz-420xz+7140z.\end{aligned}$$

特别地，右侧的三个多项式在 $A(\mathcal{W})$ 中均为零。

证明。$\mu(s_i)$ 在表 2 中的 (2.3) 代入给出 $\in\mathcal{H}$（当 $i=1,\ 3,\ 4$ 时）。在 $A(\mathcal{H})=\mathbb{C}[\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4]$中，我们有

$$[b_{i_1}(-n_1)\cdots b_{i_r}(-n_r)\mathbf{1}]=(-1)^{\sum_{j=1}^r(n_j-1)}\prod_{j=1}^r(\xi_{i_j}+3\rho_{i_j}),$$

对于 $r\geq 0$, $n_j\geq 1$ 和 $1\leq i_j\leq 4$ $(1\leq j\leq r)$。将此恒等式应用于 $\mu(s_i)$，得到 $A(\mu)([s_i])$。将这三个不变多项式用 $x,\ y,\ z,\ t$ 表示，即得所述公式。由于 $s_i\in J$，商映射 $A(U)\to A(\mathcal{W})$ 将每个 $[s_i]$ 映为零。□

在 $R_U=\mathbb{C}[x,y,z,t]$ 中，令

$$u_1:=12544\,\bar{s}_1=128xt+15x^4-80x^2y+64y^2-512z^2,\tag{8.4}$$

$$u_3:=-196\,\bar{s}_3=8xt-y^2+28z^2-20yz,\tag{8.5}$$

$$u_4:=-196\,\bar{s}_4=8xt-y^2+28z^2+20yz.\tag{8.6}$$

这些多项式表达式是命题 8.4 中相应多项式的权重八分量。令 $I=$核$(R_U\twoheadrightarrow R_{\mathcal{W}})=(J+C_2(U))/C_2(U)$。由于 $s_1,\ s_3,\ s_4\in J$，我们有 $u_1,\ u_3,\ u_4\in I$。

这三个多项式在 t-轴上均为零。因此 $(u_1,\ u_3,\ u_4)$ 在R_U中具有无限余维。Arakawa、Lam 和 Yamada 使用模 $(W^3)^{(1)}$，在 $\mathfrak{sl}_2$ 的 parafermion 代数 [14,的 C_2-代数中建立关系，见命题 5.4 和第 6] 节。

对于 $a\in U$ 和 $b\in J$，(2.5) 给出 $28B_0(\bar{a},\bar{b})=\overline{a_{(1)}b}\in I$因为 $a_{(1)}b\in J$。因此 $B_0(R_U,\ I)\subseteq I$。

命题 8.5。 理想 I 包含多项式

$$\begin{aligned} v_1 &:= 10xyz + 12zt, \\ v_2 &:= yt + 6xz^2, \\ v_3 &:= 96t^2 + 16xyt + 96x^2z^2 + 192yz^2, \\ v_4 &:= 32x^3y - 128xy^2 - 192x^2t + 384yt - 2304xz^2. \end{aligned}$$

证明。 由 (8.4)–(8.6),

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{40}(u_4 - u_3) &= \tfrac{49}{10}\overline{s_3 - s_4} = yz, \\ \tfrac{1}{2}(u_3 + u_4) &= -98\overline{s_3 + s_4} = 8xt - y^2 + 28z^2, \\ \tfrac{1}{5}(u_1 - 8u_3 - 8u_4) &= \tfrac{1568}{5}\overline{8s_1 + s_3 + s_4} = 3x^4 - 16x^2y + 16y^2 - 192z^2. \end{aligned}$$

方程 (2.4) 给出

$$B_0(z,y) = 2z\sum_{i=1}^{4}(x - q_i^2) = 6xz, \qquad B_0(z,z) = \sum_{i=1}^{4}\prod_{j\neq i} q_j^2 = t.$$

由于 $yz \in I$和 $B_0(R_U, I) \subseteq I$，我们有 $B_0(z, yz) \in I$。莱布尼茨法则给出

$$B_0(z,yz) = B_0(z,y)z + yB_0(z,z) = 6xz^2 + yt = v_2.$$

对于其余三个多项式，(2.4) 给出

B_0	x	y	z	t
y	$8y$	$4xy + 12t$	$6xz$	$8xt + 16z^2$
t	$12t$	$8xt + 16z^2$	$4yz$	$4yt + 12xz^2$

