arXiv:2611.28693v1 [math.CV] 21 Nov 2026

Janowski函数的扩展及其应用

K. O. BABALOLA

Abstract. Janowski 函数是形如 $p(z) = 1 + p_1 z + \cdots$ 的正则函数，它们从属于 $L_0(a, b: z) = (1 + az)/(1 + bz)$，其中 a，b 为满足 $-1 \le b < a \le 1$ 的实数。本文将上级函数 $L_0(a, b: z)$ 的常数 a 和 b 的取值范围扩展到更大的复数集合，并给出一些应用。

1. Introduction

广义得多的 Janowski 函数族由函数 $p(z) = 1 + p_1 z + \cdots$ 组成，这些函数在单位圆盘 $E = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$ 内解析，且从属于 $L_0(a, b: z) = (1 + az)/(1 + bz)$，其中 a，b 为满足 $-1 \le b < a \le 1$ [12] 的实数。经典 Janowski 函数类在正则单叶函数理论中的重要作用众所周知。实际上，大多数几何函数类都可以用它们来表示，而上级（优势）函数的参数 a 和 b 可以有多种不同取值，

$$L_0(a, b: z) = \frac{1 + az}{1 + bz},\ -1 \le b < a \le 1.$$

例如，参见 [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 14, 16] 中许多与 Janowski 函数相关的研究成果。

然而，众所周知，如上所定义，Janowski映射的参数 a 和 b 一直仅限于实数集。因此，本文旨在将参数 a 和 b 的取值范围扩展到一个定义良好的更大复数集。将这些参数扩展到复数集，为研究单位圆盘内的解析单叶函数提供了更多可能性和新的见解。研究还确定了扩展的 Janowski 函数与其他函数类之间的新关系，从而产生了许多具有应用价值的新解析单叶函数类。

还需指出的是，这些新的关系将为解析单叶函数理论中的许多新研究问题打开闸门。未来将会有大量研究从这一参数扩展中涌现。

谨以此文献给 T. O. Opoola 教授。

我们将通过对函数类的一些新定义来展示这一点。

我们首先仔细定义一个非空概念如下:

设 s 和 t 是复数，且满足:

(i) $|s| \leq 1$, $|t| \leq 1$ 和

(ii) Re $t <$ Re s。

我们确认该概念非空，因为不难从以下例子看出:

例子 1. 对于满足 $-1 \leq b < a \leq 1$ 和 $\lambda \in (-1,1)$ 的实数 a, b, λ，定义

$$s = \frac{a + i\lambda b}{1 + i\lambda},\ t = \frac{b + i\lambda a}{1 + i\lambda} \tag{1.1}.$$

证明。通过简单计算，利用参数 a, b和 λ所满足的条件，我们很容易看出 s 和 t 满足 $|s| \leq 1$、$|t| \leq 1$。类似地，我们得到

$$\mathrm{Re}\ s = \frac{a + \lambda^2 b}{1 + \lambda^2},\ \mathrm{Re}\ t = \frac{b + \lambda^2 a}{1 + \lambda^2}$$

从而

$$\mathrm{Re}\ s - \mathrm{Re}\ t = \frac{(a - b)(1 - \lambda^2)}{1 + \lambda^2} > 0$$

这表明 Re $t <$Re s，正如所需。 □

式 (1.1) 中的这一对是复数 s和 t的生成串。

现在令 Ω 为函数 $\omega(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \cdots$ 构成的函数类，这些函数也是解析的 E，并满足 $\omega(0) = 0$、$|\omega(z)| < 1$ （对 $z \in E$ 成立）。于是，对于 (1.1) 中定义的复数 s和 t，我们称:

