Bethe晶格上安德森模型局域相中的逆参与率修正

Tommaso Rizzo[1,2], MarcoTarzia[3,4] 和 Angelica Vecchiarelli[1,3]物理系，萨皮恩扎大学，*PiazzaleA. Moro 2，I-00185*，罗马，意大利[2]*ISC-CNR*，罗马分部，萨皮恩扎大学，*PiazzaleA. Moro 2，I-00185*，罗马，意大利[3] *LPTMC*，*CNRS-UMR 7600*，索邦大学，*4Pl. Jussieu，F-75005*巴黎，法国[4] 法国大学研究院，*1rueDescartes*，*75231 ParisCedex 05*，法国

arXiv:2611.28705v1 [cond-mat.dis-nn] 21 Nov 2026

我们证明，Bethe晶格上安德森模型局域相中的有限尺寸效应具有高度反常的特征。在含有N 个位点的随机正则图上，逆参与率（IPR）以$I_2(N)-I_2^{\infty}\sim N^{-\kappa(W)}$的形式趋近其热力学极限值，其中 $0<\kappa<1$ 是贯穿整个局域相的无序依赖指数；同一指数也控制有限虚数调节参数所导致的修正，$I_2(\eta)-I_2^{\infty}\sim\eta^{\kappa(W)}$。我们在一个与Bethe晶格上安德森模型具有相同临界性质的可解模型中推导出 $\kappa=2\beta-1$，其中 β 是局域态密度分布的幂律尾指数。随后我们证明，同一机制也存在于安德森模型本身，并发现其与数值结果定量一致。对有限图中环进行自洽单圈处理，也独立地再现了有限尺寸修正。从物理上看，一个谱恒等式和一个精确求和规则将这两种修正都与使相距遥远的局域本征态发生杂化的稀有莫特型共振联系起来：有限图缺少那些中心间距超过其尺寸所允许范围的共振对。我们的结果确定了将逆参与率数据外推至热力学极限所需的标度变量。

安德森局域化（AL） [1]是凝聚态物理中最引人注目的现象之一 [2–4]。Bethe晶格（BL）上的安德森局域化占据着独特的地位：安德森模型在该晶格上可精确求解 [5–24]；它为遍历性破缺和多体局域化（MBL）提供了单粒子类比 [25–33], , 因为相互作用系统的动力学问题等价于在其希尔伯特空间所构成的高维图上的跳跃问题；此外，由于安德森局域化的上临界维度为$d_u=\infty$ [17, 34–36], , 因此它是研究实空间和希尔伯特空间局域化的自然平均场出发点。

尽管已有精确解，贝特格模型仍不断揭示出一些微妙之处 [18–21, 23, 24]：其数值研究受到极强的有限尺寸效应影响，以至于长期以来人们一直争论渐近解本身是否有效 [37–49]。

我们关注局域相的序参量——逆参与率（IPR）$I_2=\langle\sum_i|\psi_\alpha(i)|^4\rangle$ ——的有限尺寸行为。在离域相中，I_2 随 $1/N$ 趋于零；在相变处则发生不连续跃变，达到有限值 [6–16], , 随后在局域相中呈现平方根奇异性 [23]。因此，从有限尺寸数值计算中提取其热力学极限颇为微妙，而 IPR 的正确有限尺寸标度（FSS）仍存在争议 [18, 44, 50–55]。

基于文献 [23], 中对渐近逆参与率的精确控制，我们表明，在局域相中，逆参与率的修正以一种不同寻常且连续变化的指数 $\kappa(W)\in(0,1)$衰减，即使远离W_c也是如此；同一个指数还控制着有限尺寸修正以及有限虚数调节参数引起的修正η。利用双曲超平面 [56–59], 上的一个可解玩具非线性 σ模型（NLσM）——该模型与贝特格上的安德森模型具有相同的不同寻常的临界行为——我们推导出 $\kappa=2\beta-1$，其中 β 是局域态密度（LDoS）分布 [60]的尾部指数。随后我们表明在若干明确假设下，同一机制也作用于安德森模型的腔方程，并且该预测无需任何可调参数便与数值结果相符。最后，对腔方程进行自洽单圈处理，定量地重现了有限尺寸修正。

这些结果有着清晰的物理解释。谱恒等式和精确求和规则将这两项修正都与同一个函数$N^2\mathscr{C}(\omega)$联系起来；该函数正比于能量间距为 ω的两个本征态的平均重叠，而 η 和N 则充当红外截断。能量相近的两个本征态通常局域在相距甚远的位置，重叠呈指数级小，但平均重叠由少数重叠量级为 1 的配对主导。正如文献 [61], 所述，这些配对即为莫特型共振：两个局域态 ψ_A 和 ψ_B 的中心相距甚远，它们杂化形成 $\psi_1=\cos\theta\,\psi_A+\sin\theta\,\psi_B$ 和 $\psi_2=\sin\theta\,\psi_A-\cos\theta\,\psi_B$。与 ψ_A 和 ψ_B不同，这两个态具有有限重叠 $\simeq\sin^2\theta\cos^2\theta\,(I_A+I_B)$，且其逆参与率降低为 $\simeq\cos^4\theta\,I_A+\sin^4\theta\,I_B$（当 ψ_1时），其中$I_{A,B}$是 $\psi_{A,B}$的逆参与率。通过谱恒等式， $\kappa=2\beta-1$意味着此类配对的密度按 ω变化 $^{-2(1-\beta)}$ 在较小的分裂 ω下，基于本征态振幅精确统计的Mott型计数可以对此作出解释。因此，给定本征态属于这种杂化的双峰对的概率很小。在有限图上，若两个中心之间的距离大于典型距离 $\sim\ln N/\ln k$，相应的双峰对就无法形成，而精确对角化表明，这一缺失解释了有限尺寸修正的大部分。

劈裂小于 ω,$\propto\omega^{2\beta-1}$ 的共振权重仅在 $\beta>1/2$ 时随 $\omega\to0$ 消失：随着接近 W_c，杂化态变得越来越不罕见，其中$\beta\to1/2$ [5]，而当共振大量出现时，局域化便消失 [1, 62, 63]。在离域侧，本征态由许多局域态杂化而成，这些局域态之间的距离在相变处发散，正如参考文献

[17]中的图示。

我们考虑标准的安德森紧束缚哈密顿量

$$\mathscr{H} = -t \sum_{\langle i,j \rangle} \left(|i\rangle\langle j| + |j\rangle\langle i| \right) + \sum_{i=1}^{N} \epsilon_i |i\rangle\langle i| , \tag{1}$$

其中 $t = 1$，位点能量 ϵ_i 彼此独立，且在$[-W/2$内均匀分布，$W/2]$。对于有限的N（，贝特格由 $(k+1)$正则随机图（随机正则图）实现；这些图局部呈树状，环的典型长度为 $\sim \ln N / \ln k$ [64–66]。我们固定$k = 2$，此时局域化跃迁发生在$W_c \simeq 18.17 \pm 0.01$ [19, 21]。

对带中心$E_\alpha = 0$ 处的本征态 α 及无序取平均后，逆参与率I_2, 的渐近值$I_2^{\infty}(W)$ 可由预解式$G(z) = [\mathscr{H} - z]^{-1}$,$z = E + \mathrm{i}\eta$推出；其对角元$G_{ii}$（局域格林函数）可精确确定逆参与率 [23, 67]:

$$I_2(\eta) = \frac{\eta \langle |G_{ii}|^2 \rangle}{\langle \operatorname{Im} G_{ii} \rangle} , \tag{2}$$

其中 $I_2^{\infty} = \lim_{\eta \to 0^+} I_2(\eta)$ 在 $N = \infty$ 时。在无限 BL 上，G_{ii}可由“腔”格林函数 $G^{i \to j}$精确确定；它们是预解式的对角元，其中移除了 i 的邻居j，并满足封闭的递推关系 [5, 62]

$$G^{-1}_{i \to j} = \epsilon_i - \mathrm{i}\eta - \sum_{m \in \partial i \setminus j} G_{m \to i} , \tag{3}$$

由此可得局域格林函数:

$$G^{-1}_{ii} = \epsilon_i - \mathrm{i}\eta - \sum_{m \in \partial i} G_{m \to i} . \tag{4}$$