因此

$$v_1 = B_0(y, yz), \qquad v_3 = \tfrac{1}{2}B_0(t, u_3 + u_4), \qquad v_4 = \tfrac{1}{5}B_0(y, u_1 - 8u_3 - 8u_4).$$

由于 yz，$u_3 + u_4$，$u_1 - 8u_3 - 8u_4 \in I$和 $B_0(R_U,\ I) \subseteq I$，这四个多项式都属于 $I_\circ$ □

命题 8.6。 设 $I_0 = (u_1, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3, v_4) \subset R_U$。十八个单项式的类

$$1, x, \ldots, x^7, \qquad y, xy, x^2y, x^3y, y^2, \qquad z, xz, x^2z, x^3z, \qquad t$$

张成 R_U/I_0。特别地，维数 $R_{\mathcal{W}} \leq 18$。

证明。 在 R_U/I_0 中，关系 $u_1 = u_3 = u_4 = 0$ 给出

$$yz = 0, \qquad xt = -\frac{1}{6}y^2 + \frac{7}{24}x^2y - \frac{7}{128}x^4, \qquad z^2 = \frac{1}{12}y^2 - \frac{1}{12}x^2y + \frac{1}{64}x^4.$$

将 $v_1 = v_2 = v_4 = 0$ 代入可得

$$zt = 0, \qquad yt = \frac{1}{8}x^3y - \frac{19}{640}x^5, \qquad xy^2 = \frac{3}{4}x^3y - \frac{41}{320}x^5.$$

将 xt 的公式乘以 z 可得 $x^4z = 0$。将 z^2 的公式乘以 y 可得

$$y^3 = x^2y^2 - \frac{3}{16}x^4y.$$

将这些恒等式代入 $y(xt) - x(yt)$，得到

$$0 = \frac{7}{512}(x^6 - 4x^4y).$$

因此 $x^4y = x^6/4$，代入前面的公式可得

$$y^3 = \frac{1}{80}x^6, \qquad xyt = \frac{1}{640}x^6, \qquad x^2z^2 = -\frac{1}{3840}x^6.$$

由此可知， $v_3 = 96t^2$ 属于 R_U/I_0，因此 $t^2 = 0$。此外，由于 $x^4z =$，$x^8 = -3840x^4z^2 = 0$ 0.

t^2、yt、zt、yz、z^2、y^3之间的关系表明， R_U/I_0在 $\mathbb{C}[x]$ 上由 1、y、y^2、z张成 t. xt 和 xy^2 的公式将 t 和 y^2 的倍数化简为 x的正幂。最后 ，

$x^8=0$、$x^4y=x^6/4$ 和 $x^4z=0$ 给出了陈述中的十八个单项式。由于 $I_0\subseteq I$，满射 $R_U/I_0\twoheadrightarrow R_{\mathcal{W}}$给出 $\dim R_{\mathcal{W}}\le 18$。□

命题 8.6 给出如下推论。

推论 8.7。单的主的 W-代数 W 是 C_2-余有限的。

定理 8.8。我们有

$$A(\mathcal{W})\cong\mathbb{C}^{16}\times\mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2).$$

特别地，维数 $A(W)=18$，表 1 中列出的十七个 W-模穷尽了不可约 W-模。W 的 C_2-代数具有如下表示

$$R_{\mathcal{W}}\cong\frac{\mathbb{C}[x,y,z,t]}{(u_1,u_3,u_4,v_1,v_2,v_3,v_4)}.$$

这里 u_1、u_3、u_4 定义于 (8.4)–(8.6)，而 v_1、v_2、v_3、v_4 定义于命题 8.5。特别地，维数 $R_{\mathcal{W}}=18$，其希尔伯特级数为

$$\mathrm{Hilb}_{R_{\mathcal{W}}}(q)=1+q^2+3q^4+4q^6+4q^8+3q^{10}+q^{12}+q^{14}.$$

证明。根据定理 7.3 和命题 8.6，我们有 $18\le\dim A(\mathcal{W})\le\dim R_{\mathcal{W}}\le 18$。因此 $\dim A(\mathcal{W})=\dim R_{\mathcal{W}}=18$，且定理 7.3 中的满射是同构，从而得到$A(\mathcal{W})\cong\mathbb{C}^{16}\times\mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$。此外，由于 $I_0\subseteq I$，根据命题 8.6，满射 $\mathbb{C}[x,y,z,t]/I_0\to R_{\mathcal{W}}$也为同构。其中列出的单项式因此构成 $R_{\mathcal{W}}$ 的一组基，并给出所断言的希尔伯特级数。

