基于 N^*（1535）和 N^*（1650）共振的 πN S_{11}散射数据与格点量子色动力学谱研究

Zhi-Xuan Li, [1] Derek B. Leinweber, [2, *] Anthony W. Thomas, [2, †] 以及 Jia-Jun Wu[1, ‡]

[1]*School of Physical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences (UCAS), Beijing 100049, China*[2]*Special Research Centre for the Subatomic Structure of Matter (CSSM), Departmentof Physics, Adelaide University, Adelaide, 5005, South Australia, Australia*（日期：2026年11月20日）

我们在非微扰哈密顿量框架（NPHF）下研究了两个最低能级的奇宇称核子共振，即 N^*（1535）和 N^*（1650）。耦合道模型包含两个夸克总自旋分别为 1/2 和 3/2的三夸克裸态，以及四个介子-重子道： πN、 ηN、 $K\Lambda$和 $K\Sigma$。我们将 SU(3)味对称性和裸态自旋波函数的约束施加于裸态-道顶点以及道-道的 Weinberg–Tomozawa 相互作用上。这大幅减少了自由参数的数量。我们将无限体积 πN S_{11} 散射数据的拟合与有限体积格点量子色动力学谱相结合。我们利用哈密顿量本征矢分析模型基底组成。随后，污染函数将所得的算符混合模式与格点关联矩阵本征矢进行比较。在所考虑的情形中，裸态和耦合道相互作用对于描述这两个共振都发挥着重要作用。根据我们对无限体积和有限体积的联合分析，与传统夸克模型预期相反，具有自旋-1/2 的裸态比具有自旋-3/2 的裸态更重。污染分析与相应的算符指派以及近期对与这些态相关的相对论波函数的分析相一致。受对称性约束的 NPHF 为这两个 S_{11} 共振提供了统一描述。联合分析还进一步约束了对它们的模型解释。

I. 引言

激发核子可用于探测量子色动力学（QCD）的非微扰区域。它们的内部结构仍是强子物理中的一个未解问题。最低的两个奇宇称核子共振， N^*(1535)和N^*(1650)，出现在 πN S_{11} 偏波中。它们一直是轻强子谱学中的长期难题。其组成可能包括三夸克组分、动力学生成的介子-重子态，或这些组分的混合。从组分夸克模型到耦合道有效场论和格点量子色动力学，不同的理论框架对这些态给出了各异、有时甚至相互矛盾的描述 [1–8]。因此，需要结合互补约束进行综合分析，以区分这些解释。

格点量子色动力学从第一性原理提供有关强子结构的信息，并补充实验研究。尽管基态八重态和十重态谱已得到充分确立，激发态仍较难确定。格点量子色动力学计算是在有限体积的欧几里得时空中进行的，而且夸克质量通常是非物理的。要提取物理信息，需要建立有限体积谱与无限体积散射振幅之间的关系。L¨uscher 的形式体系 [9, 10] 提供了这样的关系，已被广泛用于分析格点 QCD 能谱。

散射测量和格点量子色动力学为这一系统提供了互补约束。无限体积的 πN S_{11} 数据对振幅随能量变化的依赖进行了密集采样，并约束其相移和非弹性度 [11]。然而，这些数据并不能直接确定塑造共振结构的整组耦合道振幅。有限体积格点量子色动力学谱包含耦合道效应，但每个系综通常只有少数几个能级，而且往往是在非物理的 π 介子质量下获得的。因此，联合分析能够约束任何单一输入都无法独立确定的特征。

参考文献 [12] 在 NPHF 框架内提出了一种将无限体积散射唯象学与有限体积格点量子色动力学结果相结合的方法。对于本文所研究的体系，NPHF 给出了有限体积问题的哈密顿量表述，与 L¨uscher 形式主义等价 [13]。参考文献 [12]的分析分为三个阶段。首先，物理π介子质量下的实验散射数据用于约束模型参数。其次，为裸态参数引入线性的π介子质量依赖性。随后，将所得的有限体积谱与不同π介子质量范围内的格点量子色动力学结果进行比较。第三，利用哈密顿量本征矢研究有限体积本征态的模型基底组成。随后，通过污染函数将 NPHF 结果与格点关联矩阵本征矢进行比较。该过程将散射数据与格点谱联系起来，并为共振模型提供互补约束。相关应用包括 N^*(1440) Roper 共振态 [14, 15]、Δ(1232) 和 Δ(1600) [16]，，以及 N^*(1535) 和 N^*(1650) [12, 17]。该方法还被用于研究 Λ(1405) [18, 19] 、粲奇介子

* derek.leinweber@阿德莱德.edu.au
† anthony.thomas@阿德莱德.edu.au
‡ 通讯作者：wujiajun@ucas.ac.cn

D_{s0}^*（2317）和 D_{s1}（2460） [20]。

Ref. [12]中的模型采用了以数据为主导的策略，并未对相互作用顶点全面施加对称性约束。特别是，其裸态并未与夸克模型的自旋组态明确关联。裸态-道耦合比以及道间的 Weinberg–Tomozawa（WT）相互作用也不受 SU(3) 味对称性的约束。因此，基于对称性预期，自旋为-3/2 的三夸克裸态与 $K\Lambda$道之间的耦合应为零，但模型并未施加这一约束。这些选择导致自由参数较多。由于在他们以数据为主导的研究方法中难以对 $K\Sigma$ 道施加约束，耦合道基中也未包含该道。然而，这种设定限制了共振结构与底层夸克层次对称性之间的联系。

在本研究中，我们扩展了对N^*(1535)和 N^*(1650)共振的 NPHF分析。我们构建了一个受对称性约束的模型，其中包含两个裸态和四个耦合道： πN、 ηN、 $K\Lambda$ 和 $K\Sigma$。这两个裸态分别对应于夸克总自旋为 $1/2$和 $3/2$ 的三夸克组态。SU(3) 味对称性和自旋波函数约束了它们的相对耦合强度，包括自旋为-3/2 的裸态与 $K\Lambda$ 之间耦合为零这一约束。与早期以数据为主导的实现相比，这些约束大幅减少了自由参数的数量。按照 Ref. [12], ，我们首先拟合 πN S_{11} 散射数据。随后，我们将模型推广至有限体积和非物理π介子质量的情形，并将所得谱与格点量子色动力学结果进行比较。最后，我们分析本征态组成和散射态污染。通过这些步骤，我们得以约束三夸克裸态和介子-重子道在这两个共振中的作用。

本文的组织结构如下。第二节介绍 NPHF 形式主义，包括无限体积散射方程、有限体积哈密顿量以及对称性约束相互作用。第三节给出对无限体积 πN S_{11} 振幅的拟合，并比较不同的模型情景。第四节讨论有限体积谱及其与格点量子色动力学结果的比较。第五节介绍散射态污染分析。第六节总结我们的结论，并概述进一步的检验。

II. 形式主义

A. 哈密顿量模型

在质心系中，相互作用介子-重子系统的哈密顿量写为

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I, \tag{1}$$

^ ^ 其中， H_0 是自由哈密顿量， H_I 包含相互作用。自由哈密顿量为

$$\hat{H}_0 = \sum_{i=1}^{n} |N_i\rangle\, m_{N_i}^0\, \langle N_i| + \sum_{\alpha} \int d^3\vec{k} \left|\alpha(\vec{k})\right\rangle \left\{\omega_{\alpha_M}(|\vec{k}|) + \omega_{\alpha_B}(|\vec{k}|)\right\} \left\langle\alpha(\vec{k})\right|, \tag{2}$$

其中， N_i 是质量为 $m_{N_i}^0$的第 i个裸态。指标 α标记双粒子道 πN、 ηN、 $K\Lambda$和$K\Sigma$。道 α 中的介子或重子能量为$\omega_{\alpha_{M(B)}}(|\vec{k}|) = \sqrt{m_{\alpha_{M(B)}}^2 + \vec{k}^2}$，其中$m_{\alpha_{M(B)}}$ 表示相应的质量。

相互作用哈密顿量包含图1所示的两个贡献。其形式为

$$\hat{H}_I = \hat{g} + \hat{v}. \tag{3}$$

其中，^g 将裸态与双粒子道耦合起来：

$$\hat{g} = \sum_{\alpha,i} \int d^3\vec{k} \{\, |N_i\rangle\, \bar{G}_{\alpha}^{N_i}(\vec{k}) \left\langle\alpha(\vec{k})\right| + \text{H.c.}\}, \tag{4}$$

其中， $\bar{G}_{\alpha}^{N_i}$是动量依赖顶角函数。第二项^v将道 α 和 β 中的双粒子基底耦合起来：

$$\hat{v} = \sum_{\alpha,\beta} \int d^3\vec{k}\, d^3\vec{k}' \left|\alpha(\vec{k})\right\rangle \bar{V}_{\alpha,\beta}(\vec{k},\vec{k}') \left\langle\beta(\vec{k}')\right|, \tag{5}$$

¯其中， $V_{\alpha\beta}$ 是动量依赖的道-道相互作用。我们采用来自手征微扰理论（χPT）的最低阶相互作用作为 $V_{\alpha\beta}$ 的道结构。

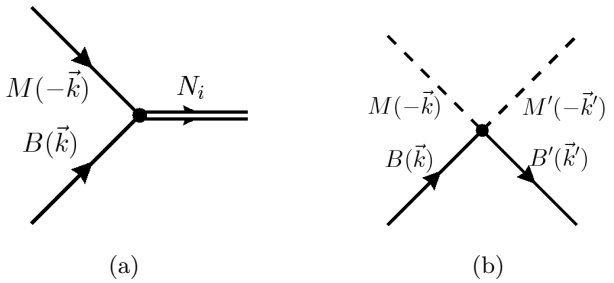

图1. 质心系中裸态–道顶角 $G_{\alpha}^{N_i}(k)$（左）以及道-道相互作用 $V_{\alpha\beta}(k,\ k')$（右）的图示表示。

B. 无限体积形式

耦合道二体 T 矩阵由 Lippmann–Schwinger 方程得到，该方程是贝特–萨尔皮特方程的三维约化形式。进行分波投影后，该方程为

$$T_{\alpha\beta}(k,k';E) = \mathcal{V}_{\alpha\beta}(k,k';E) + \sum_{\gamma} \int q^2\, dq\, \mathcal{V}_{\alpha\gamma}(k,q;E)$$

$$\times \frac{1}{E-\omega_\gamma(q)+i\varepsilon}\,T_{\gamma\beta}(q,k';E)\,, \tag{6}$$

其中，$\omega_\gamma(q)=\omega_{\gamma_M}(q)+\omega_{\gamma_B}(q)$ 是道 γ 中具有相对动量 q的二粒子态的能量。相互作用哈密顿量给出耦合道势

$$\mathcal{V}_{\alpha\beta}(k,k';E)=\sum_i \frac{G_\alpha^{N_i\,\dagger}(k)\,G_\beta^{N_i}(k')}{E-m_{N_i}^0}+V_{\alpha\beta}(k,k')\,, \tag{7}$$

其中 G 和 V 分别是 G 和 V 在式（4、5）中的分波投影。由于只保留 s波贡献，分波投影势与完整势之间仅相差一个 4π因子。在归一化 $\left\langle \alpha(\vec{k})\middle|\beta(\vec{k}')\right\rangle = \delta_{\alpha\beta}\delta(\vec{k}-\vec{k}')$，$S$ 矩阵与 T 矩阵的关系为

$$S_{\alpha\beta}(E)=\delta_{\alpha\beta}-2\pi i\rho_\alpha^{1/2}(E)\,T_{\alpha\beta}(k_\alpha^{\rm on},k_\beta^{\rm on};E)\,\rho_\beta^{1/2}(E)\,, \tag{8}$$

其中，$k_\alpha^{\rm on}(E)$ 是道 α 中的壳上动量。对于开放道，态密度为

$$\rho_\alpha(E)=\frac{\omega_{\alpha_M}(k_\alpha^{\rm on})\,\omega_{\alpha_B}(k_\alpha^{\rm on})}{E}k_\alpha^{\rm on}, \tag{9}$$

非弹性度 η_α 和相移 δ_α 定义为

$$S_{\alpha\alpha}(E)=\eta_\alpha(E)\,e^{2i\delta_\alpha(E)}, \tag{10}$$

通过将振幅延拓到复能量平面，可以确定共振极点的位置。每个道在其双粒子阈值处都有一个分支点，并伴有一条右手切割。跨越该切割会连接两个黎曼片。对于 n 个耦合道，其 2^n 个黎曼片由一个有序符号向量 (±、±、.....、±) 标记。这里的道次序为 (πN、ηN、$K\Lambda$、$K\Sigma$)。加号 (+) 表示道动量的物理分支，而减号 (-) 表示其跨越相应切割后的延拓。有限宽度共振极点通常位于至少一个开放道所对应的非物理黎曼片上。令 $A^{(\rm RS)}_{N_i}$、$_{N_j}$ 表示指定黎曼片上的缀饰裸态传播子矩阵。极点能量是其逆矩阵的零点：

$$\det\left[\left(A^{(\rm RS)}(E_{\rm pole})\right)^{-1}\right]=0. \tag{11}$$

C. 有限体积哈密顿量

对于边长为 L 、采用周期性边界条件的立方盒，动量量子化为

$$\vec{k}_n=\frac{2\pi}{L}\vec{n},\vec{n}=(n_x,n_y,n_z)\,, \tag{12}$$

其中 $\vec{n}$ 是一个三维整数向量，满足n_x，n_y，$n_z\in\mathbb{Z}$。于是，无限体积积分被替换为

$$\int d^3k\,f(\vec{k})\to\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^3}f\left(\frac{2\pi\vec{n}}{L}\right). \tag{13}$$

在本文采用的 s 波截断中，具有相同 $n=\vec{n}^{\,2}$ 值的动量模可以归为一组。因此，三维求和可化简为

$$\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^3}\to\sum_{n\in\mathbb{N}_0}C_3(n)\,, \tag{14}$$

其中，$C_3(n)$ 是平方范数为 $n=n_x^2+n_y^2+n_z^2$ 的整数向量的数量，标量壳层动量为 $k_n=2\pi\sqrt{n}/L$。例如，$C_3(0)=1$、$C_3(2)=12$ 和 $C_3(7)=0$。

我们采用有限程正则化（FRR）来调节积分和求和。在裸态顶点和双粒子相互作用中均加入调节器 $u(k)$，以抑制高动量贡献。下一小节将具体说明顶点和双粒子相互作用。有限体积哈密顿量在形式上是无限维的。由于 $u(k)$ 会抑制高动量，在数值计算中可以截断矩阵。哈密顿量矩阵中保留的最大动量记为 $k_{n_{\rm max}}$。我们通过要求本征值在数值上收敛来确定该截断值。具体而言，$k_{n_{\rm max}}$ 由条件$u(k_{n_{\rm max}})=u_{\rm min}$确定。我们取 $u_{\rm min}=10^{-2}$。对于偶极形状因子，对应的最大动量为 $k_{n_{\rm max}}=\Lambda\sqrt{u^{-1/2}-1}$，其中 $u=10^{-2}$。

我们将裸模型基底态记为 $|B_i\rangle$。在双裸态情形中，$(|B_1\rangle,|B_2\rangle)=(|N_2\rangle,|N_4\rangle)$。下方矩阵展示了这一双态情形。单裸态情景可通过删除 B_2 行和列得到，而情景 I 仅包含介子-重子块。在此基底中，式（2）中的自由哈密顿量变为

$$\begin{aligned}H_0=\mathrm{diag}\,\{&m_{B_1}^0,m_{B_2}^0,\omega_{\pi N}(0),\omega_{\eta N}(0),\omega_{K\Lambda}(0),\\&\omega_{K\Sigma}(0),\omega_{\pi N}(k_1),\omega_{\eta N}(k_1),\omega_{K\Lambda}(k_1),\omega_{K\Sigma}(k_1),\cdots,\\&\omega_{\pi N}(k_{n_{\rm max}}),\omega_{\eta N}(k_{n_{\rm max}}),\omega_{K\Lambda}(k_{n_{\rm max}}),\omega_{K\Sigma}(k_{n_{\rm max}})\,\}.\end{aligned} \tag{15}$$