Definition. $P[s, t]$ 是由函数 $p(z)$ 构成的函数族，这些函数由 $p(0) = 1$ 归一化，在 E 中解析，并且满足：存在某个 $\omega \in \Omega$,

$$p(z) = \frac{1 + s\omega(z)}{1 + t\omega(z)},\ z \in E. \tag{1.2}$$

等价地， $P[s, t]$ 是函数族

$$p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots$$

满足

$$p(z) \prec L_0(s, t : z) = \frac{1 + sz}{1 + tz},\ z \in E$$

其中， $\prec$ 表示从属关系。

定理 1. 设复数 s 和 t 如 （*1.1*） 中所定义，

$$L_0(s, t : z) = \frac{1 + sz}{1 + tz}$$

定义良好（已归一化，具有正实部，并将单位圆盘 E映射到一个凸域上）。

证明。 对于某些实数 a, b 使得 $-1 \leq b < a \leq 1$, 众所周知, $L_0(a, b: z) = (1+az)/(1+bz)$ 已归一化，具有正实部，并将单位圆盘 E 映射到一个凸域上。因此，只需证明 $L_0(s(\lambda)\ t(\lambda): z)$ 是由 $L_0(a, b: z)$ 定义的半平面到其自身的线性变换 [10]。由于 $s(\lambda)$ 和 $t(\lambda)$ 满足所需条件，因而定义良好，于是我们有

$$\begin{aligned} L_0(s,t:z) &= \frac{\frac{1+az}{1+bz} + i\lambda}{1 + i\lambda\frac{1+az}{1+bz}} \\ &= \frac{L_0(a,b:z) + i\lambda}{1 + i\lambda L_0(a,b:z)}. \end{aligned}$$

这正是将由 $L_0(a, b: z)$定义的半平面映射到自身的线性变换，符合要求。□

由于 $L_0(s, t: z)$是将由$L_0(a, b: z)$定义的半平面映射到自身的线性变换, 因此上述结果的一个重要推论是:

推论1. $P[s,t]$ 中的函数具有正实部。

$P[s,t]$ 类对应于众所周知的Janowski类函数 $P[a,b]$, 当 $s=a$ 且 $t=b$ 时即是如此，而这发生在 $\lambda = 0$时。特别地，若 $s=a=1$ 且 $t=b=-1$, 我们得到Carathéodory函数类P，其由函数 $h(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$ 组成。稍后将展示$P[s,t]$ 的许多特例。

由于 $h = (1+\omega(z))/(1+\omega(z))$, 由(1.2)可得，经过简单但仔细的计算, 有:

定理2。 对于某些 $p \in P[s,t]$ 和 $h \in P$, 以下关系成立:

$$p(z) = \frac{(1+s)h(z) + 1 - s}{(1+t)h(z) + 1 - t}.$$

定理3。 如果 $p \in P[s,t]$, 那么对于 $k = 1$、2、3和$\cdots$, 有 $|p_k| \leq |s-t|$。当 $L_0(s,t: z) = (1+sz)/(1+tz)$时等号成立。

证明。 根据Goel和Mehrok [8], , 由(1.2)可得

$$1 + s\omega(z) = (1 + t\omega(z))p(z) = (1 + t\omega(z)) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k\right)$$

从而

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k = \omega(z) \left((s-t) - t\sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k\right).$$

根据Robertson引理（见 [8],引理2）, 我们有

$$\sum_{k=1}^{n} |p_k|^2 \leq |s-t|^2 + |t| \sum_{k=1}^{n-1} |p_k|^2.$$

也就是说,

$$|p_n|^2 \leq |s-t|^2 - (1-|t|)\sum_{k=1}^{n-1}|p_k|^2 \leq |s-t|^2$$

这证明了该不等式。 □

定理 4. 若 $p \in P[s,t]$ 则

$$|p(z)| \leq \frac{1+|s|r}{1-|t|r}.$$

证明。 由 (1.2)，我们有

$$p(z) = \frac{1+s\omega(z)}{1+t\omega(z)}.$$

将 $\omega(z)$展开成级数，我们有

$$p(z) = 1 + (s-t)\omega(z) + t(s-t)\omega(z)^2 + t^2(s-t)\omega(z)^3 + \cdots.$$