在无限 BL 上通过群体动力学 [5, 68] 求解方程 (3)，可得 $I_2(\eta)$，因此在极限 $\eta \to 0^+$ [23] 下有 I_2^{∞}，有限调节参数修正为 $I_2(\eta) - I_2^{\infty}$；在 $\eta = 0$ 处对有限随机正则图进行精确对角化，可得有限尺寸修正 $I_2(N) - I_2^{\infty}$ [69]。

直观而言，人们会预期这两种修正都是规则的。然而，我们发现，在整个局域相中，两种修正都遵循幂律 [图 1(a) 和 (b)],

$$I_2(N, \eta{=}0) \simeq I_2^{\infty} + c_N N^{-\kappa_N(W)} , \tag{5a}$$

$$I_2(N{\to}\infty, \eta) \simeq I_2^{\infty} + c_\eta \eta^{\kappa_\eta(W)} , \tag{5b}$$

其指数 κ_N、$\kappa_\eta \in (0,1)$ 会随无序强度连续地变化；随着 W增大并偏离W_c [图1(c)]，该指数单调增加。这种贯穿整个相的非普适指数，让人联想到贝列津斯基–科斯特利茨–索利斯转变的低温相 [70, 71]，（安德森跃迁在随机正则图上的情形曾与之比较） [50, 54, 55]，，更确切地说，让人联想到格里菲斯相 [72, 73]，，在那里幂律源于稀有区域：正如我们将在下文展示的，这里的 κ 继承自局域态密度分布的幂律尾，即源于稀有的共振构型——据我们所知，这是首个由这种机制支配远离临界点的序参量有限尺寸修正的实例。相比之下，在局域化相深处，前因子仅弱依赖于W [74]。两种幂律都是渐近形式：它们适用于 $\kappa \ln N \gg 1$ [$\kappa \ln (1/\eta) \gg 1$]的范围；随着$W \to W_c$，该范围会移动到越来越大的尺寸，此时前因子 $\propto 2\beta - 1$ 消失，修正过渡到临界$1/\ln N$行为 [60]。

另一个显著特征是，在所考察的所有无序强度下，两个指数在拟合精度范围内均相等$\kappa_N(W) \simeq \kappa_\eta(W) \equiv \kappa(W)$ [图1(c)]：真正的有限尺寸效应与人工谱展宽具有相同的指数。如下文所示，$\kappa = 2\beta - 1$ 由局域态密度分布的尾部指数 β 决定；这一无参数预测 [在图1(c)中的虚线] 在整个局域相范围内都能追踪κ_N 和κ_η [75]。

要理解为何两种修正具有相同的指数，将谱形式$G_{ii} = \sum_\alpha |\psi_\alpha(i)|^2 / (E_\alpha - \mathrm{i}\eta)$ 代入式（2）的分子。$I_2(\eta)$ 随后分解为对角部分，即$O(N\eta)$ 本征态中能量距$E = 0 \sim \eta$ 以内的逆参与率；它与I_2^{∞} 仅相差解析的$O(\eta)$项；以及非对角部分，其中能量相近的本征态对 $\alpha \neq \alpha'$ 以$O(1/\eta)$ 乘以其空间重叠的权重参与计算。在宽度远大于 η的能量窗口上取平均后，后者给出

$$I_2(\eta) - I_2^{\infty} \simeq \langle \rho \rangle \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \, N^2 \mathscr{C}(\omega) \, \frac{4\eta^2}{\omega^2 + 4\eta^2} , \tag{6}$$

其中 $\langle \rho \rangle$ 是每个节点的平均态密度，而$N^2\mathscr{C}(\omega) = N \langle \sum_i |\psi_\alpha(i)|^2 |\psi_{\alpha'}(i)|^2 \rangle$ 是在能量为$E_\alpha = 0$（参考能量）和$E_{\alpha'} = \omega$的本征态对上取平均得到的本征态关联函数，在参考文献 [18, 61] [中 $\beta(\omega)$ 记作]。其有限尺寸修正源于一个精确求和规则：由于 $\sum_{\alpha'} |\psi_{\alpha'}(i)|^2 = 1$，本征态的逆参与率为$1 - \sum_{\alpha' \neq \alpha} \sum_i |\psi_\alpha(i)|^2 |\psi_{\alpha'}(i)|^2$，即一减去它与所有其他本征态的总重叠。在 $\eta = 0$因此，有限尺寸修正就是在包含N 个位点的图上，该总重叠的亏缺，

$$I_2(N) - I_2^{\infty} \simeq \langle \rho \rangle \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \left[N^2 \mathscr{C}_\infty(\omega) - N^2 \mathscr{C}_N(\omega) \right], \tag{7}$$

其中 $N^2\mathscr{C}_\infty \equiv \lim_{N \to \infty} N^2 \mathscr{C}_N$为式（6）的函数，缺失部分集中在较小的 $|\omega|$ [60]处：有限 η 无法分辨劈裂为 $\omega \lesssim \eta$ 的配对，而有限图中则不存在这些配对。能量相差在 η 以内的两个态，通常相距 $d_{\mathrm{typ}} \simeq \ln(1/\eta)/\ln k$，且重叠呈指数级微小；但支配平均重叠及其高阶矩的罕见共振对 [76–78] 给出$N^2\mathscr{C}(\omega) \propto |\omega|^{-\mu(W)}$, $0 < \mu < 1$ [61]；代入式（6）可得 $I_2(\eta) - I_2^{\infty} \propto \eta^{1-\mu}$，即 $\kappa = 1 - \mu$。在式（7）中，精确对角化表明，缺失量会在劈裂低于几个平均能级间距时逐渐累积，$\omega_N \sim 1/(N \langle \rho \rangle)$ [60]；因此，若其随 ω_N 缩放，则 $I_2(N) - I_2^{\infty} \propto \omega^{1-\mu_N} \propto N^{-\kappa}$，且指数相同。于是，方程（5）表明存在一种单一的

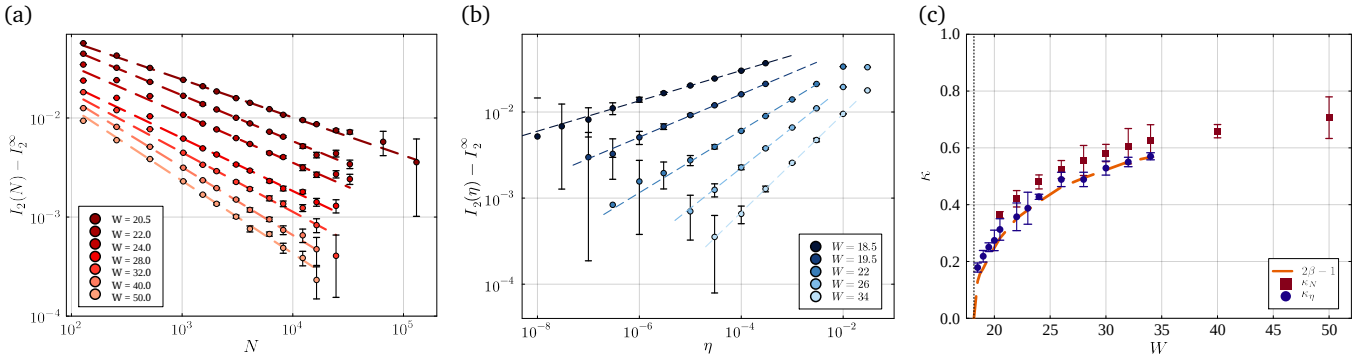

图1. 局域相中渐近逆参与率的修正，针对若干个W值。(a) 精确对角化得到的$I_2(N)-I_2^\infty$与N的关系，取值为 $\eta = 0$；(b) 腔体解得到的$I_2(\eta)-I_2^\infty$ 与 η 的关系，取$N = \infty$。虚线：对方程(5a)和(5b)进行幂律拟合。(c) 由这些拟合得到的指数 κ_N（方块）和κ_η（圆圈）与W的关系。虚线：无参数预测 $\kappa = 2\beta(W) - 1$ [方程(11)]，，其中 $\beta(W)$ 由方程(9)独立求得。

标度形式，它们分别对应其两个相反的极限，

$$I_2(N,\eta) - I_2^\infty = N^{-\kappa(W)}\,\Psi(N\eta), \tag{8}$$

其中 $\Psi(y) \to c_N$ 作为 $y \to 0$，而 $\Psi(y) \to c_\eta y^\kappa$ 作为 $y \to \infty$；在渐近区域 $\kappa \ln N$，$\kappa \ln(1/\eta) \gg 1$：这是对本征态关联施加相同红外截断的两种方式。