式（G 和 V 式（7）中的相互作用 G 和 V 在有限体积中变为。相应关系为 [13]

$$\begin{aligned}\tilde{G}_\alpha^{B_i}(k_n)&=\sqrt{\frac{C_3(n)}{4\pi}}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^{\frac{3}{2}}G_\alpha^{B_i}(k_n)\,,\\ \tilde{V}_{\alpha\beta}(k_n,k_{n'})&=\frac{\sqrt{C_3(n)\,C_3(n')}}{4\pi}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3V_{\alpha\beta}(k_n,k_{n'})\,,\end{aligned} \tag{16}$$

其中，因子 4π 来自纯 s波相互作用的分波投影。

有限体积相互作用哈密顿量随后可写为

$$H_I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tilde{G}^{B_1}_{\pi N}(0) & \tilde{G}^{B_1}_{\eta N}(0) & \tilde{G}^{B_1}_{K\Lambda}(0) & \tilde{G}^{B_1}_{K\Sigma}(0) & \tilde{G}^{B_1}_{\pi N}(k_1) & \cdots \\ 0 & 0 & \tilde{G}^{B_2}_{\pi N}(0) & \tilde{G}^{B_2}_{\eta N}(0) & \tilde{G}^{B_2}_{K\Lambda}(0) & \tilde{G}^{B_2}_{K\Sigma}(0) & \tilde{G}^{B_2}_{\pi N}(k_1) & \cdots \\ \tilde{G}^{B_1}_{\pi N}(0) & \tilde{G}^{B_2}_{\pi N}(0) & \tilde{V}_{\pi N,\,\pi N}(0,\,0) & \tilde{V}_{\pi N,\,\eta N}(0,\,0) & \tilde{V}_{\pi N,\,K\Lambda}(0,\,0) & \tilde{V}_{\pi N,\,K\Sigma}(0,\,0) & \tilde{V}_{\pi N,\pi N}(0,\,k_1) & \cdots \\ \tilde{G}^{B_1}_{\eta N}(0) & \tilde{G}^{B_2}_{\eta N}(0) & \tilde{V}_{\eta N,\pi N}(0,0) & \tilde{V}_{\eta N\,\eta N}(0,\,0) & \tilde{V}_{\eta N,K\Lambda}(0,\,0) & \tilde{V}_{\eta N,K\Sigma}(0,\,0) & \tilde{V}_{\eta N\,\pi N}(0,k_1) & \cdots \\ \tilde{G}^{B_1}_{K\Lambda}(0) & \tilde{G}^{B_2}_{K\Lambda}(0) & \tilde{V}_{K\Lambda,\pi N}(0,0) & \tilde{V}_{K\Lambda\,\eta N}(0,\,0) & \tilde{V}_{K\Lambda,\,K\Lambda}(0,\,0) & \tilde{V}_{K\Lambda,\,K\Sigma}(0,\,0) & \tilde{V}_{K\Lambda,\,\pi N}(0,\,k_1) & \cdots \\ \tilde{G}^{B_1}_{K\Sigma}(0) & \tilde{G}^{B_2}_{K\Sigma}(0) & \tilde{V}_{K\Sigma,\,\pi N}(0,\,0) & \tilde{V}_{K\Sigma,\,\eta N}(0,\,0) & \tilde{V}_{K\Sigma,\,K\Lambda}(0,\,0) & \tilde{V}_{K\Sigma,\,K\Sigma}(0,\,0) & \tilde{V}_{K\Sigma,\pi N}(0,k_1) & \cdots \\ \tilde{G}^{B_1}_{\pi N}(k_1) & \tilde{G}^{B_2}_{\pi N}(k_1) & \tilde{V}_{\pi N,\pi N}(k_1,0) & \tilde{V}_{\pi N,\,\eta N}(k_1,\,0) & \tilde{V}_{\pi N,\,K\Lambda}(k_1,\,0) & \tilde{V}_{\pi N,\,K\Sigma}(k_1,\,0) & \tilde{V}_{\pi N,\pi N}(k_1,k_1) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{17}$$

在当前参数化中，所有耦合常数均为实数，因此所示矩阵是对称矩阵。$H = H_0 + H_I$ 的本征值给出离散的有限体积能级，并满足 $\det(H - E_i\mathbb{I}) = 0$。相应的本征向量给出重叠 $\langle B_j|E_i\rangle$。它们的平方模量量化了所选模型基底中 $|E_i\rangle$ 的裸态分量。

D. 相互作用顶点

直接的双粒子相互作用 $V_{\alpha\beta}(k,\ k')$ 基于手征微扰理论的 Weinberg–Tomozawa 领先阶项 [21]:

$$V_{\alpha\beta}(k,k') = -C_{\alpha\beta}\frac{g_0}{8\pi^2 f_\alpha f_\beta}u_\alpha(k)\,u_\beta(k') \times \frac{\omega_{\alpha_M}(k)+\omega_{\beta_M}(k')}{\sqrt{2\omega_{\alpha_M}(k)}\sqrt{2\omega_{\beta_M}(k')}}\,. \tag{18}$$

其中，f_α 是道中介子的衰变常数 α。我们取 $f_\pi = 92.4$ 兆电子伏，$f_K = 1.2f_\pi$，以及 $f_\eta = 1.3f_\pi$ [4]。SU(3) 克莱布什–戈尔丹系数 $C_{\alpha\beta}$ 列于表 I。整体道-道耦合 g_0 通过拟合数据确定。求解 Lippmann–Schwinger 方程时，我们采用壳上处方 [22]。WT 顶点中的因子 $\omega_{\alpha_M}(k) + \omega_{\beta_M}(k')$ 在积分或求和动量处显式计算。

表 I. $I = 1/2$ 扇区中 s波介子–重子相互作用的 SU(3) 克莱布什–戈尔丹系数 $C_{\alpha\beta}$ [23]。

$C_{\alpha\beta}$	πN	ηN	$K\Lambda$	$K\Sigma$
πN	2	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
ηN	0	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
$K\Lambda$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	0
$K\Sigma$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	2

我们通过插入有限程正则化函数来调节紫外行为 $u(k)$，见方程（18）。在幂计数区域内，有限程正则化函数与维数正则化的手征微扰理论等价，前提是匹配低能系数 [24]。它还为源提供了有限的空间分布。我们为每个道选择一个偶极正则化函数：

$$u_\alpha(k) = (1 + k^2/\Lambda_\alpha^2)^{-2}, \tag{19}$$

其中，Λ_α 是道 α的正则化尺度。将模型拟合至实验数据后，其余参数隐式地依赖于正则化尺度 Λ_α。因此，它们的拟合值可能随正则化方案而变化。特别是，g_0 取决于 Λ_α，不必保持为 1。这种依赖动量的势是伪可分离的：它是有限个可分离项之和。因此，Lippmann–Schwinger 方程可以用圈积分矩阵的有限矩阵以解析方式求解。

裸态 N_i 与双粒子道 α 之间的相互作用由标准的 s 波参数化描述。受重子 χPT的启发，我们将顶角写为 [13, 17]

$$G_\alpha^{N_i}(k) = A_\alpha^{N_i}\frac{\sqrt{3}g_{N_i}}{2\pi f_\alpha}\sqrt{\omega_M(k)}\,u_{N_i}(k)\,, \tag{20}$$

其中，g_{N_i} 是裸态 N_i与赝标量八重态介子-重子道之间的总耦合，ω_M 是介子的能量。系数 $A_\alpha^{N_i}$确定了与道 α的相对耦合。若仅施加 SU(3) 味对称性，则这些系数对于 N^*(1535)和 N^*(1650)相同。$8 \to 8 \otimes 8$ 跃迁包含对称耦合 D 和反对称耦合 F。二者的相对强度由$\alpha = F/(D+F)$参数化。我们采用夸克模型的领头阶取值 $\alpha = 0.4$ [25, 26]。由此得到的道系数为

$$A_\alpha^{N_i} = (1, 1/5, -3/5, -1/5). \tag{21}$$

仅凭 SU(3)味对称性无法区分这两个核子激发态。对于最低的 $J^P = \frac{1}{2}^-$ 激发态，三夸克轨道角动量为 P 波，而夸克总自旋可以是 $1/2$ 或 $3/2$。因此，自旋波函数可能为这两个 N^* 态产生不同的介子-重子耦合。在领先阶，夸克总自旋-3/2 态不发生耦合

到 $K\Lambda$ 道 [3, 5]。这说明了自旋结构在耦合模式中的作用。为了将这一点纳入依赖关系，我们构造了两个裸态的完整波函数。我们用 $|N_{2s+1}\rangle$ 表示它们，其中 s 是夸克总自旋。它们的波函数为

$$|N_2\rangle = \sum_{L_z+S_z=J_z} \left\langle 1L_z, \frac{1}{2}S_z \middle| \frac{1}{2}J_z \right\rangle \times \frac{1}{2}[(\phi^\rho \chi^\lambda_{S_z} + \phi^\lambda \chi^\rho_{S_z}) \Psi^\rho_{11L_z} + (\phi^\rho \chi^\rho_{S_z} - \phi^\lambda \chi^\lambda_{S_z}) \Psi^\lambda_{11L_z}], \tag{22}$$

$$|N_4\rangle = \sum_{L_z+S_z=J_z} \left\langle 1L_z, \frac{3}{2}S_z \middle| \frac{1}{2}J_z \right\rangle \times \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi^\rho \chi^s_{S_z} \Psi^\rho_{11L_z} + \phi^\lambda \chi^s_{S_z} \Psi^\lambda_{11L_z}], \tag{23}$$

其中，ϕ、χ 和 Ψ 分别表示味、自旋和空间波函数。标签 ρ 和 λ 分别表示在交换前两个夸克时呈反对称和对称的分量。上标 s 表示完全对称分量。基态八重态重子 $|B\rangle$ 的波函数为

$$|B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi^\rho \chi^\rho + \phi^\lambda \chi^\lambda) \Psi^s_{000}\,. \tag{24}$$

系数 $A^{N_i}_\alpha$ 由初态和末态之间味-自旋算符的矩阵元得出。在手征夸克模型中，介子-夸克耦合由轴流相互作用描述。系数 $A^{N_i}_\alpha$ 与文献 [3] 中定义的因子 ζ_m 成正比：

$$A^{N_i}_\alpha \propto \zeta_m = \sum_\gamma \left\langle \begin{matrix} (p_f,q_f) & (p,q) \\ I_f, Y_f & I, Y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (p_i,q_i)_\gamma \\ I_i, Y_i \end{matrix} \right\rangle \alpha_{m,\gamma}, \tag{25}$$

其中，γ 标记表示的重数 (p,q)。在本例中，它用于区分重子波函数的各个分量。式（25）中的 SU(3) 等标量因子取决于味多重态 (p,q)，以及初态和末态重子的同位旋 I 和超荷 Y。它还取决于发射的介子。因子 $\alpha_{m,\gamma}$ 包含自旋和角动量依赖关系，详见文献 [3]。

将两个裸态到介子-重子道的跃迁代入式（25），可得表II中列出的系数。夸克对产生模型给出了类似的耦合模式，表明这些比值并非某一种衰变模型所特有。特别是，$A^{N_4}_{K\Lambda} = 0$，这与上文的对称性论证一致 [5]。

表 II. 两种夸克自旋构型对应的裸态-道系数 $A^{N_i}_\alpha$

$A^{N_i}_\alpha$	πN	ηN	$K\Lambda$	$K\Sigma$
N_2	$\frac{\sqrt{2/3}}{3}$	$\frac{1}{3\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{6}}$	$\frac{1}{6\sqrt{6}}$
N_4	$\frac{1}{3\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{3\sqrt{6}}$	0	$-\frac{\sqrt{2/3}}{3}$

对于两种相互作用，V 和 G，拟合整体耦合常数和正则化尺度。它们在各道之间的相对强度由 $C_{\alpha\beta}$ 和 $A^{N_i}_\alpha$ 固定。这大幅减少了自由参数的数量。完整模型对于 V 包含一个耦合常数和四个正则化尺度。两个裸态为 G 增加了两个耦合常数、两个裸质量和两个正则化尺度。

III. πN S11 相移和非弹性的无限体积拟合

我们首先通过对 πN S_{11} 分波振幅进行全局拟合来约束模型参数。

本研究聚焦于两个核子共振，N^*(1535) 和 N^*(1650)。在传统夸克模型中，它们对应于最低的两个 P 波组态，分别记为上一节中的 $|N_2\rangle$ 和 $|N_4\rangle$。这两个裸态组态嵌入于由 πN、ηN、$K\Lambda$和 $K\Sigma$构成的耦合道系统中。它们的顶角满足上文推导的对称性关系，包括 $|N_4\rangle$–$K\Lambda$ 耦合为零。我们检验这两个共振能否由裸态与这些介子-重子道之间的相互作用来描述。实验衰变数据表明，N^*(1535) 与 ηN [7]有很强的耦合。对其耦合常数的唯象分析也显示其含有较大的 $s\bar{s}$成分 [27],，相关反应分析亦得出类似结论 [28–32]。这些发现促使我们明确处理耦合道效应。

此外，手征有效场论研究表明，通过耦合道再散射可以动态地产生一个 N^*(1535) 极点，而无需引入显式的裸夸克态 [4, 6]。受这些发现的启发，我们在第 II 节的形式体系内构建了四种情景。我们拟合 πN S_{11} 偏波振幅，以检验哪些物理诠释与实验数据相一致。

四种情形如下：I. 纳入四个介子-重子道，不含裸态；II. 纳入两个裸态，但不含道与道之间的直接相互作用；III. 纳入一个裸态和全部四个道。裸态被设定为不具有显式自旋结构，$|N_2\rangle$，或具有 $|N_4\rangle$；IV. 纳入两个裸态和全部四个道，并采用不同的混合参数 ξ 和裸质量排序选择-

表 III. 所有情景的拟合参数、 χ^2/自由度和极点位置。情景 I 包含四个耦合道，不含裸态。其 χ^2/自由度过大，未予列出。情景 II 包含两个裸态，但没有直接的道-道相互作用。情景 III 包含一个裸态和四个耦合道。在情景 III 中，情形 (a) 使用 $A_\alpha^{N_i}$，取自式（21）；情形 (b) 和 (c) 分别使用表II的第一行和第二行。情景 IV 包含两个裸态和四个耦合道。情形 (A) 使用固定的夸克模型混合 $\xi = -0.53$，而 $\xi = 0$ 用于情形 (B) 和 (C)。由于存在混合，$m^0_{N_2}$ 行和$m^0_{N_4}$ 行中带星号前缀的条目分别表示拟合的物理点裸质量本征值 m_{B_1} 和 m_{B_2}。情形 (B) 和 (C) 表示保留的两个未混合局部解。从上到下，三行极点分别对应黎曼片−+++、−−++和−−−+，道次序为（πN， ηN， $K\Lambda$， $K\Sigma$）。带下划线的条目位于拟合边界，因此不标示误差。

参数	I	II	III			IV		
			a	b	c	A	B	C
g_0	0.519 ± 0.0034	-	0.713 ± 0.0028	0.695 ± 0.0047	1.664 ± 0.0082	0.713 ± 0.0070	0.711 ± 0.0067	0.711 ± 0.0060
$\Lambda_{\pi N}$/吉电子伏特	0.574 ± 0.0062	-	0.404 ± 0.0048	0.445 ± 0.0038	0.433 ± 0.0017	0.435 ± 0.0041	0.419 ± 0.0044	0.444 ± 0.0038
$\Lambda_{\eta N}$/吉电子伏特	1.600	-	1.600	1.596 ± 0.070	0.819 ± 0.0090	0.998 ± 0.066	1.480 ± 0.046	0.431 ± 0.019
$\Lambda_{K\Lambda}$/吉电子伏特	1.600	-	0.723 ± 0.036	0.400	0.777 ± 0.020	0.400	0.400	0.400
$\Lambda_{K\Sigma}$/吉电子伏特	1.600	-	1.600	1.600	1.600	1.376 ± 0.046	1.466 ± 0.024	1.249 ± 0.023
$m^0_{N_2}$/吉电子伏特	-	1.649 ± 0.0022	1.762 ± 0.012	1.710 ± 0.0026	-	$*1.750$	1.750	1.905 ± 0.016
$m^0_{N_4}$/吉电子伏特	-	1.993 ± 0.0092	-	-	1.400	$*1.864 \pm 0.013$	1.866 ± 0.034	1.750
g_{N_2}	-	3.018 ± 0.011	0.265 ± 0.0090	0.913 ± 0.013	-	0.837 ± 0.016	0.972 ± 0.017	0.626 ± 0.010
g_{N_4}	-	0.930 ± 0.013	-	-	4.000	0.532 ± 0.071	0.318 ± 0.032	0.929 ± 0.037
Λ_{N_2}/吉电子伏特	-	0.400	1.053 ± 0.053	0.930 ± 0.015	-	1.243 ± 0.034	0.991 ± 0.015	1.600
Λ_{N_4}/吉电子伏特	-	1.600	-	-	0.637 ± 0.0021	1.375 ± 0.14	1.600	1.269 ± 0.049
χ^2/自由度	-	67.948	8.148	16.811	44.776	6.133	6.785	5.491
极点/吉电子伏特	-	$1.075 - 0.195$i	$0.997 - 0.153$i	$1.003 - 0.170$i	$1.032 - 0.145$i	$1.003 - 0.167$i	$1.000 - 0.162$i	$1.004 - 0.170$i
	-	-	$1.466 - 0.100$i	$1.438 - 0.068$i	-	$1.497 - 0.066$i	$1.476 - 0.086$i	$1.529 - 0.055$i
	-	$1.674 - 0.037$i	$1.696 - 0.039$i	$1.700 - 0.033$i	$1.708 - 0.050$i	$1.687 - 0.061$i	$1.684 - 0.048$i	$1.680 - 0.091$i

ing.