也就是说,

$$p(z) = 1 + (s-t)\sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1}\omega(z)^k$$

使得

$$|p(z)| \leq 1 + |s-t|\sum_{k=1}^{\infty}|t|^{k-1}|\omega(z)|^k.$$

由于 $\omega(z)| \leq |z| = r$，我们有

$$|p(z)| \leq 1 + |s-t|\sum_{k=1}^{\infty}|t|^{k-1}r^k = 1 + |s-t|\frac{r}{1-|t|r} \leq \frac{1+|s|r}{1-|t|r}$$

如所要求的。 □

定理 5. 若 $p \in P[s,t]$。定义

$$q(z) = \int_0^z p(\rho)d\rho.$$

Then

$$|q(z)| \leq -\frac{|s|}{|t|}r - \frac{|s|+|t|}{|t|^2}\ln(1-|t|r).$$

证明。 已知

$$q(z) = \int_0^z p(\rho)d\rho,$$

那么令 $\rho = \sigma e^{i\theta}$。于是我们有

$$|q(z)| \leq \int_0^{\rho}|p(\sigma e^{i\theta})|d\sigma$$

因此，我们有

$$|q(z)| \leq \int_0^{|z|=\rho}\frac{1+|s|\sigma}{1-|t|\sigma}d\sigma$$

通过积分即可证明该定理。 □

我们给出由 (1.1) 定义的、针对 s 和 t 的特定取值，在 $P[s,t]$ 中包含的函数类的一些特殊情形示例。

以下列举几种:

(i) $P[1,-1] \equiv P$，满足 Re $p(z) > 0$ 的卡拉西奥多里函数类,

(ii) $P[1-2\beta,-1] \equiv P_\beta$，阶为 β、$0 \le \beta < 1$ 的卡拉西奥多里函数类，即 Re $p(z) > \beta$,

(iii) $P[1,1/\beta-1] \equiv P(\beta)$，满足 $|p(z)-\beta| < \beta$,$\beta > 1/2$ 的函数类 $p(z)$,

(iv) $P[\beta,-\beta] \equiv P_{(\beta)}$，满足 $|p(z) - 1| < \beta|p(z) + 1|$, $0 < \beta \le 1$ 的函数类 $p(z)$

(v) $P[\beta,0] \equiv P_{(\beta)}$，满足 $|p(z) - 1| < \beta$,$0 < \beta \le 1$ 的函数类 $p(z)$。

此外，对于实数 $\lambda \in (-1,1)$ 和 β，我们有以下例子:

(vi) $P\left[\frac{1-i\lambda}{1+i\lambda}, \frac{i\lambda-1}{1+i\lambda}\right]$ 由满足以下条件的函数 $p(z) = 1 + p_1 z + \cdots$ 组成

$$p(z) \prec \frac{1 + i\lambda + (1 - i\lambda)z}{1 + i\lambda + (i\lambda - 1)z}. \tag{1.3}$$

(vii) $P\left[\frac{1-2\beta-i\lambda}{1+i\lambda}, \frac{i\lambda}{(1-2\beta-1)}{1+i\lambda}\right]$ 由满足以下条件的函数 $p(z)$ 组成:

$$p(z) \prec \frac{1 + i\lambda + (1 - 2\beta - i\lambda)z}{1 + i\lambda - \beta + (i\lambda(1 - 2\beta) - 1)z}, \ 0 \le \beta < 1. \tag{1.4}$$

(viii) $P\left[\frac{\beta+i\lambda(1-\beta)}{\beta}{1+i\lambda}, \frac{}{\beta}{1+i\lambda}\right]$、$\beta > 1/2$，由满足以下条件的函数 $p(z) = 1 + p_1 z + \cdots$ 组成:

$$p(z) \prec \frac{\beta(1 + i\lambda) + [\beta + i\lambda(1 - \beta)]z}{\beta(1 + i\lambda) + [(1 - \beta) + i\beta\lambda]z}, \ \beta > 1/2. \tag{1.5}$$