控制方程 (5) 和 (8) 的指数与贝特格上安德森模型精确解的一个性质相关：在局域相中，局域格林函数的逆的实部$Q_{0^+}(m$和重标度虚部$\hat{}m)$ 的联合分布m 与$\hat{}m$，即$M_{ii} \equiv G^{-1}{}_{ii} = m - \mathrm{i}\eta\hat{}m$，在 $\eta \to 0^+$ 极限下求得时，会在$m = 0$ 处呈现幂律尾：

$$Q_{0^+}(0,\hat{m}) \simeq \mathrm{cst}\,\hat{m}^{-1-\beta}, \qquad \hat{m} \to \infty, \tag{9}$$

其无序依赖指数为 $\beta \simeq 1/2 + c_\beta\sqrt{W - W_c}$，当$W_c$ [6–18, 23]附近时。在共振位点，$\hat{}m^{-1}$ 是以 $1/\eta$为单位的局域态密度，即共振本征态在该节点上的权重 $|\psi_\alpha(i)|^2$ [17, 23]。

这赋予了 β 实空间意义。较大的 $\hat{}m$表示一个远处局域化的本征态，其尾部延伸至该节点，但权重很小 $u = 1/\hat{}m$，分布为 $T_\infty(u) \propto u^{\beta-2}$ [17]（精确对角化证实，尾部由一个遥远的本征态承载 [60]）。随后，现象学的 Mott型计数 [61, 76] 确定了 μ。当一个局域化在该节点的态与这样一个遥远态之间的能量间隔小于其耦合 $\sim\sqrt{u}$时，二者便会发生杂化，形成一个重叠为 $O(1)$、劈裂为 $\omega \sim \sqrt{u}$ 的配对；此类配对的密度为 $\propto T_\infty(u)\sqrt{u}\mathrm{d}u$，在 $u \sim \omega^2$处给出$N^2\mathscr{C} \propto \omega^{-2(1-\beta)}$，即 $\kappa = 1 - \mu = 2\beta - 1$。这是参考文献 [61]，中估算的结果，只是将波函数衰减的平均值替换成了精确统计：罕见的大重叠由同一个小u 尾部控制，而正是这个尾部使典型重叠呈指数级小。精确对角化 [60, 61] 以及在无限 BL 上直接进行的群体动力学 $\eta = 0^+$ [60] 证实了 $\mu = 2(1-\beta)$，其中振幅由方程（6）确定；广义重叠 $N\langle\sum_i |\psi_\alpha(i)|^{2p}|\psi_{\alpha'}(i)|^{2s}\rangle(\omega)$ 都以相同的指数衰减，因此所有整数阶矩 $I_q = \langle\sum_i |\psi_\alpha(i)|^{2q}\rangle$（更一般地，具有 $q > \beta$ 的矩）都共享 κ；一对杂化配对中的两个本征态分布在相同的两个中心上，它们之间的距离随 $\ln(1/\omega)$ [60] 增长。

为了从解析上了解 β 如何传递到有限-η 修正中，我们使用双曲超平面 [56, 57, 79–81], 上的一个可解“玩具” NLσM。它具有真实安德森跃迁的非紧致分次对称性；正如 Gruzberg 和 Mirlin 所示 [58]（另见参考文献 [59]），它还具有贝特格临界性的特殊性质，包括指数β的结构。

该玩具模型定义在五分量超向量 $\psi = (\sigma, \pi_1, \pi_2, \bar{\xi}, -\xi)$ 上，这些超向量的双曲范数为单位值，$||\psi||^2 = \sigma^2 - \pi_1^2 - \pi_2^2 - 2\bar{\xi}\xi = 1$；其哈密顿量为 $\mathrm{H_{hs}} = \mathrm{J}\sum\langle \mathrm{ij}\rangle\ \psi_i\cdot\psi_j + \mathrm{H}\sum\mathrm{i}\ \sigma_i$，定义在分支比为 k 的贝特格上。这里，J 扮演 1/W 的角色，而对称性破缺场 H 则扮演 η 的角色，从而正则化同一个非紧致零模。我们关注的顺磁相 $\mathrm{J} < \mathrm{J_c}$，对应于局域相。该模型通过关于场分布 $\tilde{\mathrm{P}}(\theta)$ [58, 60] 的腔递归求解，其逆参与比代理量为 $\mathrm{I_2(H)} = \mathrm{e}^{-2H/(k-1)}\mathrm{H}\int_0^\infty \mathrm{d}\theta\,\mathrm{e}^{-H}\cosh^\theta\tilde{\mathrm{P}}^{k+1}(\theta)\sinh\theta$。

对于 $\cosh\theta = \mathrm{e}^t/\mathrm{H}$ 和 $\mathrm{P}_H(\mathrm{t}) \equiv \tilde{\mathrm{P}}(\theta)$，$\mathrm{H} = 0$腔方程在其平凡不动点 $\mathrm{P} \equiv 1$附近线性化后，得到 $1 - \mathrm{P}_0(\mathrm{t}) \propto \mathrm{e}^{\beta}\mathrm{t}$，其中 β满足 $1/\mathrm{k} = \mathrm{K}_{\beta-1/2}(\mathrm{J})/\mathrm{K}_{-1/2}(\mathrm{J})$ [58]——它是式（9）中 β 的对应项，其值由一个与 Abou-Chacra–Anderson–Thouless 条件结构相同的条件确定。由于 $\mathrm{K}_\nu = \mathrm{K}_{-\nu}$，该方程有两个根 β和 $1-\beta$，并在 $\mathrm{J} \to \mathrm{J_c}$时于 1/2 处合并；$\mathrm{H} = 0$ 解由较大的根$\beta > 1/2$控制。小 H 会在两个区间内扰动该不动点：体区（$\mathrm{t} = \mathrm{O}(1)$），其中修正项是线性积分方程的解 $\mathrm{f_{typ}(t)}$；以及边界层（$\mathrm{t} - \ln\mathrm{H} = \mathrm{O}(1)$）。将两者匹配 [60] 可得

$$P_H(t) - P_0(t) = a_{\mathrm{typ}}(H)\,f_{\mathrm{typ}}(t), \qquad a_{\mathrm{typ}}(H) \propto H^{2\beta-1}, \tag{10}$$

因为边界层中产生的权重为 $\propto H^{\beta}$ 的微扰沿着次主根传播到体区，$f_{\mathrm{typ}}(t)\simeq e^{(1-\beta)t}$（当 $t\to-\infty$ 时），使其放大 $H^{-(1-\beta)}$ 倍。由于逆参与比代理量 $I_2(H)$ 是对 $P_H(t)$ 的积分，且其主要贡献来自体区，因此式（10）直接给出

$$I_2(H)-I_2(0)\propto H^{2\beta-1},\tag{11}$$

即 $\kappa=2\beta-1$，图1(c) 中数值发现的关系。在临界点，两个根合并，匹配给出一个对数修正，$\mathrm{I_2(H)-I_2(0)\propto 1/|ln\ H|}$，但只有当 $|\ln \mathrm{H}|\gtrsim 50$时才能达到，因此 Ref. [18] 中拟合的 $\ln(1/\eta)$ 的有效幂次是前渐近的 [60]。在接近 J_c 时，匹配给出完整的交叉行为，$\mathrm{I_2(H)-I_2(0)\propto\kappa/(H^{-\kappa}-1)}$，从 $\kappa\mathrm{H}^{\kappa}$（当 $\kappa|\ln \mathrm{H}|\gg 1$时）到 J_c [60]处的 $1/|\ln \mathrm{H}|$；其中前者的前因子随 κ线性趋于零。由于 N 扮演了 $1/\eta$ [Eq. (8)]，的角色，我们相应地预期，在接近 W_c 时，$\mathrm{I_2(N)-I_2^{\infty}\propto\kappa/(N^{\kappa}-1)}$，即 $1/\ln \mathrm{N}$ 乘以标度变量 $\kappa\ln \mathrm{N}$ 的一个函数；在 W_c处，该函数变为 $\propto 1/\ln \mathrm{N}$；精确对角化和群体动力学支持这一形式 [60]。同样的机制也作用于 Anderson 模型的腔方程 (3)，其依据是若干得到数值支持的明确假设 [60]。对于腔格林函数的实部和重标度虚部的联合分布，这些方程仅通过 η^2依赖于 η，因此，该分布的非解析修正只能源于在其不动点附近线性化的 $\eta=0$ 递推关系的零模。其尾部 $\propto \hat{\mathrm{m}}^{-(2-\beta)}$ 由 Abou-Chacra–Anderson–Thouless 条件 [5, 62], 的第二个根 $1-\beta$ 控制，将其与 $\hat{\mathrm{m}}\sim 1/\eta$ 处的边界层进行匹配，再次得到一个振幅 $\propto\eta^{2\beta-1}$。越过边界层后，分布按 $\hat{\mathrm{m}}^{\beta-3}$ [60]衰减。