最后，$A(\mathcal{W})$ 恰好有 17 个不可约 $A(\mathcal{W})$-模的同构类。由于$\mathcal{W}$是 C_2-余有限的，根据 [2, 推论 5.8]，每个不可约弱 $\mathcal{W}$-模都是普通的。根据朱对应 [37, 定理 2.2.2], 在定理 7.2 中构造的$\mathcal{W}$-模穷尽了不可约$\mathcal{W}$-模。□

致谢。作者还获得了克罗地亚科学基金会项目 IP-2022-10-9006 的部分资助，以及项目“作为量子与复杂系统及李代数表示卓越科学中心的一部分，实施前沿研究及其应用”的资助。该项目编号为 PK.1.1.10.0004，由欧盟通过欧洲区域发展基金——2021–2027 年竞争力与凝聚力计划共同资助。

D.A. 还通过欧盟下一代欧盟机制，依据2021–2026 年国家复苏与韧性计划，经由萨格勒布大学理学院的机构资助 IK IA1.1.3 Impact4Math，获得了部分资助。

I.V. 还通过斯普利特大学的机构项目“物理系统的数学建模与模拟（MaMoS）IP-UNIST-46”，获得了欧盟（下一代欧盟）依据2021–2026 年克罗地亚复苏与韧性计划（国家复苏与韧性计划）提供的部分资助。该项目由克罗地亚共和国科学、教育与青年部批准。

人工智能使用披露。ChatGPT 被用于数学讨论，并协助数学论证、计算以及本手稿的准备工作。作者对数学内容承担全部责任。

参考文献

[1] T. Abe，《辛费米子顶点算子超代数的 $\mathbb{Z}_2$-轨道模型》，《数学杂志》255（2007年），第4期，755–792。[2] T. Abe、G. Buhl和C. Dong，《有理性、正则性和 C_2-余有限性》，《美国数学会汇刊》356（2004年），第8期，3391–3402。[3] D. Adamović和A. Čeperić，《关于辛费米子顶点代数的Zhu代数和 C_2-代数》$SF(d)^+$，《代数杂志》563（2020年），376–403。[4] D. Adamović和A. Milas，《关于三重态顶点代数》$\mathcal{W}(p)$，《Adv. Math.》217（2008年），第6期，2664–2699。[5] D. Adamović和A. Milas，《某些顶点代数的对数模的格构造》，《数学选刊》（新系列）15（2009年），第4期，535–561。