(ix) $P\left[\frac{\beta(1-i\lambda)}{1+i\lambda}, \frac{\beta}{(i\lambda-1}{1+i\lambda}\right]$ 由满足以下条件的函数 $p(z) = 1 + p_1 z + \cdots$ 组成:

$$p(z) \prec \frac{1 + i\lambda + \beta(1 - i\lambda)z}{1 + i\lambda + \beta(i\lambda - 1)z}, \ 0 < \beta \le 1. \tag{1.6}$$

(x) $P\left[\frac{\beta}{1+i\lambda}, \frac{i\beta\lambda}{1+i\lambda}\right]$ 由满足以下条件的函数 $p(z) = 1 + p_1 z + \cdots$ 组成:

$$p(z) \prec \frac{1 + i\lambda + \beta z}{1 + i\lambda + i\beta\lambda z}, \ 0 < \beta \le 1. \tag{1.7}$$

2. New Subclasses of Functions associated with $P[s,t]$

令 A 为在单位圆盘 E 内解析的函数类 $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$。用 $\phi(z)$ 表示方程

（1.3）至（1.7）中的超从属函数，
并定义

$$f'(z) \prec \phi(z),$$
$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \phi(z)$$

and

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \phi(z),$$

对于函数 $f \in A$。于是，这些函数类分别是有界转向函数、星形函数和凸函数的新子类，它们与具有复参数的扩展函数族 $P[s,t]$ 相关联。

关于与扩展函数族 $P[s,t]$ 相关联的星形函数和凸函数的新子类（以及更多函数类）的论述本身就具有独立的研究价值。然而，在本节中，我们将首先讨论这些新子类中的第一个，即与具有复参数的扩展函数族 $P[s,t]$ 相关联的有界转向函数的新子类，具体如下：

Definition. 若且唯若 $f \in A$ 属于类 $B(\beta,\lambda)$，则称函数 $f \in A$ 为该类中的函数。

$$f'(z) \prec \frac{1+i\lambda+\beta z}{1+i\lambda+i\beta\lambda z},\ 0<\beta\leq 1,\ z\in E.$$

类 $B(\beta,\lambda)$ 定义良好。如下函数：

$$f(z) = -\frac{i}{\lambda}z + \frac{\lambda^2 - i}{\beta\lambda^2}\ln\left(1+\frac{\beta\lambda}{1+i\lambda}z\right) = z + \frac{1}{2}\frac{\beta(i\lambda-1)}{1+i\lambda}z^2 + \cdots \quad (2.1)$$

其导数为

$$\phi(z) = \frac{1+i\lambda+\beta z}{1+i\lambda+i\beta\lambda z}$$

属于 $B(\beta,\ \lambda)$。

类 $B(\beta,\ \lambda)$ 是函数类 R 的子类；该类函数在单位圆盘 E [15] 中的导数具有正实部，具体如下所证：

定理 6。 $B（\beta、\ \lambda）\subset R,$ 即 $B（\beta、\ \lambda）$ 仅由单叶函数组成。

证明。 只需证明上级函数

$$\phi(z) = \frac{1+i\lambda+\beta z}{1+i\lambda+i\beta\lambda z},\ 0<\beta\leq 1,\ z\in E$$

在 E 中具有正实部，即，$\mathrm{Re}\ \phi(z) > 0$。令 $\alpha(z) = 1+\beta z$。于是有

$$2\mathrm{Re}\ \phi(z) = \frac{i\lambda+\alpha}{1+i\lambda\alpha} + \frac{\bar{\alpha}-i\lambda}{1-i\lambda\bar{\alpha}}.$$

化简得

$$2\mathrm{Re}\ \phi(z) = \frac{2(1+\lambda^2)\mathrm{Re}\ \alpha}{|1+i\lambda\alpha|^2}.$$