玩具模型预测的不仅是逆参与率的标度：根据式（10），全部体区分布的修正可分解为振幅 $\propto H^{2\beta-1}$ 乘以一个与H无关的函数$f_{\mathrm{typ}}(t)$。Anderson 问题的完整分布也应如此。

我们直接检验有限-η 和有限 N 问题中起到 $\mathrm{P}_H(\mathrm{t})$ 作用的两个分布：$\mathrm{m}=0$处局域格林函数变量 $\hat{\mathrm{m}}$ 的分布 $\mathrm{Q}_{\eta}(\hat{\mathrm{m}})=\mathrm{Q}_{\eta}(0,\hat{\mathrm{m}})/\int_0^{\infty}\mathrm{Q}_{0^+}(0,\hat{\mathrm{m}})\mathrm{d}\,\hat{\mathrm{m}}$，以及有限 N 时本征态振幅 $\mathrm{u}=|\psi_{\alpha}(\mathrm{i})|^2$的分布 $\mathrm{T}_N(\mathrm{u})$，后者在 $\mathrm{N}\to\infty$ 时与 $\mathrm{T}_{\infty}(\mathrm{u})=\mathrm{Q}_{0^+}(1/\mathrm{u})\mathrm{u}^{-3}$ [17, 23] 相关。直接类比式（10），我们推测

$$\overline{Q}_{\eta}(\hat{m})-\overline{Q}_{0^+}(\hat{m})=\eta^{\kappa}\,g_{\eta}(\hat{m}),\tag{12a}$$

$$T_N(u)-T_{\infty}(u)=N^{-\kappa}\,g_N(u),\tag{12b}$$

具有与逆参与率相同的指数 $\kappa=2\beta-1$，且标度函数 g^{η}、g_N 仅依赖于 W。事实上，我们预期的不止如此：两种情况下的体修正都是同一个线性化 $\eta=0$、$N=\infty$ 腔递归的零模。任何注入远尾部的微弱微扰——无论是有限调节项，还是有限图的环诱导项（见下文）——都必须弛豫至该零模；微扰的性质仅通过振幅体现。

因此，用对应变量表示后，两个标度函数除一个常数因子外应当重合，$g_N(u)=Au^{-3}g_{\eta}(1/u)$ 其中 $A=c_N/c_{\eta}$ [图2(b)]。图2证实了这一图景：重标度后的差异在 η 的多个数量级范围内（N 跨越一个半数量级）塌缩到一条主曲线上，而且有限-η 和有限-N 的主曲线彼此重合，A 接近于 1（随 N 缓慢漂移，这是一个次阶效应 [60]）——这比图1(c)中的指数吻合严格得多：两种修正之间的对应关系延伸至本征态振幅分布的体区。

在有限随机正则图上，精确对角化直接揭示了修正的实空间起源 [60]：双峰本征态两个峰之间距离的分布在所有N 下都相同，直至截断在$d\approx\ln N/\ln k$处，其量级与两个节点之间的典型距离相当。那些本应与距离更远的伙伴杂化的本征态仍局域在单个中心上，具有更大的逆参与率；根据方程（7），这一缺失导致$W=22$处$I_2(N${v17>随着 N 增大而下降，其中大部分降幅由此造成。

用腔语言来说，修正来自环。腔方程（3）–（4）只有在严格的$N\to\infty$ 极限下才精确；在该极限下，移除某个节点后，该节点的任意两个邻居之间只能通过长度无限的路径相连。有限随机正则图仅在局部呈树状：一个节点位于 $\sim k^L/(2$ N{v10>个长度为L的环上；当$L\ll\ln N/\ln k$时，这类环很少见，但当$L\sim\ln N/\ln k$时，其数量为一阶量级；通过这些环，这两个邻居仍保持连通。这些环会在方程（3）右侧产生额外的非对角项$G_{m_1m_2\to i}$，从而导致逆参与率的有限N 修正。

我们在一种近似的、自洽的单环方案中恢复这些项（详见文末补充材料），其思路与随机图模型中 Bethe近似的圈修正 [82–84], 相同；这些修正也控制着模型的有限尺寸修正 [85–87]：$G_{m_1m_2\to i}$ 项通过连接m_1 和m_2 [的最短路径所产生的贡献来近似，该路径经过图 4(a)], 中的i并闭合成一个环；其可表示为沿该路径的对角腔格林函数之积 [24], ，而路径长度则取自随机正则图的环统计 [64–66]。这样便可在扩展的群体动力学中闭合腔递归。对于给定的路径长度截断 $\ell_{\max}$（环长度$\ell+2$），将其映射为有效的 N，满足 $\ln N\simeq(\ell_{\max}+1)\ln k$，求解该方案即可重现 I PR 的有限$N$ 修正，并在该方案适用的范围内 [与精确对角化及其幂律外推结果定量一致，见图 3]。由于环项具有随机符号，它们并非作为平均意义上的调节器发挥作用，而是作为远尾部的一种稀有事件扰动，作用于式（9）的远尾部，并激发出与有限 η 相同的零模（详见文末补充材料）。

为什么有限图上的共振截断会在平均能级间距量级的劈裂处出现，以及它与单环方案中的长回路有何关系，仍然是悬而未决的问题。

总之，局域化

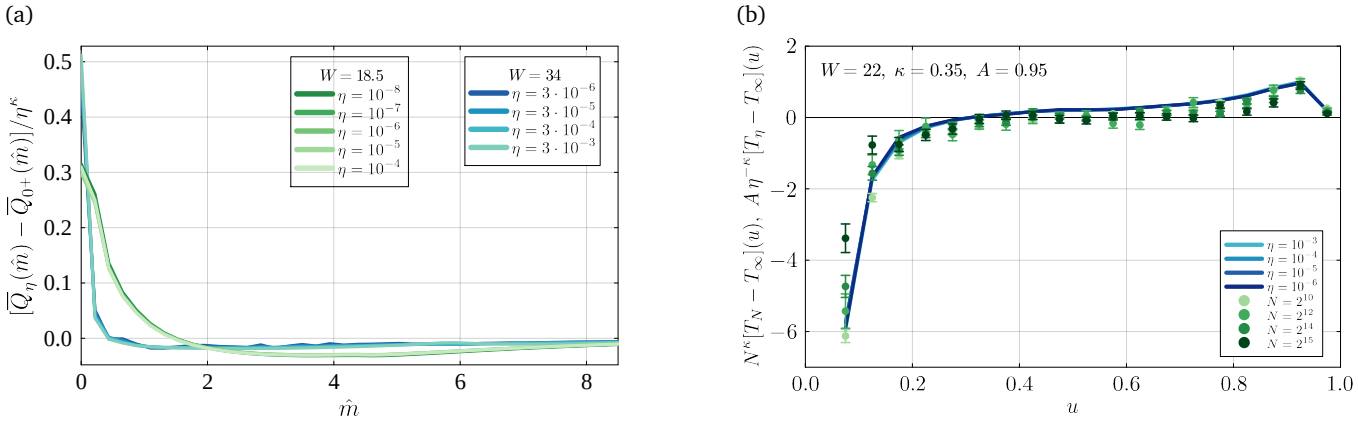

图2. 体区 $\hat{m}$、$u = O(1)$ 中、$\kappa = 2\beta(W) - 1$ 时，构成逆参与率的完整分布的标度塌缩。(a) 对于局域格林函数变量 $\hat{m}$ [Eq. (9)], , 在 $W = 185$ 和 34 时，若干 η 的 $\hat{m}) - Q_{0^+}(\hat{m})]/\eta^\kappa Q_\eta(\hat{m}[$。(b) 对于来自精确对角化、针对多个 N 的本征态振幅 $u = |\psi_\alpha(i)|^2$，其 $[T_N(u) - T_\infty(u)]N^\kappa$，与有限-$\eta$ 主曲线 $A\eta^{-\kappa}[T_\eta(u) - T_\infty(u)]$ 进行比较；该主曲线满足 $T_\eta(u) \equiv u^{-3}Q_\eta(1/u)$，由针对若干 η 的群体动力学得到（实线）。$W = 22$ 时，$A = 0.95$。

