arXiv:2611.28709v1 [cond-mat.dis-nn] 21 Nov 2026

Bethe晶格局域化相中逆参与率的反常修正：来自可解“玩具”非线性 σ-模型的启示

Tommaso Rizzo，[1,2] Marco Tarzia，[3,4] 和 Angelica Vecchiarelli[1,3]

[1]物理系，*Università “Sapienza”，Piazzale A. Moro 2，I-00185*，罗马，意大利[2]*ISC-CNR*，罗马分部，*Università “Sapienza”，Piazzale A. Moro 2，I-00185*，罗马，意大利[3]*LPTMC，CNRS-UMR 7600*，索邦大学，*4 Pl. Jussieu，F-75005* 巴黎，法国[4]法国大学研究院，*1 rue Descartes，75231 Paris Cedex 05*，法国

在Bethe晶格安德森模型的局域化相中，当虚谱调节器 η 趋于零时，逆参与率（IPR）以反常幂律趋近其渐近值，$\mathrm{I}_2(\eta)-\mathrm{I}_2^{\infty} \propto \eta^{2\beta-1}$，其中 $\beta \in (1/2,1)$ 是局域态密度分布依赖无序的尾部指数。本文解析地推导了这一结果。我们在定义于双曲超平面上的“玩具”非线性 σ-模型框架中进行分析，该模型具有非紧致分级对称性，拥有Bethe晶格安德森跃迁的奇异临界性；在对称性破缺场 H 存在时，其腔方程（H 对应于 η ）可以得到全面分析。小 H 解可分为体区和边界层：在体区，场分布的修正可分解为依赖 H 的振幅与普适函数 $\mathrm{f_{typ}}$的乘积；边界层则位于由 H 确定的尺度上。将两者匹配后可知，振幅按 $\mathrm{H}^{2\beta-1}$标度：其指数由线性化腔方程的次主导根 $1-\beta$ 控制，而该根在此获得了直接的物理意义。在临界点处，两个根合并，修正变为对数形式，$\propto 1/|\ln \mathrm{H}|$。随后我们表明，在一些自然假设下，同一机制也适用于安德森模型的腔方程：反常修正是 $\eta=0$ 递推的一个零模，其尾部为 $\propto \hat{\mathrm{m}}^{-(2-\beta)}$；其振幅 $\propto \eta^{2\beta-1}$ 由与 $\hat{\mathrm{m}} \sim 1/\eta$ 处边界层的匹配确定，超过该处后，分布是 $\eta=0$ 分布的反演像，并按 $\hat{\mathrm{m}}^{\beta-3}$衰减。我们将这些预测与局域态密度完整分布的腔方程数值解进行比较，并证明在适当变量下，它们同样适用于本征态振幅分布的有限尺寸修正。我们还表明，通过谱恒等式和精确求和规则，有限调节器修正与有限尺寸修正均由能量接近的本征态对之间的关联决定，因此同一指数精确控制衰减 $\omega^{-\mu}$，其中 $\mu=2(1-\beta)$，该衰减描述了能量间距为 ω 的两个本征态的关联函数及其关于振幅更高次幂的推广。我们通过精确对角化、在无限晶格上直接进行的种群动力学，以及玩具模型中的解析计算，验证了这一关系及其振幅。基于本征态振幅的精确统计，我们对相距遥远的局域本征态之间的莫特共振进行现象学计数；其小振幅尾部由 β控制，从而赋予该指数以物理解释。在有限图上，精确对角化表明，有限尺寸修正反映了杂化双峰本征态的缺失：这些本征态的两个中心间距超出了图所允许的范围。最后，我们推导出该机制所蕴含的 IPR 有限尺寸标度形式，其中标度变量为 $(2\beta-1)\ln \mathrm{N}$，且临界点以 $1/\ln \mathrm{N}$ 的方式逼近，并证明该形式同时描述有限-η 和有限 N 数据。该形式解析地给出了先前工作中从现象学角度提出的运行分形维数的重整化群流；结果表明，它恰好属于 Kosterlitz类型，其中 $2\beta-1$ 是标记轨迹并确定不动点线的守恒量。这也说明，在可达到的尺寸下，局域态具有有限分形维数是一种对数有限尺寸效应。

I. 导论

安德森局域化（AL）[1] 是凝聚态物理 [2–4], 中最引人注目的现象之一，如今其影响早已远远超出无序非相互作用电子的物理范畴，涵盖从量子混沌与热化 [5–7] 到随机矩阵理论和多体局域化系统物理 [8–13]等领域。在这一广阔的研究图景中，Bethe晶格（BL）上的安德森模型占据着特殊地位。得益于其树状结构，该模型可以精确求解 [14–33], ，并在过去五十年间一直充当数学试验场，塑造着我们对局域化相变的物理直觉。此外，由于安德森局域化的上临界维度为无限 [27, 34–36], ，Bethe晶格构成了局域化问题的自然平均场出发点，适用于两类问题
在实空间以及相互作用系统的希尔伯特空间中 [7]。

局域化相的序参量是本征态的逆参与率（IPR），$I_2 = \sum_i |\psi_\alpha(i)|^4$，它衡量本征态所扩展范围体积的倒数。在Bethe格上，I_2 在离域相中随$1/N$ 趋于零，在临界无序 W_c [16–26, 28], 处跃变至有限值，随后在局域化相中呈现平方根奇异性并逐渐增大 [33]。在无限 BL 上，渐近值 I_2^{∞} 可直接通过空腔方程 [27, 33]的 $\eta \to 0^+$ 极限求得。在任何有限图上，该值则是通过修正项逐渐逼近的；这些修正项源于 Bethe格极限所舍弃的环 [36–42]。控制这些修

正项的重要性远不止于外推数值数据：如上所述，Bethe格是有限维系统和相互作用系统的希尔伯特空间图上研究局域化的平均场出发点，因此，这些修正项是围绕Bethe格解进行系统性 $1/d$ 展开 [34–36], 以及用这些图上的局域化定量描述多体局域化 [7, 13, 43–49]的首要要素。另一个相关问题是，严格来说，在有限图上目标能量处并不存在特征值，因此通常会在能量上加上虚部调节器 η 来计算局域观测量，并在热力学极限之后再取 $\eta \to 0^+$ 极限。随着$N \to \infty$ 增大以及当 $\eta \to 0^+$ 时，I_2 如何趋近于I_2^∞，结果证明远非显而易见。

在一篇配套短文中 [50] 我们证明，安德森模型在Bethe格上的局域化相中，两种修正项都是反常的：它们按照幂律衰减，其指数连续变化且依赖无序，

$$I_2(\eta) - I_2^\infty \simeq c_\eta\, \eta^{\kappa(W)}, \qquad I_2(N) - I_2^\infty \simeq c_N\, N^{-\kappa(W)}, \quad (1)$$

两种情况下的指数相同 $\kappa = 2\beta - 1 \in (0,1)$，其中 $\beta(W)$ 是局域化相中局域态密度（LDoS）概率分布的尾部指数 [14, 15, 22, 23, 27, 33], ，其行为为$\beta \simeq 1/2 + c_\beta \sqrt{W - W_c}$；靠近相变时如此，而在强无序下则趋近于 1。一个在整个相内连续变化的非平凡指数，让人联想到Berezinskii–Kosterlitz–Thouless（BKT）相变的低温相 [51, 52], ；不过，在那里它源于准长程有序，而这里并不存在这种有序（但对于运行分形维数的有限尺寸流，这种类比确实完全成立，见第 IX 节 C）。它更接近 Griffiths相 [53, 54], ，其中非普适幂律源于无序分布尾部的稀有区域。事实上，后者是最贴切的类比，因为正如我们将看到的，逆参与率的修正项源自局域态密度分布的幂律尾部，也就是源自稀有的共振构型；而 κ继承自尾部指数 β。不过，据我们所知，这是首次出现这种机制支配远离临界点时序参量的有限尺寸（或有限调节器）修正项的情形。

除了概念上的意义外，这一结果还有直接的实际影响，因为 BL 上逆参与率的有限尺寸标度分析一直存在相当大的争议 [28, 55–64]：在局域化相中，修正项并非仅由临界点决定，而是由一个随W连续变化的指数决定，$\kappa = 2\beta - 1 \propto \sqrt{W - W_c}$ 接近W_c时尤是如此。采用依赖于无序的标度长度的标度假设可以描述这种行为——例如，参考文献 [55, 57], 中的线性标度形式，在将其标度长度认定为 $1/\kappa$ 时，能够重现$N^{-\kappa}$ ——但此时控制修正项的长度为 $1/\kappa \propto (W - W_c)^{-1/2}$，我们的数据更支持这一长度，而非随 $\nu = 1$发散的长度。在第九节中，我们推导出相应的标度形式$I_2 - I_2^\infty \simeq \Phi\big((2\beta-1)\ln N\big)/\ln N$，它在$W_c$处过渡为 $1/\ln N$修正项，并证明该形式能够描述有限-η 和有限-N 数据。随后，我们用它重新审视以往的有限尺寸分析（第 IX 节 C）。结果表明，参考文献 [60], 中受 BKT 相变类比启发、通过唯象方式提出的运行分形维数的双参数重整化群流，在局域化相和临界点处都是精确的：指数$\kappa = 2\beta - 1$ 沿每条轨迹守恒，正如Kosterlitz 方程的不变量一样，因此该流可以精确积分，其常数由 κ、由I_2^∞ 以及由标度函数的振幅确定。结果还表明，在可达尺寸下局域态的分形维数有限，以及它们对无序的导数在W_c [65]处没有发散，都是对数型有限尺寸效应。

该指数也具有关于本征态关联的直接含义。通过谱恒等式和精确求和规则，我们证明，两种修正项完全源于能量接近的本征态对之间的空间重叠——有限的 η 无法分辨这些本征态对，或者它们在有限图中缺失。这一关系是精确的，无需对这些本征态对的性质作任何假设：它意味着 $\kappa = 1 - \mu$，其中 μ 是关联函数 $\omega^{-\mu}$ 的幂律衰减指数，该函数描述能量间距为ω [28, 66]的两个本征态之间的关联；这一结果还可推广到波函数振幅的更高次幂，它们决定了高阶矩I_q的修正项，并且该关系根据逆参与率修正项的振幅确定了关联函数的振幅。由于我们解析地推导出 $\kappa = 2\beta - 1$，因此无需其他输入，即可得到本征态关联的指数$\mu = 2(1-\beta)$ 和振幅。直接计算本征态关联只能验证这一预测，而计算结果确实如此：对于安德森模型，我们通过精确对角化和直接在无限Bethe格上进行种群动力学计算进行了数值验证；对于下文引入的玩具模型，我们则通过将其腔解延拓至复场进行了解析验证。

然而，无论是计算$I_2(\eta)$，还是计算本征态关联，都无法说明涉及的是哪些本征态对。这一物理图像可由实空间中的现象学莫特型共振计数给出：局域态密度分布的尾部由远离给定格点的本征态产生，这些本征态在该格点上的微小权重按指数 β分布；对这些本征态与局域于该格点的态之间的共振进行计数，得到指数 $\mu = 2(1-\beta)$，但无法得到振幅。同一计数还表明，$\beta > 1/2$ 是这些共振不会大量增生、也即发生局域化的条件。精确对角化直接证实了这一图像。发生共振杂化的两个本征态都分布在同一对局域中心上，分别是局域于每个中心的态的对称与反对称组合；随着劈裂 ω 减小，这两个中心之间的距离按$\ln(1/\omega)$ 增长。在有限图上，如果杂化对的两个中心相距超过图所允许的范围，这种杂化对便无法形成：相应本征态仍局域于单个中心，逆参与率更大，而双峰本征态的这一缺失解释了有限尺寸修正的大部分。

本文的目的有两个。首先，我们

对式（1）中的第一个公式，即有限调节参数修正，给出解析推导，并揭示反常指数背后的机制。其次，我们解释为何有限调节参数修正与有限尺寸修正具有相同的指数：通过谱恒等式和精确求和规则，两者都可用能量接近的本征态之间的同一个关联函数来表示；有限 η和有限 N 分别充当该关联函数的两个红外截断，对应的劈裂量分别为 η 和平均能级间距——后一性质已通过数值计算得到验证（第三节E）。Bethe格（BL）上的安德森模型精确解可表述为关于局域格林函数 [14, 15],实部和虚部的联合概率分布的自洽积分方程；在有限 η下，该方程无法进行完整的解析处理。即使将其重构为具有非紧致超对称性 [16–26, 67], 的非线性 σ模型（NLσM），也从未有人——据我们所知——分析过有限调节器的情形；该模型已在 $\eta \to 0^+$ 极限下于Bethe格上求解。因此，我们采用另一种途径，研究一种定义在双曲超平面上的“玩具”NLσM。该模型在文献 [68, 69]中被引入，正是作为安德森局域化的简化模型，并在文献 [70, 71]中得到进一步研究。该模型保留了完整问题的非紧致分次对称结构；Gruzberg和Mirlin [70] 证明，它在Bethe格上呈现出与真实安德森相变完全相同的奇特临界性，包括尾部指数 β 的结构及其平方根奇异性。它的腔方程只涉及一个实函数，而使非紧致零模正则化的对称性破缺场 H 起到 η的作用。因此，我们得以详尽地进行小H分析。

最终呈现出一种清晰的机制。腔方程的小H解分为两个区间：体区中，对$H = 0$ 不动点的修正因子化为一个依赖H的振幅与一个普适标度函数的乘积；另一个区间则是在H所设定尺度上的边界层。围绕其平凡不动点线性化的 $H = 0$ 腔方程有两个幂律解，其指数为 β 和 $1-\beta$，且关于 1/2对称；$H = 0$ 解由较大的根 β控制，而较小的根通常不起作用。体区与边界层之间的匹配表明，体修正恰由这个次主导根承载，其振幅按$H^{2\beta-1}$标度。在临界点，两个根合并，匹配产生对数修正 $\propto 1/|\ln H|$；文献 [28],曾在两个模型中数值观测到对数缓慢的修正，并用有效指数对其拟合；我们认为这些指数属于前渐近行为（第 VI 节）。随后我们指出，安德森模型的腔方程中也存在相同结构：其中，关于g 和 $\hat{g}$ 的联合分布的递推仅通过 η^2依赖于 η，因此，非解析修正只能来自围绕其不动点线性化的 $\eta = 0$ 递推的零模，而其尾部由 Abou-Chacra–Anderson–Thouless 条件 [14, 15]的第二根 $1-\beta$ 控制；匹配到 $\hat{m} \sim 1/\eta$ 处的边界层再次确定振幅 $\propto \eta^{2\beta-1}$，而边界层之外的递推结构预示，共振位点处局域态密度分布的远尾部将呈现新的幂律 $\hat{m}^{\beta-3}$ 。这些预言远不止涉及平均逆参与率的标度，因为它们关乎完整的概率分布；我们将其与腔方程的数值解进行比较检验。最后，由于无论注入零模的是何种扰动，体修正都是同一个线性算子的零模，因此，只要用恰当的变量表示，相同的标度函数就必然描述本征态振幅分布的有限尺寸修正；我们证明事实确实如此。

本文组织如下。第二节中，我们提出问题，回顾安德森模型在 Bethe格上的 IPR 与局域格林函数之间的关系、将能量接近的本征态关联起来的有限-η 和有限-N 修正项的精确恒等式、局域化相中局域格林函数分布的结构，以及反常修正的数值证据。第三节中，我们证明谱恒等式确定了能量接近的本征态关联的指数和振幅，并通过精确对角化和种群动力学对其进行检验；我们还基于本征态振幅统计，通过共振计数对其进行解释，并对这一图景进行数值检验；最后证明有限尺寸修正源于有限图上缺失的杂化态对。第四节中，我们介绍玩具 NLσM、其腔方程及其逆参与率代理量。第五节包含远离临界性的小时标度分析，第 VI 节则分析临界点及其附近的情形。第 VII 节中，我们在若干明确假设下展示相同机制如何作用于安德森模型，并推导远尾指数 $\beta - 3$。第八节给出对完整分布的数值检验，包括向本征态振幅的扩展；第九节讨论 IPR 的有限尺寸标度形式、其在有限-η和有限-N 数据上的检验，以及其对先前有限尺寸分析的影响。我们在第十节总结。

II. Bethe晶格上 IPR 的有限调节器与有限尺寸修正

A. 模型、可观测量与一个精确求和规则

我们考虑安德森紧束缚哈密顿量

$$\mathscr{H} = -t \sum_{\langle i,j \rangle} (|i\rangle\langle j| + |j\rangle\langle i|) + \sum_{i=1}^{N} \epsilon_i |i\rangle\langle i|, \qquad (2)$$

最近邻之间的跃迁强度为单位值$t = 1$，格点能 ϵ_i 彼此独立地取自宽度为W、定义在 $[-W/2, W/2]$上的均匀分布$p(\epsilon)$。该晶格为分支比k（连通度为$k+1$）的 BL，在有限N下通过随机正则图实现；我们给出$k = 2$时的结果，此时局域化转变位于$W_c \simeq 18.17$ [29, 31]。我们关注带中心$E = 0$。

在有限N下，要对给定能量处的本征态进行平均，需要对离散谱进行正则化。在无限 BL 上，自然的正则化量可通过G_{ii} [3, 33, 72]所表示的局域格林函数，用$G(z)=[\mathscr{H}-z]^{-1}$在$z=\mathrm{i}\eta$处的预解式来表达，

$$I_2(\eta)=\frac{\eta\left\langle|G_{ii}|^2\right\rangle}{\langle\mathrm{Im}G_{ii}\rangle}, \tag{3}$$

其中平均值取遍无序（等价地，也取遍格点），$\langle\rho\rangle=\langle\mathrm{Im}G_{ii}\rangle/\pi$是每个格点的平均态密度，而$I_2^{\infty}=\lim_{\eta\to0^+}I_2(\eta)$。注意，方程 (3) 是平均值之比。其分子除去因子η后，就是参考文献 [28] 中局域格林函数$K_1(r,\eta)$在相同点处的关联函数，$\left\langle|G_{ii}|^2\right\rangle=K_1(r=0,\eta)$，因此$I_2(\eta)=\eta K_1(0,\eta)/(\pi\langle\rho\rangle)$。

将谱表示$G_{ii}=\sum_\alpha|\psi_\alpha(i)|^2/(E_\alpha-\mathrm{i}\eta)$（在$E=0$处）代入后，方程 (3) 的含义便清晰呈现出来。分母变为$N^{-1}\sum_\alpha\eta/(E_\alpha^2+\eta^2)$，而分子则分解为对角部分（涉及单一本征态$\alpha$）和非对角部分（涉及成对的$\alpha\neq\alpha'$）：

$$\eta\frac{1}{N}\sum_i|G_{ii}|^2=\frac{1}{N}\sum_\alpha\Big(\sum_i|\psi_\alpha(i)|^4\Big)\frac{\eta}{E_\alpha^2+\eta^2}+\frac{1}{N}\sum_{\alpha\neq\alpha'}\Big(\sum_i|\psi_\alpha(i)|^2|\psi_{\alpha'}(i)|^2\Big)\eta\,\frac{E_\alpha E_{\alpha'}+\eta^2}{(E_\alpha^2+\eta^2)(E_{\alpha'}^2+\eta^2)}. \tag{4}$$

对角部分对$I_2(\eta)$有贡献

$$\frac{\left\langle\sum_\alpha\sum_i|\psi_\alpha(i)|^4\,\eta/(E_\alpha^2+\eta^2)\right\rangle}{\left\langle\sum_\alpha\eta/(E_\alpha^2+\eta^2)\right\rangle}, \tag{5}$$

即，以宽度为η、围绕$E=0$的洛伦兹权重对各个本征态的逆参与率进行平均（每个本征态，而非每个样本，都带有自己的权重）。当$\eta\to0$时，该量是有限且规整的，并且与I_2^{∞}的差别仅在于解析项$O(\eta)$。非对角部分涉及成对的近共振本征态，每个本征态都带有一个$O(1/\eta)$的因子；如果这两个态的空间重叠$\sum_i|\psi_\alpha(i)|^2|\psi_{\alpha'}(i)|^2$本身不趋于零，则该部分按朴素估计会在$\eta\to0$时发散。在远大于$\eta$的能量窗口上取平均后，它呈现为

$$I_2(\eta)-I_2^{\infty}\simeq\langle\rho\rangle\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\,N^2\mathscr{C}(\omega)\,\frac{4\eta^2}{\omega^2+4\eta^2}, \tag{6}$$

除了解析$O(\eta)$项之外，其中

$$N^2\mathscr{C}(\omega)=N\Big\langle\sum_i|\psi_\alpha(i)|^2|\psi_{\alpha'}(i)|^2\Big\rangle_{E_\alpha=E,\,E_{\alpha'}=E+\omega}, \tag{7}$$

对能量为$E_\alpha=E$（此处为参考能量$E=0$）和$E_{\alpha'}=E+\omega$的本征态对取平均，所得即为在 Bethe格上研究的、能量间距为ω [73–75]，的两个本征态的关联函数，见参考文献 [28, 66] [，文中记作$\beta(\omega)$]；它由K_1经解析延拓至实频率 [28] 得到。