我们拟合 SAID 分析中 1100–1750 兆电子伏范围内的 πN S_{11} 部分波振幅数据 [11]。实部和虚部各包含 40 个数据点。我们通过最小化 $\chi^2 = \chi^2_{\mathrm{Re}T} + \chi^2_{\mathrm{Im}T}$ 来确定模型参数，其中两项分别是 T 矩阵实部和虚部的贡献。随后将所得相移和非弹性度与 SAID 数值进行比较。对于保留的拟合，我们在下半平面的相关非物理黎曼面上搜索，并将提取出的极点位置与粒子数据组（PDG）的数值进行比较。

表III 列出了所有情景的最佳拟合参数、约化 χ^2 值以及极点位置。情景 III(a) 和 IV 的拟合同时包含裸态贡献和直接的道-道相互作用，因此给出了低得多的 χ^2/自由度值。这一改进也伴随着更多的参数自由度。因此，仅凭散射拟合无法确定首选的动力学机制。特别是，情景 I 和 II 与数据存在显著偏离。

在情景 I 中，道-道相互作用能够重现 πN 阈值附近的数据，如图2中的蓝色虚线所示。这是领先阶手征相互作用预计最为可靠的区域。相比之下，裸态 s-道交换在情景 II 中重现了 T 矩阵的宽泛形状，但无法重现其细致的峰和谷。因此，裸态交换解释了宽泛的共振结构，而道-道相互作用则是重现其细致

能量依赖性。

情景 III 包含一个显式裸态。第二个共振极点无需引入第二个显式裸态，而是由该情景中的介子—重子动力学生成。我们考虑三种裸态指派。在情形 (a) 中，不考虑自旋结构， $A_\alpha^{N_i}$由方程（21）中的 SU(3)系数给出。在情形 (b) 中，裸态被认定为 $|N_2\rangle$，而 $A_\alpha^{N_i}$取自表II的第一行。情形 (c) 则使用第二行中的$|N_4\rangle$ 系数。情形 (b) 和 (c) 仅保留两种自旋构型中的一种。它们的拟合效果远不如情景 III(a)，因此不再进一步讨论。情景 III(a) 的结果以图2中的棕色点划线表示。

尽管这一单裸态模型优于情景 II，但仍存在两个明显的差异。在 1.5 至 1.6 吉电子伏特之间，测得的T 矩阵的实部和虚部出现了显著的凹陷。情景 III(a) 定性地再现了这一结构，但低估了其凹陷深度。在 1.6 至 1.7 吉电子伏特之间，实部中的峰值也与数据不符。相应地，1.5 至 1.6 吉电子伏特范围内的相移拟合不佳，而 1.6 至 1.7 吉电子伏特范围内的非弹性度则偏离数据。加入第二裸态后，这些特征均得到显著改善。

情景 IV 包含裸态和全部四个耦合道。态 $|N_2\rangle$ 和 $|N_4\rangle$ 具有相同的守恒量子数，因此可以发生混合。在传统夸克模型中，这种混合由角度 θ_S描述。按照我们的定义， $\xi = \sin\theta_S$，其中 $\sqrt{1-\xi^2} = \cos\theta_S$

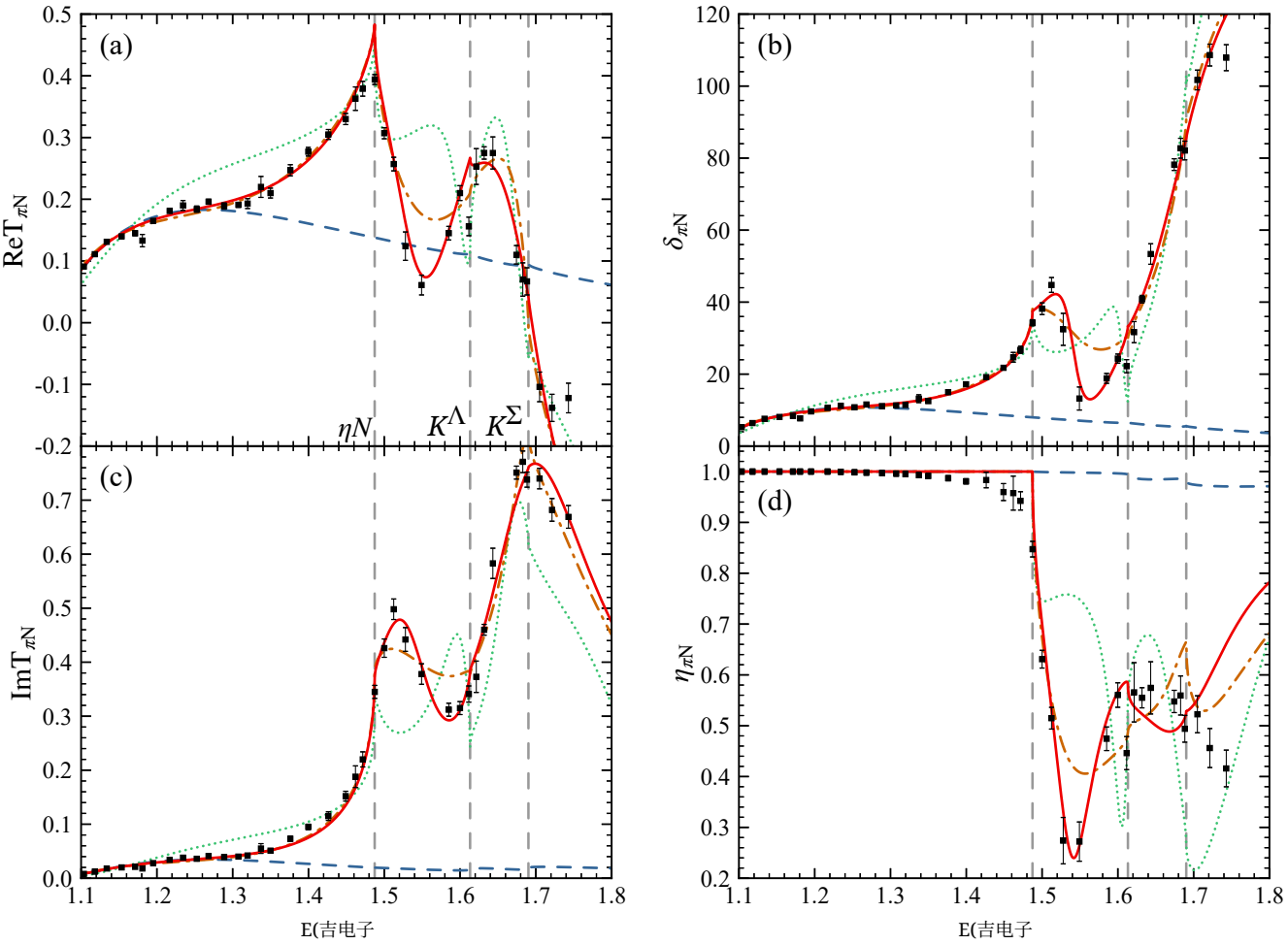

图2. T 矩阵的实部 (a)、相移 (b)、 T 矩阵的虚部 (c) 和非弹性度 (d)。带误差棒的黑色方块来自 [11]SAID分析 ηN、 $K\Lambda$和 $K\Sigma$ 阈值。红色实线表示情景 IV(C) 的最佳拟合。蓝色虚线表示情景 I。绿色点线表示情景 II。棕色点划线表示情景 III(a)。

在我们的约定下。对裸态质量矩阵进行对角化，得到混合裸质量本征态 $|B_1\rangle$ 和 $|B_2\rangle$，其本征值分别为 m_{B_1} 和 m_{B_2}。对于非零的 ξ，道耦合常数是两个夸克模型构型的耦合常数的线性组合：

$$\begin{aligned} g_{B_1,\alpha} &= \sqrt{1-\xi^2}\, A_\alpha^{N_2}\, g_{N_2} + \xi\, A_\alpha^{N_4}\, g_{N_4}, \\ g_{B_2,\alpha} &= -\xi\, A_\alpha^{N_2}\, g_{N_2} + \sqrt{1-\xi^2}\, A_\alpha^{N_4}\, g_{N_4}, \end{aligned} \tag{26}$$

其中 $A_\alpha^{N_i}$是表II中的对称性系数，且g_{N_i} 是式（20）中定义的未混合总耦合常数。

这里我们介绍情景 IV 中的三个变体。首先，采用参考文献 [33] 给出的夸克模型结果 $|\theta_S| \simeq 32^\circ$ （对应于 $|\xi| \simeq 0.53$）得到情景 IV(A)。由于该夸克模型在未考虑耦合道贡献的情况下拟合了物理核子共振态，这种混合可能源于强子耦合道效应。因此，在夸克-胶子层次上，我们可以设定 $\xi = 0$，从而得到一个 $\chi^2/$ 较小的拟合结果，但裸态质量排序发生逆转，即 $m^0_{N_2} > m^0_{N_4}$；我们将其称为情景 IV(C)。在传统夸克模型中，人们预期 $m^0_{N_2} < m^0_{N_4}$；施加这一约束后可以得到一个类似的解，我们称之为情景 IV(B)。

如表III 和图3所示，情景 IV 的三个子情形都得到小得多的 χ^2/自由度值（情形 (A)、(B) 和 (C) 分别为 6。133、6。785 和 5。491），并且与数据的符合程度优于前述情景，同时具有一致的道-道耦合$g_0 \approx 0.71$。情景 TIV(A) 和 IV(B) 的矩阵曲线几乎完全相同（图3）。情形 (A) 和 (B) 的局限在于，1 $T_{\pi N}$ .52 至 1 $\delta_{\pi N}$ .60 吉电子伏特之间 Re的凹陷以及 $K\Sigma$都无法得到很好的描述，而情景 IV(C) 则有明显改善。然而，在高于 χ^2/阈值的能量处，情景 IV(C) 对非弹性度的描述不佳，这表明在更高能量下，额外的单粒子道和双粒子道发挥着重要作用。总体而言，情景 IV(C) 达到了最低的 $= 5.491$自由度。

参考文献 [34]中的解来自全局分波分析。我们在此将其用作基准

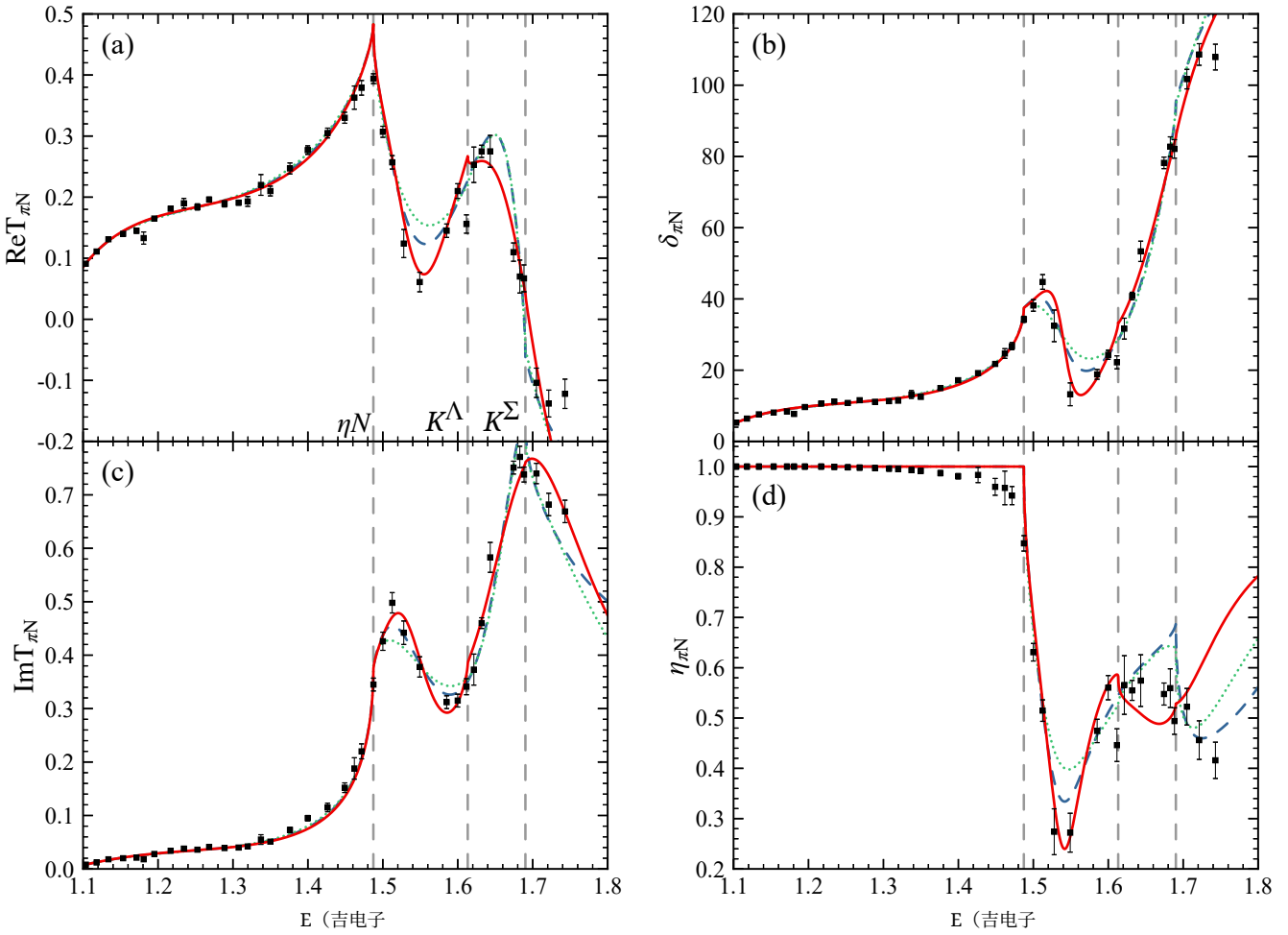

图 3. T 矩阵 (a)、相移 (b)、 T 矩阵 (c) 的虚部以及非弹性度 (d)。蓝色虚线表示情景 IV(A)。绿色点线表示情景 IV(B)。其余符号说明见图 2。