相中 Bethe晶格上的安德森模型的逆参与率修正呈现出高度非常规的非普适性：有限尺寸修正和有限调节参数修正都按照幂律衰减，其受单个连续变化的指数 $\kappa(W) = 2\beta(W) - 1$ 控制，该行为贯穿整个局域相，而不仅仅是在 W_c 附近。我们在一个与 Bethe晶格上真实安德森跃迁具有相同对称性的、可求解的玩具 NLσM 中推导出了这一关系 [56–59], , 并将其推广到了安德森模型的腔方程；通过数值计算直至完整分布验证了这一关系，并采用单环方案处理有限图进行了确认；包括临界点在内的完整分析见文献 Ref. [60]。从物理上看，有限 N 和有限 η对能量相近本征态的相关性施加了相同的红外截止；这些相关性由局域态之间罕见的莫特型共振主导：局域态密度分布尾部的罕见事件与这些共振是同一现象的两个侧面，$\beta > 1/2$ 是它们不发生扩增的条件，而在有限图上，距离最远的杂化对会缺失。由此得到三个后果。逆参与率的外推应采用标度变量 $(2\beta - 1)\ln N$，其系数在整个局域相中变化，并在 W_c 处消失；此时修正预期变为$\propto 1/\ln N$ [60]。这一标度形式还精确确定了文献 Ref. [54] 中从现象学角度提出的运行分形维数 $D_2 = -d\ln I_2/d\ln N$ 的重整化群流：该流恰好属于 Kosterlitz型 [88], , 其中$\kappa = 2\beta - 1$ 沿每条轨迹守恒，正如 Kosterlitz方程中的不变量一样，因此可以精确积分；每条轨迹最终都落在一条不动点线上，并满足 $d\ln D_2/d\ln N = -(2\beta - 1)$，这对所有具有 $q > \beta$ 的运行维数 D_q 都相同，其修正共享同一个标度函数 [60]（另见文献 Ref. [89]）。最后，由于这些修正来源于 Bethe晶格极限所舍弃的环，单环方案为围绕 Bethe晶格平均场开展 1/d 展开提供了一条途径，对于欧几里得晶格，以及希尔伯特空间图上的多体局域化。

我们感谢 W. Chen、V. E. Kravtsov、G. Lemarié、A. D. Mirlin、A. Scardicchio 和 C. Vanoni 的宝贵讨论。我们感谢法国国家研究署通过 ManyBodyNet 研究项目 ANR-24-CE30-5851 提供的经费支持。

文末内容

腔方程 (3)–(4) 是一组在$N \to \infty$极限下成立的关系式，而这组关系式对任意图都严格成立。对去除了节点i 对应行和列的 $\mathscr{H}$ 的预解式应用舒尔补公式，在（其中$t = 1$）的条件下，可得 [24]

$$G_{ii}^{-1} = \epsilon_i - i\eta - \sum_{m\in\partial i} G_{m\to i} - \sum_{m_1\neq m_2\in\partial i} G_{m_1m_2\to i}\,, \tag{13a}$$

$$G_{i\to j}^{-1} = \epsilon_i - i\eta - \sum_{m\in\partial i\setminus j} G_{m\to i} - \sum_{m_1\neq m_2\in\partial i\setminus j} G_{m_1m_2\to i}\,, \tag{13b}$$

其中$G_{m_1m_2\to i}$ 是去除i （和j）后所得图的预解式的非对角元素，而$G_{m\to i} \equiv G_{mm\to i}$。去除$i$后，它的两个邻居$m_1$ 和m_2 仅通过经过i的环保持连通：在树上$G_{m_1m_2\to i} = 0$ ，方程 (13) 简化为方程 (3)–(4)；而在有限随机正则图上，非对角项虽小但不为零，因此方程 (13) 并非封闭。

我们通过单环近似将它们闭合。令 ℓ 表示在不存在 m_1 和m_2 的情况下，连接i并经过位于$x_0 \equiv m_1, x_1, \ldots\ldots, x_{\ell-1}, x_\ell \equiv m_2$ [图 4(a)]中的位点的最短路径的长度（边的数量）。仅保留这条路径，并将其视为嵌入在其他部分均无环的树中，则非对角元可分解为沿该路径的对角腔格林函数 [24],

$$G_{m_1m_2\to i} = G_{m_1\to i}\prod_{a=1}^{\ell} G_{x_a\to x_{a-1}}\,, \tag{14}$$

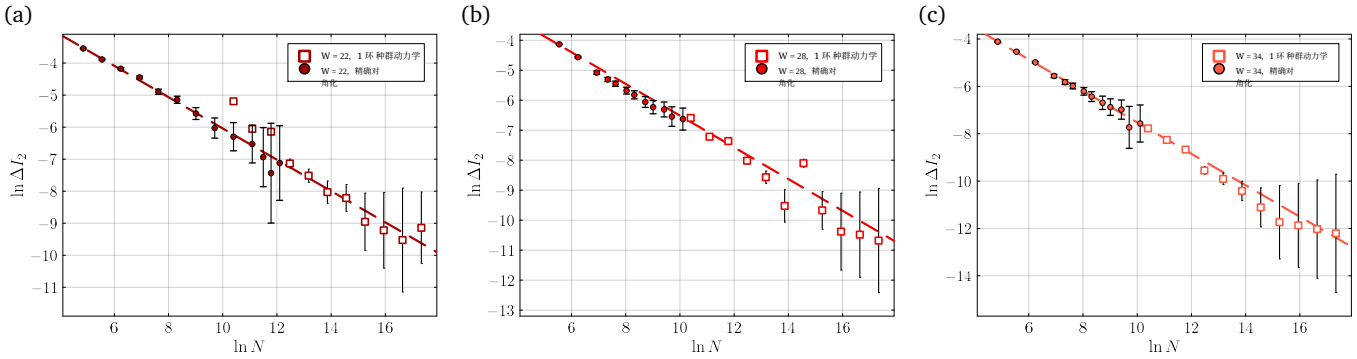

图 3. 逆参与率的有限N 修正，$I_2(N)-I_2^{\infty}$，作为N 的函数，分别对应$W=22$（a）、$W=28$（b）和$W=34$（c）。实心符号：随机正则图上安德森模型的精确对角化结果。空心符号：截断值为 $\ell_{\max}$ 的自洽单环群体动力学，绘制时采用有效规模 $\ln N=(\ell_{\max}+1)\ln k$。虚线：对公式（5a）进行的幂律拟合。除规定 $\ell_{\max}$ 与N之间关系的约定外，单环方案不含任何可调参数，却定量地再现了精确对角化结果；在$W=22$ 和 $\ell_{\max}\lesssim 16$ 处的剩余差异，正好对应于非物理更新所占比例已不再可忽略的区域。

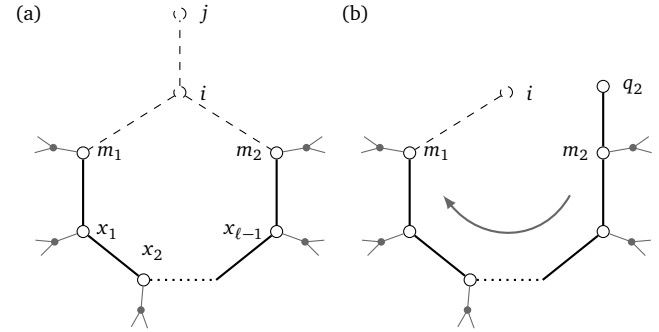

图 4. $k=2$时单环构造的示意图。（a）在没有i（虚线）的情况下，其邻居m_1 和m_2 通过一条经过位点$x_1,\ldots$、$x_{\ell-1}$的、包含 ℓ 条边的最短路径相连，从而形成一条长度为$\ell+2$、经过i的环；路径上的每个位点都带有一条额外的分支（灰色），该分支由从总体中抽取的腔格林函数描述。非对角项$G_{m_1m_2\to i}$ 按照公式（14）计算为路径上各对角腔格林函数的乘积。（b）在同一个实现中，通过沿着从m_2 到m_1 的开放链进行树递推（箭头）来计算对角项$G_{m_1\to i}$：将i 替换为一个虚拟节点q_2，使其作为m_2，的邻居，并为其赋予一个从总体中抽取的腔格林函数；这样，启动该链的m_2 的腔格林函数便具有 个入射分支k，与总体中的情况相同；$G_{m_2\to i}$ 以对称方式获得。这样便保留了真实图上对角项与非对角项之间存在的相关性。