本文研究的有限正则器修正$I_2(\eta)-I_2^{\infty}$，完全源于能量相差不超过$\sim\eta$的本征态对之间的空间重叠。

方程（6）在有限N和$\eta=0$时有一个精确对应式，这可由一个简单的求和规则推出。由于在每个格点上都有$\sum_{\alpha'}|\psi_{\alpha'}(i)|^2=1$，给定本征态与所有本征态的重叠$O_{\alpha\alpha'}=|\psi_\alpha(i)|^2|\psi_{\alpha'}(i)|^2$之和为一，因此其逆参与率恰好为$I_\alpha=O_{\alpha\alpha}=1-\sum_{\alpha'\neq\alpha}O_{\alpha\alpha'}$。在具有$N$个格点的图上，对能量为$E$且处于$\eta=0$的本征态取平均，

$$I_2(N)=1-\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\,\langle\rho(E+\omega)\rangle\,N^2\mathscr{C}_N(\omega), \tag{8}$$

其中，$\mathscr{C}_N$是有限图上方程（7）的本征态关联函数；$N^2\mathscr{C}_N(\omega)$在$N\to\infty$时存在有限极限$N^2\mathscr{C}_\infty(\omega)$，它就是出现在方程（6）中的无限 BL 的函数$N^2\mathscr{C}(\omega)$，且$\omega=E_{\alpha'}-E_\alpha$取正负两种符号，因此所有关于$\omega$的积分都遍及整个实轴。因此，逆参与率由一个本征态与其他所有本征态的总重叠确定，其有限尺寸修正恰好等于该总重叠相对于无限系统的亏缺；由于亏缺集中在较小的ω处（第三节 E），此时$\langle\rho(E+\omega)\rangle\simeq\langle\rho\rangle$，

$$I_2(N)-I_2^{\infty}\simeq\langle\rho\rangle\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\Big[N^2\mathscr{C}_\infty(\omega)-N^2\mathscr{C}_N(\omega)\Big]. \tag{9}$$

方程（6）也可以写成相同的形式，$I_2(\eta)\simeq1-\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\,\langle\rho(E+\omega)\rangle\,N^2\mathscr{C}(\omega)\,\omega^2/(\omega^2+4\eta^2)$，忽略解析项：有限的$\eta$会从求和规则中去除劈裂为$\omega\lesssim\eta$的那些对，因为它无法分辨这些对；而有限的$N$则会使这些对的数量减少。因此，这两种修正都衡量能量接近、但未被分辨或缺失的本征态对之间的重叠，而且二者符号相同：它们都会增大逆参与率。

在无限 BL 上，局域格林函数可以通过递归构造 [14, 15]精确计算。引入“空腔”格林函数$G^{i\to j}$，其定义为移除j（i的邻点）后的图的预解式的对角元，则有

$$G_{i\to j}^{-1}=\epsilon_i-\mathrm{i}\eta-\sum_{m\in\partial i\setminus j}G_{m\to i}, \tag{10a}$$

$$G_{ii}^{-1}=\epsilon_i-\mathrm{i}\eta-\sum_{m\in\partial i}G_{m\to i}. \tag{10b}$$

对无序进行平均后，方程 (10a) 变为一个关于腔格林函数实部和虚部联合概率分布$P_\eta(g,\hat{g})$的闭合自洽积分方程。由此可得局域格林函数的分布，进而通过方程 (3) 得到$I_2(\eta)$。这些方程可通过种群动力学 [14, 15, 30, 31, 33, 76]，以任意精度进行数值求解，因此我们将其作为安德森模型的“精确”参照，并在全文中使用。

B. 局域化相中解的结构

在局域化相中，绝大多数格点上的格林函数虚部随 η 线性趋于零，而在能量为$E \approx 0$的本征态局域中心附近的少数格点上，虚部则异常大。因此，方便起见，我们写作 $G^{i\to j} = g_{i\to j} + \mathrm{i}\eta\hat{g}^{i\to j}$，局域函数也作类似表示。按照文献 [33]，，我们引入局域格林函数的逆

$$\begin{aligned} M_{ii} &\equiv G_{ii}^{-1} = m_{ii} - \mathrm{i}\eta\hat{m}_{ii}\,, \\ m_{ii} &= \epsilon_i - \sum_{m\in\partial i} g_{m\to i}\,, \qquad \hat{m}_{ii} = 1 + \sum_{m\in\partial i}\hat{g}_{m\to i}\,, \end{aligned} \tag{11}$$

及其联合分布 $Q_\eta(m,\hat{m})$。进入方程 (3) 的局域格林函数的矩由共振区域 $m \approx 0$ 主导；将变量改为 $m = \eta\hat{m}x$ 后可得

$$\begin{aligned} \left\langle |G_{ii}|^2 \right\rangle &= \int \frac{Q_\eta(\eta\hat{m}x,\hat{m})}{\eta\hat{m}\,(1+x^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\hat{m}\,, \\ \langle \mathrm{Im}G_{ii}\rangle &= \int \frac{Q_\eta(\eta\hat{m}x,\hat{m})}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\hat{m}\,. \end{aligned} \tag{12}$$

在 $\eta\to 0^+$ 极限下，腔方程 (10a) 可简化为，

$$\begin{aligned} g_{i\to j} &= \frac{1}{\epsilon_i - \sum_{m\in\partial i\setminus j} g_{m\to i}}\,, \\ \hat{g}_{i\to j} &= g_{i\to j}^2\Big(1 + \sum_{m\in\partial i\setminus j}\hat{g}_{m\to i}\Big), \end{aligned} \tag{13}$$

实部的方程相互解耦，虚部的方程变为线性方程且与 η 无关，并且在方程 (12) 中，$Q_\eta(\eta\hat{m}x、\hat{m})$ 可由 $Q_{0^+}(0,\hat{m})$ 替代。由此得到逆参与率的渐近值 [27, 33]

$$I_2^\infty = \frac{\int_0^\infty Q_{0^+}(0,\hat{m})\,\hat{m}^{-1}\,\mathrm{d}\hat{m}}{\int_0^\infty Q_{0^+}(0,\hat{m})\,\mathrm{d}\hat{m}} = \int_0^\infty \overline{Q}_{0^+}(\hat{m})\,\hat{m}^{-1}\,\mathrm{d}\hat{m}\,, \tag{14}$$

其中，$Q_\eta(\hat{m}) \equiv Q_\eta(0,\hat{m})/\int_0^\infty Q_{0^+}(0,\hat{m})\mathrm{d}\,\hat{m}$ 是在 $m = 0$ 处的 $\hat{m}$ 的分布，并在 $\eta\to 0^+$ 极限下归一化为 1。方程 (14) 的分母是平均态密度，$\int_0^\infty Q_{0^+}(0,\hat{m})\mathrm{d}\,\hat{m} = \langle\rho\rangle = \langle \mathrm{Im}G_{ii}\rangle/\pi$。

在有限的 η 下，同样的分解给出修正项。将方程 (12) 中的 $Q_\eta(m,\hat{m}) = Q_\eta(0,\hat{m}) + [Q_\eta(m,\hat{m}) - Q_\eta(0,\hat{m})]$ 劈裂开来，第二部分关于 m 是规则的，并且仅在 η [阶对 $\eta\left\langle |G_{ii}|^2\right\rangle$ 有贡献；其贡献为 $\eta\int \mathrm{dm}\,[\tilde{Q}_{0^+}(m) - \tilde{Q}_{0^+}(0)]/m^2 + o(\eta)$，其中 $\tilde{Q}$ 是 m], 的边缘分布；而第一部分则恰好给出 $\pi\int Q_\eta(0,\hat{m})\hat{m}^{-1}\mathrm{d}\,\hat{m}$。假设方程 (3) 分母中的平均态密度不会产生奇异修正，可以得出，在领阶下，

$$I_2(\eta) - I_2^\infty \approx \int_0^\infty \left[\overline{Q}_\eta(\hat{m}) - \overline{Q}_{0^+}(\hat{m})\right]\hat{m}^{-1}\,\mathrm{d}\hat{m}\,. \tag{15}$$

因此，IPR 的反常修正必然反映出分布中 $\hat{m}$ 在 $m =$处对 η 的反常依赖

0 位于 $\hat{m} = O(1)$区域内，该区域主导积分——也就是说，反映的是共振位点处 LDoS 的典型 值，而非其远尾部。

分布$Q_{0^+}(0,\hat{m})$ 具有明确的物理意义：在一个共振点处，$\mathrm{Im}G_{ii} = 1/(\eta\hat{m})$，因此 $\hat{m}^{-1}$ 是以 $1/\eta$ 为单位的局域态密度，即共振本征态在格点 i 上的振幅平方$u = |\psi_\alpha(i)|^2$ 。事实上，在热力学极限下，$E = 0$本征态的振幅分布 $T_\infty(u)$ 整体由 [27, 33]给出

$$T_\infty(u) = \overline{Q}_{0^+}\left(\frac{1}{u}\right)\frac{1}{u^3}\,, \tag{16}$$

在有限的 $T_N(u)\,\mathrm{d}u = N$下归一化，并且$I_2^\infty = \int_0^1 T_\infty(u)u^2\,\mathrm{d}u$，与方程 (14) 一致。我们将在第VIII节 B 中再讨论这一关系。

局域化相的关键特征是$Q_{0^+}(0,\hat{m})$具有幂律尾部，

$$Q_{0^+}(0,\hat{m}) \simeq \frac{C_Q}{\hat{m}^{1+\beta}}\,, \qquad \hat{m}\to\infty\,, \tag{17}$$

其指数依赖于无序 $\beta\in(1/2,1)$，并表现为 [14–29, 33]

$$\beta \simeq \frac{1}{2} + c_\beta\sqrt{W - W_c} \tag{18}$$

接近相变时，并且当 $W \to \infty$ 时趋于 1。指数 β 由虚部的线性递推 (13) 确定：将腔分布的尾部写作$P_0(g,\ \hat{g}) \simeq f_\beta(g)\hat{g}^{-1-\beta}$，并注意到当 $\hat{g}$ 较大时，$\hat{g} \simeq g^2\hat{g}_1$ 由最大的 $\hat{g}_m$主导，可以发现 f^β 必须满足

$$\begin{aligned} f_\beta(g) = k\int \mathrm{d}\epsilon\, p(\epsilon)\left[\prod_{i=2}^k \mathrm{d}g_i\, P_0(g_i)\right]\mathrm{d}g_1\,|g|^{2\beta} f_\beta(g_1) \\ \times\,\delta\Big(g - \frac{1}{\epsilon - \sum_{i=1}^k g_i}\Big), \end{aligned} \tag{19}$$

其中，$P_0(g)$是 $\eta = 0$处实部的（已知）分布。方程（19）是著名的 Abou-Chacra–Anderson–Thouless 条件 [14, 15, 22]: 记$\lambda(\beta)$为其右端线性算子的最大特征值，则要求 $\lambda(\beta) = 1$。函数 $\lambda(\beta)$在 $\beta\to 1-\beta$ [14, 15, 22, 23, 31, 77]下具有对称性，因此在局域化相中，方程（19）有两个 解，分别为 β 和$1-\beta$；它们在相变处的 $\beta = 1/2$ 合并；P_0 的尾部由其中较大的那个决定。方程（17）通过方程（16）对应于小u时的$T_\infty(u) \propto u^{-(2-\beta)}$，而渐近逆参与率呈现平方根奇异性$I_2^\infty \simeq I_2^{\infty\ \mathrm{crit}} + c_{I_2}\sqrt{W - W_c}$，位于$W_c$ [33]处~~跃变之上~~。在实空间中，共振点处较大的 $\hat{m}$ 意味着存在一个局域在远离该格点处的本征态，其指数尾延伸至该处，权重为$u = 1/\hat{m}$，且很小：如第三节 C 所述，尾部（17）计数的正是这些远处的态。

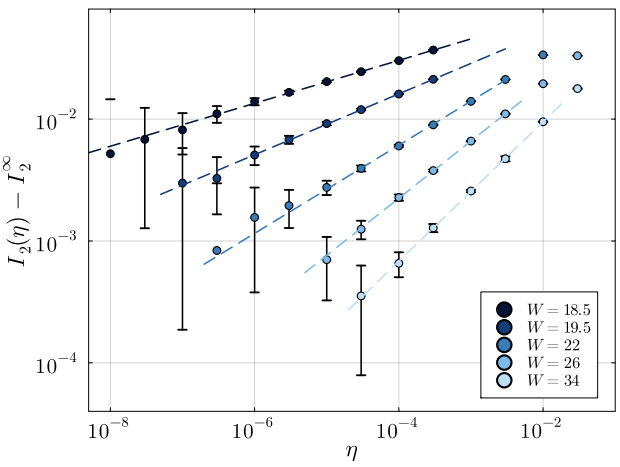

图 1. IPR 渐近值的有限-η 修正项：$I_2(\eta) - I_2^\infty$ 作为 η 的函数；结果来自无限 Bethe晶格（$k = 2$）上腔方程（10）的种群动力学求解，涵盖局域化相中的多个无序强度值。虚线表示对方程（20）进行的幂律拟合。

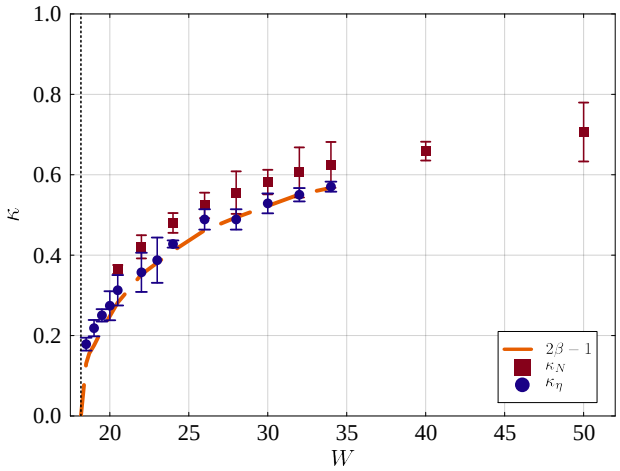

图 2. IPR 有限-η 修正项的指数 κ_η（圆圈），由图 1 的幂律拟合提取，作为无序强度 W 的函数。虚线表示本文推导的预测值 $\kappa = 2\beta - 1$，其中 $\beta(W)$ 独立地由局域态密度分布的尾部（17）得到。方块表示参考文献 [50] 通过精确对角化得到的、在 $\eta = 0$ 处有限尺寸修正的指数κ_N，以供比较。在接近 W_c 时，纯幂律拟合会高估该指数，因为修正项会过渡到对数临界行为（第九节）。

C. 异常有限-η修正项的数值证据

获取有限调节器修正最直接的方法，是在有限 η下通过种群动力学求解完整的腔方程（10a），并通过直接抽样计算方程（3）。图 1 展示了局域化相中若干W 取值下的结果，涵盖 η的多个数量级；其中I_2^∞ 采用了参考文献 [33] 中方法给出的极高精度结果。直观地说，由于 η, 腔方程中仅通过 η^2 [进入，见下方方程（78）], ，人们会预期解析修正项的量级为 η^2，或至多为 η。然而，修正项遵循幂律

$$I_2(\eta) - I_2^\infty \simeq c_\eta \, \eta^{\kappa_\eta} , \tag{20}$$

其指数 $\kappa_\eta \in (0,1)$ 随 W 连续增大，而前因子 $c\eta$ 在局域化相深处仅微弱依赖于 W（$c_\eta \approx 0$ 为 0.13–0.15， $22 \leq W \leq$为 34）。该幂律是修正项的渐近区间 $\kappa_\eta \ln(1/\eta) \gg 1$：随着 $W \to W_c$，它移向越来越小的 η；其前因子随指数线性趋于零（第九节中的图15），正如第六节 B 所预测的那样，并且修正项过渡到对数临界行为（第九节）。如图2所示，该指数可由以下表达式极好地描述

$$\kappa_\eta = 2\beta - 1 , \tag{21}$$

其中， $\beta(W)$ 由尾部（17）独立确定。该指数在临界点处消失，此处修正项预计会变为对数形式 [28], ；而当$W \to \infty$时，该指数趋于 1。通过精确对角化获得的W_c处的有限尺寸修正（参见文献 [50] ）具有相同的指数，$\kappa_N \simeq \kappa_\eta$ （图 2 中的方块）。[78] 在接近W_c时，纯幂律拟合会高估该指数：此时修正项正进入向对数临界行为的交叉区，第二节的标度形式通过 $\kappa = 2\beta - 1$对此作了描述；κ_N 也略高于κ_η，两者的差距随N 缓慢减小（第九节）。

III. 本征态关联与实空间图景

谱恒等式（6）和求和规则（8）通过能量接近的本征态对之间的关联，表达了这两种修正项。本节首先说明，这些关系精确确定了本征态关联的指数 μ， $\mu = 1 - \kappa$, 以及其振幅（第三节 A），并通过直接计算这些关联予以验证（第三节 B）。随后，我们从实空间角度解释这些修正项：基于本征态振幅统计的共振计数能够复现 $\mu = 2(1-\beta)$（第三节 C），精确对角化证实了其关于共振对的图景（第三节 D）；有限尺寸修正源于有限图上缺失的杂化对（第三节E），而 $\beta = 1/2$ 则标志着共振的大量涌现（第三节 F）。

A. 有限调节器修正项与本征态关联：$\kappa = 1 - \mu$

方程（6）将指数 κ 与本征态关联精确地联系起来，无需对作出贡献的本征态对的性质作任何假设。写作 $N^2 \mathscr{C}(\omega) \simeq B \, |\omega|^{-\mu(W)}$，其中 $0 < \mu < 1$，并将这一形式代入

方程 (6) 给出方程 (20)，其中

$$\kappa = 1-\mu, \qquad c_\eta = \frac{\pi \langle \rho \rangle B\, 2^\kappa}{\sin(\pi\kappa/2)}. \tag{22}$$

反之，由于 $N^2\mathscr{C}(\omega)$ 和方程（6）的核均为正，幂律（20）确定了小能级劈裂处本征态关联的权重，$\langle\rho\rangle \int_{-\omega}^{\omega} N^2\mathscr{C}(\omega')\mathrm{d}\omega' \simeq 2\langle\rho\rangle B\,\omega^\kappa/\kappa$，其中 B 由公式（22）给出，因此 $N^2\mathscr{C}(\omega)\simeq B\,|\omega|^{-\mu}$，其中 $\mu = 1-\kappa$，唯一的条件是 $N^2\mathscr{C}(\omega)$ 在小ω处单调变化。[79] 因此，方程（21）同时确定了本征态关联的指数 $\mu = 2(1-\beta)$ 及其振幅 $B = c_\eta \sin(\pi\kappa/2)/(\pi\langle\rho\rangle 2^\kappa)$，无需其他输入：由于本文对 $\kappa = 2\beta-1$ 进行了解析推导，因此对于第 V 节中的玩具模型，以及在若干假设下对于第 VII 节中的安德森模型，同样可以得到 μ。

同样的推理可以确定控制本征函数高阶矩有限-η 修正项的本征态关联。定义 $I_q(\eta) = \pi\eta^{q-1}\langle(\mathrm{Im}G_{ii})^q\rangle/(n_q\langle\mathrm{Im}G_{ii}\rangle)$，其中 $n_q = \sqrt{\pi}\,\Gamma(q-1/2)/\Gamma(q)$，它趋于 $I^\infty{}_q = \left\langle\sum_i |\psi_\alpha(i)|^{2q}\right\rangle$，当 $\eta\to 0^+$ 时（对于 $q=2$，其主导修正项与方程 (3) 相同）；将 $(\mathrm{Im}G_{ii})^q$ 在本征态上展开后，涉及两个不同本征态的项给出了用广义成对关联表示的方程 (6) 的推广

$$\mathscr{O}_{p,s}(\omega) = \left\langle \sum_i |\psi_\alpha(i)|^{2p}|\psi_{\alpha'}(i)|^{2s}\right\rangle_{E_{\alpha'}-E_\alpha=\omega}, \tag{23}$$

其中 $N\mathscr{O}_{1,1} = N^2\mathscr{C}$:

$$I_q(\eta) - I_q^\infty \simeq \frac{\langle\rho\rangle}{2n_q}\sum_{p=1}^{q-1}\binom{q}{p}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\, N\mathscr{O}_{p,q-p}(\omega) \times K_{p,q-p}(\omega/\eta), \tag{24}$$

其中 $K_{p,s}(x) = \int \mathrm{d}y\ (1+y^2)^{-p}[1+(y+x)^2]^{-s}$ [对于 $q=2$，$K_{1,1}(x) = 2\pi/(4+x^2)$，并且可恢复方程 (6)]，；而涉及三个或更多不同本征态的项需要两个同时发生的共振，因而属于更高阶，$O(\eta^{2\kappa})$。因此，所有矩 I_q 共享指数 $\kappa = 1-\mu$，前提是所有 $\mathscr{O}_{p,s}$ 都以相同的指数 μ衰减；这正是共振图像的预测（第三节 C），并得到种群动力学的证实（第三节 B）。