[6] D. Adamović和A. Milas，《某些W-代数的Zhu代数的结构》，《Adv. Math.》227（2011年），第6期，2425–2456。[7] D. Adamović、X. Dai和K. Sun，《拟光滑单仿射顶点代数的分类》，arXiv:2611.12723v1（2026年）。[8] D. Adamović和I. Vukorepa，《一种新的 D_4型拟光滑仿射顶点代数》，Commun. Contemp. Math.（2026年），2650062，在线发表；doi:10.1142/S0219199726500628；arXiv:2504.13783v2。[9] T. Arakawa，《 W代数的表示论》，Invent. Math. 169（2007年），第2期，219–320；arXiv:math/0506056v4。[10] T. Arakawa，《 W 2 **182** 2015 2, 代数565, 604的有理性：主幂零情形》，Ann. of Math.（ ）( )，第–期，–。[11] T. Arakawa，《O类中可容许仿射顶点代数的有理性》，Duke Math. J. 165（2016年），第1期，67–93。[12] T. Arakawa、T. Creutzig和K. Kawasetsu，《关于光滑的非可容许极小和主 W-代数》，载于Modern Algebra，《第一部分：表示论》，Contemp. Math. 829，Amer. Math. Soc.，罗得岛州普罗维登斯，2025年，1–13；arXiv:2408.04584。[13] T. Arakawa、T. Creutzig和A. R. Linshaw，《作为余集顶点代数的 W-代数》，Invent. Math. 218（2019年），第1期，145–195；arXiv:1801.03822v4。[14] T. Arakawa、C. H. Lam和H. Yamada，《副费米子顶点算子代数的Zhu代数、 C_2-代数和 C_2-余有限性》，《Adv. Math.》264（2014年），261–295；arXiv:1207.3909。[15] P. Bouwknegt和K. Schoutens，《共形场论中的 W 对称性》，Phys. Rep. 223（1993年），183–276；doi:10.1016/0370-1573(93)90111-P。[16] T. Creutzig、A. M. Gainutdinov和I. Runkel，《三重态顶点算子代数的一个拟Hopf代数》，Commun. Contemp. Math. 22（2020年），第3期，1950024。[17] T. Creutzig、S. Lentner和M. Rupert，《对数Kazhdan–Lusztig对应的代数理论》，arXiv:2306.11492（2023年）。[18] C. Dong、H. Li和G. Mason，《顶点算子代数的扭曲表示》，Math. Ann. 310（1998年），第3期，571–600；arXiv:q-alg/9509005。[19] B. Feigin和E. Frenkel，《Drinfeld–Sokolov约化的量子化》，Phys. Lett. B 246（1990年），75–81。[20] B. Feigin和E. Frenkel，《 W-代数中的对偶性》，Int. Math. Res. Not.（1991年），第6期，75–82。[21] B. L. Feigin和D. B. Fuchs，《直线上的不变斜对称微分算子与Virasoro代数上的Verma模》，Funct. Anal. Appl. 16（1982年），第2期，114–126。[22] B. L. Feigin、A. M. Gainutdinov、A. M. Semikhatov和I. Yu. Tipunin，《对数共形场论及量子群中心中的模群表示与融合》，Commun. Math. Phys. 265（2006年），第1期，47–93。[23] A. M. Gainutdinov、A. M. Semikhatov、I. Yu. Tipunin和B. L. Feigin，《对数CFT中三重态 W-代数表示范畴的Kazhdan–Lusztig对应》，Theoret. Math. Phys. 148（2006年），第3期，1210–1235。[24] I. B. Frenkel和Y. Zhu，《与仿射代数和Virasoro代数表示相关的顶点算子代数》，Duke Math. J. 66（1992年），第1期，123–168。[25] V. Gurarie，《共形场论中的对数算子》，Nuclear Phys. B 410（1993年），535–549。[26] T. Gannon和C. Negron，《$(p,1)$-中心荷处的量子SL(2)与对数顶点算子代数》，J. Eur. Math. Soc. 28（2026年），第2期，777–842；doi:10.4171/JEMS/1489。[27] Y.-Z. Huang，《余有限条件、投射覆盖与对数张量积理论》，J. Pure Appl. Algebra 213（2009年），第4期，458–475。[28] K. Ito和M. Zhu，《具有 W-对称性的共形场论中的运动积分与ODE/IM对应》，Nucl. Phys. B 1010（2025年），116756；doi:10.1016/j.nuclphysb.2024.116756。[29] C. Jiang和J. Song，《关于单边 универсальные仿射顶点算子代数的奇异向量与相伴Weyl元》，arXiv:2510.04445v4（2026年）。[30] V. G. Kac，《无限维李代数和超代数的反变形式》，载于Group Theoretical Methods in Physics，Lecture Notes in Phys. 94，Springer，柏林，1979年，441–445。[31] V. G. Kac、S.-S. Roan和M. Wakimoto，《仿射超代数的量子约化》，Commun. Math. Phys. 241（2003年），307–342。[32] S. L. Luk'yanov和V. A. Fateev，《与单李代数 D_n 相关的共形量子场论恰可解模型》，Sov. J. Nucl. Phys. 49（1989年），第5期，925–932。[33] M. Miyamoto，《满足 C_2-余有限性的顶点算子代数的模不变性》，Duke Math. J. 122（2004年），第1期，51–91。[34] K. Nagatomo和A. Tsuchiya，《三重态顶点算子代数 $W(p)$与受限量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$在 $q=e^{\pi i/p}$处的情形》，载于Exploring new structures and natural constructions in mathematical physics，Adv. Stud. Pure Math. 61，Math. Soc. Japan，东京，2011年，1–49。[35] D. Xie，《非可容许 W-代数的表示论：第一部分》，arXiv:2606.16714（2026年）。

—

[36] D. Xie 和 W. Yan, 《*4*维$\mathcal{N}\ =\ 2$ *SCFTs* 与 *lisse* W-代数》, 《高能物理杂志》（2021年）, 第4期, 文章271。[37] Y. Zhu, 《顶点算子代数特征标的模不变性》, 《美国数学会杂志》**9**（1996年）, 第1期, 237–302。

D.A. 数学系，理学院，萨格勒布大学，比耶尼奇卡街30号电子邮件地址： adamovic@math.hr

I.V. 斯普利特大学理学院，鲁杰尔·博什科维奇街33号电子邮件地址：
ivukorepa@pmfst.hr