以描述 πN 振幅的能量依赖性。对本文所考虑的振幅数据点进行评估后，基准解给出的 χ^2 值范围为 208 至 293，而情景 IV(C) 在 69 个自由度下得到 $\chi^2 \simeq 379$ 。与$\chi^2 \simeq 208$的基准解相比，仅四个数据点便几乎解释了 171 的全部净差值。其中约 88 来自 ηN 阈值处的数据点，这可能反映了遗漏 $\pi\pi N$ 道的影响。 $K\Lambda$阈值附近的两个数据点贡献约 38，而最高能量处的数据点贡献 45。在 $K\Lambda$阈值附近，我们的曲线紧贴两个数据点中的一个，却未能拟合另一个；基准曲线则从两者之间穿过。最后，在本文考察的最高能量范围内，可以预期会有新的贡献，包括高质量共振态的影响。因此，情景 IV(C) 能够令人满意地描述 S_{11} 道散射数据的整体能量依赖性。

现在我们转而讨论拟合得到的裸质量。表 III中，情景 IV(A)–IV(C) 下拟合得到的裸质量位于 1。75–1。91 吉电子伏特范围内，其中较轻的裸态位于 1.750 吉电子伏特。实际上，数据驱动拟合始终要求低质量态具有较大的质量，有时甚至直接将其推至 2 GeV；因此，我们施加了 1.750 GeV 的上限。无论如何，这些未经修饰的裸质量都高于夸克模型对最低 P 波核子激发态的典型估计（~ 1.50–1.65 GeV） [3, 5, 35, 36]。在 NPHF 中，这种向上的偏移是耦合道修饰的直接结果：来自πN、 ηN、 $K\Lambda$和 $K\Sigma$道的色散自能环图产生了显著的负质量偏移，因此需要更大的裸质量，才能使修饰后的共振极点位于 1.535 和 1.650 GeV 附近。我们还进行了额外测试，将较低的裸质量固定为 1.6 GeV，以符合组成夸克模型的预期。如附录 A 所示，情景 IV(A) 和 IV(B) 的无限体积拟合急剧恶化（χ^2/自由度 $= 17.555$ 和 29.487），而情景 IV(C) 仍能准确描述散射数据（χ^2/自由度 $= 6.908$）。这些测试表明，即使施加较低的裸质量，当前数据仍倾向于情景 IV(C)，即 $m^0_{N_2} > m^0_{N_4}$。

在夸克模型中，总自旋为 1/2的基态重子八重态比自旋为-3/2的重子十重态更轻。这种质量差异源于色磁自旋-自旋相互作用：该相互作用对 $S = 1/2$ 具有吸引作用，对 $S = 3/2$则具有排斥作用；当这种相互作用占主导时，高自旋重子会更重。对于本文考察的负宇称共振态，自旋-轨道相互作用和张量相互作用也会产生影响，二者都可能降低 $|N_4\rangle$的质量，从而抵消自旋-自旋分裂。在标准单胶子交换模型中，这些修正通常太弱，不足以颠倒质量排序。

另一方面，文献 [37] 中的格点研究所得到的相对论性核子波函数支持这一反转的层级结构。在第 V A节所讨论的算符指派下，与 $|N_2\rangle$ 相关的态在其下方的 s-波狄拉克分量中有一个额外的节点，而与 $|N_4\rangle$ 相关的态则没有。对于 $|N_2\rangle$而言，这个节点使概率密度在禁闭势中移向更大的半径，并提高了能量；而 $|N_4\rangle$ 则没有相应的能量上移。因此， $|N_2\rangle$ 构型相对于 $|N_4\rangle$ 具有更高的能量，这为我们在散射拟合中发现的排序 $m^0_{N_2} > m^0_{N_4}$提供了定性解释。

我们还考察了所有情景下的极点位置。黎曼片由道次序（±、 ±、 ±、 ±）中的四个符号（±、 ±、 ±、 ±）标记。对于每个道， +表示该道动量的物理分支，而 − 表示其跨越相应右手切割后的延拓。在情景 II–IV 中，约为 $1.00 - 0.17$i 吉电子伏特的亚阈值极点出现在-+++ 片上，与文献 [38]中的报道类似。在 --++ 片和 ---+ 片上，情景 III(a)、III(b) 和 IV(A)–IV(C) 中的极点分别对应于 N^*(1535) 和 N^*(1650) 共振。情景 IV(A、B) 将 N^*(1535) 极点置于略低的质量（$\sim 1.500 - 0.075$i 吉电子伏特）处，而情景 IV(C) 给出的极点位置为 $1.529 - 0.055$ i 吉电子伏特，与 PDG 值 [7] 高度一致。对于 N^*(1650)，三个情景均给出了相近的极点位置，并且与 PDG 值一致。我们还提取了两个共振在每个道中的极点留数。在纳入相空间因子并对保留的道进行归一化后，所得的衰变宽度分数与 PDG 汇编数据 [7]大体相当。例如，情景 IV(C) 对有序的 N^*(1535) 给出 (0.45，0.55，0，0)。
道（πN、 ηN、 $K\Lambda$、 $K\Sigma$），以及（0．78、0．11、 0．11、 0），对应于 N^*(1650)。此外，在情景 IV(B、C) 中，极点轨迹分析将 N^*(1535) 主要与较轻的裸态联系起来，而将 N^*(1650) 主要与较重的裸态联系起来。因此，在情景 IV(C) 中， N^*(1535) 主要对应于自旋-3/2 裸态构型，其与 $K\Lambda$ 的耦合受到抑制；而 N^*(1650) 主要对应于自旋-1/2 裸态，并与 $K\Lambda$ 具有更强的耦合。这一模式与参考文献 [7]，中总结的唯象学一致，但在情景 IV(B) 中则完全相反。在情景 IV(A) 中，混合机制掩盖了这种对应关系。

为进一步检验非对角耦合道跃迁

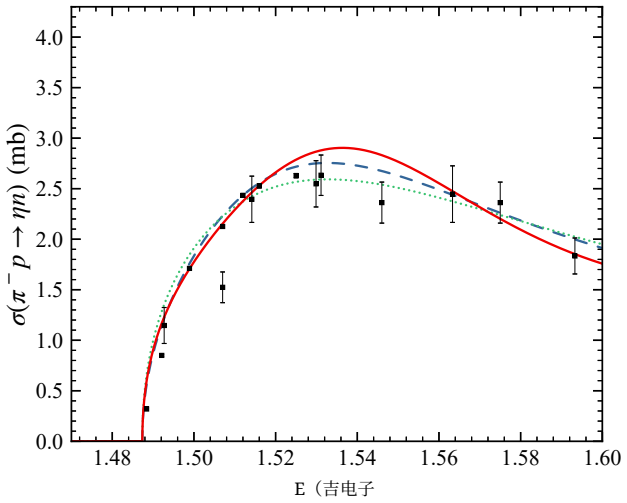

图 4。总截面 $\sigma(\pi^- p \to \eta n)$ 缩放了 1/1.2 倍，以计及三体 $\pi\pi N$ 效应 [39]。蓝色虚线、绿色点线和红色实线分别表示情景 IV(A)、情景 IV(B) 和情景 IV(C)。实验数据（黑色方块）取自参考文献 [40]，中的汇编，原始测量见参考文献 [41–44]。

振幅（其受到 SU(3) 味对称性和夸克自旋对称性的约束），我们使用仅由弹性散射确定的参数，计算 N^*(1535) 附近的总非弹性截面 $\sigma(\pi^- p \to \eta n)$。在 1.60 吉电子伏特以下的 s 波近似中，截面与 $I = 1/2$ 跃迁矩阵 T 的关系为

$$\sigma(\pi^- p \to \eta n) = \frac{2}{3}\frac{4\pi^3}{\left(k^{\rm on}_{\pi N}\right)^2}\rho_{\pi N}(E)\,\rho_{\eta N}(E) \times \left|T_{\pi N,\eta N}(k^{\rm on}_{\pi N}, k^{\rm on}_{\eta N}; E)\right|^2 , \tag{27}$$

其中因子 2/3 源自同位旋克莱布什–戈丹系数。由于我们的二体耦合道基底省略了三体 $\pi\pi N$ 道，在 ηN 与 $K\Lambda$ 阈值（$1.487 < E < 1.611$ 吉电子伏特）之间，二体幺正性会将全部非弹性通量$1 - \eta^2_{\pi N}$导入 ηN 末态。正如 Ciepl´y 和 Smejkal [39, 40], 所指出的，SAID πN 在 $\sqrt{s} = 1540$兆电子伏附近的非弹性度所隐含的总反应截面，比实测的 $\pi^- p \to \eta n$截面峰值大约高出 20%，这是由于缺失了 $\pi\pi N$ 衰变通量。根据文献 [39], ，我们通过将计算得到的二体截面除以经验因子 1.2，来计及这种三体通量稀释。

图 4 比较了情景 IV(A)、情景 IV(B) 和情景 IV(C) 的标度截面 σ（$\pi^- p \to \eta n$）/1.2 与参考文献 [40] 中汇编的实验数据进行比较。 [41–44]。在不引入任何额外自由参数的情况下，三种情景都再现了 $E \approx 1.487$ 吉电子伏特处尖锐的阈值起始，以及 N^*（1535）峰形，直至 1.60 吉电子伏特，从而支持受对称性约束的$\pi N \to \eta N$ 跃迁顶角。由于三种情景在该能量窗口内都能很好地描述 $\eta_{\pi N}$ ，它们的

预测的 $\pi^- p \to \eta n$ 截面仍然高度集中。在这三种情景中，情景 IV(C) 的总体拟合质量和极点位置最佳；它与传统夸克模型图景的主要偏离在于反转的裸质量排序 $m^0_{N_2} > m^0_{N_4}$，即夸克总自旋较大的态具有较小的裸质量。

总之，当前数据 πN 几乎无法区分这三个模型，仅略微倾向于情景 IV(C)。尽管如此，由于在物理点，情景 IV(A)、情景 IV(B) 和情景 IV(C) 的无限体积散射观测量仍然十分接近，我们将在下一节中将这三种解都带入有限体积分析，并用格点量子色动力学谱对其进行检验。

IV. 有限体积能谱

这些数据 πN S_{11} 不支持若干种情景，但情景 IV 的各个子情形拟合效果相当。我们使用有限体积格点量子色动力学谱作为额外约束，以区分这些解。

在物理π介子质量下，完整的耦合道振幅组可通过 L¨uscher 形式确定有限体积谱。实际上，现有数据主要约束初态为πN 的振幅。它们无法确定 πN、 ηN、 $K\Lambda$和 $K\Sigma$各道之间的完整跃迁矩阵。这些输入无法唯一确定模型参数，因此导致各拟合结果之间存在简并。有限体积格点谱为耦合道动力学机制提供了互补约束。

此处所使用的格点谱有两个主要局限。首先，它们是在非物理π介子质量下获得的，因此必须明确模型的夸克质量依赖性。这些结果还使我们能够研究π介子质量范围内的强子性质。其次，计算仅在少数几个盒子尺寸下提供离散能级。对于多道系统，在给定能量下，振幅参数的数量可能超过可获得的有限体积约束数量。因此，即使对于短程相互作用，也无法以模型无关的方式确定散射矩阵，预先设定的相互作用形式因而不可或缺，这使 NPHF 成为处理这一问题的自然工具。相互作用会使有限体积能级偏离非相互作用的介子-重子能量。这些偏移的模式，结合每个态的本征矢组成，为奇宇称核子共振态的内部结构提供了信息。我们将第 II 节的形式主义应用于情景 III(a) 以及情景 IV(A)、IV(B) 和 IV(C)。

格点系综涵盖了一系列π介子质量，因此我们纳入对m_π^2的必要依赖性。在最低阶，仅假定裸质量显式依赖于 m_π^2。其余相互作用参数按照手征微扰理论的思路固定，正如 the ρ 介子情形 [45, 46]。每个道中的介子质量和重子质量也会随π介子质量变化。我们采用线性形式

$$m_M^2(m_\pi^2) = m_M^2|_{\rm phys} + \alpha_M(m_\pi^2 - m_\pi^2|_{\rm phys})\,, \qquad (28)$$
$$m_B(m_\pi^2) = m_B|_{\rm phys} + \alpha_B(m_\pi^2 - m_\pi^2|_{\rm phys})\,, \qquad (29)$$

其中，斜率 α_M 和 α_B 由 PACS-CS 强子质量 [47]确定。

对于每个裸核子态，我们采用相应的形式

$$m^0_{N_i}(m_\pi^2) = m^0_{N_i}|_{\rm phys} + \alpha_{N_i}(m_\pi^2 - m_\pi^2|_{\rm phys})\,, \qquad (30)$$

其中， α_{N_i} 通过拟合格点量子色动力学谱得到。 $L \sim 3$ 飞米系综涵盖了169至623兆电子伏的π介子质量，采用 Sommer标度设定方案。在该方案中，空间范围随 m_π变化。我们将其外推至物理点的数值记为 $L|_{m_\pi = m_\pi^{\rm phys}}$。盒子尺寸对 m_π^2 的依赖参数化为

$$L(m_\pi^2) = L|_{m_\pi = m_\pi^{\rm phys}} + \beta(m_\pi^2 - m_\pi^2|_{\rm phys})\,, \qquad (31)$$

其中， β 通过对格点体积进行线性插值得到。 $L \sim 2$ 飞米谱为裸态斜率提供了额外约束。对于 $L \sim 3$飞米系综，物理点范围为2.99飞米，在最重π介子质量处增大至3.27飞米。对于 $L \sim 2$飞米系综，相应的范围为1.95和2.12飞米。在每种情形下，物理点哈密顿量参数均由散射拟合固定。只有裸态斜率 α_{N_i} 根据有限体积谱进行调整。

我们给出两类有限体积结果。第一类展示能级随 m_π^2 的变化。彩色标记标出与各裸态重叠最大和次大的能级。在局域三夸克插值算符与裸基底之间存在所假定的对应关系这一前提下，这些标记表示预期与此类插值算符重叠较强的能级。该判据假设局域三夸克插值算符优先耦合到裸态扇区，因此这类态应更容易通过这些算符观测到。与仅比较能量相比，该判据提供了更有选择性的检验。对于使用显式介子-重子插值算符提取的能级，不施加类似的裸态重叠判据。

第二种类型展示裸态分量 $|\langle B_j|E_i\rangle|^2$ 以及按道求和的分量 $\sum_\ell |\langle \alpha(k_\ell)|E_i\rangle|^2$，其中 ℓ 遍历保留的动量壳层。这里， $|E_i\rangle$是一个有限体积本征态，而$|B_j\rangle$ 和 $|\alpha(k_\ell)\rangle$ 属于非相互作用模型基底。这些量描述了 $|E_i\rangle$在 NPHF 基底中的组成，有助于我们理解该本征态在有限体积中的内部结构。随着相互作用逐渐开启，裸态分量最大的本征态可能会在相邻能级之间迁移，但仍局限于与相应裸质量相关的能量区域。因此，这些分量对 π 介子质量的依赖性，为上一节介绍的结构情景提供了严格的检验。

对于 $L \sim 3$ 飞米，我们采用 CSSM 合作组 [48] 和塞浦路斯合作组 [49]的结果。这些谱主要是通过三夸克插值算符获得的。例外是 CSSM 在$m_\pi^2 = 0.08$ 吉电子伏特^2, 处的最低点，该点是通过五夸克插值算符提取的，预计具有显著的介子-重子分量 [50]。对于 $L \sim 2$ 飞米，我们采用 Lang 和 Verduci [51] 以及 HSC（强子谱合作组） [52]的结果。由于 Lang 和 Verduci 的关联矩阵未能充分分辨激发态，我们只采用其最低能级。该能级是通过非局域、动量投影的 π 介子-核子插值算符获得的。在两个体积下均使用相同的裸态斜率。各结构情景对应的拟合值分别给出。