由于公式（22）是精确的，直接计算$N^2\mathscr{C}(\omega)$只能对其加以验证。我们针对安德森模型进行了数值计算：通过精确对角化，以及直接在无限 BL 上进行种群动力学计算（第三节 B）；针对玩具模型则进行了解析计算：将其腔解延拓到复场（第五节 F）。公式（6）未能给出的是承载这些关联的本征态对的物理图像。在局域化相中，能量相近的两个态通常局域在相距很远的位置，彼此的重叠呈指数级微弱；而平均重叠及其高阶矩由罕见的莫特型共振主导，正如文献 [66] 对 BL 所论证的那样。第三节 C 对这一图像作了定量描述。

B. 本征态关联的直接计算

预测 $\mu = 2(1-\beta)$（其中 β(W) 取自 Q_0+的尾部）与文献[66][图 3(b)]中通过精确对角化得到的指数吻合良好，适用于 N $= 2^{15}$ 且 W $= 24$、30 和 42 的情形。我们还直接检验了公式（22）：通过对具有 N $= 2^{12}$ 和 2^{14} 个格点的随机正则图，以及具有 N $= 2^{15}$ 个格点且 W $= 22$ 的随机正则图进行精确对角化，计算 $N^2\mathscr{C}(\omega)$（每个样本中取所有满足 |E| < 0.2 的本征态，并选取参考态周围满足 $|\omega| < 0.1$ 的态对，参考态满足 |E| < 0.1；在 W $= 22$ 时，这些窗口缩小为 |E| < 0.11 和 0.056，分别对应 $|\omega| < 0.055$ 和 0.028，N $= 2^{14}$ 和 2^{15}）。在 W $= 22$、24、30、34 和 42 时，对 $10^{-4} < \omega < 2\times10^{-2}$ 范围内的数据进行幂律拟合，得到的指数接近 $2(1-\beta)$ [图 3(b)]中的结果；在 W < 30 时，有效指数随 N 增大而趋近预测值（在 W $= 22$时，N $= 2^{12}$、214 和 2^{15}对应的值为 $\mu = 0.563$、0.597 和 0.606）。不过，W $= 22$ 时剩余的偏差大多并非有限尺寸效应：下文所述的无限 BL 上的种群动力学，在相同窗口内拟合得到 $\mu = 0.611$，这是因为在该窗口内 $N^2\mathscr{C}(\omega)$ 尚未达到其渐近幂律区间。振幅也吻合良好 [图 3(a)]：在 W $= 34$ 时，测得的关联函数在超过三个数量级的 ω范围内紧密遵循无自由参数的预测 B $\omega^{-2(1-\beta)}$，其中 B $=$ 由有限-η数据确定，为 $c_\eta\sin(\pi\kappa/2)/(\pi\langle\rho\rangle$；在 W $= 22$ 时，对于 N $= 2^{15}$下的 $10^{-4} \lesssim \omega \lesssim 3\times10^{-3}$ 也符合这一预测，但较小值处出现有限尺寸饱和，并随 N 增大而移向更小的 ω；较大值处则出现非渐近修正，N $= \infty$时的种群动力学计算也显示了这一点。与此一致，将测得的 $N^2\mathscr{C}(\omega)$ 代入公式（6），对于 N $= 2^{14}$下的 $\eta \gtrsim 10^{-3}$，可以较好地再现种群动力学得到的 $I_2(\eta) - I_2^\infty$；较小的η 值则受到有限尺寸饱和的影响。

通过在 $\eta = 0^+$ 的无限 Bethe格 上直接计算本征态关联，可以完全避免有限尺寸饱和。在局域化相中，一个格点处的局域态密度是 δ 个峰的总和：在 $\eta = 0^+$ 和能量 E 处，腔格林函数 $g_{m\to i}$(E) 为实数；当 $m_{ii}(E) = \epsilon_i - E - \sum_{m\in\partial i} g_{m\to i}(E)$ 为零时，G_{ii}(E) 存在一个极点，其留数为 $|\psi_\alpha(i)|^2 = 1/\hat{m}_{ii}$(E)，其中 $\hat{m}_{ii}(E) = 1 + \sum_{m\in\partial i}\hat{g}_{m\to i}(E)$，而 $\hat{g}_{m\to i}(E) = \partial_E g_{m\to i}(E)$ 是 $\mathrm{Im}G_{m\to i}/\eta$ 在能量 E [处的 $\eta\to 0^+$ 极限，因为 $G(E+i\eta) = g(E) + i\eta\,\partial_E g(E) + O(\eta^2)$]，它满足方程 (13) 中的线性递推。 [在单个能量处，这意味着 I_2^∞ 是 $\hat{m}$ 在 m $= 0$ [33] 处的平均值。] 沿着同一棵树跟踪两个能量 $E_{1,2} = \mp\omega/2$ 处的腔变量，广义成对关联 (23) 可表示为

$$\langle\rho\rangle^2 N\mathscr{O}_{p,s}(\omega) = \left\langle \hat{m}_1^{1-p}\,\hat{m}_2^{1-s}\,\delta(m_1)\,\delta(m_2)\right\rangle, \tag{25}$$

其中 $m_j = m_{ii}(E_j)$，$\hat{m}_j = \hat{m}_{ii}(E_j)$（每个 $\delta(m_j)$ 都贡献本征态在 E_j处的权重 $1/\hat{m}_j$）。由于 ϵ_i 以相同方式进入 m_1 和 m_2，可以解析地对 ϵ_i 取平均，得到 $W^{-1}\delta(m_1 - m_2)$，其范围限制在 $p(\epsilon)$的支撑集内；两个能量处实腔变量的联合分布通过对 $\eta = 0^+$ 递推进行种群动力学求得。我们用 2^{21} 个元素的种群求解了该递推，取值为 $10^{-6} \le \omega \le 10^{-1}$，并用宽度为 $0.04\,\omega$ 的区间表示 $\delta(m_1 - m_2)$（宽度扩大五倍的区间

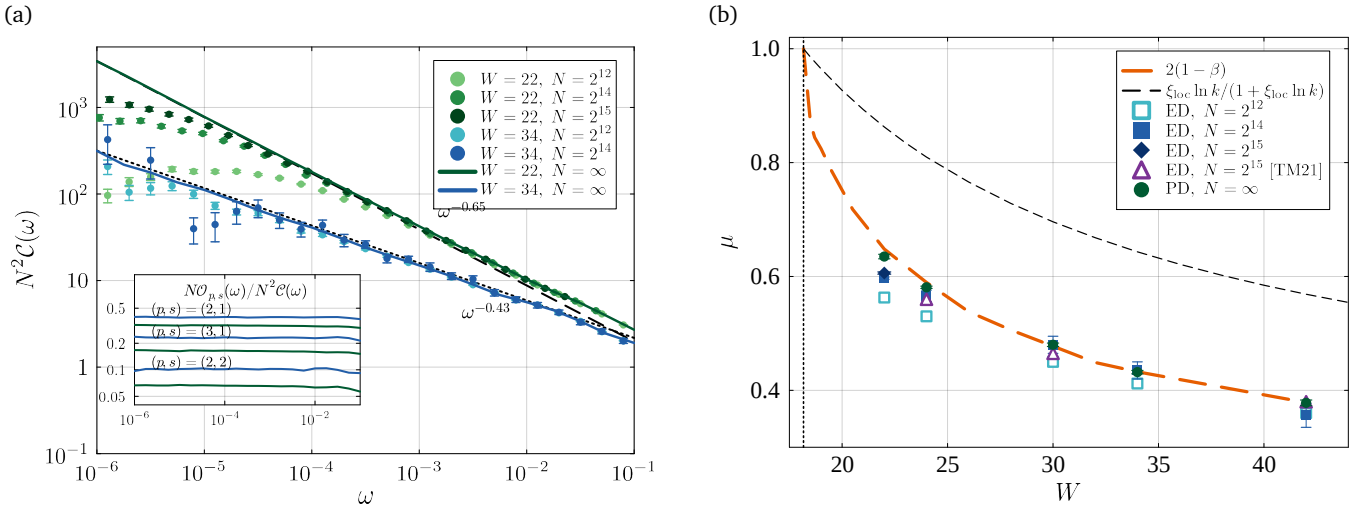

图 3. (a) 能量间距为 ω 的两个本征态的关联函数，$N^2\mathcal{C}(\omega)$，由随机正则图的精确对角化得到，其中格点数为 $N = 2^{12}$（浅色符号）和 2^{14}（深色符号），无序强度 $W = 22$（绿色）和 $W = 34$（蓝色）；另有格点数为 $N = 2^{15}$、无序强度为 $W = 22$（最深绿色）的情形。每个样本中均保留所有满足 $|E| < 0.2$ 的本征态（在无序强度 $W = 22$ 下，当 $N = 2^{14}$ 和 2^{15} 时，$|E| < 0.11$ 和 0.056），误差棒表示统计误差。线条：方程（22）的无参数预测 $B\,\omega^{-\mu}$，其中 $\mu = 2(1-\beta)$ 来自尾部指数 β，$B = c_\eta \sin(\pi\kappa/2)/(\pi \langle \rho \rangle\ 2^\kappa)$ 来自逆参与率的有限尺寸修正项 [。虚线：$W = 22$, $\mu = 0.65$；点线：$W = 34$, $\mu = 0.43$]。小 ω 时的饱和是有限尺寸效应，随着 N 增大，该效应移至更小的 ω。实线：在无限 Bethe格上直接于 $\eta = 0^+$ 进行的种群动力学计算，方程（25）（$N = \infty$；统计误差小于线宽）。插图：来自相同种群动力学计算的广义关联 $N\mathcal{O}_{p,s}(\omega)$，根据方程（23），除以 $N^2\mathcal{C}(\omega)$；对应 $(p、s) = (2,1)$、$(3,1)$ 和 $(2,2)$（从上到下；深绿色：$W = 22$，蓝色：$W = 34$）：所有成对关联均以相同指数 μ 衰减。(b) $N^2\mathcal{C}(\omega) \propto \omega^{-\mu}$ 的指数 μ 随无序强度的变化：通过对以下数据进行幂律拟合得到——精确对角化数据在 $10^{-4} < \omega < 2 \times 10^{-2}$ 上的结果（$N = 2^{12}$，空心方块；$N = 2^{14}$，实心方块；无序强度为 $W = 22$ 时 $N = 2^{15}$，菱形）、Ref. [66] 的精确对角化数据（$N = 2^{15}$，三角形），以及 $\eta = 0^+$ 下种群动力学在 $10^{-6} < \omega < 10^{-3}$ 上的结果（$N = \infty$，圆形）。虚线：预测值 $\mu = 2(1-\beta)$，其中 $\beta(W)$ 来自局域态密度分布的尾部，该尾部在 W_c 时达到 $\mu = 1$（点线）。细虚线：基于本征态平均衰减 [66]（第三节 C）的估计值 $\mu = \xi_{\rm loc} \ln k/(1+\xi_{\rm loc} \ln k)$；其中 $\xi_{\rm loc}$ 来自数值计算的 $\lambda(1/2) = e^{-1/\xi_{\rm loc}}$，其在接近 W_c 时给出 $\xi^{-1}{\rm loc} \simeq 0.031\,(W - W_c)$，与 Ref. [29] 的分析一致。

结果在统计误差范围内相同）。图 3(a)] 中的 $N^2\mathcal{C}(\omega)$ [实线没有显示出饱和，并且一直到最小的 ω 都可用幂律描述：对 $10^{-6} < \omega < 10^{-3}$ 进行拟合得到的指数与 $2(1-\beta)$ 十分接近，且在全部五种无序强度下均如此，统计误差为 ≤ 0。004 [图 3(b)], 中 $W = 22$ 处的小幅偏差，是局部斜率所显示的系统缓慢趋近渐近区间所致；对于 $\omega < 10^{-5}$，局部斜率达到 0.645，而 $2(1-\beta) = 0$为 0.648。在 $W = 22$ 处，当 $\omega \lesssim 10^{-5}$时，振幅与无参数预测 $B\,\omega^{-2(1-\beta)}$ 在统计误差范围内吻合；当无序强度高于该值时，非渐近修正开始显现。在整个 ω范围内，$W = 34$处的结果与 c_η 的已知精度相符。

种群动力学还表明，所有广义关联都以相同的指数衰减：对于 $(p、s) = (2,1)$、$(3,1)$ 和 $(2,2)$，比值$\mathcal{O}_{p、s}/\mathcal{O}_{1、1}$在统计精度范围内，与 ω 无关，跨越五个数量级 [，见图 3(a) 的插图]。最后，将种群动力学$N\mathcal{O}_{p、s}(\omega)$ 代入公式（24），无需任何可调参数，便重现了由有限-η 种群动力学 [方程（15）及其对带$\hat{m}^{1-q}$] 情形的类似方程所得到的修正项 $I_q(\eta) - I^\infty{}_q$，对于$q = 2$为 3 和 4 的情况，在整个范围$10^{-6} \leq \eta \leq 10^{-4}$ 内、于两个$W = 22$和$W = 34$ 处均成立（以及在$W = 22$处的 $\eta = 10^{-3}$），只有很小的残余偏差，并且仅在最小的 η处有所增大；在那里，有限-η 数据的精度最低。因此，分析至此闭合：本征函数所有矩的异常有限-η 修正项，都可以由能量相近的本征态对之间的关联定量地解释。

C. 振幅统计的共振计数

通过对局域态之间的莫特共振进行计数，可以揭示$N^2\mathcal{C}(\omega)$ 幂律的物理起源。这一论证是现象学的，自莫特 [66, 75, 81, 82]以来便被用于局域化系统：首先从未杂化局域态出发，根据一个局域态的峰与另一个局域态的尾部发生重叠的区域，估计二者的耦合，并假设当该耦合超过它们的能量间隔时，二者就会发生杂化。它并非可控推导，只能确定$N^2\mathcal{C}(\omega)$ 的指数，而不能确定其振幅（见下文）；不过，其中关于共振对的图像得到了精确对角化的详细验证（第 III D 和 III E 节）。如果本征态的振幅平均以 $|\psi(r)| \sim k^{-r} e^{-r/\xi_{\rm loc}}$的形式随距$r$ 其局域中心的距离衰减，那么中心相距R 的两个态之间的耦合矩阵元为

M $\sim k^{-R}e^{-R/\xi_{loc}}$，当 M 与它们的能量间隔 ω同阶时，二者会杂化成为一个共振对，其重叠为$\sum_i |\psi_\alpha(i)|^2|\psi_{\alpha'}(i)|^2 = O(1)$，即在 $R(\omega) \simeq \ln(1/\omega)/(\ln k + \xi^{-1}\ loc)$处发生共振。处于这一距离的态数为 $k^{R(\omega)} \sim \omega^{-\mu}$，其中 $\mu = \xi_{loc} \ln k/(1+\xi_{loc}\ln k)$ [66]。这里，局域化长度由 $\lambda(1/2) = e^{-1/\xi_{loc}}$定义，其中 $\lambda(s)$ 是方程（19）的线性算子的最大特征值，该方程中的 β 被 s 替换，因此 β 本身由$\lambda(\beta) = 1$ [29]确定。给定一个态，其中一个态位于ω 以内的概率为 $\omega\, k^{R(\omega)} \sim \omega^{1-\mu}$，由此得到 $N^2\mathscr{C}(\omega) \sim \omega^{-\mu}$。这一简单估计在$_c W\ \mu \to 1$处给出幂律，并在强无序下给出 $\mu \sim 1/\ln W$，但它明显高于所有数值上可达到的无序强度下测得的指数[（图 3(b) 中的细虚线）；更精细的共振计数考虑了波函数的强烈涨落，证实了幂律，而精确对角化给出 $\mu(W)$，其数值从 ≈ 0.7（接近 W_c）下降到 $W = 42$ [66]处的 0.38。

这一估计采用了波函数的平均衰减。现在我们将说明，一旦用振幅的精确统计取代平均衰减，同样的计数便给出 $\mu = 2(1-\beta)$。我们首先确定导致尾部（17）的实空间构型。在 $\eta = 0^+$，腔变量具有谱表示 $g = \sum_\alpha u_\alpha/(E_\alpha - E)$ 和 $\hat{g} = \sum_\alpha u_\alpha/(E_\alpha - E)^2$，其中 u_α 是腔图本征态 α 在根节点上的权重。一个权重为 u、能量间隔为 $\delta = E_\alpha - E$ 的单一本征态，对 g 的贡献为 u/δ，对 $\hat{g}$ 的贡献为 u/δ^2。如果 $u = O(1)$，则较大的 $\hat{g}$ 需要较小的 δ，因而需要较大的 g；反之，如果 u 很小且 $\delta \sim u$，则其对 g 的贡献仍为一阶量，而对 $\hat{g}$ 的贡献 $\sim 1/u$}很大。在有限 g 下构成尾部 $P_0(g, \hat{g}) \simeq f_\beta(g)\hat{g}^{-1-\beta}$ 的较大 $\hat{g}$ 值，因此可以由一个远离根节点的单一本征态产生：该本征态的指数尾以很小的权重延伸至根节点，并且与 E 近共振——这正是沿单一分支传播 $\hat{g} \simeq g^2\hat{g}_1$ 的实空间对应物。用方程（16）的语言来说，$u = 1/\hat{m}$ 是共振本征态在该格点上的权重，而尾部（17）则是振幅分布的$_\infty(u) \propto u^{-(2-\beta)}$ 小振幅尾部：[27]统计了其尾部以很小的权重 u 延伸至给定格点的远处局域态数量。

我们通过对 $N = 2^{11}$、212 和 2^{13} 个格点、$W = 22$ 以及 34 的随机正则图进行精确对角化来检验这一图景，并在 $E = 0$ 处遍历各本征态，在满足 $|G_{ii}| < 1/2$的格点上分解 $G_{ii}(E) = \sum_\alpha |\psi_\alpha(i)|^2/(E_\alpha - E)$ 和 $\partial_E G_{ii}(E) = \sum_\alpha |\psi_\alpha(i)|^2/(E_\alpha - E)^2$。这一条件对绝大多数格点都成立，可以排除格点自身的平庸共振；这些共振主导着无条件分布（见第 VII C 节）。沿着尾部，主导本征态所承载的 $\partial_E G_{ii}$ 占比从体区的大约一半增加到 $\partial_E G_{ii} \approx 30$ 处的 0.98，以及 $\partial_E G_{ii} \approx 500$处的 0.999，而第二个本征态所承载的权重则变得可以忽略。主导本征态在 i 上的权重大致按 $1/\partial_E G_{ii}$减小，其最大值点与 i 之间的图距离随 $\partial_E G_{ii}$呈对数增长，直至达到图的直径。对 $|G_{ii}| < 1/2$处、在$3 < \partial_E G_{ii} < 300$范围内的 $\partial_E G_{ii}$ 分布尾部进行最大似然拟合，得到指数 -1.69 和 -1.70，分别为 $W = 22$（$N = 2^{11}$ 和 2^{12}），对应于 $-(1+\beta) = -1.675$；以及-1.80 和 -1.79，在 $W = 34$处，对应于 -1.78，统计不确定性为 0.02–0.03；在$N = 2^{13}$ 处可用的样本较少，得到 -1.60 ± 0.04 和 -1.74 ± 0.05。

用这一分布计算莫特共振数可直接得到μ。考虑一个局域在格点i、在那里具有权重$O(1)$ 的本征态 α，以及一个相距很远的本征态 α'，后者在i上的权重很小，为u；根据方程 (16)及其下方的归一化，每单位能量内这类态的平均数为 $\langle\rho\rangle\ T_\infty(u)\mathrm{d}u$。这两个态通过矩阵元$M \sim \sqrt{u}$耦合，该矩阵元是在 α' 所局域的区域内α 的振幅。如果它们的能量间隔小于M，它们就会杂化为两个本征态$\simeq (\psi_\alpha \pm \psi_{\alpha'})/\sqrt{2}$，其劈裂为 $\omega \sim \sqrt{u}$，且二者在i上都具有权重$O(1)$，因此它们的重叠为一阶量。在劈裂为 ω 时，这类共振对的密度因此为

$$N^2\mathscr{C}(\omega)\,\mathrm{d}\omega \propto T_\infty(u)\sqrt{u}\,\mathrm{d}u\Big|_{u\sim\omega^2} \propto \omega^{2\beta-2}\,\mathrm{d}\omega, \quad (26)$$

即 $\mu = 2(1-\beta)$，该指数由方程 (21)和(22)精确确定。对于 $\omega \gg \sqrt{u}$的共振对，仅获得微扰重叠 $\sim \bar{u}/\omega^2$，其贡献$\omega^{-2}\int_0^{\omega^2} T_\infty(u)u\,\mathrm{d}u \propto \omega^{2\beta-2}$具有相同的标度。相同的计数方法也适用于广义重叠(23)，它们都以相同的指数衰减：相距 ω 的两个态通过M耦合，当$M \gtrsim \omega$ 时，其$\sum_i |\psi_\alpha(i)|^{2p}|\psi_{\alpha'}(i)|^{2s} = O(1)$ i；否则为 $\sim (M/\omega)^{2\min(p,s)}$，并且由于$2\min(p,s) > \mu$，对于所有$p, s \geq 1$，伙伴数都由$M \sim \omega$ 主导，因此$N\mathscr{O}_{p,s}(\omega) \simeq B_{p,s}\omega^{-\mu}$。方程(24)随后表明，所有矩$I_q$ 都具有指数 $\kappa = 1-\mu$，这与以下各节的零模分析一致。