由于 $z \in E$，不难看出 $\mathrm{Re}\ \alpha(z) = \mathrm{Re}(1+\beta z) > 0$，因此 $\mathrm{Re}\ \phi(z) > 0$。□

定理 7。若 $f \in B(\beta,\lambda)$，则 $|a_k| \le \beta/k$。等号成立当且仅当函数 $f(z)$ 由 (2.1)给出。

证明。由于 $f \in B(\beta,\lambda)$，因此存在 $p \in P[s,t]$，使得 $s = \frac{\beta}{1+i\lambda}$ 且 $t = \frac{i\beta\lambda}{1+i\lambda}$，从而

$$f'(z) = p(z).$$

因此，我们有

$$|ka_k| \le |s-t| = \beta$$

从而 $|a_k| \le \beta/k$。 □

定理 8。如果 $f \in B$（β，λ）那么

$$|f'(z)| \le \frac{1+\lambda^2+\beta r}{1+\lambda^2-\beta\lambda r}.$$

等号成立也由函数 f（z）取得，该函数由（2.1）给出。

证明。由于 $f \in B(\beta,\lambda)$，因此存在 $p \in P[s,t]$，满足 $s = \frac{\beta}{1+i\lambda}$ 和 $t = \frac{i\beta\lambda}{1+i\lambda}$，使得

$$f'(z) = p(z).$$

因此，我们有

$$|f'(z)| = |p(z)| \le \frac{1+|s|r}{1-|t|r}$$

从而利用 $|s| = \beta/(1+\lambda^2)$ 和 $|t| = \beta\lambda/(1+\lambda^2)$，可得所需不等式。□

定理 9。设 $f \in B$（β，λ）。则

$$|f(z)| \le -\frac{1}{\lambda}r - \frac{(1+\lambda)(1+\lambda^2)}{\beta\lambda^2}\ln\left(1-\frac{\beta\lambda}{1+\lambda^2}r\right) = r + \frac{\beta(1+\lambda)}{2(1+\lambda^2)}r^2 + \cdots.$$

等号成立同样适用于函数 $f(z)$，该函数由 (2.1) 给出。

证明。这由定理 5 得出，取 $f(z) = q(z) = \int_0^z p(\rho)d\rho$，并按要求使用 $|s| = \beta/(1+\lambda^2)$ 和 $|t| = \beta\lambda/(1+\lambda^2)$。□

3. The Case $\lambda = 0$

函数类 $B(\beta,\ 0)$ 是满足以下条件的函数 $f(z)$ 的子类

$$|f'(z) - 1| < \beta,\ 0 < \beta \leq 1,\ z \in E.$$

取 $\lambda = 0$ 于 $B(\beta,\ \lambda)$，即可得到以下推论：

推论 2. 若 $f \in B(\beta,0)$，则 $|a_k| \leq \beta/k$。当函数 $f(z)$ 取为以下形式时，等号成立：

$$f(z) = z + \frac{\beta}{2}z^2 + \cdots . \tag{2.2}$$

推论 3. 若 $f \in B(\beta,\ 0)$ 则

$$|f'(z)| \leq 1 + \beta r.$$

当函数 $f(z)$ 取为 (2.2) 所示形式时，等号也成立。

推论 4. 令 $f \in B(\beta,\ 0)$。则

$$|f(z)| \leq r + \frac{\beta}{2}r^2 + \cdots .$$

函数 $f(z)$ 由(2.2)给出时，等号也成立。

4. Concluding Remarks

本文开启了对许多函数子类的研究，例如与带有复参数的 Janowski 函数 $P[s,t]$ 相关的星形函数和凸函数子类。这些研究将在近期及未来为感兴趣的研究人员带来富有成效的探索。