A. 情景 III(a)的有限体积谱

尽管情景 III(a) 的拟合效果不如情景 IV，我们仍检验其有限体积谱。在由散射数据确定物理点哈密顿量参数后，唯一额外的输入是裸态斜率 α_N。对两个体积进行拟合得到

$$\alpha_N = (0.869 \pm 0.076)\ \mathrm{GeV}^{-1}. \tag{32}$$

图5 第一行展示了得到的谱，以及非相互作用介子-重子能量。相互作用相对于非相互作用谱产生了明显的能量位移；在这一情景下，格点量子色动力学能级可以与 NPHF 本征态相对应。由于有限体积谱较为密集，几乎每个格点数据都接近某个计算得到的本征能量。因此，仅凭能量吻合并不是一种有区分力的检验。然而，由三夸克插值算符提取的格点能级并不接近图中以彩色标记显示、带有较大裸态重叠的低能带。5。这一表现与我们的分析所假设的插值算符—裸态对应关系不一致。因此，我们认为情景 III(a) 无法给出令人满意的综合描述。

B. 情景 IV(A) 的有限体积谱

情景 IV(A) 保留了两个夸克模型构型，并将其混合参数固定为 $\xi = -0.53$，裸质量本征值按 $m_{B_1} < m_{B_2}$ 排序。与情景 III(a) 相比，增加的裸态改善了对无限体积 πN 振幅的描述。有限体积谱为双裸态动力学提供了独立约束。

在保持物理点哈密顿量参数固定的情况下，只调整裸态斜率至最迟——
格点谱。在 $L \sim 2$ 和 3 飞米处进行同时拟合，得到

$$\begin{aligned} \alpha_{N_2} &= (0.963 \pm 0.099)\ \mathrm{GeV}^{-1}, \\ \alpha_{N_4} &= (0.286 \pm 0.069)\ \mathrm{GeV}^{-1}. \end{aligned} \tag{33}$$

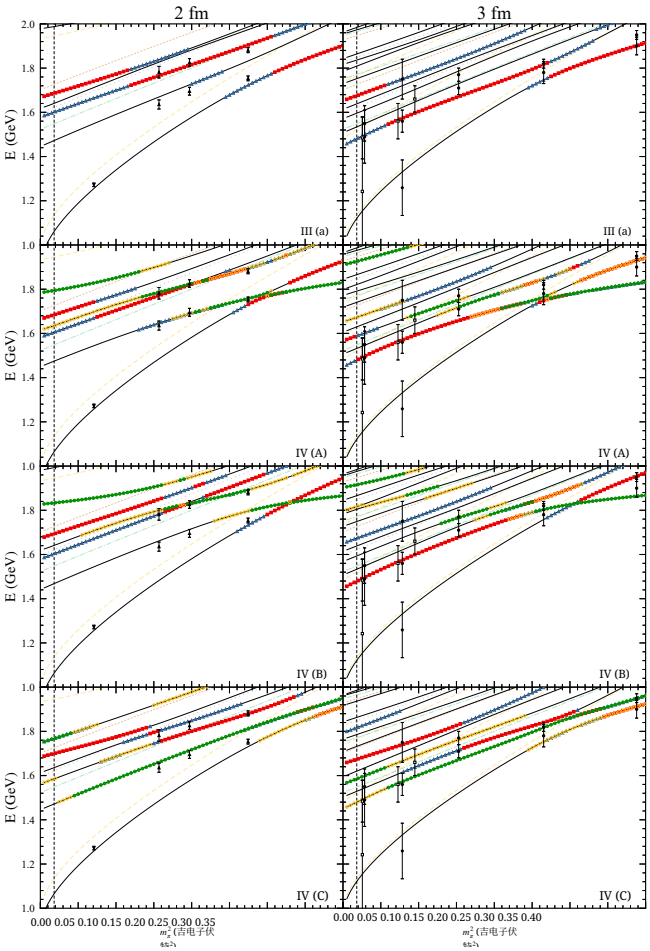

图5。在 $L \sim 2$ 飞米处（左）和 $L \sim 3$ 飞米处（右）的有限体积谱。从上到下，各行分别显示情景 III(a)以及情景 IV(A)、IV(B)和IV(C)。在 $L \sim 2$ 飞米处，倒三角形和三角形分别表示 Lang和Verduci [51] 以及HSC [52], 的结果。在 $L \sim 3$ 飞米处，圆形和方形分别表示CSSM [48] 和塞浦路斯 [49]的结果；五边形表示使用五夸克算符提取的CSSM能级。竖直虚线表示物理π介子质量，其余虚线曲线表示相应的非相互作用 πN、 ηN、 $K\Lambda$和 $K\Sigma$ 能级。黑色实线曲线表示相互作用的NPHF本征能。红色方形和蓝色三角形分别标记与第一裸态重叠最大和第二大的本征态。对于情景 IV(A)–IV(C)，填充的绿色圆形和空心的黄色圆形分别标记与第二裸态重叠最大和第二大的本征态。

由于第二个裸质量本征值在物理点时已经较重（1.864 吉电子伏特），拟合需要较小的斜率 α_{N_4}，以便在中等 π 介子质量下接近格点能级。

图5 的第二行显示了情景 IV(A)的谱。实心绿色圆圈和空心黄色圆圈分别标记与第二裸态重叠最大的和次大的情况。在 $L \sim 2$ 和 3 飞米处，低和中等π介子质量下的几乎所有格点能级都接近于标记有最大或次大裸态重叠的曲线，

这相较于情景 III(a)有了明显改进，并支持双裸态情景。然而，由于 α_{N_4} 远小于 α_{N_2}，两个裸态的能级排序在约 $m_\pi^2 \approx 0.27$ 吉电子伏特^{2}处发生反转：绿色标记的分支穿过红色标记的分支并降至其下方，且在较大的π介子质量处趋于平坦。因此，在 $L \sim 3$ 飞米处，绿色标记的分支在最重π介子质量（$m_\pi^2 \approx 0.39$ 吉电子伏特^2）下明显低于较低的格点数据，而红色和黄色标记的分支则聚集在较高的数据点附近。在这种情况下，对于 $L \sim 3$ 飞米，最大π介子质量处的两个格点能级并不落在最低能级（即绿色点）上；而在此前使用相同三夸克算符的研究中，绿色分支上的能级可以被清晰地观测到。

C. 情景 IV(B)的有限体积谱

情景 IV(B)将显式混合参数设为零（$\xi = 0$），同时保留传统的裸质量排序 $m_{N_2}^0 < m_{N_4}^0$。在散射拟合确定所有物理点参数后，有限体积谱给出

$$\begin{aligned} \alpha_{N_2} &= (1.159 \pm 0.10)\ \mathrm{GeV}^{-1}, \\ \alpha_{N_4} &= (0.177 \pm 0.072)\ \mathrm{GeV}^{-1}. \end{aligned} \tag{34}$$

这里拟合斜率 α_{N_4} 甚至比情景 IV(A)中的更平缓。

图中第三行5 展示了情景 IV(B)的能级。其总体分布在定性上与情景 IV(A)相似，浅绿色标记的分支再次在约 $m_\pi^2 \approx 0.30$ 吉电子伏特^2 处下穿红色标记的分支，并在最重π介子质量处 $L \sim 3$ 飞米低估了较低的晶格能级。这些交叉表明相应能级的组分发生了剧烈逆转，如附录 11 和 12 中的图 B所示，其中态 $|E_1\rangle$和 $|E_2\rangle$ 在约 $m_\pi^2 \approx 0.27$–0.32 吉电子伏特^2 附近交换其主导组分，因为介子-重子阈值超过了几乎平坦的 $|N_4\rangle$ 裸质量。

与情景 IV(A)相比，在 $L \sim 3$ 飞米和最重的π介子质量下，格点能级可以达到/触及最低的绿色能级，这一结果优于情景 IV(A)。然而，部分能级仍然偏离颜色编码曲线。特别是，对于 $L = 2$ 飞米，位于$m_\pi^2 = 0.156$ 吉电子伏特^2 和 0.197 吉电子伏特^2 处的最低 HSC 数据点落在一条未标记的曲线上，与裸态的重叠可以忽略不计。因此，无论是情景 IV(A)还是情景 IV(B)，都无法完美描述整个π介子质量范围内的格点谱。

D. 情景 IV(C)的有限体积谱

情景 IV(C) 也将显式混合参数设为零（$\xi = 0$），并呈现出裸质量顺序颠倒的特征——

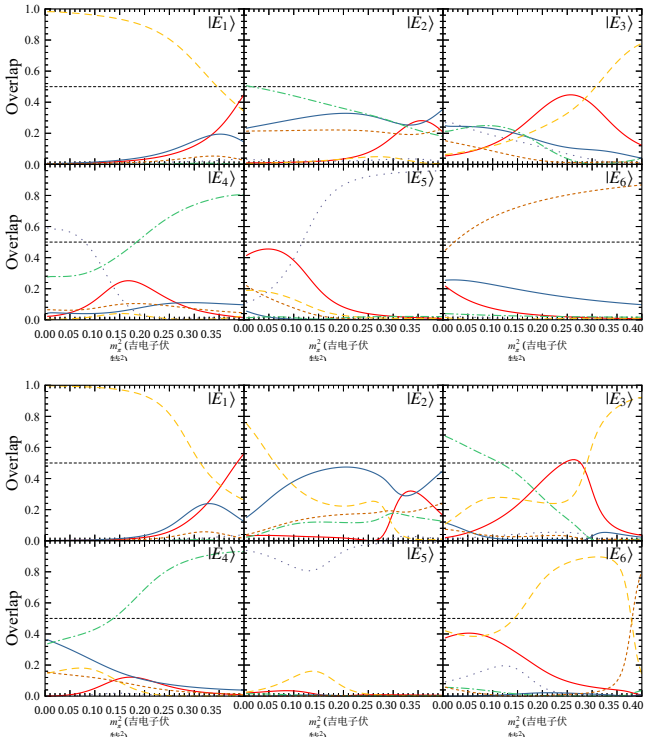

图6. 情景 IV(C)中六个最低有限体积本征态的模型基分解，显示为 $|\langle B_j|E_i\rangle|^2$ 和$\sum_\ell |\langle \alpha(k_\ell)|E_i\rangle|^2$。上方和下方六个面板分别对应 $L \sim 2$ 和3飞米。实线表示N_2 （红色）和 N_4 （蓝色）分量。其余曲线分别表示 πN （黄色虚线）、 ηN （绿色点划线）、 $K\Lambda$ （紫色点线）和 $K\Sigma$ （棕色短划线）分量。

在物理点处为 $m_{N_2}^0 > m_{N_4}^0$。有限体积拟合仅增加两个裸态斜率，

$$\begin{aligned} \alpha_{N_2} &= (0.619 \pm 0.091)\ \mathrm{GeV}^{-1}, \\ \alpha_{N_4} &= (1.168 \pm 0.10)\ \mathrm{GeV}^{-1}. \end{aligned} \tag{35}$$

与情景 IV(A)和情景 IV(B)不同，两个裸态现在均表现出显著的正夸克质量斜率。

图 5 的第四行展示了情景 IV(C) 的谱，相较于情景 IV(A) 和 IV(B) 的谱有了显著改善。情景 IV(C) 的拟合结果表明，与前面两个模型——情景 IV(A) 和 IV(B)——相比，其整体表现更为优越。这一改进主要体现在以下两个方面。

首先，在 $L = 2$ 飞米和 $L = 3$ 飞米处，整个π介子质量范围内的所有格点能级都与颜色标示的模型曲线高度吻合。具体而言，在 $L \sim 2$ 飞米处的全部三个π介子质量下（包括 $m_\pi^2 = 0.274$ 吉电子伏特^{2}处的两个 HSC 数据点），以及在 $L \sim 3$ 飞米处的前四个系综中，较低和较高的 HSC 能级都接近携带最大裸态重叠的本征态，这完全符合三夸克插值算符与裸基底之间假定的对应关系。

其次，由于两个裸质量斜率都较大且为正，在较大的π介子质量下不会发生能级顺序反转。相反，两个裸态分支一同上升，并在 0.30 m_π^2 吉电子伏特^2 和 $L \sim 3$ 飞米处附近平滑交叉。因此，在 fm 处以及π介子质量最大的情况下（$m_\pi^2 \approx 0.39$ 吉电子伏特^2），两个最高的格点能级恰好对应最低的两个能量分支，与模型值高度吻合。这与情景 IV(A) 和 IV(B) 形成鲜明对比：在这两种情景中，分支的反转或变平导致这些能级错位。

图6展示了最低六个本征态的模型基分解。其他情景对应的图见附录 B。在接近物理π介子质量时，两个体积下的最低能级 $|E_1\rangle$ 均由 πN 道主导。较低的激发能级 $|E_2\rangle$ 和$|E_3\rangle$ （以及 $L \sim 3$飞米处的 $|E_4\rangle$ ）形成了显著的N_4 分量，并与 πN 和 ηN 道混合；无限体积极点分析表明，这些分量主要与 N^*(1535)有关。第四能级 $|E_4\rangle$ 主要由 ηN 道主导，而在 $L \sim 3$ 飞米处， $K\Lambda$ 道主导 $|E_5\rangle$。较高能级中出现了显著的 N_2 分量——主要位于 $L \sim 2$ 飞米处的 $|E_5\rangle$ 和 $|E_6\rangle$ ，以及 $L \sim 3$ 飞米处的$|E_6\rangle$ ——极点分析表明，这些分量主要与 N^*(1650)有关。随着 m_π^2 增大至 0.30 吉电子伏特^2，裸态分量转移至最低三个本征态 $|E_1\rangle$–$|E_3\rangle$ ，并在裸态交叉附近强烈混合；当 $m_\pi^2 \gtrsim 0.30$ 吉电子伏特^2 时， N_2 分量在$|E_1\rangle$ 中超过 N_4 ，而当 $m_\pi^2 \approx 0.35$ 吉电子伏特^{2}以上时， N_4 在$|E_2\rangle$ 中占主导地位。即使在裸态重叠最大的能级中，通常也没有单个裸态分量超过 50%。因此，在这一对激发核子的描述中，介子-重子分量至关重要。

总体而言，在所考虑的情景中，情景 IV(C) 对无限体积散射观测量和两个体积下的有限体积谱给出了最佳的综合描述。

V. 散射态污染

A. 污染函数形式

在 NPHF 中，哈密顿量本征矢为基于模型估算格点 QCD 关联函数中的散射态污染提供了依据；这些关联函数由局域三夸克插值算符构造。相互作用的有限体积本征态即使含有显著的介子-重子分量，也能通过其裸态分量与此类插值算符耦合。这些额外能级会影响单粒子型能量的提取。污染函数衡量移除裸态重叠最大的本征态后关联函数中剩余的强度。单裸态和双裸态构造见参考文献 [12] 第 VII 节。本文将双态构造应用于情景 IV(C)。

污染函数的主要方程如下 [12]，

$$G_j(t) = \sum_n \left|\alpha_j \langle N_2|E_n\rangle + \beta_j \langle N_4|E_n\rangle\right|^2 e^{-E_n t}, \tag{36}$$

$$C_j(t) = \frac{1}{G_j(t)} \sum_{\substack{n \notin \{n_2^{(1,2)}, \\ n_4^{(1,2)}\}}} \left|\alpha_j \langle N_2|E_n\rangle + \beta_j \langle N_4|E_n\rangle\right|^2 e^{-E_n t}. \tag{37}$$

其中， $n_a^{(1)}$和 $n_a^{(2)}$分别标记每个裸态 N_a对应的 $|\langle N_a|E_n\rangle|^2$ 最大和次大的能级，并且

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \langle N_2|E_{n_j^{(1)}}\rangle, \\ \beta_j &= \langle N_4|E_{n_j^{(1)}}\rangle. \end{aligned} \tag{38}$$

此处， $\left|E_{n_j^{(i)}}\right\rangle$ 态是最大的（$i = 1$）和第二大的（$i = 2$） j阶裸态分量。在 NPHF 中，裸态与本征态之间的重叠由哈密顿量的本征向量计算得出。此外，若有两个满足 $\bar{\chi}_i |\Omega\rangle = |N_i\rangle$ 的算符，则可得到：

$$(\alpha^* \bar{\chi}_1 + \beta^* \bar{\chi}_2) |\Omega\rangle = \alpha^* |N_2\rangle + \beta^* |N_4\rangle . \tag{39}$$