其中每个因子都根据标准树递推公式 (3) 计算，所用参数为该路径上的位点能量以及与其相连的各分支的腔格林函数。

在适用于局域相 $\eta\to 0^+$ 极限的变量中，环项的结构最为清晰；在该极限下，递推关系关于虚部 [23]被线性化。将式（14）中的每个 $\ell+1$ 因子写成 $G_{x_a\to x_{a-1}}=g_a+i\eta\hat{g}_a+O(\eta^2)$（其中用$=0$标记 $G_{m_1\to i}$，g_a为实数，而 $\hat{g}_a>0$）以及 $\mathscr{G}_\ell\equiv\prod_{m_1\ \ _2\to}^{\ell}{}_a=g$，可得 $\mathrm{Re}\,G_{m_1\to i}$ 和 $\mathrm{Im}\,G_{m_1m_2\to i}=\eta\,\mathscr{G}_\ell\sum_{a=0}^{a}\mathscr{G}_a/g_a$；因此，就 $G^{-1}_{i\to j}=m_{i\to j}-i\eta\hat{m}_{i\to j}$ 以及邻居的 $G_{m\to i}=g_m+$而言，

$i\eta\hat{g}_m$，腔方程（13b）写为

$$
\begin{aligned}
m_{i\to j}&=\epsilon_i-\sum_{m\in\partial i\setminus j}g_m-2\,\mathscr{G}_\ell\,,\\
\hat{m}_{i\to j}&=1+\sum_{m\in\partial i\setminus j}\hat{g}_m+\sum_{a=0}^{\ell}\frac{2\,\mathscr{G}_\ell}{g_a}\,\hat{g}_a\,.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

因此，环会使实部偏移 $2\mathscr{G}_\ell$，即沿环传输一周的振幅，并在线性递推关系中为重标度虚部 $\hat{m}$ 添加一项，其结构与树项完全相同：环上的每个节点 a 都作为 i 的一个额外邻居，与系数 $2\mathscr{G}_\ell/g_a=2\prod_{a'\neq a}g_{a'}$ 相耦合，也就是沿环的两段弧从a 传输到i 的振幅之积。$\mathscr{G}_\ell$ 是 $\ell+1$ 个随机符号实腔格林函数的乘积，其典型大小随 ℓ 呈指数衰减，并因路径上的共振而形成宽分布。由于符号是随机的，$\hat{m}_{i\to j}$ 中的环项可能为正也可能为负，这正是下文讨论的 $\hat{m}_{i\to j}$ 偶尔取负值的原因。

长度 ℓ 是一个随机变量，其统计性质与随机正则图相同：由于经过给定节点、长度为L 的环的数量服从均值为 $k^L/(2N)$ [64–66], 的泊松分布，因此我们从中抽取 ℓ

$$
p(\ell)\propto k^{\ell}\,,\qquad \ell=1,\ldots,\ell_{\max}\,,
\tag{16}
$$

（$\ell=1$ 是经过i的一个三角形）。截断 $\ell_{\max}$ 起到图直径的作用：它的取值使得每个节点平均属于一个最大长度为 $\ell_{\max}+2$、$k^{\ell_{\max}+2}/(2N)=1$的环；对于$k=2$，这给出 $\ln N=(\ell_{\max}+1)\ln k$。这是方案中唯一涉及$N$的地方。

由此得到的“单环改进”群体动力学步骤如下（我们描述$k=2$的情况）。总体表示腔格林函数的分布。要生成一个新元素$G_{i\to j}$：(1) 从$W/2$中均匀抽取 ϵ_i，$W/2]$，并从$p(\ell)$中抽取 ℓ；(2) 抽取

m_1,m_2 的位点能量以及 $\ell-1$ 路径位点的位点能量，并针对这些位点中的每一个，从总体中抽取一个对应于其不属于环的分支的腔格林函数；(3) 在同一次实现中计算$G_{m_1\to i}$和$G_{m_2\to i}$：在真实图上，这些对角腔格林函数与非对角项都涉及同一个环，因此具有很强的相关性。为保留这些相关性，$G_{m_1\to i}$通过从m_2 出发，沿路径逐个位点迭代树递归关系直至m_1 [Fig. 4(b)]来得到；在这条开放链中，被移除的节点i在m_2，处被一个虚拟节点q_2 取代，该虚拟节点带有一个从总体中抽取的腔格林函数，使每个位点都保持随机正则图连通性。$G_{m_2\to i}$的求法相同，从m_1 出发，并用虚拟节点q_1 取代i。该步骤并不精确，因为真实图中并不存在这样的节点，但它尽可能保留了对角项与非对角项之间的相关性；(4) 根据式（14）计算$G_{m_1 m_2\to i}$，其中因子$G_{x_a\to x_{a-1}}$ 和$G_{m_1\to i}$取自同一条链；(5) 将所有结果代入式（13b），$G^{-1}_{i\to j} = \epsilon_i - i\eta - G_{m_1\to i} - G_{m_2\to i} - 2G_{m_1 m_2\to i}$，并用结果替换总体中随机选取的一个元素。由于所涉及的近似（仅取最短路径、简化的$p(\ell)$），新元素偶尔可能出现负虚部，这是非物理的；此时用相同的 ℓ 重复步骤（2）—（5）（以免使$p(\ell)$偏向短环，因为短环产生的修正最大），直到得到物理值。这类事件的比例随 $\ell_{\max}$ 和W增大而指数下降；当其小于所要解析的相对修正 $[I_2(N)-I_2^{\infty}]/I_2 \lesssim 10^{-3}$ 时，便认为该方案处于可控范围内；因此，在图3所示的最小无序强度下，该方案仅适用于 $\ell_{\max}>16$。总体达到稳态后，以相同方式对局域格林函数（13a）进行抽样：从$p(\ell)$中抽取三个邻居以及三个独立的路径长度ℓ_{12}、ℓ_{13}、ℓ_{23}，并由式（2）得到I_2；实际上，我们采用虚部线性化后的方程（15），这适用于局域相 [23]中的 $\eta\to 0^+$。

图3比较了局域相中三种无序强度下，以这种方式得到的有限N 修正与精确对角化结果。两者在定量上吻合——幂律指数 $\kappa(W)$ 和前因子都得到了再现；后者的再现精度受$\ell_{\max}$ 与N之间约定的影响，若该约定改变一个数量级为一的因子，单环数据在 $\ln N$ 中会平移 $O(1)$，其前因子则会改变一个因子$O(1)^{\kappa}$，而指数保持不变——尽管该方案并未包含环统计（16）以外的实际图信息。由于可控的单环数据大多对应精确对角化无法达到的系统尺寸，因此比较主要是与后者的幂律外推结果进行的。这支持了正文中的解释：单环项（式（15））定量地捕捉了逆参与率的有限N 修正。对此解释有两点补充。第一，短环无法产生反常稀有事件修正：长度固定为 $\ell=O(1)$ 的环会传递 O(1) 的振幅，但在给定节点处出现的概率为 $k^{\ell+2}/(2N)$，因此它只产生常规的 $O(1/N)$ 修正，相对于 $N^{-\kappa}$ with $\kappa<1$ 是次阶的；事实上，在该方案中仅保留 $\ell\le 2$ 所得到的修正远小于观测值。反常修正来自 $\ell\simeq\ell_{\max}$：环在每个节点处都存在，但传递的振幅很小且分布很宽，这是稀有事件效应。其次，由于$\mathcal{G}_\ell$ 具有随机符号，式（15）中的环项平均而言不会重整化 η 或现场无序；它们在 $\ell_{\max}$ 中通常呈指数级小，因此只会在其远尾部、尺度为 $\hat{m}_N$ 处扰动 $\hat{m}$ 的 $\eta=0$、$N=\infty$ 递推关系，而该尺度对 N 的依赖仅通过 $\ell_{\max}$ 体现。根据文献 [60], 的假设，固定点对注入其远尾部的微弱微扰的响应具有普适性：无论微扰的微观性质如何，它都会弛豫至线性化递推关系的零模，其尾部为 $\propto \hat{m}^{-(2-\beta)}$；将零模与注入尺度处未受扰动的尾部 $\hat{m}^{-1-\beta}$ 相匹配，可确定其振幅为 $\propto \hat{m}^{-(2\beta-1)}N$。因此，图1(c)中 κ_N 与κ_η 在拟合精度范围内吻合，表明 $\hat{m}_N\propto N$（等价地，本征态振幅 $u=1/\hat{m}\sim 1/N$）：这些环激发了同一个零模，就像在 $\hat{m}_\eta\sim\eta$ 处注入的调节器 $\eta\propto 1/N$ 一样。关于如何从长回路上 $\mathcal{G}_\ell$ 的统计性质推导注入尺度，将留待未来研究。