因此，主导平均值$N^2\mathscr{C}(\omega)$及其推广形式的稀有大重叠，受小重叠的统计所支配：当远处某个态在该格点上的小权重u 超过其失谐的平方时，就会发生共振。因此，使能量接近的两个态的典型重叠呈指数级微小的同一尾部$T_\infty(u) \propto u^{\beta-2}$，也决定了稀有杂化态对以及微扰混合项出现的概率。

计数确定了指数，却无法确定振幅B，因为它把态 α视作全部权重都集中在格点i上。这样一来，它与 α' 的重叠便恰好等于 α' 在格点i上的权重，$\sum_j |\psi_\alpha(j)|^2|\psi_{\alpha'}(j)|^2 = |\psi_{\alpha'}(i)|^2 = u$，而它们之间的耦合也就仅由$u$ 决定。实际上，在格点i周围的有限区域内，$|\psi_\alpha(j)|^2$为数量级为一但小于一的值，而 α' 的权重会在该区域内变化：重叠和耦合是对该区域求和所得，与用u 估算的结果相比，会相差数量级为一且因态对而异的因子。这些因子的统计由格点i 周围的区域决定，而非由小权重u决定；它们会改变公式（26）的振幅，却不会改变其指数，后者由$T_\infty(u)$的尾部决定。振幅则由公式（22）精确确定，并且与第三节 B 的数值结果一致。

这是上文回顾的参考文献 [66] 中的论证，只不过将波函数的平均衰减替换成了振幅的完整统计。事实上，如果所有k^r

距离为 r 的格点都具有由平均衰减给出的权重 $u = k^{-2r} e^{-2r/\xi_{loc}}$，那么就会得到 $T_\infty(u)u \propto k^r \propto u^{-\ln k/[2(\ln k+\xi^{-1}loc)]}$，而方程（26）将给出 $\mu = \xi_{loc}\ln k/(1+\xi_{loc}\ln k)$。两种估计仅在首阶对数精度上相符，并且只在无限无序下渐近一致（见下文）；在有限 W 下，基于平均衰减的估计明显高于 $2(1-\beta)$ [图 3(b)]，，且接近 W_c，两者在定性上有所不同：基于平均衰减的估计给出 $1-\mu \propto 1/\xi_{loc}$，它随 $W - W_c$ 线性趋于零（若 ξ_{loc} 是控制沿稀有分支衰减的长度，且其指数为$\nu = 1$ [83]），而精确统计则给出 $1-\mu = 2\beta - 1 \propto \sqrt{W - W_c}$。在强无序下，Abou-Chacra–Anderson–Thouless 条件给出 $1-\beta \simeq \ln k/(2\ln W)$，达到首阶对数精度，即 $\mu \simeq \ln k/\ln W$，与共振估计的结果相同，其中 $|\psi(r)| \sim W^{-r}$。

D. 共振图景的数值检验

我们通过对含有$N = 2^{11}$ 至 2^{14} 个格点、无序强度为$W = 22$ 和 34 的随机正则图进行精确对角化，直接检验了共振对的几何结构（图 4）。对于每个满足 $|E| < 1$ 的本征态，我们确定其最大值点和第二个峰：后者定义为，在距离最大值点至少为 2 的某个格点周围半径为 1 的球内具有最大权重的格点。若两个本征态的重叠超过 0.05，且在这两个态中，第二个峰的权重均至少为第一个峰的一半，则称这对本征态为强杂化。两个局域中心之间的距离随 $1/\omega$呈对数增长：当 $\omega \approx 0.3$ 时约为 3，而对于 $W = 22$ 则约为 9；在 $W = 34$ 时该距离更短，因为波函数衰减得更快 [图 4(a)]。随着 ω 减小，这些共振对中两个态共享同一对中心的比例趋近于 1 [图 4(b)]：在较小的 ω 下，它们正是前文假设的杂化对 $\simeq (\psi_\alpha \pm \psi_{\alpha'})/\sqrt{2}$。每个本征态、每单位 ω 的共振对数量遵循 $\omega^{-2(1-\beta)}$，与公式（26）的预言一致：乘以 $\omega^{2(1-\beta)}$ 后，在$W = 34$ 处其数值是平坦的，在$W = 22$处也几乎如此，此时有效指数略小于 $2(1-\beta) = 0.65$ [图 4(c)、(d)]。对于 $\omega \gtrsim 10^{-3}$，它与N 无关；而在更小的 ω 下，它在最小的图上较低：这正是有限图上最稀有共振的缺失，下面我们将对此展开讨论。

E. 有限尺寸：缺失的杂化对

根据求和规则（9），IPR 的有限尺寸修正是在有限图上，一个本征态与其他本征态的总重叠的亏缺。为检验方程（9），我们利用相同的精确对角化数据，计算了一个本征态与其 ω 以内的本征态之间的总重叠，$S_N(\omega) = \left\langle \sum_{\alpha' \neq \alpha,\ |E_{\alpha'}-E_\alpha|<\omega} O_{\alpha\alpha'} \right\rangle$。在 $W = 22$处，$S_N(10^{-2})$从 $N = 2^{11}$ 增长到 $N = 2^{12}$，并且 2^{13} 分别增加了 0.0023 和 0.0038，统计不确定性为几个 10^{-4}；相比之下，$I_2(2^{11}) - I_2(N) = c_N(2^{-11\kappa} - N^{-\kappa}) = 0$分别为 0.0022 和 0.0040，其中 $c_N = 0.15$ [50]；差异在 ω 以下逐渐累积较小图的几个平均能级间距 $1/(N\langle\rho\rangle)$ 处，并且在更大的 ω 处不再增长。

这一缺失可以追溯到单个本征态。对于每个具有 $|E| < 1$、来自含有 $N = 2^{10}$ 至 2^{14} 个格点的随机正则图且 $W = 22$的本征态，我们按照上述定义记录了其 IPR、两个峰的位置及权重；如果第二峰的权重至少达到第一峰的一半（图 5），就称其为双峰态。对于这些数据，$I_2(N)$ 遵循公式（1）中的第二式，其中 $\kappa = 2\beta - 1$，且 $I_2^\infty = 0.4895 \pm 0.0019$、$c_N = 0.12 \pm 0.03$，与在 $E = 0$处得到的数值相符。双峰态两个峰之间距离 d 的分布在所有 N 下都相同，直到截断值 $d \approx \ln N/\ln k$（当 $k = 2$时为$\log_2 N$），该截断值每当 N 翻倍时就移动一个单位 [图 5(a)]；这一距离量级与图中两个格点之间的典型距离相当，其平均值从 $N = 2^{10}$ 时的 8.1 增长到 $N = 2^{14}$时的 12.1。因此，有限图上缺失的态就是两个中心间距超过图所允许范围的杂化对；对于 $d \geq 5$的双峰态，与其重叠最大的本征态在大多数情况下都具有这两个中心。按照以最大值点为中心、包含其 75%权重的球半径 r_{75} 对本征态进行分类后发现，权重分散在两个相距超过 8 个格点的中心上的态的比例（$r_{75} > 8$）从 $N = 2^{10}$ 时的 0.005 增长到 $N = 2^{14}$时的 0.021，而紧致态的比例（$r_{75} \leq 1$）则以相近的幅度下降；二者都随 $N^{-\kappa}$ [线性变化]图 5(b)]。每一类中的平均 IPR 与 N 无关：最紧致态约为 0.75，具有两个相距较远中心的态约为 0.21。因此，写作 $I_2 = \sum_c p_c \bar{I}_c$，其中 p_c 是属于$\bar{}$类的态所占比例，I_c 是其平均 IPR，则布居数的变化，$\sum_c[p_c(N) - p_c(2^{14})]\bar{I}_c(2^{14})$，解释了所有 N 下 $I_2(N) - I_2(2^{14})$ 的大部分变化 [图 5(c)]。因此，IPR 的有限尺寸修正是一种布居效应：在有限图上，具有相距较远中心的双峰态被紧致态所取代，而后者具有更大的 IPR。当 $W = 34$ 时，$N = 2^{10}$ 与 2^{14} 之间的有限尺寸修正小于这些数据的统计误差，因此无法得出明确结论。在第 VIII 节 B 中，还从振幅分布的角度分析了相同的有限尺寸修正；在该角度下，它们与腔方程的零模有关。

F. $\beta = 1/2$ 与共振增殖

同样的计数使 $\beta = 1/2$ 变得显而易见。给定态的劈裂小于 η 的共振伙伴平均数，$\langle\rho\rangle \int_{-\eta}^{\eta} N^2 \mathscr{C}(\omega)\,d\omega \propto \eta^{2\beta-1}$，是有限的，且仅当 $\beta > 1/2$时才随 $\eta \to 0$ 趋于零：此时局域态对与远处态的杂化保持稳定，而有限-η 修正（6）只是统计那些劈裂无法被调节器分辨的罕见共振对。在 W_c处，两个根节点 β和 $1-\beta$在1/2处合并，计数变为临界：$\mu \to 1$，而下文为玩具模型（第 VI 节）推导的 $1/|\ln H|$修正，即

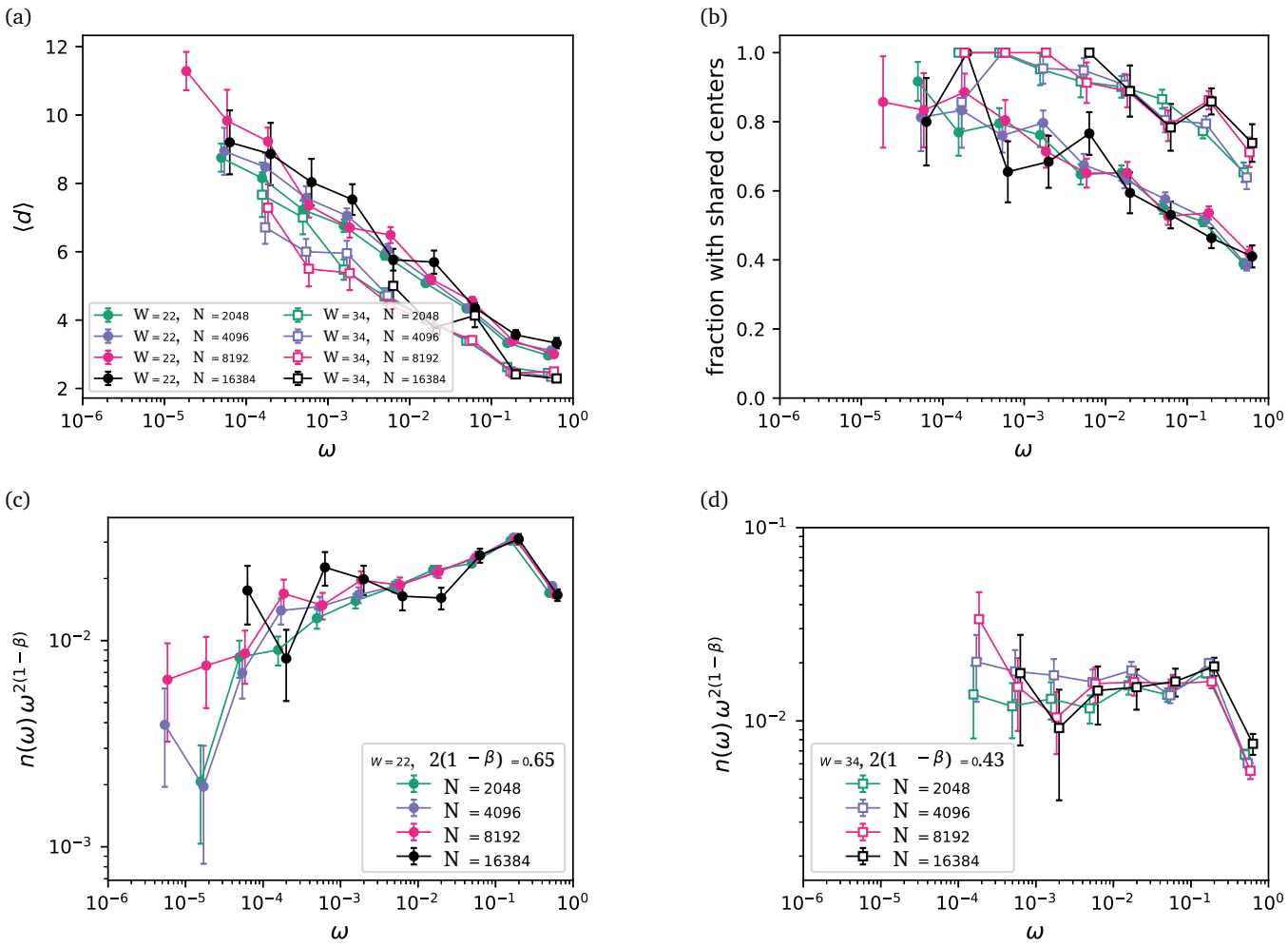

图 4. 通过对含有$N = 2^{11}$至2^{14}个格点的随机正则图进行精确对角化，得到共振对的几何结构；参数为$W = 22$（实心符号）和$W = 34$（空心符号）；本征态满足$|E| < 1$。强杂化对：重叠$\sum_i |\psi_\alpha(i)|^2 |\psi_{\alpha'}(i)|^2 > 0.05$，且在两种态中，第二峰（以距最大值点至少两个图距离处某格点为中心、半径为一的球上的最大权重）至少为第一峰的一半。(a) 两个局域中心之间的平均图距离$\langle d \rangle$与劈裂ω的关系。(b) 两个态共享两个局域中心的共振对所占比例。(c)、(d) 每个本征态、每单位ω对应的此类伙伴数$n(\omega)$，乘以$\omega^{2(1-\beta)}$，参数为$W = 22$和 34：平台对应公式（26）。误差为统计误差。

$1/|\ln \eta|$在此对应于$N^2\mathscr{C}(\omega) \propto 1/[\omega \ln^2(1/\omega)]$，其积分直到$\eta$都仅按对数规律衰减；在离域相中，两个根节点变为复数，共振便大量涌现。这就是 Anderson 的原始论证 [1]以及 Abou-Chacra、Anderson 和 Thouless 的自洽理论 [14, 15], 所提出的共振增殖判据，在此通过振幅统计的指数加以表达；它在树上的严格对应物是共振离域的分数矩判据 [84, 85]。

G. 从实空间图景到腔体方程

实空间图景解释了为何修正项受β控制，但它将$T_\infty(u)$的尾部作为输入。本文其余部分将从腔方程本身推导公式（21）；通过公式（22），这一推导也可等价地理解为对局域化相中本征态关联指数的推导。根据公式（15），需要推导的修正项是体区$\hat{}m = O(1)$中共振位点处局域态密度典型值的修正，而非其远尾部的修正。

IV. 可解的玩具模型：双曲超平面上的非线性 σ-模型

A. 为什么要用玩具模型，以及为什么选择这个模型

在文献 [67, 86, 87], 中引入了对 Anderson 局域化转变的有效场论描述，其中该问题被映射为具有非紧致对称性的 NLσM。NLσM 表示源于

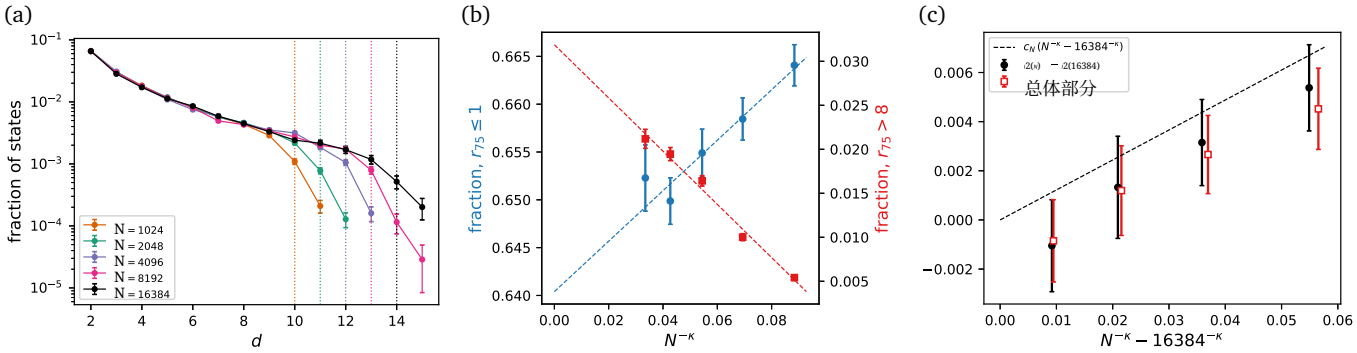

图 5. 通过对 N = 2^{10} 至 2^{14} 个格点、W = 22 条件下的随机正则图进行精确对角化，得到逆参与率和双峰本征态的有限尺寸修正项；本征态满足 |E| < 1，误差由对样本进行自助法计算得到。(a) 双峰本征态所占比例（第二峰至少为第一峰的一半，峰的定义同图 4），两个峰之间的图距离为 d；点线：d = ln N/ln k = $\log_2$ N。(b) 紧致本征态的比例（75% 的权重位于距最大值点不超过 $r_{75} \le 1$ 的范围内，左轴），以及权重分布在两个相距超过 8 的中心上的本征态比例，$r_{75} > 8$（右轴），随 $N^{-\kappa}$, $\kappa = 2\beta - 1 = 0.35$ 的变化；虚线：线性拟合。(c) $I_2(N) - I_2(2^{14})$（实心符号）及其总体部分 $\sum_c [p_c(N) - p_c(2^{14})]\, I_c(2^{14})$，其中类别 c 由 r_{75} 定义（空心符号）；虚线：$c_N(N^{-\kappa} - 2^{-14\kappa})$，其中 $c_N = 0.12$ 是根据同一组数据拟合 $I_2(N)$ 得到的。

模型的 $n \to \infty$ 极限：该模型是对具有 n 个轨道的推广，描述了金属颗粒之间的电子跃迁；这些颗粒各自带有 n 个轨道，并位于晶格的节点上；当 $n = 1$ 时，可得到具有随机高斯跃迁的安德森紧束缚模型。具有 n 个轨道的推广模型保留了原模型的定性特征和临界行为，同时其优势在于更便于进行解析计算。无限 BL 上的 NLσM 已在文献 [16–21] 中利用超对称方法求解（另见文献 [22–26]）。

尽管这种表述简化了问题的某些方面，但问题仍然极其复杂：序参量场是一个具有非紧致对称结构的 8×8 超矩阵，而据我们所知，其分布的自洽方程仅在 $\eta \to 0^+$ 极限下得到过分析。在这一框架内解析地计算有限η 修正项是一项艰巨的任务。因此，我们进一步简化问题，考虑一个定义在称为双曲超平面的非紧致对称空间上的“玩具”模型。该模型在文献 [68, 69] 中作为安德森局域化的简化模型被引入，并在文献 [70, 71]中得到进一步研究。其物理依据在于，NLσM的临界性质在很大程度上取决于其整体对称结构 [17–20]：玩具模型模拟了正交类完整NLσM的对称结构，尤其是必须通过对称性破缺场加以正则化的非紧致零模，因此预期能够捕捉正确的临界行为。Gruzberg和Mirlin [70], 在Bethe格上证实了这一预期：他们表明，玩具模型具有与Bethe格上安德森跃迁完全相同的奇异临界性，包括指数 β 的结构（两个根β、 $1-\beta$ 在 1/2处合并）及其平方根行为（18）。[文献 [71] 曾尝试通过蒙特卡洛模拟检验这种对应关系是否在三维中仍然成立；结果并无定论，但也不与之矛盾。该模型也称为$H^{2|2}$ 模型，此后得到了严格研究：已证明任意维度下强无序时存在局域化 [89], 、三维中的离域相 [90], ，以及该模型可精确映射为顶点增强跳跃过程 [91] 。] 对我们而言，关键在于玩具模型的腔方程只涉及一个单一实函数，其中对称性破缺场恰好扮演 η的角色，并且可以在小场条件下对其进行全面分析。

B. 模型与腔方程的定义

这些场取值于双曲超平面上，并由五分量超向量参数化

$$\overline{\psi} = (\sigma, \pi_1, \pi_2, \overline{\xi}, -\xi), \tag{27}$$

其中前三个分量是对易（玻色）变量，最后两个分量是反对易的格拉斯曼变量。标量积为 $\psi_a \cdot \psi_b \equiv \psi_a \nu\, \psi_b$，度量为 $\nu = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1,-1)$，因此平方范数为 $||\psi||^2 = \sigma^2 - \pi_1^2 - \pi_2^2 - 2\xi\xi$，并在每个格点上施加非线性约束 $||\psi||^2 = 1$。玻色分量可用双曲超平面上的“极坐标”参数化： $\pi_1 = \sinh\theta\cos\phi$、 $\pi_2 = \sinh\theta\sin\phi$、 $\sigma = \cosh\theta + \xi\xi/\cosh\theta$，其中 $0 \le \theta < \infty$且 $0 \le \phi < 2\pi$，从而恒等地满足该约束。哈密顿量为

$$H_{\mathrm{hs}} = J \sum_{\langle i,j \rangle} \overline{\psi}_i \cdot \psi_j + H \sum_i \sigma_i, \tag{28}$$