那么，这四个因子 $\alpha_{1,\,2}$ 和 $\beta_{1,\,2}$ 也可以识别为 $\alpha_j = \langle\Omega|\chi_1|E_{n_j^{(1)}}\rangle$ 和 $\beta_j = \langle\Omega|\chi_2|E_{n_j^{(1)}}\rangle$，其取值由格点输入决定。

我们考虑奇宇称核子道的两个局域三夸克插值算符：$\chi_1 = \epsilon^{abc}(u^{aT} C\gamma_5 d^b)\, u^c$ 和$\chi_2 = \epsilon^{abc}(u^{aT} C d^b)\, \gamma_5 u^c$。在此处采用的自旋指派中， χ_1 的标量双夸克结构与总三夸克自旋3/2组态没有直接重叠。因此，我们主要将该组态与 χ_2联系起来。自旋1/2 裸态也可以与χ_2重叠，但我们假设它与 χ_1 的重叠占主导地位。这一指派与第III [37]节讨论的相对论波函数分析相符。

使用这一裸态子空间指派，我们利用来自晶格关联矩阵和 NPHF 哈密顿量本征矢的系数，对比$C_j(t)$。

B. 情景 IV(C) 的污染函数

图 7 和 8 分别展示了 $C_j(t)$ 在 $L \sim 3$ 和 2 飞米处的结果。我们采用前述分析中确定的相互作用参数和裸态斜率，不再引入额外的拟合参数。

在 $L \sim 3$飞米处，代入式（37）的系数可由文献 [48]中的晶格QCD关联矩阵本征向量确定。该计算采用了一个 8×8关联矩阵，由两个插值算符构成，并在源端和汇端各使用四个涂抹层级。我们采用文献 [48]图 11(a)所示的主要 100 次扫描分量。系数 α_1 和 α_2 取自文献 χ_1 （u_5 中的 [48]）分量，对应于态 1 和

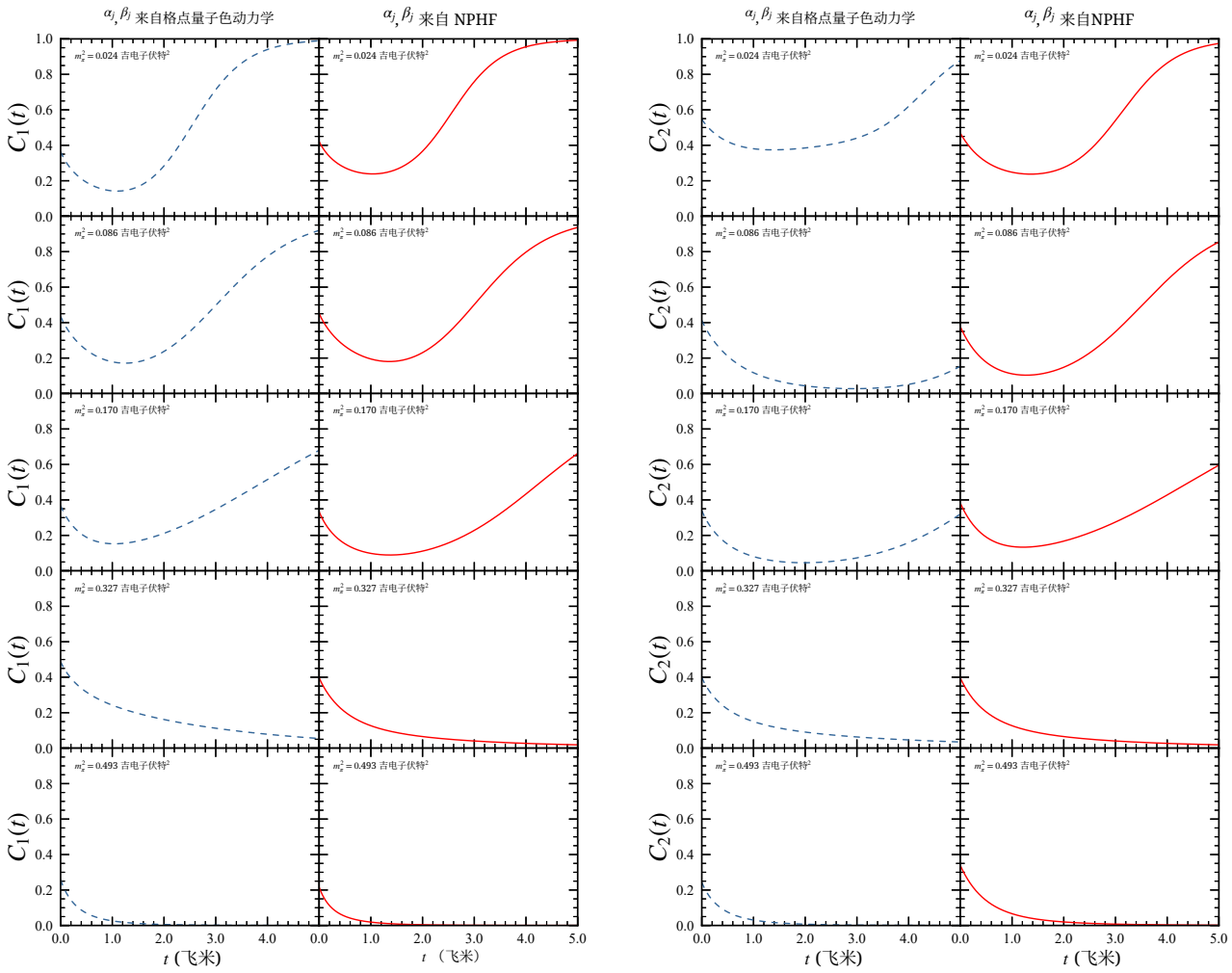

图7. 情景 IV(C) 的污染函数，适用于 $L \sim 3$ 飞米处，针对 Ref. [48] 中使用的五种 π介子质量。π介子质量从上到下依次增加。对于每个优化关联函数，使用公式（37）计算这些函数。红色实线使用 α_j 和 β_j，这些取自 NPHF 哈密顿量本征矢；蓝色虚线则使用晶格QCD关联矩阵本征向量。

2。系数 β_1 和 β_2 取自相应的 χ_2 （u_6 文献 [48]）分量。保留这些分量的相对符号，因为它们决定了优化重叠中的干涉项。作为比较，我们还通过式（38）从 NPHF 哈密顿量本征矢确定系数。

根据 π介子质量和优化关联函数，图 7 中所示的函数在展示的欧几里得时间区间内要么持续下降，要么先达到极小值后再次上升。这种行为反映了被移除的裸主导态相对于谱和中保留的较低能态的位置。比较这两组系数，可以检验 NPHF 本征向量是否再现了晶格关联矩阵中的算符混合趋势。对于 $C_1(t)$，

与 χ_1 相关，并且主要与 $|N_2\rangle$相关，这两种测定总体上呈现出相似的趋势。这与上文所采用的、主要为自旋-$1/2$ 的 χ_1指派一致。对于 C_2（t），差异更加明显。对于最低的三个π介子质量，基于格点数据的曲线和NPHF曲线在较长的欧几里得时间处都呈上升趋势，但NPHF曲线上升得更快。这一差异表明，χ_2 还与自旋-$1/2$ 构型存在额外的重叠，而这种重叠无法通过一一对应的算符映射捕捉到。在五个π介子质量范围内，幅值、极小值以及详细的时间依赖性仍然对系数来源敏感，但总体趋势大致相似。在所假定的算符映射下，这一比较支持使用NPHF本征向量作为对污染的模型估计

项。这进一步印证了 $|N_2\rangle$ 裸态的质量高于 $|N_4\rangle$ 裸态，这一结论也得到了格点数据的支持。

图 8 展示了在 $L \sim 2$ 飞米处的结果。此体积下只有 NPHF 导出的系数可用。它们的定性行为与 $L \sim 3$ 飞米处的结果相容。我们期待未来格点量子色动力学计算的独立验证。

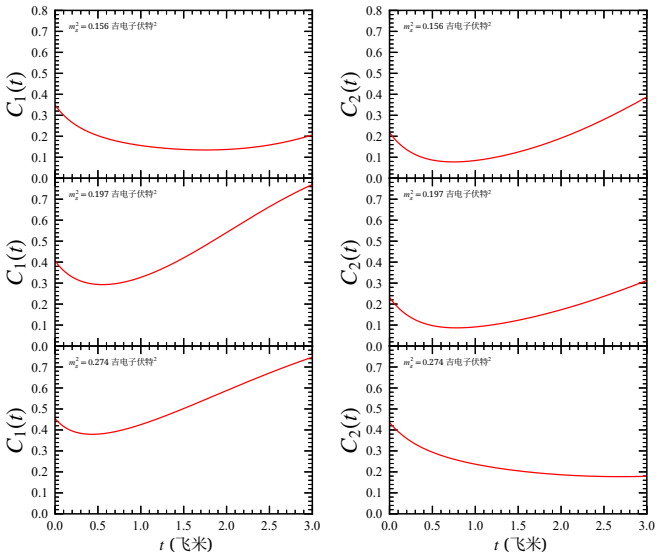

图 8. $L \sim 2$ 飞米处情景 IV(C) 的污染函数。三行对应于 HSC 比较中使用的 π介子质量 [52], , 从上到下依次递增。由于此体积下无法获得格点关联矩阵本征矢，所有曲线均使用 NPHF 哈密顿量本征矢的系数。

VI. 结论

我们在 NPHF 框架下研究了 S_{11} 分波中的奇宇称核子共振N^*(1535) 和 N^*(1650)。耦合道模型包含两个裸态 $|N_2\rangle$ 和 $|N_4\rangle$，其夸克总自旋分别为 $1/2$ 和$3/2$。模型还包含四个介子-重子道。在施加 SU(3) 味和自旋约束后，本文考虑的情景至多包含 11 个拟合参数。这些约束还要求 $|N_4\rangle$–$K\Lambda$ 耦合为零。仅凭无限体积 πN数据仍会得到若干模型解。因此，我们使用有限体积格点量子色动力学谱作为独立约束。我们还利用模型基重叠和污染函数来评估散射态对格点关联函数的贡献。综合散射拟合、有限体积谱和本征矢分析，可区分出四类情景。

我们的主要结论总结如下。首先，包含三夸克裸态和四个道 πN、 ηN、 $K\Lambda$ 和 $K\Sigma$ 的模型能够描述无限体积振幅和有限体积谱。它的表现优于本文考察的单裸态模型、纯耦合道模型和纯裸态模型。情景 IV(C) 采用未混合的裸态，且质量排序反转为 $m^0_{N_2} > m^0_{N_4}$，在所考察的各种情景中给出了最一致的描述。它再现了 πN S_{11} 相移和非弹性度，并描述了其他情景未能解释的大 pion 质量格点能级。这些格点能级也接近具有显著裸态重叠的 NPHF 本征态，这与它们主要通过三夸克插值算符提取的结果一致。

其次，我们考察了裸态质量正常排序的情况。然而，我们发现，无论是对无限体积 T 矩阵的拟合，还是对有限体积能级的解释，都不如逆质量排序模型恰当。因此，本工作倾向于逆质量排序模型，即总自旋-1/2 态 $|N_2\rangle$ 比自旋-3/2态 $|N_4\rangle$更重。在该模型中，散射与有限体积分析相结合的结果支持这一排序。污染函数分析与相应的算符指派相一致。该结果也与近期关于相对论夸克波函数的研究一致。该研究将这种排序归因于下部狄拉克分量中的节点与禁闭势 [37]之间的相互作用。我们认为，未来显然还需要开展更多理论和实验研究。

第三，即使在裸态重叠最大的能级中，通常也没有单个裸态分量超过50%。这些能级包含大量介子-重子分量。在 NPHF 描述下，耦合道效应对于两个共振态都至关重要。N^*(1535)和 N^*(1650)源于裸态组态与介子-重子连续谱之间的相互作用。

若干扩展研究可以检验这一图景。更小体积下的格点关联矩阵本征向量将为算符映射和污染函数提供独立检验。更高的统计量和更大的插值算符基将加强这种比较。更高阶的手征相互作用以及额外的道将检验结果对模型的依赖性。裸质量反转的微观起源也需要进一步开展夸克模型和格点量子色动力学研究。同样的散射拟合、格点谱和污染诊断组合也可以应用于其他重子共振。

致谢

作者感谢郭奉坤、邹冰松和赵强的有益讨论。特别是，赵强教授建议我们仔细考虑总夸克自旋为 3/2 的裸态与 ΛK之间的零相互作用，这促使我们建立这一模型，以便

重新研究两个核子态。本研究得到国家自然科学基金委员会项目（编号：12221005）以及中国科学院项目（编号：YSBR-101）的资助。此外，本研究还得到阿德莱德大学的支持，并获澳大利亚研究委员会探索项目DP230101791（AWT）资助。

附录 A：较低裸质量尺度下裸质量排序的稳健性

在正文（表 III）中，耦合道自能修饰将较轻的裸态置于 1.750 吉电子伏特处，此时情景 IV(A)、IV(B) 和 IV(C) 得到的无限体积拟合结果相近（χ^2/自由度 $= 6.133$，6.785 和 5.491），因此需要有限体积格点量子色动力学谱来打破它们的简并。由于夸克组分模型通常将最低的 P-wavenucleonexcitations around1.50–1.65吉电子伏特 [3, 5, 35, 36], ，因此值得检验当较轻的裸态（m_{B_1} 在情景 IV(A) 中、$m^0_{N_2}$在情景 IV(B) 中，以及 $m^0_{N_4}$ 在情景 IV(C) 中）被限制在 1.600 吉电子伏特或更低时，这三种情景的表现。

如表 IV 和图 9 所示，降低裸质量尺度会直接打破无限体积简并，并强烈支持情景 IV(C)。情景 IV(C) 在整个能量区域内都能准确描述全部四个散射观测量（χ^2/自由度 $= 6.908$），共振极点稳定在 $1.516 - 0.044$i 吉电子伏特和$1.688 - 0.094$i 吉电子伏特，并且在

$m^0_{N_2} = 1.862$ $m^0_{N_4} = 1.600$ $\Delta m =$ 吉电 0.262

子伏特与 吉电子伏特（ 吉电子伏特）之间呈现明显的反转劈裂。相比之下，常规质量排序情景的表现严重退化：情景 IV(A)（χ^2/自由度 =17.555）大幅高估了 1.60 至 1.68 吉电子伏特之间的 Re$\,T_{\pi N}$ 和 $\eta_{\pi N}$，而情景 IV(B)（χ^2/自由度 $= 29.487$）无法再现 1.50–1.70 吉电子伏特范围内的共振结构，并将 N^*(1535) 极点上移至 $1.575 - 0.062$i 吉电子伏特。此外，由于 ηN 和 $K\Lambda$阈值之间的双道幺正性将 $\sigma(\pi^- p \to \eta n)$ 与 $1 - \eta^2_{\pi N}$直接关联，情景 IV(B) 中失真的非弹性度也导致其与 $\pi^- p \to \eta n$ 截面存在较大偏差，而情景 IV(C) 则保持了良好的一致性。

这种鲜明的对比反映了表 II中受对称性约束的耦合模式。当较轻的裸态被下调至 1。600 吉电子伏特——直接进入共振区域时，散射振幅会对其道耦合变得极为敏感。将自旋-3/2 态$|N_4\rangle$（其裸 πN 耦合较弱，且 $K\Lambda$ 耦合为零）置于 1。600 吉电子伏特，并将耦合较强的自旋-1/2 态 $|N_2\rangle$ 置于 1。862 吉电子伏特，使情景 IV(C) 能够自然地维持 N^*(1535) 与 N^*(1650) 之间的破坏性干涉凹陷。因此，施加较低的类夸克模型裸质量尺度，已足以在无限体积层面排除情景 IV(A) 和 IV(B)，进一步印证正文中确立的裸质量倒置层级。 $m^0_{N_2} > m^0_{N_4}$