[1] P. W. Anderson, 《某些随机晶格中扩散的缺失》, Physical Review**109**, 1492（1958）。[2] P. A. Lee 和 T. Ramakrishnan, 《无序电子系统》, 《现代物理评论》**57**, 287（1985）。[3] F. Evers 和 A. D. Mirlin, 《安德森跃迁》, 《现代物理评论》**80**, 1355（2008）。[4] A. Lagendijk、B. v. Tiggelen 和 D. S. Wiersma, 《安德森局域化五十年》, Physics Today **62**, 24（2009）。[5] R. Abou-Chacra、D. J. Thouless 和 P. W. Anderson, 《局域化的自洽理论》, J. Phys. C: Solid State Phys.**6**, 1734（1973）。[6] K. Efetov, 《金属颗粒系统中的安德森金属-绝缘体跃迁：最小金属电导率和最大介电常数的存在》, Zh. Eksp. Teor. Fiz**88**, 1032（1985）。[7] K. Efetov, 《Bethe晶格无序金属模型中的密度–密度关联函数》, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **92**, 638（1987）。[8] K. Efetov, 《Bethe晶格上的安德森跃迁（辛系综与正交系综）》, Zh. Eksp. Teor. Fiz **93**, 1125（1987）。[9] M. R. Zirnbauer, 《Bethe晶格上的局域化跃迁》, Physical Review B **34**, 6394（1986）。[10] M. R. Zirnbauer, 《安德森局域化与具有分次对称性的非线性σ模型》, 《核物理B》**265**, 375（1986）。[11] J. Verbaarschot, 《时间反演不变系统中Bethe晶格上的分次对称性与安德森局域化》, 《核物理B》**300**, 263（1988）。[12] A. D. Mirlin 和 Y. V. Fyodorov, 《局域化跃迁在

Bethe晶格上的安德森模型：自发对称性破缺与关联函数，《核物理B》366, 507 (1991)。[13] A. Mirlin 和 Y. V. Fyodorov，稀疏随机矩阵能级关联函数的普适性，《物理学杂志A：数学与通论》24, 2273 (1991)。[14] Y. V. Fyodorov 和 A. D. Mirlin，稀疏随机矩阵系综中的局域化，《物理评论快报》67, 2049 (1991)。[15] Y. V. Fyodorov、A. D. Mirlin 和 H.-J. Sommers，安德森局域化的一种新型场论方法：稀疏随机跃迁模型，《物理学杂志I》2, 1571 (1992)。[16] A. D. Mirlin 和 Y. V. Fyodorov，无序系统中单点格林函数的统计性质及安德森跃迁附近的临界行为，《物理学杂志I》4, 655 (1994)。[17] A. D. Mirlin 和 Y. V. Fyodorov，局域态密度的分布、序参量函数及安德森跃迁附近的临界行为，《物理评论快报》72, 526 (1994)。[18] K. S. Tikhonov 和 A. D. Mirlin，随机正则图上局域化跃迁附近本征态的统计性质，Physical Review B 99, 024202 (2019)。[19] K. S. Tikhonov 和 A. D. Mirlin，随机正则图上局域化跃迁处的临界行为，Physical Review B 99, 214202 (2019)。[20] G. Biroli、G. Semerjian 和 M. Tarzia，Bethe晶格上的安德森模型：态密度、局域化性质与孤立本征值，《理论物理进展增刊》184, 187 (2010)。[21] G. Parisi、S. Pascazio、F. Pietracaprina、V. Ros 和 A. Scardicchio，Bethe晶格上的安德森跃迁：实能量方法，《物理学杂志A：数学与理论》53, 014003 (2020)。[22] S. Pascazio、A. Scardicchio 和 M. Tarzia，Bethe晶格上的安德森局域化，载于《自旋玻璃理论及更远：复制对称性破缺四十年后》（世界科学出版社，2023），第335–352页。[23]T. Rizzo 和 M. Tarzia，Bethe晶格上安德森模型的局域相，Physical Review B 110, 184210 (2024)。[24] D. P. Bandeira、A. Vecchiarelli 和 M. Tarzia，Bethe晶格上的安德森局域化（2026），arXiv:2606.24671 [cond-mat.dis-nn].[25] D. M. Basko、I. L. Aleiner 和 B. L. Altshuler，具有局域单粒子态的弱相互作用多电子系统中的金属—绝缘体转变，《物理学年鉴》321, 1126 (2006)。[26] I. V. Gornyi、A. D. Mirlin 和 D. G. Polyakov，无序导线中的相互作用电子：安德森局域化与低温输运，《物理评论快报》95, 206603 (2005)。[27] B. L. Altshuler、Y. Gefen、A. Kamenev 和 L. S. Levitov，有限系统中的准粒子寿命：一种非微扰方法，Phys. Rev. Lett. 78, 2803 (1997)。[28] E. Altman 和 R. Vosk，多体局域化系统中的普适动力学与重整化，Annu. Rev. Condens. Matter Phys. 6, 383 (2015)。[29] R. Nandkishore 和 D. A. Huse，量子统计力学中的多体局域化与热化，Annu. Rev. Condens. Matter Phys. 6, 15 (2015)。[30] D. A. Abanin 和 Z. Papi´c，多体局域化的近期进展，《物理学年鉴》529, 1700169 (2017)。[31] F. Alet 和 N. Laflorencie，多体局域化：介绍与专题选讲，《物理学报告》19, 498 (2018)。[32] D. A. Abanin、E. Altman、I. Bloch 和 M. Serbyn，《专题：多体局域化、热化与纠缠》，《现代物理评论》**91**，021001 (2019)。[33] P. Sierant、M. Lewenstein、A. Scardicchio、L. Vidmar 和 J. Zakrzewski，《经典计算时代的多体局域化》，《物理学进展报告》**88**，026502 (2025)。[34] E. Tarquini、G. Biroli 和 M. Tarzia，《安德森局域化转变的临界性质与高维极限》，Physical Review B**95**，094204 (2017)。[35] C. Castellani、C. Di Castro 和 L. Peliti，《关于安德森局域化的上临界维数》，《物理学杂志A：数学与通论》**19**，L1099 (1986)。[36] M. Baroni、G. G. Lorenzana、T. Rizzo 和 M. Tarzia，《安德森局域化的 Bethe 晶格解的修正》，Physical Review B **109**，174216 (2024)。[37] G. Biroli、A. Ribeiro-Teixeira 和 M. Tarzia，《Bethe 晶格上的能级统计、遍历性与局域化转变之间的差异》(2012)，arXiv:1211.7334。[38]A. De Luca 和 A. Scardicchio，《一个展现多体局域化的模型中的遍历性破缺》，《欧洲物理快报》**101**，37003 (2013)。[39] V. Kravtsov、B. Altshuler 和 L. Ioffe，《Bethe 晶格和正则图上的安德森模型中的非遍历扩展相》，《物理学年鉴》**389**，148 (2018)。[40]M. Pino，《随机正则图上的安德森跃迁标度》，Physical Review Res. **2**，042031(R) (2020)。[41] S. Bera、G. De Tomasi、I. M. Khaymovich 和 A. Scardicchio，《随机正则图上安德森模型的返回概率》，Physical Review B**98**，134205 (2018)。[42] G. De Tomasi、S. Bera、A. Scar dicchio 和 I. M. Khaymovich，《随机正则图上安德森模型中的亚扩散》，Phys. Rev. B**101**，100201(R) (2020)。[43] K. S. Tikhonov、A. D. Mirlin 和 M. A. Skvortsov，《随机正则图上的安德森局域化与遍历性》，Phys. Rev. B **94**，220203(R) (2016)。[44] I. García-Mata、O. Giraud、B. Georgeot、J. Martin、R. Dubertrand 和 G. Lemarié，《随机图上安德森跃迁的标度理论：遍历性与普适性》，《物理评论快报》**118**，166801 (2017)。[45] G. Biroli、A. K. Hartmann 和 M. Tarzia，《通过大偏差方法研究 Bethe 晶格上安德森模型的临界行为》，Physical Review B**105**，094202 (2022)。[46] A. De Luca、B. L. Altshuler、V. E. Kravtsov 和 A. Scardicchio，《贝特晶格上的安德森局域化：扩展态的非遍历性》，Phys. Rev. Lett. **113**，046806 (2014)。[47] B. L. Altshuler、E. Cuevas、L. B. Ioffe 和 V. E. Kravtsov，《强无序随机正则图中的非遍历相》，Phys. Rev. Lett. **117**，156601 (2016)。[48] I. García-Mata、J. Martin、R. Dubertrand、O. Giraud、B. Georgeot 和 G. Lemarié，《随机图上安德森跃迁中的两个临界局域化长度》，Phys. Rev. Res.**2**，012020(R) (2020)。[49] K. S. Tikhonov 和 A. D. Mirlin，《从随机正则图上的安德森局域化到多体局域化》，《物理学年鉴》**435**，168525 (2021)。[50] I. García-Mata、J. Martin、O. Giraud、B. Georgeot、R. Dubertrand 和 G. Lemarié，《随机图上安德森跃迁的临界性质：双参数标度理论、科斯特利茨-索利斯型流与多体局域化》，Phys. Rev. B **106**，214202 (2022)。[51] P. Sierant、M. Lewenstein 和 A. Scardicchio，《具有不同连通度的随机图上的安德森局域化普适性》