其中， $\langle i,j \rangle$ 遍历分支比为k的Bethe格中的最近邻对。耦合J 在安德森哈密顿量中起着跃迁与无序之比$1/W$ 的作用：大J下的有序相以非紧致对称性的自发破缺为特征（其中

下文定义的逆参与率代理量在$H \to 0$时趋于零），是离域相的对应相；而$J < J_c$ 时的高温顺磁相则是局域化相的对应相，这正是我们关注的对象。对称性破缺场H 对非紧致零模起正则化作用，恰如虚部调节器 η在安德森模型中的作用；一个构型的玻尔兹曼权重为$\propto \prod_i \mathrm{d}\psi_i\, e^{-H_{\mathrm{hs}}}$，其不变积分测度为

$$\mathrm{d}\psi = a\left(1 - \frac{\overline{\xi}\xi}{\cosh^2\theta}\right)\mathrm{d}\theta\, \sinh\theta\, \mathrm{d}\phi\, \mathrm{d}\overline{\xi}\, \mathrm{d}\xi\,, \tag{29}$$

其中常数 a 经过确定，使得 $\tilde{P} \equiv 1$ 在 $H = 0$处满足下面的腔方程（它特别吸收了方程 (31) 中出现的因子e^J ）。

如文献 [70], 所示，该模型可通过腔递归在 BL 上精确求解：对于节点处场的局部分布 $\tilde{P}(\psi)$，腔递归以腔图上邻居的分布为基础，其中一个邻居已被移除。由于该模型不存在淬火无序，因此具有平移不变性，所以该分布在每个节点上都相同；根据对称性，它只依赖于 σ 。自洽腔方程为 [70]

$$\tilde{P}(\sigma) = \int \mathrm{d}\psi' e^{-J\overline{\psi}\cdot\psi' - H\sigma'}\tilde{P}^k(\sigma')\,. \tag{30}$$

将等式两边按格拉斯曼变量的幂展开并将其积分掉，可得

$$\begin{aligned}
\tilde{P}(\theta) &= e^{J(1-\cosh\theta)-H}\tilde{P}^k(0) \\
&\quad + \int_0^\infty \mathrm{d}\theta' L(\theta,\theta') D(\theta')\tilde{P}^k(\theta')\,, \\
L(\theta,\theta') &= J\,\text{双曲正弦}\ \theta e^{J(1-\cosh\theta}{}_{\text{双曲余弦}\theta')}\,\tilde{I}_1(J\,\text{双曲正弦}\ \theta\,\text{双曲正弦}\ \theta)\,, \\
D(\theta') &= e^{-H\cosh\theta'}\,,
\end{aligned} \tag{31}$$

其中 $\tilde{I}_1(x)$ 是第一类修正贝塞尔函数。将此表达式代入 $\theta = 0$，得到 $\tilde{P}(0) = e^{-H}\tilde{P}^k(0)$，它有两个解： $\tilde{P}(0) = e^{H/(k-1)}$ 和 $\tilde{P}(0) = 0$；为确保 $\tilde{P}(\theta) \equiv 1$ 在 $H = 0$ 处是一个解，我们选择分支 $\tilde{P}(0) = e^{H/(k-1)}$。最后，玩具模型中逆参与率的对应物是参考文献 [70]中的相关函数在零距离处的取值，它类似于 $\eta\left\langle |G_{ij}|^2\right\rangle$在 $i = j$处的取值；在所有 $k+1$个邻居均存在的节点处测量时，它写作

$$I_2(H) = e^{-2H/(k-1)} H \int_0^\infty \mathrm{d}\theta\, D(\theta)\,\tilde{P}^{k+1}(\theta)\,\sinh\theta\,. \tag{32}$$

我们的目标是刻画不动点 $\tilde{P}(\theta)$在小 H 时的奇异行为，进而刻画 $I_2(H)$在顺磁相中 $H \to 0$ 时的行为。

C. 标度变量与小H 形式的腔体方程

引入变量 t 较为方便，该变量通过 $\cosh\theta = e^t/H$定义，并使用 $P(t) \equiv \tilde{P}(\theta)$进行分析。

在有限 H 下，t 的取值范围为 $[\mathrm{t_{min}}, \infty)$ 其中 $\mathrm{t_{min}} = \ln \mathrm{H}$。注意，当 $\mathrm{H} \to 0$ 时，$\mathrm{P(t_{min})} = \tilde{\mathrm{P}}(0) = \mathrm{e}^{H/(k-1)}$ 随 H 线性趋近于 1，而当 $\mathrm{t} \to +\infty$ 时，P(t) 衰减得比指数还快。作此选择的理由是，正如我们将看到的，$\mathrm{t} = \mathrm{O}(1)$ 所在的区域是 $\mathrm{H} = 0$ 解所处的区域（“体区”），而 $\mathrm{t} - \mathrm{t_{min}} = \mathrm{O}(1)$ 所在的区域则是外场 H 起作用的区域（“边界层”）；变量 t 类似于安德森问题中与 $\hat{\mathrm{m}}$ 共轭的拉普拉斯变量的对数 [19–25, 27]; 因此，位于 $\mathrm{t} \approx \ln \mathrm{H}$ 处的边界层对应于 $\hat{\mathrm{m}} \sim 1/\eta$。为了将方程 (31) 改写为适用于小 H 极限的形式，我们定义

$$\begin{aligned}
t &= \ln(H\cosh\theta)\,, \\
s(t) &\equiv \sqrt{1 - H^2 e^{-2t}}\,, \\
\sinh\theta &= \frac{e^t}{H}s(t)\,, \qquad \mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}t}{s(t)}\,, \\
x(t,t') &\equiv J\frac{e^{t+t'}}{H^2}s(t)s(t')\,, \\
y(t,t') &\equiv J\frac{e^{t+t'}}{H^2}\left(s(t)s(t') - 1\right)\,, \\
\tilde{I}_1(x) &\equiv \frac{e^{x+F(x)}}{\sqrt{2\pi x}}\,,
\end{aligned} \tag{33}$$

最后一个定义将$F(x)$ 中贝塞尔函数大自变量渐近式的修正项单独提取出来，$F(x) \to 0$，当$x \to \infty$时。将这些关系代入方程 (31)，经过一些代数运算可得

$$\begin{aligned}
P(t) &= e^{J(1-e^t/H)}e^{H/(k-1)} \\
&\quad + \int_{t_{\min}}^\infty \mathrm{d}t'\, K_H(t,t')\, e^{-e^{t'}}\, P^k(t')\,,
\end{aligned} \tag{34a}$$

$$K_H(t,t') = \frac{s^{1/2}(t)s^{-3/2}(t')}{2K_{-1/2}(J)}\, e^{F(x(t,t'))}\, e^{\frac{t-t'}{2} + y(t,t')}\,, \tag{34b}$$

这里用到了 $2K_{-1/2}(J) = \sqrt{2\pi/J}\, e^{-J}$，其中$K_\nu$ 为第二类修正贝塞尔函数。函数$x(t,\ t')$ 在固定t时随$H \to 0$ 增大而发散，因此$e^{F(x)} \to 1$，并且$y(t,\ t') \to -J\cosh(t - t')$。在固定$t = O(1)$时取$H \to 0$ 极限，即体区，此方程因此化为

$$P_0(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t'\, L_0(t-t')\, e^{-e^{t'}}\, P_0^k(t')\,, \tag{35}$$

其中核为平移不变核

$$L_0(t) = \frac{1}{2K_{-1/2}(J)}\exp\left(\frac{t}{2} - J\,\cosh t\right)\,. \tag{36}$$

此处及下文中，$P_H(t)$ 的下标明确表示不动点解对 H 的依赖关系。

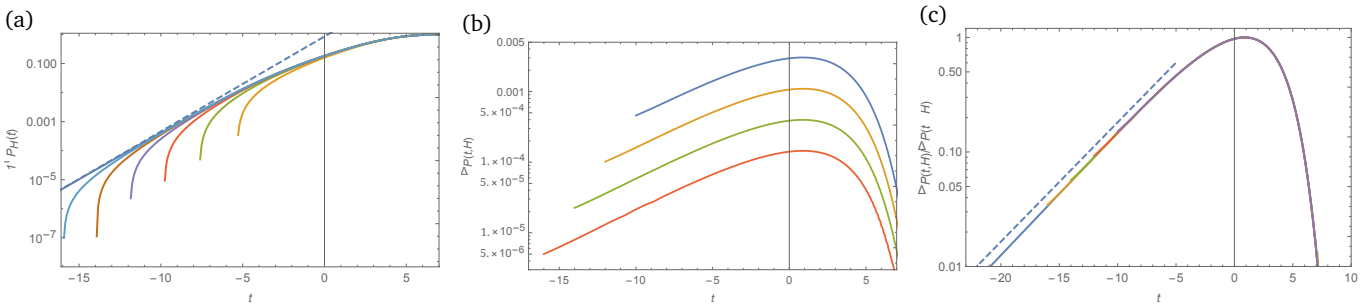

图 6。（a） $\delta P_H(t) = 1 - P_H(t)$ 与 t 的关系，J = 0.01、k = 2，以及对应于 $t_{min} = \ln H$ =−∞、−16、−14、−12、−10、−8、−6的若干个 H 值。直虚线是 H = 0解（ln H = −∞）的渐近线 c e^{β}t。（b） $\Delta P(t, H) = P_H(t) - P_0(t)$与 t 的关系，参数相同，且 $t_{min} = -16$、−14、−12、−10。（c） $\Delta P(t, H)/\Delta P(t^\star, H)$与 t 的关系，其中 $t^\star$是最大值点的位置。蓝线是标度函数 $f_{typ}(t)/f_{typ}(t^\star)$，其中 $f_{typ}(t)$ 是线性化方程（41）的解，当 t → −∞时按 $e^{(1-\beta)t}$ 衰减为零；虚线给出了 $e^{(1-\beta)t}$ 以供参考。

V. 顺磁相中的小H 标度分析

A. 体区与指数 β

由于 $t \to -\infty$ ，方程 (35) 的解必须趋于 1。将 $P = 1$ 写成 $P_0(t) = 1 - \delta P_0(t)$，并在 $t' \to -\infty$ 下注意到因子 $e^{-e^{t'}}$ 可以用 1 替代，对其进行线性化，可得到一个仅依赖于 $t - t'$ 的核方程，

$$\delta P_0(t) = k \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, L_0(t - t')\, \delta P_0(t'), \qquad (37)$$

其解为指数函数， $\delta P_0(t) \propto e^{\beta t}$，前提是$\beta$ 满足

$$\frac{1}{k} = \frac{K_{\beta-1/2}(J)}{K_{-1/2}(J)}. \qquad (38)$$

由于贝塞尔函数的对称性 $K_\nu = K_{-\nu}$ ，方程（38）在 $\beta \to 1-\beta$ 下保持不变。当 $J > J_c$（对于 k = 2， $J_c \approx 0.02654$）时，即处于有序相，此方程没有解；而当 $J < J_c$ 时，有两个对称解 $(\beta, 1-\beta)$，它们在临界点处于 $\beta = 1/2$合并。J_c 实际上由条件 $1 = k\, K_0(J_c)/K_{-1/2}(J_c)$确定。这正是第二节 B 中讨论的安德森模型的 Abou-Chacra–Anderson–Thouless 条件的结构，而 β 扮演着安德森模型局域态密度尾指数的角色 [70]。对于 J < J_c，物理解支是较大的根，因为：（i）在 t → −∞ 趋于 J → 0 极限时，它正确再现了 H = 0 解的已知行为；（ii）正如我们将在下文看到的，它是有限 H 下数值解所选取的解。在下文中，$\beta > 1/2$ 表示这个较大的根，并且

$$\delta P_0(t) = 1 - P_0(t) \simeq c\, e^{\beta t}, \qquad t \to -\infty, \qquad (39)$$

其中，前因子 c 无法由线性化方程确定，必须通过完整方程 (35) 的数值解求得；当 $J = 0.01$ 且 $k = 2$ 时，我们得到 $c \approx 0.8551$ 且 $\beta = 0.7530$。[92] 第二根 $1 - \beta$ 在 $H = 0$ 解中不起作用。由于 $t \to -\infty$ 对应于与 $\hat{}m$ 共轭、趋于零的拉普拉斯变量，也就是说 $\hat{}m \to \infty$，方程 (39) 是尾部 (17) 的对应形式。

我们针对多个 H 值对方程 (34a) 进行了数值求解；代码可在公共代码仓库 [93] 中获取。精确的解对于后续分析至关重要，因为我们关注的量，例如 $\Delta P(t, H) = P_H(t) - P_0(t)$，是两个解之间的微小差值；当 H → 0 时，必须跨越多个数量级才能分辨这些差值。图 6(a) 展示了 J = 0.01、k = 2 时的 $\delta P_H(t) = 1 - P_H(t)$，对应 $t_{min} = -\infty$ (H = 0) 和 $t_{min} = -16, \ldots, -6$。这些曲线收敛于 H = 0 解，仅在 $t = O(t_{min})$ 时偏离该解；直线虚线为渐近线 (39)。

B. 体区中的标度函数：$f_{typ}(t)$

现在考虑固定 t 时，不同 H 下不动点解之间的差值，$\Delta P(t, H) \equiv P_H(t) - P_0(t) = \delta P_0(t) - \delta P_H(t)$，如图 6(b) 所示。将每条曲线按其最大值点 $\Delta P(t^\star, H)$ 进行重标度后，除 $t = t_{min}$ 处的截断外，所有曲线都塌缩到同一条曲线上 [图 6(c)]，。这表明，在固定 t = O(1) 且 H → 0 时，

$$P_H(t) - P_0(t) = a_{typ}(H)\, f_{typ}(t), \qquad (40)$$

其振幅为 $a_{typ}(H)$ ，由图 6(b)可见，当 $H \to 0$ 时，它按 H 的幂次趋于零。值得注意的是，当 $e^{(1-\beta)t}$ 时，标度曲线按 $t \to -\infty$ 的幂次趋于零，也就是说，它遵循方程（38）的两个根中较小的那个。就我们所知，这是线性化腔方程的次主导解在这一背景下首次获得直接物理意义。

在体区对方程（34a）作小f_{typ} 展开，即可得到H 满足的方程。在t固定时，边界（源）项比H 的任意幂都衰减得更快，因此不会对代数小H 展开产生贡献。展开核后可得 $K_H(t、t') = L_0(t - t') + O(H^2)$；如下文的自洽检验所示，$a_{typ}(H)$ 是

远大于$O(H^2)$，因此可以忽略核的修正项。将试探形式（40）代入$P_0(t)$附近的方程（34a）并作线性化，得到

$$f_{\rm typ}(t) = k\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t'\, L_0(t-t')\, e^{-e^{t'}} P_0^{k-1}(t')\, f_{\rm typ}(t'). \quad (41)$$

换言之，$f_{\rm typ}$ 是 $\mathrm{H} = 0$ 腔方程在其不动点 P_0附近线性化后得到的零模：算子$1-\mathscr{L}_0$（其中 $\mathscr{L}_0$ 是方程 (41) 的右端）具有非平凡的核。这正是可能出现大于朴素估计 $O(H^2)$ 的修正的原因。注意，方程 (41) 与方程 (37) 不同；后者仅在 $t \to -\infty$ 时成立：方程 (41) 描述任意有限 t 下的修正，并在 $t, t' \to -\infty$ 时化为方程 (37)，因为此时 $P_0(t') \to 1$。因此，它允许存在分别按 $e^{\beta t}$ 和 $e^{(1-\beta)t}$ 变化的解（当 $t \to -\infty$ 时）。通过要求修正在 $H \to 0$ 时趋于零，便可选出第二个解：外场在边界层 $t \simeq \ln H$ 处移除权重 $\propto H^{\beta}$（第 V C 节），而若沿 $e^{\beta t}$ 将这一扰动传播至体区，它会被放大 $H^{-\beta}$ 倍，从而导致解发生 $O(1)$ 量级的变化，即得到另一个 $H = 0$ 不动点；由于方程 (39) 的前因子 c 由完整的方程 (35) 固定，这种情况不可能发生。沿 $e^{(1-\beta)t}$ 传播时，它只会被放大 $H^{-(1-\beta)}$ 倍，从而产生下文推导的趋零振幅 $H^{2\beta-1}$。图 6(c) 的数值结果证实了这一选择。因此，零模是唯一的，我们通过施加以下条件来固定其归一化

$$f_{\rm typ}(t) \simeq e^{(1-\beta)t}, \qquad t \to -\infty. \quad (42)$$

分析边界层后，便可清楚地看出为何会选中次主导根。

C. 边界层：函数 $f_{\min}$

为确定振幅 $a_{\rm typ}(H)$，必须研究区域 $t = O(t_{\min})$内的 $P_H(t)$，在那里它偏离了 $P_0(t)$。在该区域，$P_H(t)$ 接近于 1 [图 6(a)]，，并且方程 (34a) 可以再次在 $P = 1$附近线性化。数值结果表明，其标度形式为

$$P_H(t) = 1 - a_{\min}(H)\, f_{\min}(\Delta t), \qquad \Delta t \equiv t - t_{\min} = O(1). \quad (43)$$

利用 $t = t_{\min} + \Delta t$ 以及 $t_{\min} = \ln H$，可得

$$\begin{aligned} s(t) &= \sqrt{1-e^{-2\Delta t}} \equiv \tilde{s}(\Delta t), \\ x(t,t') &= J e^{\Delta t + \Delta t'} \tilde{s}(\Delta t)\tilde{s}(\Delta t') \equiv \tilde{x}(\Delta t, \Delta t'), \\ y(t,t') &= J e^{\Delta t + \Delta t'} \left(\tilde{s}(\Delta t)\tilde{s}(\Delta t') - 1\right) \equiv \tilde{y}(\Delta t, \Delta t'), \end{aligned} \quad (44)$$

因此，就 Δt、$\Delta t'$而言，方程 (34a) 的核恰好与 H 无关。这是参数化 $t = \ln(H\cosh\,\theta)$ 的特殊性质，也正是它使边界层方程变得易于处理的原因。源项变为 $e^{J(1-e^{\Delta t})}$，而因子 $e^{-e^{t'}} = e^{-He^{\Delta t'}}$ 趋近于 1。令方程 (34a) 中的 $H \to 0$ 和 $P \equiv 1$，得到恒等式

$$1 = e^{J(1-e^{\Delta t})} + \frac{1}{2K_{-1/2}(J)} \int_0^{\infty} \mathrm{d}\Delta t'\, \tilde{s}^{-3/2}(\Delta t')\tilde{s}^{1/2}(\Delta t)\, e^{F(\tilde{x}(\Delta t,\Delta t'))}\, e^{(\Delta t - \Delta t')/2 + \tilde{y}(\Delta t,\Delta t')}, \quad (45)$$

对于每个 $\Delta t \geq 0$，这一点都严格成立，因为它仅仅表明 $P \equiv 1$ 满足边界层方程的 $H \to 0$ 极限。将试探形式 (43) 代入方程 (34a)，对 $a_{\min}(H)$ 作线性化，并利用方程 (45)，即可得到线性方程

$$f_{\min}(\Delta t) = \frac{k}{2K_{-1/2}(J)} \int_0^{\infty} \mathrm{d}\Delta t'\, \tilde{s}^{-3/2}(\Delta t')\tilde{s}^{1/2}(\Delta t)\, e^{F(\tilde{x}(\Delta t,\Delta t'))}\, e^{(\Delta t - \Delta t')/2 + \tilde{y}(\Delta t,\Delta t')}\, f_{\min}(\Delta t'). \quad (46)$$

当 $\Delta t \to \infty$ 时，方程 (46) 的核化为方程 (37) 的核，因此 $f_{\min}(\Delta t)$ 渐近地是 $e^{\beta\Delta t}$ 与 $e^{(1-\beta)\Delta t}$的线性组合；我们根据其主导行为确定其归一化

$$f_{\min}(\Delta t) \simeq e^{\beta\Delta t}, \qquad \Delta t \to \infty. \quad (47)$$

在另一端，$P_H(t_{\min}) = e^{H/(k-1)} \approx 1 + H/(k-1)$ 随 H线性趋近于 1；正如我们将在下文自洽地验证的那样，这比 $a_{\min}(H)$衰减得更快，因此 $f_{\min}(0) = 0$；方程 (46) 自动满足这一条件，因为其核通过因子 $\tilde{s}^{1/2}(\Delta t)$在 $\Delta t = 0$ 处消失。

振幅 $a_{\min}(H)$ 通过在重叠区域 $t_{\min} \ll t \ll -1$ 将边界层解与体区解进行匹配来确定，其中方程（39）和方程（47）均成立：

$$\begin{aligned} 1 - a_{\min}(H)\, e^{\beta(t-t_{\min})} &= 1 - c\, e^{\beta t} \\ \Longrightarrow \quad a_{\min}(H) &= c\, e^{\beta t_{\min}} = c\, H^{\beta}. \end{aligned} \quad (48)$$