表 IV. 情景 IV(A)、IV(B) 和 IV(C) 的拟合参数、 χ^2/自由度和极点位置，其中较轻的裸质量被限制为 $\leq$ 1.600 吉电子伏特，以便与表 III比较。情形 (A) 使用固定的夸克模型混合 $\xi = -0.53$，其中带星号前缀的条目表示裸质量本征值 m_{B_1} 和 m_{B_2}；情形 (B) 和 (C) 不发生混合（$\xi = 0$）。三行极点分别对应黎曼片 -+++、--++和---+，遵循表 III中的约定。带下划线的条目位于拟合边界，因此不显示误差。

参数	IV(A)	IV(B)	IV(C)
g_0	0.722 ± 0.0050	0.450 ± 0.0053	0.535 ± 0.0069
$\Lambda_{\pi N}$/吉电子伏特	0.400	0.400	0.432 ± 0.0036
$\Lambda_{\eta N}$/吉电子伏特	0.400	1.600	0.460 ± 0.019
$\Lambda_{K\Lambda}$/吉电子伏特	0.400	1.600	1.600
$\Lambda_{K\Sigma}$/吉电子伏特	0.402 ± 0.023	0.400	0.400
$m^0_{N_2}$/吉电子伏特	$*$ 1.600	1.600	1.862 ± 0.0045
$m^0_{N_4}$/吉电子伏特	$*1.738 \pm 0.0016$	1.900	1.600
g_{N_2}	1.055 ± 0.015	1.516 ± 0.027	0.572 ± 0.0066
g_{N_4}	1.156 ± 0.032	1.043 ± 0.015	1.409 ± 0.026
Λ_{N_2}/吉电子伏特	0.757 ± 0.0087	0.512 ± 0.0057	1.600
Λ_{N_4}/吉电子伏特	0.715 ± 0.015	1.179 ± 0.016	0.694 ± 0.010
χ^2/自由度	17.555	29.487	6.908
极点/吉电子伏特	$1.000 - 0.158$虚数单位	$0.993 - 0.178$虚数单位	$0.993 - 0.171$虚数单位
	$1.518 - 0.050$虚数单位	$1.575 - 0.062$虚数单位	$1.516 - 0.044$虚数单位
	$1.682 - 0.056$虚数单位	$1.694 - 0.040$虚数单位	$1.688 - 0.094$虚数单位

附录 B：其余情景的模型基分解

为完整起见，我们展示情景 III(a) 以及情景 IV(A) 和情景 IV(B) 中六个最低能级有限体积本征态的模型基分解。情景 IV(C) 的相应结果见图 6。对于每个本征态，裸态分量分别展示，而每个介子-重子分量则对保留的有限体积动量求和。这些归一化的 NPHF分量刻画了所选模型基底中的本征态，并非直接的格点QCD可观测量。

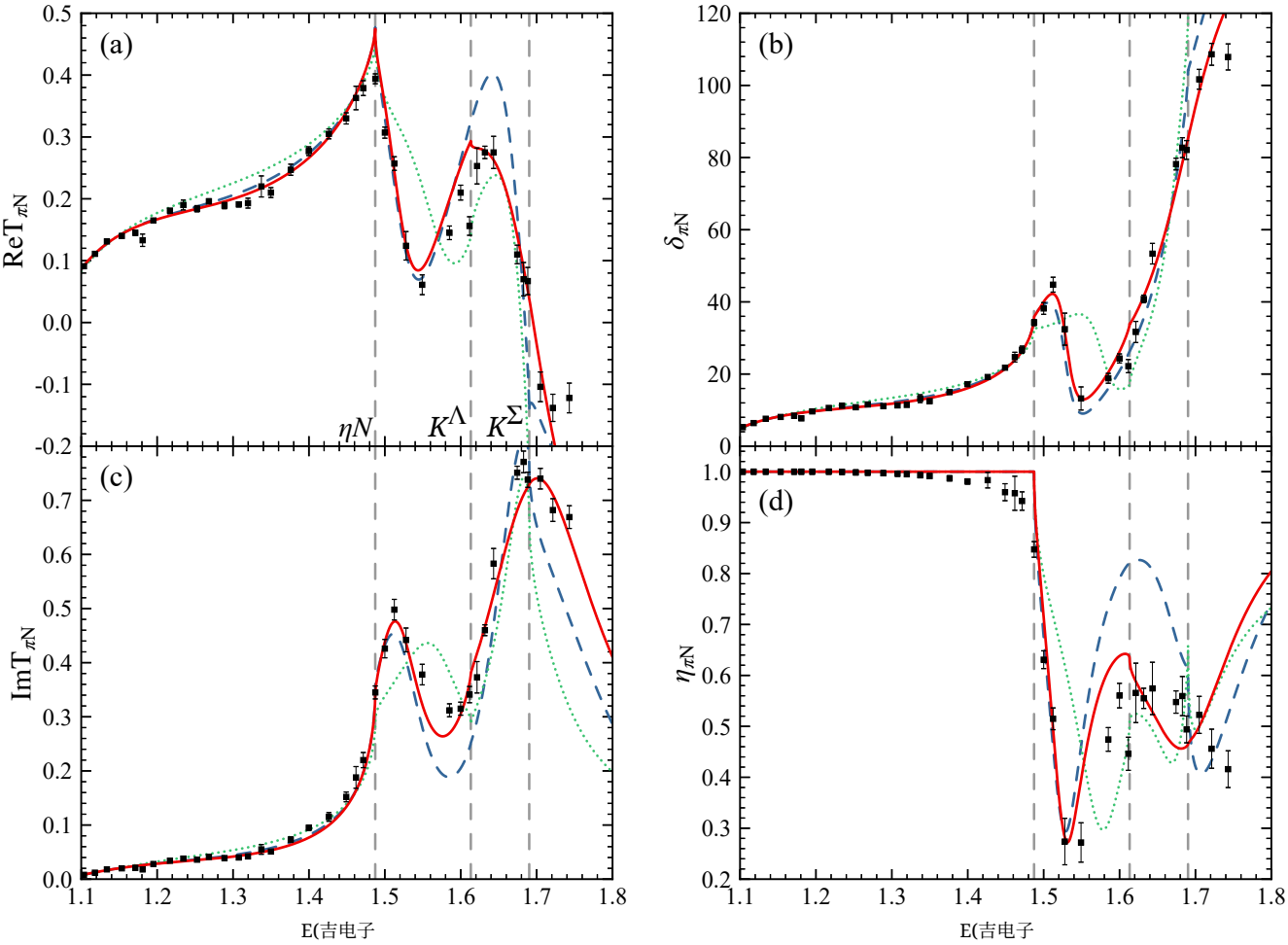

图 9. T矩阵的实部 (a)、相移 (b)、 T矩阵的虚部 (c) 和非弹性度 (d)，对应于情景 IV(A)（蓝色虚线）、IV(B)（绿色点线）和 IV(C)（红色实线），其中较轻的裸质量被限制为 ≤ 1.600 吉电子伏特（表 IV）。其余符号沿用图 3。

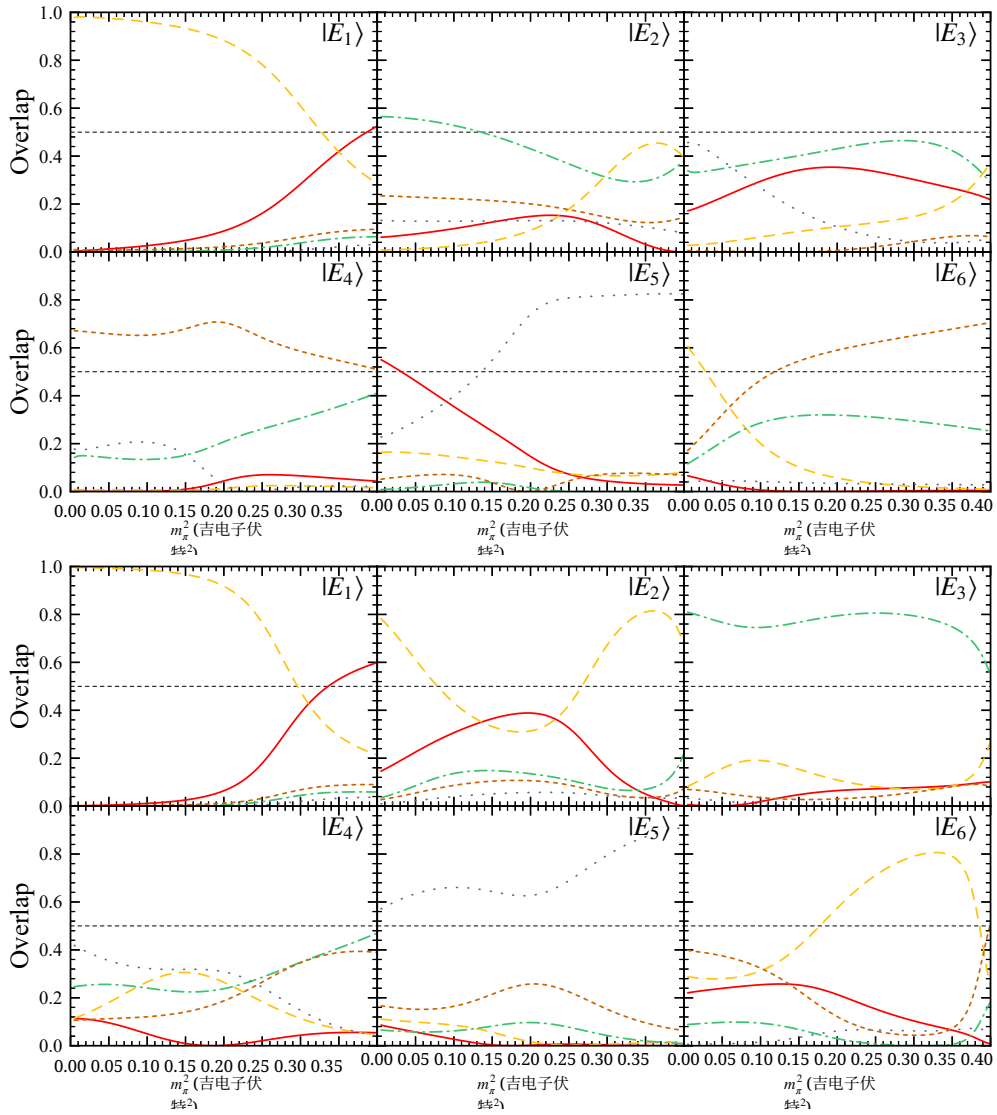

图10. 情景 III(a) 中六个最低有限体积本征态的模型基分解，如 $|\langle B_j|E_i\rangle|^2$ 和 $\sum_\ell |\langle \alpha(k_\ell)|E_i\rangle|^2$ 所示。上方和下方六个面板分别对应 $L \sim 2$ 和 3 飞米。红色实线表示裸态分量。其余曲线分别表示 πN （黄色虚线）、 ηN （绿色点划线）、 $K\Lambda$ （紫色点线）和 $K\Sigma$ （棕色短虚线）分量。

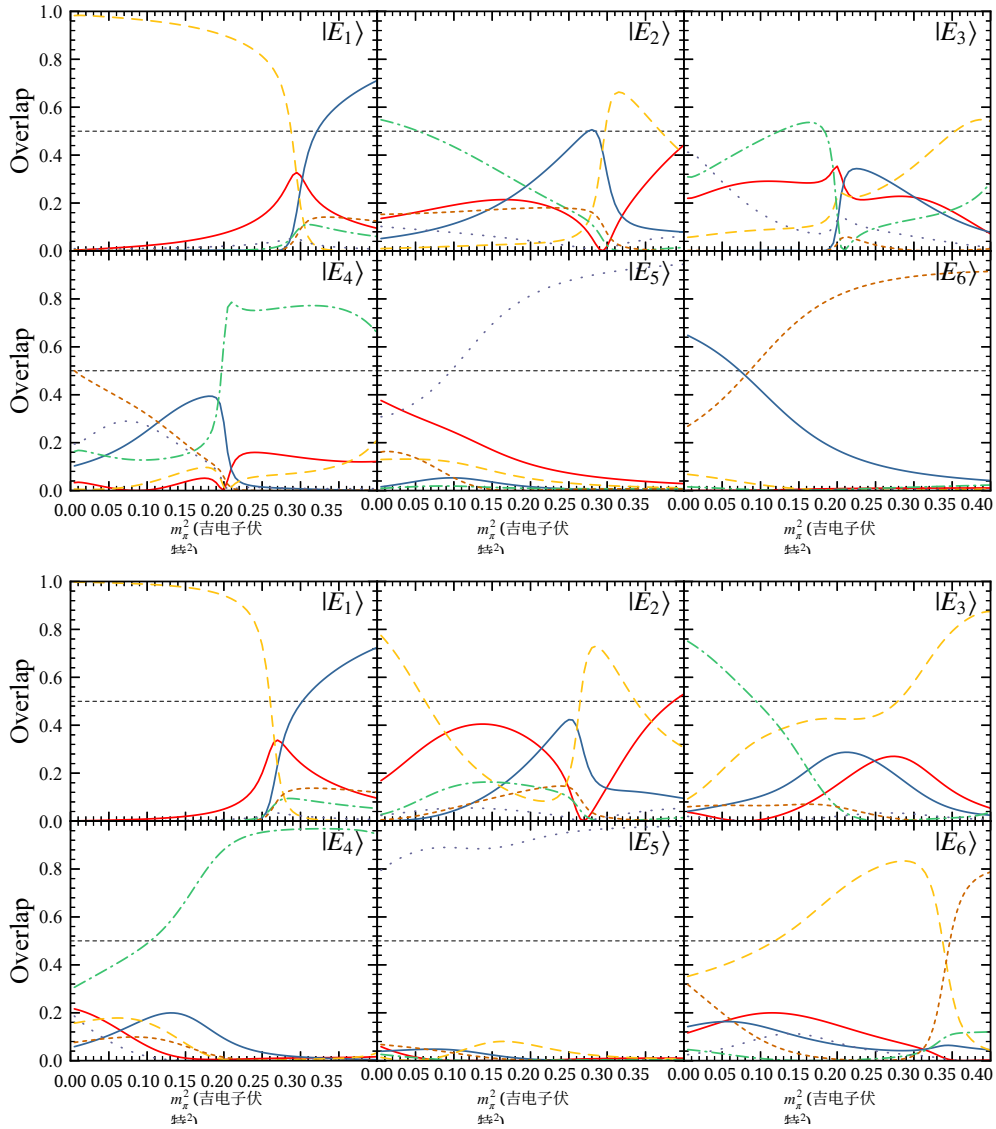

图11. 情景 IV(A)中六个最低有限体积本征态的模型基分解，显示为 $|\langle B_j|E_i\rangle|^2$ 和 $\sum_\ell |\langle \alpha(k_\ell)|E_i\rangle|^2$。上方和下方六个面板分别对应 $L \sim 2$ 和 3 飞米。实线表示 N_2 （红色）和 N_4 （蓝色）分量。其余曲线分别表示 πN （黄色虚线）、 ηN （绿色点划线）、 $K\Lambda$ （紫色点线）和 $K\Sigma$ （棕色短虚线）分量。