, SciPost Phys . **15**, 045（2023）.

[52] W. Chen、O. Giraud、J. Gong 和 G. Lemarié，《量子对数多重分形》，Physical Review Research 6，L032024（2024）。[53] W. Chen、O. Giraud、J. Gong 和 G. Lemarié，《利用随机矩阵系综描述无限维安德森跃迁的临界行为：对数多重分形与临界局域化》，Physical Review B 110，014210（2024）。[54] C. Vanoni、B. L. Altshuler、V. E. Kravtsov 和 A. Scardicchio，《随机正则图上安德森模型的重整化群分析》，美国国家科学院院刊 121，e2401955121（2024）。[55]I. García-Mata、W. Chen、J. Martin、B. Georgeot 和 G. Lemarié，《随机图上安德森局域化中有限尺寸标度与重整化群流的联系》（2026），arXiv:2609.31872。[56] M. R. Zirnbauer，《介观输运中的傅里叶反演定理》，Physica A：统计力学及其应用 167，132（1990）。[57] M. R. Zirnbauer，《常曲率双曲超流形上的傅里叶分析》，数学物理通讯 141，503（1991）。[58] I. A. Gruzberg 和 A. D. Mirlin，《Bethe晶格上具有非紧致对称性的模型中的相变与复制极限》，《物理学杂志A：数学与通论》29，5333（1996）。[59] T. Dupré，《三维局域化跃迁：非线性 σ 模型的蒙特卡洛模拟》，Physical Review B 54，12763（1996）。[60] T. Rizzo、M. Tarzia 和 A. Vecchiarelli，《Bethe晶格局域相中逆参与率的反常修正：来自可解“玩具”非线性σ模型的见解》（2026），配套论文，准备中。[61]K. S. Tikhonov 和 A. D. Mirlin，《多体局域化跃迁附近的本征态关联》，Physical Review B 103，064204（2021）。[62] R. Abou-Chacra 和 D. Thouless，《局域化自洽理论。II. 能带边缘附近的局域化》，Journal of Physics C：固体物理 7，65（1974）。[63] M. Aizenman 和 S. Warzel，《树图上随机薛定谔算子的共振离域》，J. Eur. Math. Soc. 15，1167（2013）。[64] N. C. Wormald，《随机正则图模型》，载于《组合学综述，1999》，伦敦数学会讲义系列，由 J. D. Lamb 和 D. A. Preece 编（剑桥大学出版社，1999），第239–298页。[65] E. Marinari 和 R. Monasson，《随机图中的回路：从局部树到全局环》，统计力学杂志：理论与实验 2004，P09004（2004）。[66] E. Marinari 和 G. Semerjian，《随机图中回路的数量》，统计力学杂志：理论与实验 2006，P06019（2006）。[67] A. D. Mirlin，《无序系统中的能级与本征函数统计》，Phys. Rep. 326，259（2000）。[68] M. Mézard 和 G. Parisi，《重新审视Bethe晶格自旋玻璃》，The European Physical Journal B：凝聚态与复杂系统 20，217（2001）。[69] 由于不存在恰好位于 $E = 0$ 处的本征值而产生的 $O(1/N)$ 偏差，可通过对本征态重新加权来消除；除无序分布发生 $O(1/N)$的改变外，结果完全精确。

[70]V. L. Berezinskii，一维和二维连续对称群系统中长程有序的破坏 I. 经典系统，《苏联物理学：JETP》32，493（1971），[Zh. Eksp. Teor. Fiz. 59，907（1970）]。[71] J. M. Kosterlitz 和 D. J. Thouless，二维系统中的有序、亚稳性与相变，《J. Phys. C: Solid State Phys.》6，1181（1973）。[72] R. B. Griffiths，随机伊辛铁磁体在临界点以上的非解析行为，《Physical Review Letters》23，17（1969）。[73]T. Vojta，经典、量子与非平衡相变中的稀有区域效应，《J. Phys. A: Math. Gen.》39，R143（2006）。[74] 对于 $k = 2$，在 $W = 22$ 处 $c_\eta \approx 0.15$，在 $W = 34$处为 0.13，而使用 $\kappa = 2\beta - 1$ 进行拟合时，在 $W = 22$ 处 $c_N = 0.15 \pm 0.02$，在 $W = 34$处 $c_N = 0.18 \pm 0.02$。[75] 接近 W_c 时，幂律拟合会高估 $2\beta - 1$，因为κln N 并不大；在所有 W 下均可见的 κ_N相对于 κ_η的小幅超额会随着 N 缓慢减小。[76] N. F. Mott，非晶态系统中的传导 I. 无序系统中的局域化电子态，《Philos. Mag.》17，1259（1968）。[77] E. Cuevas 和 V. E. Kravtsov，多重分形金属与绝缘体中的双本征函数关联，《Physical Review B》76，235119（2007）。[78] D. A. Ivanov、M. A. Skvortsov、P. M. Ostrovsky 和 Y. V. Fominov，一维局域化中的波函数杂化，《Physical Review B》85，035109（2012）。[79] M. Disertori、T. Spencer 和 M. R. Zirnbauer，三维超对称双曲σ模型中的准扩散，《Commun. Math. Phys.》300，435（2010）。[80] M. Disertori 和 T. Spencer，超对称σ模型中的安德森局域化，《Commun. Math. Phys.》300，659（2010）。[81] C. Sabot 和 P. Tarrès，边增强随机游走、顶点增强跳跃过程与超对称双曲σ模型，《J. Eur. Math. Soc.》17，2353（2015）。[82] A. Montanari 和 T. Rizzo，如何计算 Bethe近似的圈修正，《J. Stat. Mech.》，P10011（2005）。[83] G. Parisi 和 F. Slanina，晶格模型的 Bethe–Peierls 近似周围的圈展开，《J. Stat. Mech.》，L02003（2006）。[84] M. Chertkov 和 V. Y. Chernyak，图上离散统计模型的圈级数，《J. Stat. Mech.》，P06009（2006）。[85]U. Ferrari、C. Lucibello、F. Morone、G. Parisi、F. Ricci-Tersenghi 和 T. Rizzo，Erd˝os-Rényi 随机图上无序系统的有限尺寸修正，《Physical Review B》88，184201（2013）。[86]C. Lucibello、F. Morone、G. Parisi、F. Ricci-Tersenghi 和 T. Rizzo，随机正则图上无序伊辛模型的有限尺寸修正，《Physical Review E》90，012146（2014）。[87] F. L. Metz、G. Parisi 和 L. Leuzzi，正则随机图的谱的有限尺寸修正：解析解，《Physical Review E》90，052109（2014）。[88]J. M. Kosterlitz，二维 xy模型的临界性质，《J. Phys. C: Solid State Phys.》7，1046（1974）。[89]A. Scardicchio 等，无限维极限下安德森模型中的共形性消失（2026）

’即将发表·