图 7 证实了这一结果：随着 $H \to 0$，曲线 $[1-P_H(t)]/(c\,H^{\beta})$趋于由求解方程 (46) 得到的标度函数 $f_{\min}(\Delta t)$。该方程使用附录 A 中的算法 4 求解。注意到，正如预期的那样，$a_{\min}(H) \propto H^{\beta}$ 随 H 的消失速度慢于线性速度。边界层是安德森问题中区域 $\hat{}m \sim 1/\eta$ 的对应物，在该区域内，调节器截断了$Q(0, \hat{}m)$的幂律尾部；方程 (48) 表明，该区域的权重按 η^{β} [参见方程 (17)]所示进行标度。

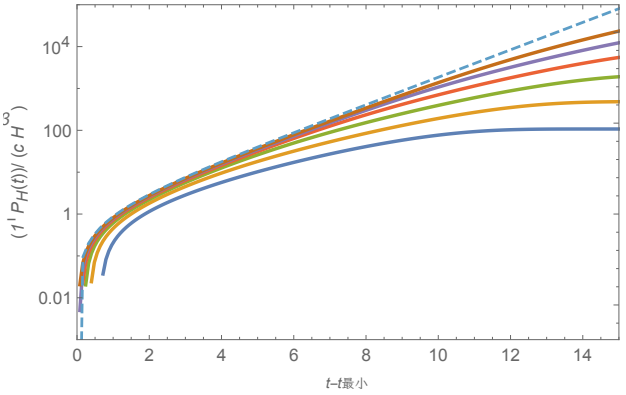

图7。 $[1-P_H(t)]/(c\,H^{\beta})$ 与 $t = t - t_{\min}$ 的比较，其中 $J = 0.01$、$k = 2$ 以及 $t_{\min} = -16$、-14、-12、-10、-8、-6。对于 $H \to 0$，曲线收敛于标度函数 $f_{\min}(\Delta t)$（蓝色虚线），该函数是方程（46）的解。

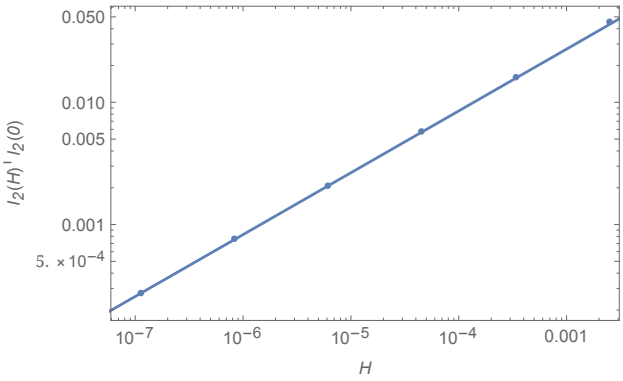

图8. 逆参与率差 $I_2(H)-I_2(0)$ 随 $H = e^{t_{\min}}$ 的变化，取 $J = 0.01$ 和 $k = 2$。实线表示无参数的预测，公式（54）。

D. 匹配和修正指数 $\kappa = 2\beta - 1$

现在，我们可以通过将体区渐近形式 (40) 的 $t \to -\infty$ 行为与边界层渐近形式 (43) 的 $\Delta t \to \infty$ 行为进行匹配，来确定 $a_{\rm typ}(H)$。关键观察是，除其主导行为 (47) 外，$f_{\min}(\Delta t)$ 还包含一个与第二根成正比的次主导 发散项，

$$f_{\min}(\Delta t) = e^{\beta \Delta t} - c_3\, e^{(1-\beta)\Delta t} + \dots, \qquad \Delta t \gg 1。 \quad (49)$$

之所以允许存在这样的项，是因为 $e^{\beta \Delta t}$ 和 $e^{(1-\beta)\Delta t}$ 都满足渐近线性化方程（37）；然而，其系数 c_3 并非自由参数，因为它由完整的边界层方程（46）决定，而该方程的解在依据方程（47）归一化后是唯一的。对于 $J = 0.01$ 和 $k = 2$，我们对方程（46）进行数值求解，得到 $c_3 \approx 0.969181$（c_3 取决于 J；我们将在第六节 B 中论证，当 $J \to J_c$ 时，它趋近于1）。次主导项正是决定 $a_{\rm typ}(H)$ 的项。在重叠区域 $t_{\min} \ll t \ll -1$ 中，根据方程（48）的构造，主导项在 $a_{\min}(H) f_{\min}(\Delta t)$ 和 $c\,e^{\beta t}$ 之间相互抵消，剩下的是

$$\begin{aligned} P_H(t) - P_0(t) &= -a_{\min}(H)\, f_{\min}(\Delta t) + c\, e^{\beta t} \\ &= c_3\, a_{\min}(H)\, e^{(1-\beta)(t-t_{\min})} \\ &= a_{\rm typ}(H)\, e^{(1-\beta)t}\,, \end{aligned} \quad (50)$$

其中，最后一个等式是采用归一化（42）的体区渐近形式（40）在 $t \to -\infty$ 极限下得到的。这说明体修正由次主导根决定，并可得

$$a_{\rm typ}(H) = c_3\, a_{\min}(H)\, e^{-(1-\beta)t_{\min}} = c_3\, c\, H^{2\beta-1}\,. \quad (51)$$

由于逆参与率代理量（32）是 $P_H(t)$ 的积分，且其主要贡献来自体区 $t = O(1)$，方程（40）和（51）推出

$$I_2(H) - I_2(0) \propto H^{2\beta-1}, \quad (52)$$

即 $\kappa = 2\beta - 1$，与安德森模型方程 (21) 中 IPR 的小-η 修正项一致。其机制可概括如下：场 H 从分布尾部移除了权重 $\propto H^{\beta}$；这一扰动不会沿着用于匹配未扰动解的主导模 $e^{\beta t}$ 传播到体区，而是沿着次主导模 $e^{(1-\beta)t}$ 传播；在此过程中，它在边界层与体区之间被放大了 $e^{-(1-\beta)t_{\min}} = H^{-(1-\beta)}$ 倍。乘积 $H^{\beta} \cdot H^{-(1-\beta)} = H^{2\beta-1}$ 就是反常修正。

为展示上述行为，我们用变量 t 表示 $I_2(H)$ 的表达式：方程（32）给出

$$I_2(H) = e^{-2H/(k-1)} \int_{t_{\min}}^{\infty} e^{-e^t}\, e^t\, P_H^{k+1}(t)\, \mathrm{d}t\,. \quad (53)$$

前因子 $e^{-2H/(k-1)} = 1 + O(H)$ 只产生解析修正，相较于 $H^{2\beta-1}$ 是次要的，因此以下将其忽略。在 $H \to 0$ 极限下，与 $I_2(0)$ 的差异由体区 $t = O(1)$ 控制；再回想 $P_H(t) \approx P_0(t) + c\,c_3\,H^{2\beta-1} f_{\rm typ}(t)$，我们得到

$$\begin{aligned} I_2(H) - I_2(0) \approx{}& H^{2\beta-1} c\, c_3 \\ &\times (k+1) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^t}\, e^t\, P_0^k(t)\, f_{\rm typ}(t)\, \mathrm{d}t\,. \end{aligned} \quad (54)$$

上述预测（54）可以进行定量检验；事实上，其中所有要素都可以计算，尤其是根据函数 $f_{\min}(\Delta t)$、$f_{\rm typ}(t)$ 和 $P_0(t)$ 的数值解，我们得到

$$(k+1) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^t}\, e^t\, P_0^k(t)\, f_{\rm typ}(t)\, \mathrm{d}t = 1.08772, \quad (55)$$

$$c = 0.8551\,, \qquad c_3 = 0.969181\,. \quad (56)$$

图 8 展示了 $I_2(H) - I_2(0)$ 随 H 的变化，并给出了渐近行为 (54)。两者吻合极佳，无论是指数还是前因子皆如此。指数 $2\beta - 1$ 在临界点处消失，这意味着在临界状态下，随着 $H \to 0$，逆参与率的收敛速度慢于幂律收敛；我们将在第 VI 节对此进行分析。

E. 标度区间概述

为方便起见，我们汇总$P_H(t)$ 在不同区间内的行为。在体区，$t = O(1)$,

$$P_H(t) = P_0(t) + c_3\, c\, f_{\rm typ}(t)\, H^{2\beta-1}, \tag{57}$$

其中，$f_{\rm typ}(t)$ 由方程（41）结合归一化条件（42）确定。在中间区域 $(t - t_{\rm min})/|t_{\rm min}| = O(1)$ 中，

$$P_H(t) = 1 - c\, e^{\beta t}\left[1 - c_3\, e^{(1-2\beta)(t-t_{\rm min})}\right], \tag{58}$$

在边界层 $\Delta t = O(1)$ 中，

$$P_H(t) = 1 - c\, H^{\beta} f_{\rm min}(\Delta t), \tag{59}$$

其中，$f_{\rm min}(\Delta t)$ 遵循方程（46），满足$f_{\rm min}(0) = 0$，并且对于 $\Delta t \to \infty$，其行为如方程（49）所示。常数 c 和c_3 由方程（35）和（46）数值确定；当$J = 0.01$ 且 $k = 2$时，$c \approx 0.8551$，$c_3 \approx 0.969181$。正如我们将在第 VII 和 VIII 节中看到的，体区（57）恰好是安德森模型在Bethe格上的标度区间，既适用于分布$Q_\eta(\hat{m})$ 的有限-η 修正项，也适用于本征态振幅分布的有限-N 修正项。

F. 玩具模型中的本征态关联：复场

在安德森模型中，有限-η 修正项由谱恒等式 (6) 通过能量间距为 ω 的两个本征态的关联函数 $\mathrm{N}^2\mathscr{C}(\omega)$ 确定。玩具模型不存在本征态，因为 $\mathrm{H_{hs}}$ 并非量子哈密顿量；但可以定义并计算与 $\mathscr{C}(\omega)$ 对应的量，方法是将 H 提升为复变量 $\mathrm{H} = \eta - \mathrm{i}\omega/2 = |\mathrm{H}|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\chi}$，其中 $\eta > 0$，即 $|\chi| < \pi/2$。该场仅通过 $\mathrm{D}(\theta)$、源项和边界值 $\tilde{\mathrm{P}}(0) = \mathrm{e}^{H/(k-1)}$ 进入方程 (31)，并且对 θ 的积分在 $\mathrm{Re\,H} > 0$ 时收敛。因此，从实数 H 延拓而来的不动点，以及方程 (32) 中的 $\mathrm{I}_2(\mathrm{H})$，在右半平面内是解析的，前提是它不遇到奇点；我们没有发现奇点的迹象。$\mathrm{I}_2(\mathrm{H})$ 在实数 H 时为实数，并且当 $\mathrm{H} \to \infty$ 时趋于 1；此时测度 $\mathrm{H\,D}(\theta)\sinh\theta\,\mathrm{d}\theta$ 集中于 $\theta = 0$，因子 $\mathrm{e}^{-2H/(k-1)}$ 补偿 $\mathrm{e}^{-H}\,\tilde{\mathrm{P}}^{k+1}(0)$。根据半平面的 Schwarz 积分公式，$\mathrm{I}_2(\mathrm{H})/\mathrm{H}$ 因而具有如下谱表示

$$\begin{aligned} \frac{I_2(H)}{H} &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\Omega\, \frac{\mathscr{S}(\Omega)}{H + \mathrm{i}\Omega/2}, \\ \mathscr{S}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\eta\to 0^+} \mathrm{Re}\, \frac{I_2(\eta - \mathrm{i}\omega/2)}{\eta - \mathrm{i}\omega/2}, \end{aligned} \tag{60}$$

其中 $\mathscr{S}(\omega) = I_2(0)\,\delta(\omega) + \mathscr{S}_{\rm reg}(\omega)$ 为实偶函数，并且$\int \mathrm{d}\omega\, \mathscr{S}(\omega) = \lim_{H\to\infty} I_2(H) = 1$。

对于实数H $= \eta$ 60 $_2(\eta) - {}_2(0) =$, $\int \omega\, \mathscr{S}_{\rm reg}(\omega)\, 4\eta^2/(\omega^2 + 4\eta^2)$ 6 方程（）写作$II\mathrm{d}$，即方程（），而$\int \mathrm{d}\omega\, \mathscr{S}_{\rm reg}(\omega) = 1 - I_2(0)$ 则是无限 BL 上的求和规则（8）：$\mathscr{S}_{\rm reg}(\omega)$ 是 $\langle\rho\rangle\ N^2\mathscr{C}(\omega)$的类似物，而 $I_2(0)\,\delta(\omega)$则对应对角项。事实上，在安德森模型中，对$I_2(\eta)/\eta = \left\langle |G_{ii}|^2 \right\rangle / (\pi\ \langle\rho\rangle\ )$作相同的延拓，以$G_{ii}(\mathrm{i}\eta)G_{ii}(-\mathrm{i}\eta)$ 取代$G_{ii}(\omega/2 + \mathrm{i}\eta)G_{ii}(-\omega/2 - \mathrm{i}\eta)$，其能量平均值满足公式（60），其中 $\mathscr{S}(\omega) = I_2^{\infty}\delta(\omega) + \langle\rho\rangle\ N^2\mathscr{C}(\omega)$，精确到解析项。[94]

令 $\mathrm{c}_H \equiv \mathrm{c}\ \mathrm{c}_3\,(\mathrm{k}+1)\int \mathrm{dt}\ \mathrm{e}^{-e^t}\mathrm{e}^t\,\mathrm{P}_0^k(\mathrm{t})\,\mathrm{f}_{\rm typ}(\mathrm{t})$ 表示公式（54）的前因子，$\mathrm{I}_2(\mathrm{H}) - \mathrm{I}_2(0) \simeq \mathrm{c}_H\mathrm{H}^{2\beta-1}$ ($\mathrm{c}_H = 0.9014$（对于 J = 0.01）。假设延续不动点不遇到奇点，则该定律可以通过在复平面中进行旋转来延续，$\mathrm{H} = |\mathrm{H}|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\chi}$，并保持相同的 c_H直至虚轴，其中 $[\mathrm{I}_2(\mathrm{H}) - \mathrm{I}_2(0)]/\mathrm{H} \simeq \mathrm{c}_H\mathrm{H}^{2\beta-2}$，且 $\mathrm{H}^{2\beta-2} = (|\omega|/2)^{-2(1-\beta)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(1-\beta)\,\mathrm{sgn}\,\omega}$；公式（60）随后给出

$$\mathscr{S}_{\rm reg}(\omega) \simeq \frac{c_H}{2\pi}\, \cos[\pi(1-\beta)] \left(\frac{|\omega|}{2}\right)^{-2(1-\beta)}, \qquad \omega \to 0, \tag{61}$$

即 $\mu = 2(1-\beta)$，其振幅不包含任何自由参数。由于 $\cos[\pi(1-\beta)] = \sin(\pi\kappa/2)$，公式（61）等价于公式（22），其中 $c\eta \to c_H$ 以及 $\langle\rho\rangle\ B|\omega|^{-\mu} \to \mathscr{S}_{\rm reg}(\omega)$，这是必然的，因为在实数 H 下，公式（60）的形式与公式（6）相同。然而，这一延拓直接计算相关函数本身，以解析方式进行，且不对其符号或单调性作任何假设：对于玩具模型而言，它对应于第二节 B 中对 $N^2\mathscr{C}(\omega)$ 进行的直接数值计算。我们通过在复数 H 下求解腔方程进行了数值验证，确认该旋转是允许的，并且公式（61）成立，且不含任何可调参数（附录 B 和图 17）。

旋转之所以成立，是因为第五节 A–D 的每一步在复数 H 下都适用。对于实变量 $\mathrm{t} = \ln(|\mathrm{H}|\cosh\theta)$，方程（34a）的核仍为实数，$\mathrm{K}_{|H|}(\mathrm{t}, \mathrm{t}')$，只有因子 $\mathrm{e}^{-e^{t'}}$ 会变为 $\exp\left(-\mathrm{e}^{t'-\mathrm{i}\chi}\right)$。（i）在体区，方程化为 $\mathrm{P}(\mathrm{t}) = \int \mathrm{dt}'\mathrm{L}_0(\mathrm{t} - \mathrm{t}')\exp\left(-\mathrm{e}^{t'-\mathrm{i}\chi}\right)\mathrm{P}^k(\mathrm{t}')$，其解为 $\mathrm{P}_0(\mathrm{t} - \mathrm{i}\chi)$；这是因为将积分路径平移 $\mathrm{i}\chi$ [$\mathrm{L}_0(\mathrm{u})$即可得到，而 u 在条带 $|\mathrm{Im\ u}| < \pi/2$ 内解析且当 $\mathrm{Re\ u} \to \pm\infty$ 时衰减；对于 $\mathrm{Re\ u} \to +\infty$], $\exp(-\mathrm{e}^u)$ 也会衰减：体解就是在复数自变量 $\ln(\mathrm{H}\cosh\theta)$处取 $\mathrm{H} = 0$ 解，而方程（41）的零模同样为 $\mathrm{f}_{\rm typ}(\mathrm{t} - \mathrm{i}\chi)$。（ii）在边界层中，$\Delta\mathrm{t} = \mathrm{t} - \ln|\mathrm{H}| = \mathrm{O}(1)$，有 $|\mathrm{H}\cosh\theta| \to 0$：与实数 H 的情形相同，源项和边界值不再依赖于 H，因此方程（46）、$\mathrm{f_{min}}$ 和 c_3 均保持不变。（iii）匹配的代数推导与方程（48）和（51）相同，只是在体区一侧以 $\mathrm{H}\cosh\theta$代替 e^t；由此在主值分支上得到 $\mathrm{a_{min}(H)} = \mathrm{c\ H}^{\beta}$和 $\mathrm{a_{typ}(H)} = \mathrm{c\ c_3\ H}^{2\beta-1}$；将方程（54）的积分路径移回后，对于所有 $|\chi| < \pi/2$，有 $\mathrm{I}_2(\mathrm{H}) - \mathrm{I}_2(0) \simeq \mathrm{c}_H\mathrm{H}^{2\beta-1}$。在 $|\chi| = \pi/2$处，积分路径不再允许平移，方程（61）由此作为边界值成立。[95] 方程（61）的振幅随 $\beta \to 1/2$趋于零，而临界点需要单独处理，下面我们将讨论这一点。

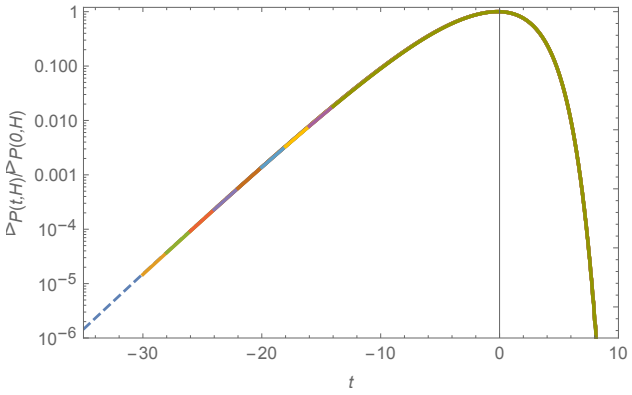

图9. $\Delta P(t,\ H)/\Delta P(0,H)$ 随t的变化，其中 $-t_{\min}$ =取值为30、28、26、24、22、20、18、16、14，位于临界点J $=J_c(k$ $=2)$。重标度曲线塌缩到重标度标度函数$f_{\rm typ}(t)/f_{\rm typ}(0)$（虚线）上。

VI. 临界点处及其附近的修正项

A. J $=J_c$处的对数修正

临界点的特征是 β $=$ $1/2$，即$2\beta-1=0$：逆参与率收敛到其H $=0$ 值的速度比任何幂律都慢。图 9 展示了通过在 J $=J_c$ 处对一系列较小的H值求解方程（34a）而得到的量$\Delta P(t、H)\equiv P_H(t)-P_0(t)$。将所有曲线除以 $\Delta P(0,H)$后，它们都塌缩到同一条主曲线上，因此因子化形式（40）仍然成立，其中$f_{\rm typ}(t)$ 在J $=J_c$处满足方程（41）。然而，主曲线在t $\ll$ 0时的渐近行为现在为

$$f_{\rm typ}(t)\sim -t\,e^{t/2},\qquad t\to-\infty\,. \tag{62}$$

事实上，远离临界性时，线性化方程（37）有两个解$e^{\beta t}$和$e^{(1-\beta)t}$；而在临界点处，两个根合并，此时有两个解$e^{t/2}$ 和 $-te^{t/2}$。将$e^{\beta t}$ 代入方程（37），并对 β求导即可看出这一点：来自核$L_0(t$ $-t')$ 的项与$\mathrm{d}J/\mathrm{d}\beta$ 成正比，该项在临界点处为零，因此$e^{\beta t}$ 对 β 的导数在J $=J_c$时也是一个解。因此，对于$t_{\min}$ $\ll$ t $\ll$ 0，不动点解为

$$\begin{aligned}P_H(t)&=P_0(t)+a_{\rm typ}(H)\,f_{\rm typ}(t)\\&=1-c\,e^{t/2}-a_{\rm typ}(H)\,t\,e^{t/2},\end{aligned} \tag{63}$$