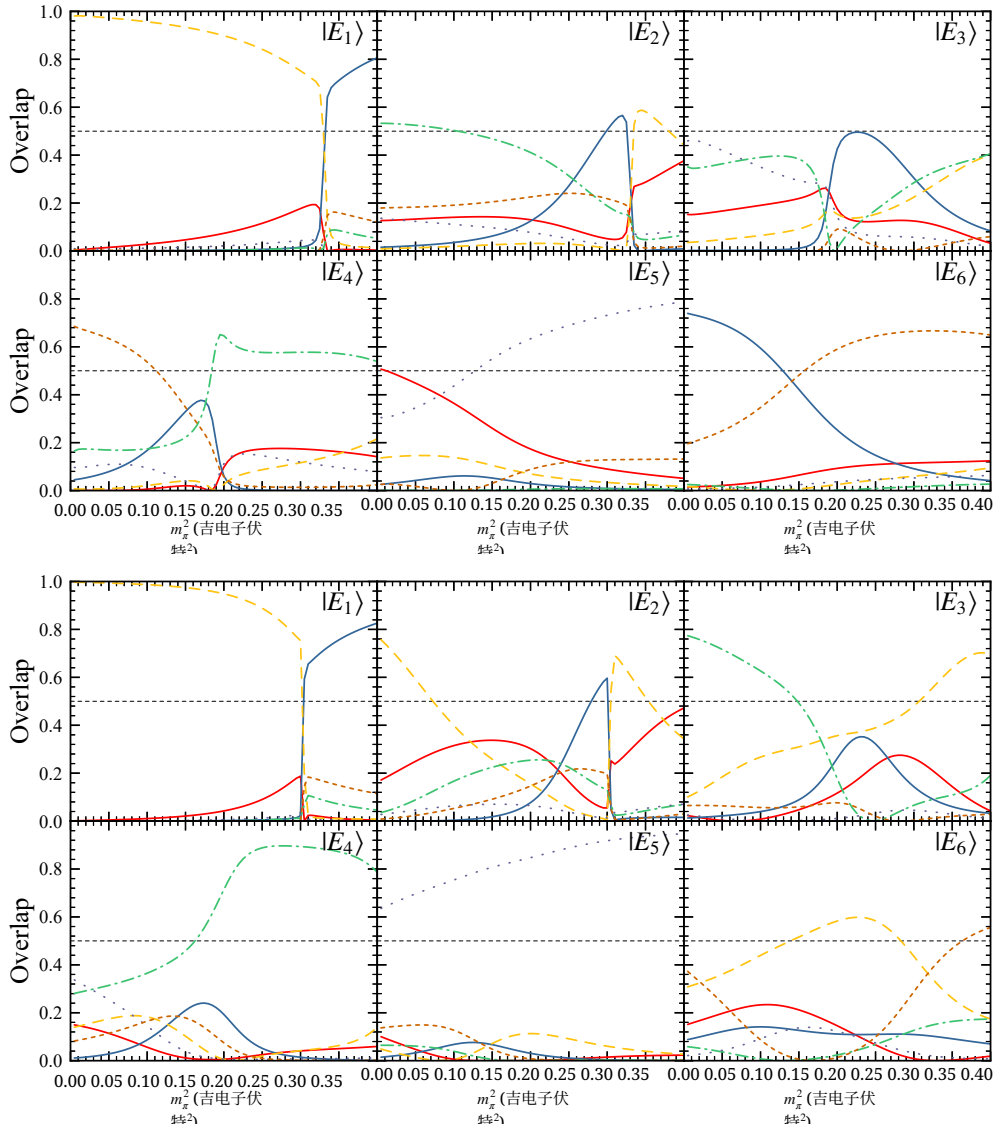

图12。情景 IV(B)中六个最低有限体积本征态的模型基分解，如 $|\langle B_j|E_i\rangle|^2$ 和 $\sum_\ell |\langle\alpha(k_\ell)|E_i\rangle|^2$所示。上方和下方六个面板分别对应 $L \sim 2$ 和 3 飞米。实线曲线显示 N_2 （红色）和 N_4 （蓝色）分量。其余曲线分别显示 πN （黄色虚线）、 ηN （绿色点划线）、 $K\Lambda$ （紫色点线）和 $K\Sigma$ （棕色短虚线）分量。

[1] N. Kaiser、P. Siegel 和 W. Weise，《手征动力学与 S_{11}(1535) 核子共振》，《物理快报 B》362，23（1995），arXiv:nucl-th/9507036。[2] J. Nacher、A. Parreno、E. Oset、A. Ramos、A. Hosaka 和 M. Oka，《对（ ）共振的 $N^*N^*\pi$、$N^*N^*\eta$ N^* 1535 耦合的手征幺正方法》，《核物理 A》678，187（2000），arXiv:nucl-th/9906018。[3] R. Bijker、F. Iachello 和 A. Leviatan，《强子结构代数模型》之二：奇异重子，《物理年刊》284，89（2000），arXiv:nucl-th/0004034。[4] T. Inoue、E. Oset 和 M. Vicente Vacas，《奇异数 $S=0$ 扇区中 S-波介子—重子散射的手征幺正方法》，《物理评论 C》65，035204（2002），arXiv:hep-ph/0110333。[5] Q. Zhao 和 F. E. Close，《 N^* **74**, 共振谱中的夸克、双夸克与量子色动力学混合》，《物理评论 D》（ ），arXiv:hep-ph/ 。[6] P. C. Bruns、M. Mai 和 U.-G. Meißner，《重新审视 S_{11}(1535) 与 S_{11}(1650) 共振的手征动力学》，《物理快报 B》697，254（2011），arXiv:1012.2233 [nucl-th]。[7] F. Takahashi、K. Hikasa、Y. Sumino、 *et al.*（粒子数据组），《粒子物理评论》，《国际现代物理学杂志 A》41，2630011（2026）。[8] F. M. Stokes、W. Kamleh 和 D. B. Leinweber，《格点量子色动力学中的核子激发态弹性形状因子》，《物理评论 D》102，014507（2020），arXiv:1907.00177 [hep-lat]。[9] M. Luscher，《环面上的双粒子态及其与散射矩阵的关系》，《核物理 B》354，531（1991）。[10] M. Luscher，《有质量量子场论中的能谱体积依赖性》之二：散射态，《数学物理通讯》105，153（1986）。[11] R. Workman、R. Arndt、W. Briscoe、M. Paris 和 I. Strakovsky，《根据对 πN 弹性散射数据的拟合得到的 T 矩阵极点与本征相移的参数化依赖性》，《物理评论 C》 **86**, 035202 2012 1204 2277 （ ），arXiv: 。hep-ph 。[12] C. D. Abell、D. B. Leinweber、Z.-W. Liu、A. W. Thomas 和 J.-J. Wu，《低能负宇称核子共振作为类夸克模型态》，《物理评论 D》108，094519（2023），arXiv:2306.00337 [hep-lat]。[13] J.-J. Wu、T.-S. Lee、A. Thomas 和 R. Young，《格点量子色动力学中耦合道相互作用的有限体积哈密顿量方法》，《物理评论 C》90，055206（2014），arXiv:1402.4868 [hep-lat]。[14] Z.-W. Liu、W. Kamleh、D. B. Leinweber、F. M. Stokes、A. W. Thomas 和 J.-J. Wu，《格点量子色动力学中 N*(1440) 共振的哈密顿量有效场论研究》，《物理评论 D》95，034034（2017），arXiv:1607.04536 [nucl-th]。[15] J.-j. Wu、D. B. Leinweber、Z.-w. Liu 和 A. W. Thomas，《格点量子色动力学约束下罗珀共振的结构》，《物理评论 D》97，094509（2018），arXiv:1703.10715 [nucl-th]。[16] L. Hockley、C. Abell、D. Leinweber 和 A. Thomas，《理解 Δ(1600) 共振的本质》，《物理评论 D》111，076027（2025），arXiv:2406.00981 [hep-ph]。[17] Z.-W. Liu、W. Kamleh、D. B. Leinweber、F. M. Stokes、A. W. Thomas 和 J.-J. Wu，《格点量子色动力学中 N*(1535) 共振的哈密顿量有效场论研究》，《物理评论快报》 **116**, 082004 2016 1512 00140 ( ), [ ] arXiv: . hep-lat .[18] Z.-W. Liu、J. M. Hall、D. B. Leinweber、A. W. Thomas 和 J.-J. Wu，《通过哈密顿量有效场论研究 **Λ**(1405)的结构》，《物理评论 D》95，014506 (2017)，arXiv:1607.05856 [nucl-th]。[19] J. M. M. Hall、W. Kamleh、D. B. Leinweber、B. J. Menadue、B. J. Owen、A. W. Thomas 和 R. D. Young，《格点量子色动力学证据表明 Λ(1405)共振态是反K介子-核子分子态》，《物理评论快报》114，132002 2015 1411 ( )，arXiv: .3402 [hep-lat]。[20] Z. Yang、G.-J. Wang、J.-J. Wu、M. Oka 和 S.-L. Zhu，《连接夸克模型与格点量子色动力学、适用于近阈值 D_s 态的新型耦合道框架》，《物理评论快报》 **128**, 112001 2022 2107 04860 ( ), [ ] arXiv: . hep-ph .[21] E. Veit、A. W. Thomas 和 B. K. Jennings，《云袋模型中的 KN 散射：s、p 和 d 波》，《物理评论 D》31，2242 (1985)。[22] Y. Li、J.-J. Wu、T.-S. Lee 和 R. Young，《有限体积中的广义洛伦兹推动变换及其在哈密顿量方法中的应用》，JHEP 2024 (08)，178，arXiv:2404.16702 [hep-lat]。[23] Y. Lu、H.-J. Jing 和 J.-J. Wu，《从夸克模型视角看强子物理中的相位约定》，《对称性》 **16**, 1061 2024 2407 17131 [ ] ( )，arXiv: . hep-ph .[24] R. D. Young、D. B. Leinweber 和 A. W. Thomas，《手征有效场论的收敛性》，《粒子与核物理进展》50，399 (2003)，arXiv:hep-lat/0212031。[25] R. F. Dashen、E. E. Jenkins 和 A. V. Manohar，《大 N_c **51**, 重子的自旋-味结构》，《物理评论 D》( )，arXiv:hep-ph/ 。[26] J. Jiang、S.-Z. Jiang、S.-Y. Li、Y.-R. Liu、Z.-G. Si 和 H.-Q. Wang，《由手征夸克模型推导的重子手征微扰理论低能耦合常数关系》，《物理评论 D》106，054023 (2022)，arXiv:2206.06570 [hep-ph]。[27] B. Liu 和 B. Zou，《 N^*(1535)的质量和 $K\Lambda$耦合》，《物理评论快报》96，042002 (2006)，arXiv:nucl-th/0503069。[28] J.-J. Xie 和 L.-S. Geng，《 N^*(1535)在$\Lambda_c^+ \to \bar{K}^0\eta p$ 衰变中的作用》，《物理评论 D》96，054009 (2017)，arXiv:1704.05714 [hep-ph]。[29] J.-J. Xie、B.-S. Zou 和 H.-C. Chiang，《N^*(1535)在 $pp \to pp\phi$ 和 $\pi^- p \to n\phi$ 反应中的作用》，《物理评论 C》77，015206 (2008)，arXiv:0705.3950 [nucl-th]。[30] J. Nieves 和 E. Ruiz Arriola，《介子-重子幺正化耦合道手征微扰理论中的 S_{11} - N(1535)和- N(1650)共振态》，《物理评论 D》64，116008 (2001)，arXiv:hep-ph/0104307。[31] M. Doring、E. Oset 和 B. Zou，《 N^*(1535)共振态和 $\pi^- p \to KY$ 振幅在 OZI禁戒 $\pi N \to \phi N$ 反应中的作用》，《物理评论 C》78，025207 (2008)，arXiv:0805.1799 [nucl-th]。[32] R. Pavao、S. Sakai 和 E. Oset，《在 $\Lambda_c \to \bar{K}^0\eta p$ (πN)衰变中产生 N^*(1535)和 N^*(1650)》，《物理评论 C》98，015201 (2018)，arXiv:1802.07882 [nucl-th]。[33] B. Saghai 和 Z. Li，《重子中夸克态的组态混合》，《少体系统》47，105 (2010)，arXiv:1507.00236 [hep-ph]。

[34]GW数据分析中心，π介子–核子散射分析，http://gwdac.phys.gwu.edu/analysis/pin_ analysis.html。[35] N. Isgur 和 G. Karl，《夸克模型中的 P波重子》，《物理评论 D》18，4187 (1978)。[36] S. Capstick 和 N. Isgur，《具有色动力学的相对论化夸克模型中的重子》，《物理评论 D》34，2809 (1986)。[37] J. A. Mickley、W. Kamleh、D. B. Leinweber 和 F. M. Stokes，《通过波函数理解核子激发态的结构》，《物理评论 D》114，034519 (2026)，arXiv:2604.10038 [hep-lat]。[38] X.-H. Cao、Q.-Z. Li 和 H.-Q. Zheng，《通过 πN Roy-Steiner 方程分析研究 S_{11} 道中可能存在的亚阈值极点》，JHEP **2022** 12 073, 2207 09743 ( ), [ ] arXiv: . hep-ph . [39] A. Ciepl´y 和 J. Smejkal，《用于 η **919**, N 振幅 46 2013 1308 的手征动机可分离势模型》，《核物理 A》( )，arXiv: .4300 [hep-ph]。[40] P. Bruns 和 A. Cieply，《针对ηN和 $\eta' N$ 相互作用的耦合道方法》，《核物理 A》992，121630 (2019)，arXiv:1903.10350 [nucl-th]。[41] S. Prakhov、B. Nefkens、C. Allgower、 *et al.*，《测量从阈值到 p (π^-) = 747 兆电子伏/c 的 π^- p $\to \eta$ n》，《物理评论 C》72，015203 (2005)。[42] F. Bulos、R. Lanou、A. Piper、 *et al.*，《654 至 1247 MeV/c 能区内 $\pi^- p$ 反应中的 η 介子及多个中性π介子的电荷交换与产生》，《物理评论》187，1827 (1969)。[43] W. Richards、C. Chiu、R. Eandi、 *et al.*，《 π^- p 碰撞中 η 介子的产生与中性衰变》，《物理评论 D》1，10 (1970)。

[44] J. Feltesse、R. Ayed、P. Bareyre、P. Borgeaud、M. David、J. Ernwein、Y. Lemoigne 和 G. Villet，《$\pi^- p \to \eta n$ 反应至 $p_\eta^* = 450$ 兆电子伏/c：实验结果与分波分析》，Nucl. Phys. B 93, 242 (1975)。[45] Z. Wang、D. B. Leinweber、C. Liu、L. Liu、P. Sun、A. W. Thomas、J.-j. Wu、H. Xing 和 K. Yu（CLQCD），《来自格点量子色动力学的 ρ 共振谱参数》，JHEP 2025 (08), 064, arXiv:2502.03700 [hep-lat]。[46] K. Yu、Y. Li、J.-J. Wu、D. B. Leinweber 和 A. W. Thomas，《格点量子色动力学中 π介子质量对 ρ-介子性质的依赖性研究》，《物理评论 D》109, 034505 (2024), arXiv:2311.03903 [hep-lat]。[47] S. Aoki、K.-I. Ishikawa、N. Ishizuka（ *et al.* PACS-CS），《迈向物理点的味格点量子色动力学》，《物理评论 D》79, 034503 (2009), arXiv:0807.1661 [hep-lat]。[48] M. S. Mahbub、W. Kamleh、D. B. Leinweber、P. J. Moran 和 A. G. Williams，《格点量子色动力学中核子本征态的结构与演化》，《物理评论 D》87, 094506 2013 1302 ( )，arXiv: .2987 [hep-lat]。[49] C. Alexandrou、T. Leontiou、C. Papanicolas 和 E. Stil- iaris，《格点量子色动力学中激发态的新分析方法：核子案例》，《物理评论 D》91, 014506 (2015), arXiv:1411.6765 [hep-lat]。[50] A. L. Kiratidis、W. Kamleh、D. B. Leinweber 和 B. J. Owen，《采用多粒子插值算符的格点重子谱学》，《物理评论 D》91, 094509 (2015), arXiv:1501.07667 [hep-lat]。[51] C. Lang 和 V. Verduci，《格点量子色动力学中 πN 负宇称道的散射》，《物理评论 D》87, 054502 (2013), arXiv:1212.5055 [hep-lat]。[52] R. G. Edwards、J. J. Dudek、D. G. Richards 和 S. J. Wallace，《格点量子色动力学中的激发态重子谱学》，《物理评论 D》 **84**, 074508 2011 1104 5152 ( ), [ ] arXiv: . hep-ph .