致谢。 谨以此文献给我的老师、导师、良师益友以及 Mathematics 教授 T. O. Opoola 教授。他最近从尼日利亚伊洛林伊洛林大学的现职岗位上退休。作者感谢这位教授在其学术发展过程中给予的巨大帮助，尤其是在作者多年从业、重返校园开启学术生涯之际，教授仍相信他的能力。

作者在访问奥巴费米·阿沃洛沃大学期间，于尼日利亚伊莱伊费的数学系完成了这项工作。作者感谢该系全体教职员工的热情款待，尤其感谢系主任 B. S. Ogundare 教授。

作者感谢审稿人提出的宝贵意见和建议。

References

[1] Abubekri, A. A., *Geometric properties of new subclasses of meromorphic harmonic functions associated with Janowski functions defined by q-calculus*, 函数空间杂志 (Wiley) **2025** (1), (2025), 1–12.

[2] Aghalary, B. and Kulkarni, S. R., *Some properties of the integral operators in univalent function* 1 2001 1 9 , Stud. Univ. Babes-Bolyai Math. XLVI ( ), ( ), – . [3] Alanasi, F. D. and Asarari, F., *Geometric convolution characteristics of q-Janowski type functions related to* (j, k) *-symmetrical functions*, AIMS Mathematics 10, 3 (2025), 6652–6663. [4] Ali, R. M., Chandrashekar *Differential subordination* , *for Janowski functions with positive real part* **66** 3 R. and Ravichandran, V., , Stud. Univ. Babes-Bolyai Math. ( ), (2021年), 457–470. [5] Alsarari, F., Alkammash E *Some properties of Janowski symmet-* , A. and Deniz, , , *rical functions* **14**, 2526 2022 1 9 Symmetry ( ), – . [6] Anand, S., Kumar *Janowski starlikeness for a class of* , *analytic functions* **24** 4 2011 501 505 S. and Ravichandran, V., , Appl. Math. Let. ( ), ( ), – . [7] Andrei, L., and Vasile-Aurel *Janowski-type q-classes involving higher-order* , C., , Fractal *q-derivatives and fractional integral operators* **9** 11 699, 2025 1 19 Fract. ( ), ( ), – . [8] Goel, R. M. and Mehrok, B. S., *A subclass of univalent functions*, J. Austral. Math. Soc. (Series A) 35, (1983年), 1–17. [9] Gul, I., Al-Sa'di, S., Noor, K. I. and Hussain, S., *On a subfamily of q-starlike functions with respect to m-symmetric points associated with the q-Janowski function*, Symmetry 15, 652 (2023年), 1–12. [10] Goodman, A. W., *Univalent functions*, 第一卷, Marina Pub. Co., 坦帕, 佛罗里达州, 1993年.[11] Strivastava, H. M., Tahir, M., Khan, B., Ahmad, Q. M. and Khan, N, *Some general classes of q-starlike functions associated with the Janowski functions*, Symme- try 11, 292 (2019), 1–14. [12] Janowski, W., *Some extremal problems for certain families of analytic functions I*, Ann. Polon. Math. 28, (1973年), 297–326. [13] Liu, D., Araci *A subclass of Janowski starlike functions involving* , S. and Khan, B., , *Mathieu-type series* **14**, 2 2022 1 15 Symmetry ( ), – . [14] Ma, L., Li *On some classes of harmonic functions associated* , S. and Tang, *with the Janowski function* **11**, 17, 3666 2023 1 21 H., , Mathematics ( ), – . [15] MacGregor, T. H., *Functions whose derivative has a positive real part*, Trans. Amer. Math. Soc. 104 (1962年), 532–537. [16] Xiong, L. and Liu, X., *A general subclass of close-to-convex functions*, Krag. J. Math. Soc. 36 (2) (2012年), 251–260.

当前地址
尼日利亚伊莱伊费奥巴费米·阿沃洛沃大学数学系 kobabalola@oauife.edu.ng

永久地址
数学系 尼日利亚伊洛林大学
babalola.ko@unilorin.edu.ng
kobabalola@gmail.com