其中，c 由J $=J_c$时方程 35 的解得到。

与非临界情形一样，$a_{\rm typ}(H)$源于与边界层的匹配，其中试探形式 (43) 仍然成立，$f_{\min}$ 在 J_c、$f_{\min}(0)=0$ 和$f_{\min}(\Delta t)$处满足方程 (46)，并且对于 Δt $\gg$ 1求解平移不变方程 (37)。要求 t $\ll 0$ 的方程 (63) 与 $1\ll\Delta t$ $\ll$的方程 (43) 相匹配 $|t_{\min}|$ 给出

$$\begin{aligned}a_{\min}(H)\,f_{\min}(\Delta t)&=c\,e^{t/2}+a_{\rm typ}(H)\,t\,e^{t/2}\\&=e^{t_{\min}/2}e^{\Delta t/2}\big[c+a_{\rm typ}(H)\,t_{\min}\\&\qquad+a_{\rm typ}(H)\,\Delta t\big].\end{aligned} \tag{64}$$

为了使右端与$f_{\min}(0)=0$相容，方括号中的常数项必须为零，即c $+a_{\rm typ}(H)t_{\min}=0$,[96]

$$a_{\rm typ}(H)=\frac{c}{|t_{\min}|}=\frac{c}{|\ln H|}\,. \tag{65}$$

取此值后，在区域 t $=$ $\mathrm{O}(\mathrm{t}_{\min})$ 中，方程 63 的两项具有相同的阶，并在 t $=$ $\mathrm{t}_{\min}$ 时相互抵消，这与 $\mathrm{P}_H(\mathrm{t}_{\min})=1$ 一致，差异项衰减速度快于 $\mathrm{e}^{t_{\min}/2}$。将方程 65 代回方程 64，可得 $\mathrm{a}_{\min}(\mathrm{H})\,\mathrm{f}_{\min}(\Delta\mathrm{t})=(\mathrm{c}/|\mathrm{t}_{\min}|)\mathrm{e}^{t_{\min}/2}\,\Delta\mathrm{t}\,\mathrm{e}^{\Delta t/2}$，只要满足 $\mathrm{f}_{\min}(\Delta\mathrm{t})\sim\Delta\mathrm{t}\,\mathrm{e}^{\Delta t/2}$ for $\Delta\mathrm{t}\to\infty$，以及

$$a_{\min}(H)=c\,\frac{H^{1/2}}{|\ln H|}\,. \tag{66}$$

因此，临界性下的标度区间为：在体区内，t $=O(1)$,

$$P_H(t)=P_0(t)+\frac{c}{|\ln H|}f_{\rm typ}(t), \tag{67}$$

当 $f_{\rm typ}(t)$ $\sim$ $-te^{t/2}$ 时，t $\to-\infty$；在中间区域 $(t$ $-t_{\min})/|t_{\min}|=O(1)$,

$$P_H(t)=1-c\,e^{t/2}\left(1-\frac{t}{t_{\min}}\right); \tag{68}$$

而在边界层 Δt $=O(1)$,

$$P_H(t)=1-c\,\frac{H^{1/2}}{|\ln H|}\,f_{\min}(\Delta t). \tag{69}$$

由于逆参与率代理量 (32) 由体区主导，临界点处逆参与率的修正项按对数规律消失，

$$I_2(H)-I_2^{\rm crit}(0)\propto\frac{1}{|\ln H|}, \tag{70}$$

这与 $2\beta-1$ 在 J $\to J_c$ 时趋于零，以及在 Bethe格 [28] 上安德森跃迁处数值观察到的逆参与率有限尺寸和有限-η 修正项按对数规律缓慢变化相一致。更准确地说，我们有

$$\begin{aligned}I_2(H)-I_2^{\rm crit}(0)&\approx\frac{c}{|\ln H|}\\&\quad\times(k+1)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-e^t}\,e^t\,P_0^k(t)\,f_{\rm typ}(t)\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned} \tag{71}$$

根据在 J $=J_c$、k $=2$ 处通过数值计算得到的标度函数 $f_{\rm typ}(t)$ 和 $P_0(t)$，我们有

$$(k+1)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-e^t}\,e^t\,P_0^k(t)\,f_{\rm typ}(t)\,\mathrm{d}t=0.7369\,, \tag{72}$$

其中 $c = 0.67573$。

我们注意到，在文献 [28] 中，根据虚频下自洽方程的解，临界修正被拟合为有效形式 $(\ln 1/\eta)^{-\zeta}$（其中指数 ζ 在该文献及文献 [59, 61] 中记作 μ；不应将其与第三节中本征态关联的指数 $\mu = 2(1-\beta)$ 混淆）。对于 Anderson 模型，$\zeta \simeq 1/2$；而对于本文的玩具模型，$\zeta \simeq 3/2$。相比之下，我们的分析预言的是纯对数形式 $\zeta = 1$。这种差异很可能是前渐近效应。方程（70）是关于 $1/|\ln \mathrm{H}|$ 的幂次展开中的主导项，而其修正项也仅按对数速度衰减：如图 10(c) 所示，$1/|\ln \mathrm{H}|$ 定律趋近得十分缓慢，必须达到 $|\ln \mathrm{H}| \gtrsim 50$，即 $\mathrm{H} \lesssim 10^{-22}$，渐近行为才会显现。在实际可达到的范围内（对于最大的精确对角化，$\ln \mathrm{N} \lesssim 12$–$14$；对于种群动力学，$|\ln \eta| \lesssim 20$–$30$），该修正仍远未达到其渐近形式，因此对 $\ln \mathrm{N}$ 或 $\ln(1/\eta)$ 进行幂律拟合必然会得到一个有效指数 $\zeta \neq 1$。由于有限图对分布的体区起到调节器 $\eta_{\mathrm{eff}} \sim 1/\mathrm{N}$ 的作用（第 VIII 节 B），相应地，我们预期在临界点存在一个渐近为 $\propto 1/\ln \mathrm{N}$ 的、随对数缓慢变化的有限尺寸修正。在玩具模型中，由于腔方程可以在任意小的 H 下求解，因此能够达到渐近区间；然而，这需要对 $\mathrm{t} \leq 0$ 区域进行专门的数值处理，在该区域中，亏损 $1 - \mathrm{P}_H(\mathrm{t}) \sim \mathrm{e}^{t/2}$ 随 $\mathrm{H} \to 0$ 变得指数级微小（附录 A 的算法 5）。

图 10 检验了这些预测。面板 (a) 展示了边界层中的标度 (69)；面板 (b) 表明，与方程 (68) 一致，在区域 $H = 0$ 解 $t = O(t_{\min})$ 中，相对于 $H = 0$ 解的偏差远大于非临界情形 [参见图 6(a)]；面板 (c) 展示了逆参与率方程 (71) 的缓慢对数收敛。需要注意的是，在临界点，对小 H 行为的主导修正项预计会很大；事实上，只有当 $H = O(10^{-24})$（对应于 $-\ln H \approx 54$）极小时，才会达到渐近区间；相比之下，在非临界情形下，达到渐近区间所需的 $H = O(10^{-3})$ 已经足够（见图8）。在如此小的 $P_H(t)$ 值下对 H 进行数值计算颇具挑战；我们为此开发的算法是附录 A 中的算法 5。

B. 接近临界点的交叉

值得注意的是，当 $\mathrm{J} \to \mathrm{J}_c$ 时，第 V 节的幂律区间如何交叉到对数区间。在固定的小 H 下，J 总存在一个足够接近 J $\delta\beta \equiv$ 的取 $\beta - 1/2$ $-2\delta\beta(\ -\ _{\min})\ ^{c}$ 58 值，使其足够小，以至于方程（ ）中的因子 e t t 在 $\mathrm{t} = \mathrm{O}(\mathrm{t}_{\min})$ 时为 O(1)；此时物理性质必定与临界性处相同，因此方程（57）必须与方程（67）匹配，方程（59）必须与方程（69）匹配。对于较小的 $\|\mathrm{J} - \mathrm{J}_c|$，可以论证 $\mathrm{f}^{J}\,\mathrm{typ}(\mathrm{t}) \propto \mathrm{f}\,\mathrm{J}\ {}^{c}\mathrm{typ}(\mathrm{t})$，直至 $|\mathrm{t}| = \mathrm{O}(\delta\beta^{-1})$；在此处，两种渐近行为 $\mathrm{e}^{(1-\beta)t}$ 和 $-\mathrm{te}^{t/2}$ 开始偏离。根据归一化（42），这意味着在任意有限 t 下，$\mathrm{f}^{J}\,\mathrm{typ}(\mathrm{t}) = \mathrm{O}(\delta\beta)\,\mathrm{f}\,\mathrm{J}\ {}^{c}\mathrm{typ}(\mathrm{t})$。此时体移位（57）为 $\mathrm{H}^{2\delta\beta}\,\mathrm{O}(\delta\beta)$；当 $|\ln \mathrm{H}| = \mathrm{O}(\delta\beta^{-1})$ 时，它为 $\mathrm{O}(\delta\beta) = \mathrm{O}(1/|\ln \mathrm{H}|)$，与方程（67）中的量级相同。因此，两个区间之间的交叉发生在安德森模型中的 $|\ln \mathrm{H}| \sim 1/(\beta - 1/2) \sim (\mathrm{J}_c - \mathrm{J})^{-1/2}$ $[(\mathrm{W} - \mathrm{W}_c)^{-1/2}]$。将同样的推理应用于方程（59）和（69），即对于 $\Delta\mathrm{t} \ll \delta\beta^{-1}$，$\mathrm{f}\,\mathrm{J}\ \min(\Delta\mathrm{t}) = \mathrm{O}(\delta\beta)\,\mathrm{f}^{J_c}\min(\Delta\mathrm{t})$，要求方程（49）的主导项和次主导项在领阶相消，这意味着当 $\mathrm{J} \to \mathrm{J}_c$ 时 $\mathrm{c}_3 \to 1$as。上述结论在整个交叉过程中均可一致成立。与 $\mathrm{f}_{\min}$ 类似，体零模包含作为次主导项的第二根：对于 $\mathrm{t} \ll -1$，$\mathrm{f}\,\mathrm{J}\ \mathrm{typ}(\mathrm{t}) \simeq \mathrm{e}^{(1-\beta)t} - \mathrm{b}_3\,\mathrm{e}^{\beta t}$；而 $\mathrm{f}^{J}\,\mathrm{typ}(\mathrm{t}) = \mathrm{O}(\delta\beta)\,\mathrm{f}\,\mathrm{J}\ {}^{c}\mathrm{typ}(\mathrm{t})$ 则要求当 $\mathrm{J} \to \mathrm{J}_c$ 时 $\mathrm{b}_3 \to 1$ as，从而对于 $1 \ll |\mathrm{t}| \ll \delta\beta^{-1}$，$\mathrm{f}\,\mathrm{J}\ \mathrm{typ}(\mathrm{t}) \simeq 2\,\delta\beta\,(-\mathrm{t})\,\mathrm{e}^{t/2}$。在体区和边界层中都保留两个根，对重叠区域 $\mathrm{t}_{\min} \ll \mathrm{t} \ll -1$ 内 $\mathrm{e}^{\beta t}$ 和 $\mathrm{e}^{(1-\beta)t}$ 的系数进行匹配，可得 $\mathrm{a}_{\min}(\mathrm{H})\,\mathrm{e}^{-\beta t_{\min}} = \mathrm{c} + \mathrm{b}_3\,\mathrm{a}_{\mathrm{typ}}(\mathrm{H})$ 以及 $\mathrm{a}_{\mathrm{typ}}(\mathrm{H}) = \mathrm{c}_3\,\mathrm{a}_{\min}(\mathrm{H})\mathrm{e}^{-(1-\beta)t_{\min}}$，即

$$a_{\mathrm{typ}}(H) = \frac{c\,c_3\,H^{2\beta-1}}{1 - b_3\,c_3\,H^{2\beta-1}}\,. \tag{73}$$

当 $|\ln H| \gg \delta\beta^{-1}$ 时，这就化为方程 (51)；而当 $1 \ll |\ln H| \ll \delta\beta^{-1}$，且 $b_3, c_3 \to 1$ 并且 $1 - H^{2\delta\beta} \simeq 2\,\delta\beta\,|\ln H|$ 时，则得到 $a_{\mathrm{typ}}(H) f_{J\,\mathrm{typ}}(t) \simeq (c/|\ln H|) f_{J}\ {}^{c}\mathrm{typ}(t)$，即临界体修正 (67)。

因此，我们可以得到一个标度形式，用于描述临界区域内的 $I_2(H) - I_2(0)$，其中 $\kappa = 2\beta - 1$ 很小：

$$I_2(H) - I_2(0) \simeq \frac{C}{|\ln H|}\, f\big(\kappa\,|\ln H|\big), \qquad f(x) = \frac{x\,e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{x}{e^{x} - 1}\,, \tag{74}$$

其中

$$C = c\,(k+1)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^{t}}\,e^{t}\,P_0^{k}(t)\,f_{\mathrm{typ}}^{J_c}(t)\,\mathrm{d}t\,, \tag{75}$$

即 $C = 0.7369c \approx 0.50$（当 $k = 2$ 时）。由于 $f(0) = 1$，方程 (74) 在 $\kappa|\ln H| \ll 1$ 时给出临界结果 (71)；而当 $\kappa|\ln H| \gg 1$，且 $f(x) \simeq x e^{-x}$ 时，则得到

$$I_2(H) - I_2(0) \simeq C\,\kappa\,H^{\kappa}\,. \tag{76}$$

这也可直接由公式（54）推出，利用 $c_3 \simeq 1$ 和 $f^{J}{}_{\mathrm{typ}}(t) \simeq \kappa f_{J}\ {}^{c}\mathrm{typ}(t)$，该关系在 $\kappa \to 0$ 时成立：H^{κ} 修正项的前因子在临界点处随 κ 线性趋于零。方程（71）与方程（76）之间的交叉发生在 $\kappa|\ln H| \sim 1$ 处。方程（74）是玩具模型中逆参与率的有限尺寸标度形式；安德森模型中的对应形式则在第九节中陈述并进行了检验。

所涉及的结构——两个根在相变处合并、并由 $t_{\min}$ 处的边界截断的线性递推——正是树上的行波 [97], 所具有的结构；行波同样描述Cayley树上的安德森跃迁 [98], , 且截断也会产生缓慢的对数修正 [99]。将这些考量应用于安德森模型，意味着只有在 $\eta^{2\beta-1}$ 的幂律才可见：

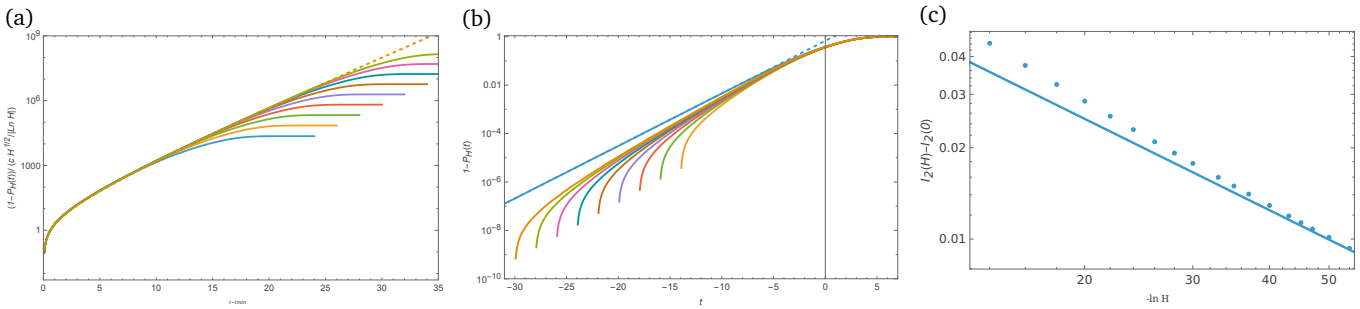

图 10. 临界点 J $=J_c$，k $=2$。(a) $[1-P_H(t)]/a_{min}(H)$，其中 $a_{min}=c\,H^{1/2}/|\ln H|$ [方程 (66)], 对 Δt 作图，$-t_{min}=30$、28、……、14。各曲线收敛到标度函数 $f_{min}(\Delta t)$（虚线），它是 J $=J_c$时方程 (46) 的解。(b) 对相同的 t_{min} 值，$1-P_H(t)$ 随 t 的变化。蓝色实线是 J_c时方程 (35) 的 H $=0$ 解，它按 $c\,e^{t/2}$（虚线）衰减至零。(c) $I_2(H)-I_2(0)$ 对$-\ln H=-t_{min}$作图。直线是渐近无参数预测 (71), 根据 J_c时方程 (41) 的数值解得到，适用于 $-t_{min}$ 最大至 54（H $=3.5\times10^{-24}$）。

$|\ln\eta|\gg(W-W_c)^{-1/2}$；而在固定的小 η 下，修正会在相变附近的$W-W_c\lesssim1/\ln^2(1/\eta)$ 窗口内转变为对数临界行为。

最后，第五节 F 中向复数 H 的延拓在 $J=J_c$ 时同样成立，因为其中的步骤都不需要$\beta\neq1/2$；我们没有进行数值计算，因为这需要在复数 H 以及$|\ln H|\gtrsim50$的情况下使用附录 A 中的算法 5。延续方程（71），$C/|\ln H|\to C/\ln(1/H)$, 其中 $\ln(1/H)=\ln(2/|\omega|)+i(\pi/2)\mathrm{sgn}\,\omega$，当 $H=0^+-i\omega/2$ 时，我们预期在临界点有

$$\mathscr{S}_{\rm reg}(\omega)\simeq\frac{C}{2|\omega|\left[\ln^2(2/|\omega|)+\pi^2/4\right]}\simeq\frac{C}{2|\omega|\ln^2(1/|\omega|)}, \tag{77}$$

其中 $C\approx0.50$ 由方程（75）给出，相对修正的阶为 $1/\ln(1/|\omega|)$: 这是 $\mu=1$，其中的对数因子使其在 $|\omega|<\eta$处的权重 $\mathscr{S}_{\rm reg}$ 可积，$C/\ln(1/\eta)$ 是修正项（71），], 即玩具模型中对应于第三节 F 中预期的形式 $N^2\mathscr{C}(\omega)\propto1/[\omega\ln^2(1/\omega)]$。交叉形式（74），写作$I_2(H)-I_2(0)\simeq C\kappa H^\kappa/(1-H^\kappa)$，以同样的方式延续，并在 $\kappa\ln(1/|\omega|)\ll1$ 时与方程（77）相衔接，在$c_H=C\kappa$ 时与方程（61）相衔接；后者的振幅 $\propto\kappa\sin(\pi\kappa/2)$ 在 $\kappa\ln(1/|\omega|)\gg1$时趋于零。

VII. 安德森模型：少数假设下的相同机制

现在我们将说明，在玩具模型中识别出的机制——线性化 $\eta=0$ 递推的一个零模以次主导根衰减，其振幅由与边界层的匹配确定——同样作用于安德森模型的腔方程中，并重现 $\kappa=2\beta-1$。推导需要若干明确假设，我们将在下文逐一说明；这些假设是玩具模型中已确立性质的自然对应，并且我们将在第VIII节通过数值计算检验其后果。

A. 线性化腔方程的零模

记作 $G_{i\to j}=g_{i\to j}+i\eta\hat{g}_{i\to j}$，精确的有限-$\eta$ 腔方程（10a）写为

$$g_{i\to j}=\frac{a_i}{a_i^2+\eta^2b_i^2},\qquad \hat{g}_{i\to j}=\frac{b_i}{a_i^2+\eta^2b_i^2}, \tag{78a}$$

$$a_i\equiv\epsilon_i-\sum_{m\in\partial i\setminus j}g_{m\to i},\qquad b_i\equiv1+\sum_{m\in\partial i\setminus j}\hat{g}_{m\to i}, \tag{78b}$$

以及腔格林函数联合分布 $P_\eta(g,\hat{g})$ 对应的精确分布方程为

$$P_\eta(g,\hat{g})=\int d\epsilon\,p(\epsilon)\left[\prod_{i=1}^{k}dg_i\,d\hat{g}_iP_\eta(g_i,\hat{g}_i)\right]\delta\left(g-\frac{a}{a^2+\eta^2b^2}\right)\delta\left(\hat{g}-\frac{b}{a^2+\eta^2b^2}\right),\qquad a=\epsilon-\sum_{i=1}^{k}g_i,\quad b=1+\sum_{i=1}^{k}\hat{g}_i. \tag{79}$$

调节器仅通过 η^2 进入方程（79）。围绕 $\eta=0$ 解 P_0，展开后，修正项 $\delta P_\eta \equiv P_\eta - P_0$ 满足

$$\begin{aligned}\delta P_\eta(g,\hat{g}) = k\int \mathrm{d}\epsilon\, p(\epsilon)\left[\prod_{i=2}^{k}\mathrm{d}g_i\,\mathrm{d}\hat{g}_i P_0(g_i,\hat{g}_i)\right]\mathrm{d}g_1\,\mathrm{d}\hat{g}_1\,\delta P_\eta(g_1,\hat{g}_1)\\ \times\,\delta\left(g-\frac{1}{a}\right)\delta\left(\hat{g}-g^2 b\right)+O(\eta^2)\equiv\left(\mathscr{L}_0\,\delta P_\eta\right)(g,\hat{g})+O(\eta^2),\end{aligned} \tag{80}$$

其中，$\mathscr{L}_0$ 是围绕其不动点线性化的 $\eta=0$ 递推。若 $1-\mathscr{L}_0$ 可逆，方程 (80) 将意味着 $\delta P_\eta = O(\eta^2)$，这与第二节 C 的数值结果明显矛盾。解决办法与玩具模型中的方程 (41) 相同：$\mathscr{L}_0$ 存在一个零模，即一个非平凡解 $f_{\mathrm{typ}}(g,\hat{g})$，其形式为

$$\begin{aligned}f_{\mathrm{typ}}(g,\hat{g}) = k\int \mathrm{d}\epsilon\, p(\epsilon)\left[\prod_{i=2}^{k}\mathrm{d}g_i\,\mathrm{d}\hat{g}_i P_0(g_i,\hat{g}_i)\right]\\ \times\,\mathrm{d}g_1\,\mathrm{d}\hat{g}_1\, f_{\mathrm{typ}}(g_1,\hat{g}_1)\\ \times\,\delta\left(g-\frac{1}{a}\right)\delta\left(\hat{g}-g^2 b\right),\end{aligned} \tag{81}$$

而首项修正为

$$\delta P_\eta(g,\hat{g}) = c_{\mathrm{typ}}(\eta)\, f_{\mathrm{typ}}(g,\hat{g})+O(\eta^2), \tag{82}$$

其中振幅 $c_{\mathrm{typ}}(\eta)$ 无法由方程 (80) 确定，必须像玩具模型中那样，通过与 $\hat{g}\sim 1/\eta$ 区域进行匹配来确定；在该区域中，η^2 展开失效。注意，对方程 (81) 在 $(g,\hat{g})$ 上积分可得 $(1-k)\int f_{\mathrm{typ}}=0$：零模的积分为零，这正是 P_η 归一化所要求的。更准确地说，仅对方程 (81) 在 $\hat{g}$ 上积分，只能说明 g 边缘分布 f_{typ} 满足实部闭合递推的线性化；假设后者没有零模——这是合理的，因为 $P_0(g)$ 是一个正则且稳定的不动点——则该边缘分布为零，因此态密度不受零模影响。这支持了第二节 B 中为推导方程 (15) 而作出的假设：平均态密度不会出现奇异修正。

零模的存在是我们的首个假设；以下考量为此提供了支持。方程（81）关于大 $\hat{g}$ 的结构，与决定 P_0 尾部指数的结构相同：寻找形式为 $f_{\mathrm{typ}}(g,\hat{g})\simeq f_\gamma(g)\hat{g}^{-1-\gamma}$ 的解，其中 $\hat{g}$ 很大，并利用大 $\hat{g}$ 是由大 $\hat{g}_1$ 经 g^2，放大后产生这一事实，可以得出 f_γ 必须满足方程（19），其中 $\beta\to\gamma$，即 $\lambda(\gamma)=1$。由于对称性 $\lambda(\gamma)=\lambda(1-\gamma)$ [14, 15, 22, 31,77],，该方程有两个解 $\gamma=\beta$ 和 $\gamma=1-\beta$，

因此，正如在玩具模型中那样，线性化递推在大 $\hat{g}$ 时允许两种幂律行为，而小 $\hat{g}$ 处的正则性施加一个条件：一般而言，最终留下一个一维解空间。 [在用于提取尾部的单邻居近似中，我们假设大 $\hat{g}$ 来自因子 $\delta P_\eta(g_1,\hat{g}_1)$ 中的大 $\hat{g}_1$，而非某个 $P_0(g_i,\hat{g}_i)$ 因子；这一假设是自洽的，因为只要 $\beta>1/2$，大 $\hat{g}$ 时就有 $P_0\propto\hat{g}^{-1-\beta}\ll f_{\mathrm{typ}}\propto\hat{g}^{-(2-\beta)}$。] 正如在玩具模型中那样，要求修正项在 $\eta\to 0$ 时消失，便选出了第二根：调节器在 $\hat{m}\sim 1/\eta$ 处移除权重 $\propto\eta^\beta$；沿着 $\hat{g}^{-1-\beta}$ 模传播至体区后，这会导致不动点发生 $O(1)$ 变化（第 V B 节）。因此我们假设零模沿第二根有非零分量；于是，由于 $2-\beta<1+\beta$，它在大 $\hat{g}$ 时按如下形式衰减

$$f_{\mathrm{typ}}(g,\hat{g})\simeq f_{1-\beta}(g)\,\hat{g}^{-(2-\beta)},\qquad \hat{g}\to\infty, \tag{83}$$

其中 $f_{1-\beta}$ 是第二根处方程（19）的特征函数。这是我们的第二个假设，也是其可直接检验的推论最明确的假设：它预言，在窗口 $1\ll\hat{m}\ll 1/\eta$ 内，当 $m=0$ 增大时，$\hat{m}$ 分布的修正会按 $\hat{m}^{-(2-\beta)}$ 衰减，也就是说，衰减得更慢，而非分布本身。

B. 边界层与匹配

当 $\hat{g}=O(1/\eta)$ 时，方程（78）分母中的项 $\eta^2 b^2$ 便不能再忽略，展开（80）也随之失效。然而，在这些尺度下，$P_\eta(g,\hat{g})$ 很小，量级为 $\eta^{1+\beta}$，正如下文将要看到的那样；因此，方程（79）可以再次线性化，不过这次是对 P_η 本身线性化：较大的 b 来自单个较大的 $\hat{g}_1$（第三个假设，是上述单邻居近似的对应情形），因此 $b\simeq\hat{g}_1$，而其余的 $k-1$ 个邻居只通过它们的实部影响 a。用重标度变量 $\tilde{g}=\eta\hat{g}$ 表示时，解具有如下标度形式

$$P_\eta(g,\hat{g})\simeq c_{\mathrm{large}}(\eta)\, f_{\mathrm{large}}(g,\eta\hat{g}), \tag{84}$$

其中 $f_{\mathrm{large}}(g,\tilde{g})$ 满足与 η 无关的线性方程

$$f_{\mathrm{large}}(g,\tilde{g}) = k\int \mathrm{d}\epsilon\, p(\epsilon)\left[\prod_{i=2}^{k}\mathrm{d}g_i\, P_0(g_i)\right]\mathrm{d}g_1\,\mathrm{d}\tilde{g}_1\,\delta\left(g-\frac{a}{a^2+\tilde{g}_1^2}\right)\delta\left(\tilde{g}-\frac{\tilde{g}_1}{a^2+\tilde{g}_1^2}\right)f_{\mathrm{large}}(g_1,\tilde{g}_1),\qquad a=\epsilon-\sum_{i=1}^{k}g_i\,. \tag{85}$$

这是玩具模型边界层方程 (46) 的对应形式，而 $\tilde{g} = \eta\hat{g}$ 起到$e^{-\Delta t}$的作用：同样，按 η 进行重标度会使核不依赖于调节器。当 $\tilde{g}$ 较小（即 $\hat{g} \ll 1/\eta$）时，分母中的 $\tilde{g}_1^2$ 项可以忽略，方程 (85) 化为尾部方程，而 $f_{\rm large}$ 是两个可容许幂律的线性组合，

$$f_{\rm large}(g,\tilde{g}) = f_\beta(g)\,\tilde{g}^{-1-\beta} + c_{\rm sub}\, f_{1-\beta}(g)\,\tilde{g}^{-(2-\beta)} + \dots, \qquad \tilde{g} \ll 1, \tag{86}$$

其中，第一项确定$f_{\rm large}$ 的归一化，而次主导项的系数$c_{\rm sub}$ 由完整方程 (85) 的解确定，这与方程 (49) 中的c_3 完全相同。

匹配分两步进行，在重叠区域$1 \ll \hat{g} \ll 1/\eta$ 中，两种描述均成立。方程 (86) 的主导项必须与未扰动尾部$P_0(g,\hat{g}) \simeq f_\beta(g)\hat{g}^{-1-\beta}$匹配，

$$f_\beta(g)\,\hat{g}^{-1-\beta} = c_{\rm large}(\eta) f_\beta(g)(\eta\hat{g})^{-1-\beta} \quad\Longrightarrow\quad c_{\rm large}(\eta) = \eta^{1+\beta}, \tag{87}$$

它对应于方程 (48) 中的$a_{\min}(H) = cH^\beta$ （多出的幂次来源于P_η 是$\hat{g}$中的密度，而$P(t)$ 不是）。次主导项必须与零模修正 (82) 和尾部 (83) 匹配，

$$c_{\rm typ}(\eta) f_{1-\beta}(g)\,\hat{g}^{-(2-\beta)} = c_{\rm sub}\, c_{\rm large}(\eta) f_{1-\beta}(g)(\eta\hat{g})^{-(2-\beta)}, \tag{88}$$

由此得到最终结果

$$c_{\rm typ}(\eta) = c_{\rm sub}\,\eta^{1+\beta}\eta^{-(2-\beta)} = c_{\rm sub}\,\eta^{2\beta-1}, \tag{89}$$

这与方程 (51) 完全对应。由于$Q_\eta(0,\hat{m})$的修正，以及通过方程 (15) 得到的逆参与率修正，都是P_η 在体区$\hat{g} = O(1)$ 中的线性泛函，方程 (82) 和 (89) 意味着

$$\overline{Q}_\eta(\hat{m}) - \overline{Q}_{0^+}(\hat{m}) = \eta^{2\beta-1} g_\eta(\hat{m}), \qquad I_2(\eta) - I_2^\infty = \eta^{2\beta-1}\int_0^\infty g_\eta(\hat{m})\,\hat{m}^{-1}\,\mathrm{d}\hat{m}, \tag{90}$$

其中，$g_\eta(\hat{m})$ 是零模$f_{\rm typ}$ 在$m = 0$处局部分布上的像，其尾部与$g_\eta(\hat{m}) \propto \hat{m}^{-(2-\beta)}$对于 $1 \ll \hat{m} \ll 1/\eta$的尾部相同。这就是方程 (21)。论证结构与玩具模型完全相同：调节器从分布尾部中移除权重 η^β，即P_0 在$\hat{g} \sim 1/\eta$之外的总权重，参见方程 (17)]；这一扰动沿次主导根传递至体区，并在$\hat{g} \sim 1/\eta$ 与$\hat{g} = O(1)$之间将其放大 $\eta^{-(1-\beta)}$；而乘积 $\eta^{\beta-(1-\beta)} = \eta^{2\beta-1}$ 就是反常修正。玩具模型的额外贡献在于给出了一个推导，将上述每个步骤明确地展示出来，并与腔方程的精确数值解进行核对。

C. 远尾部 $\hat{m} \gg 1/\eta$ 与指数 $\beta - 3$

匹配论证只用到了$f_{\rm large}(g, \tilde{g})$ 在小 $\tilde{g}$时的行为。现在我们将展示其行为

在大 $\tilde{g}$ 时，即 $P_\eta(g, \hat{g})$ 的形状以及对于 $\hat{g}$、$\hat{m} \gg 1/\eta$ 的 $Q_\eta(\hat{m})$ 的形状，仅由 $\eta = 0$ 解决定，并且它会产生一个新的幂律 $\hat{m}^{\beta-3}$，这在第VIII节的数值数据中清晰可见。关键的观察是，腔递归（78）是一个复数求逆，$G = g + i\eta\hat{g} = 1/(a - ib)$。令 $\mathscr{R}_\eta(a, b)$ 表示方程（78b）中由 P_η诱导的变量 (a, b) 的联合分布；它是 $Q_\eta(m, \hat{m})$的腔对应分布，其中邻居数为 k，而不是 $k+1$，因此在 $\eta \to 0^+$ 极限下且在 $a = 0$时，它具有与方程（17）相同的幂律尾部，

$$\mathscr{R}_{0^+}(0, b) \simeq C_{\mathscr{R}}\, b^{-1-\beta}, \qquad b \gg 1, \tag{91}$$

其中 $C_{\mathscr{R}} = k\int \mathrm{d}\epsilon\, p(\epsilon)[\prod_{i=2}^{k} \mathrm{d}g_i P_0(g_i)]\mathrm{d}g_1 f_\beta(g_1)\,\delta(\epsilon - \sum_{i=1}^{k} g_i)$，并且它是 a 的光滑函数，在 $a = 0$附近成立，因为 ϵ是均匀分布的。映射 $z = a - i\eta b \mapsto w = 1/z = g + i\eta\hat{g}$ 是保角映射，其雅可比为 $|\mathrm{d}w/\mathrm{d}z|^2 = |w|^4$，因此概率密度按 $p_w(w) = |w|^{-4} p_z(z)$进行变换。由于 $(a, \eta b)$ 的密度为 $\eta^{-1}\mathscr{R}_\eta(a, b)$，且逆映射为 $a = g/(g^2 + \eta^2\hat{g}^2), b = \hat{g}/(g^2 + \eta^2\hat{g}^2)$，可得到精确恒等式

$$P_\eta(g,\hat{g}) = \frac{1}{(g^2+\eta^2\hat{g}^2)^2}\,\mathscr{R}_\eta\!\left(\frac{g}{g^2+\eta^2\hat{g}^2}, \frac{\hat{g}}{g^2+\eta^2\hat{g}^2}\right), \tag{92}$$

对所有 $(g, \hat{g})$ 以及所有 η[，在 $\eta = 0$ 处它化简为 $P_0(g, \hat{g}) = g^{-4}\mathscr{R}_0(1/g, \hat{g}/g^2)$，即方程 (13)]的积分形式。方程 (92)并未闭合，因为 $\mathscr{R}_\eta$ 是 P_η的泛函；但只要 $\mathscr{R}_\eta$ 的自变量落在 $\mathscr{R}_\eta \simeq \mathscr{R}_{0^+}$ 已知的区域内，即$b \ll 1/\eta$，它就具有预测能力。

考虑一个固定的、非共振的实部 $g = O(1)$。方程 (92)展示了两个区间，它们由 $\eta\hat{g} \sim |g|$ 分隔，即由 $\hat{g} \sim 1/\eta$ 分隔。(i) 对于 $\eta\hat{g} \ll |g|$，$a \simeq 1/g = O(1)$且 $b \simeq \hat{g}/g^2 \gg 1$：较大的 $\hat{g}$ 是由较大的 b 经典型因子 g^2放大而产生的。代入尾部 (91)，可恢复 $\eta = 0$ 结果：$P_\eta(g, \hat{g}) \simeq f_\beta(g)\,\hat{g}^{-1-\beta}$，其中 $f_\beta(g) = |g|^{2\beta-2} r_\beta(1/g)$，$r_\beta(a)$是 $\mathscr{R}_{0^+}(a, b)$ [$r_\beta(0) = C_{\mathscr{R}}$]中 $b^{-1-\beta}$的系数。这就是传播区间，它产生了 (86) 中领先的小-$\tilde{g}$ 行为。(ii) 对于 $\eta\hat{g} \gg |g|$，$\mathscr{R}_\eta$ 的自变量变得

$$a \simeq \frac{g}{\eta^2\hat{g}^2} \to 0, \qquad b \simeq \frac{1}{\eta^2\hat{g}}, \tag{93}$$

且前因子为 $(\eta\hat{g})^{-4}$。在此区间内，递推发挥的是求逆而非放大作用：取值 $\hat{g} \gg 1/\eta$ 要求该格点几乎必须恰好处于共振状态，$|a| \lesssim |g|/(\eta\hat{g})^2$，因此 G 的幅值受到其分母虚部 $\eta\hat{g} \simeq 1/(\eta b)$的限制；要产生给定的 $\hat{g}$，所需的b会随着 $\hat{g}$ 增大而减小。$\mathscr{R}$ 在a 中的光滑性使得，对于 $|g| \ll \eta\hat{g}$，结果与g 无关，

$$P_\eta(g,\hat{g}) \simeq \frac{1}{\eta^4\hat{g}^4}\,\mathscr{R}_{0^+}\!\left(0, \frac{1}{\eta^2\hat{g}}\right), \qquad \hat{g} \gg \eta^{-1}, \quad |g| \ll \eta\hat{g}, \tag{94}$$

其中，将 $\mathscr{R}_\eta$ 替换为 $\mathscr{R}_{0^+}$ 完全合理，正是因为$b = 1/(\eta^2\hat{g}) \ll 1/\eta$ 一旦满足 $\hat{g} \gg 1/\eta$：P_η 的远尾部

由输入分布中尚未受到调节器影响的部分提供。只要$b \gg 1$，也就是说，对于$\eta^{-1} \ll \hat{g} \ll \eta^{-2}$，就可以使用尾部 (91)，并且

$$P_\eta(g,\hat{g}) \simeq \frac{C_{\mathscr{R}}}{\eta^4 \hat{g}^4} \left(\eta^2 \hat{g}\right)^{1+\beta} = C_{\mathscr{R}}\, \eta^{1+\beta}\, (\eta \hat{g})^{\beta-3}\,, \qquad \eta^{-1} \ll \hat{g} \ll \eta^{-2}\,. \tag{95}$$

指数 $\beta - 3 = -4 + (1+\beta)$ 等于求逆的雅可比与在求逆后的自变量处取值的输入分布尾部指数之和；更一般地，$\mathscr{R}_{0^+}(0,b)$ 中的一项 $\propto b^{-1-\gamma}$ 会映射为远尾部中的一项$\propto \hat{g}^{\gamma-3}$。用方程 (84) 的表述，方程 (95) 写作

$$f_{\text{large}}(g,\tilde{g}) \simeq C_{\mathscr{R}}\, \tilde{g}^{\,\beta-3}\,, \qquad \tilde{g} \gg 1\,, \tag{96}$$

振幅 $c_{\text{large}}(\eta) = \eta^{1+\beta}$ 与通过小 $\tilde{g}$ 处的匹配得到的值相同，正如预期：这两个区间是同一个交叉函数 f_{large}在两个极限下的表现；当 $\tilde{g} = O(1)$时，该函数为一阶量。与方程 (86) 的次主导系数 c_{sub} 不同，后者因由自洽区域 $b \sim 1/\eta$ 产生而需要求解完整的边界层方程，大-$\tilde{g}$ 行为则通过求逆继承自该解。也可以直接从方程 (85) 看出这一点：当 $\tilde{g} \gg 1$ 时，两个 δ函数迫使$\tilde{g}_1 \simeq 1/\tilde{g} \ll 1$，且 $\simeq g/\tilde{g}^{\,2} \to 0$，因此只有 f_{large} 本身的小-$\tilde{g}$ 主导项有贡献，雅可比为$\tilde{g}^{-4}$。将相同推理应用于方程 (86) 的次主导项，会得到对方程 (96) 的修正 $\propto \tilde{g}^{(1-\beta)-3} = \tilde{g}^{-2-\beta}$；该修正在大 $\tilde{g}$ 时确实是次主导项，因为 $\beta > 1/2$。最后，方程 (94) 也描述了最终截断：当 $\hat{g}$ 接近 η^{-2} 时，自变量 $b = 1/(\eta^2 \hat{g})$ 进入 $\mathscr{R}_{0^+}(0,b)$的体区，幂律 (95) 随着 b $\mathscr{R}_{0^+}(0,$在 $b = O(1)$处的形状而弯折；对于 $\hat{g} > \eta^{-2}$，P_η 恒为零，因为 $b \geq 1$（界限 $\mathrm{Im}G \leq 1/\eta$）。因此，方程 (94) 根据$\eta = 0^+$ 分布 $\mathscr{R}_{0^+}(0,b)$，对有限-η分布的整个远尾部给出了无参数预测；该分布可通过线性化种群动力学直接获得。

向局部量 $Q_\eta(\hat{m})$ 的转换是直接的。在 $m = 0$ 时，约束条件 $\epsilon = \sum_{i=1}^{k+1} i\, g_i$，其中 $|\epsilon| \leq W/2$，会强烈抑制 g_i 的大值（较大的 g_i 必须由另一个符号相反的量来补偿，代价是还要从 $P_0(g)$的 g^{-2} 尾部引入第二个因子），因此最后一步共振机制被关闭；$\hat{m} \gg 1/\eta$ 的值，即 $\hat{m} = 1 + \sum_{i=1}^{k+1} i\, \hat{g}_i$，必须来自单个邻居，并满足 $\hat{g}_1 \simeq \hat{m}$ 和 $g_1 = O(1) \ll \eta\hat{m}$，这正是区间 (ii)，在该区间中，方程 (94) 与 g_1无关。对剩余的 g_i取任意值，使用 $\int d\epsilon\, p(\epsilon) dg_1\, \delta(\epsilon - \sum_{i=1}^{k+1} i\, g_i) = 1$，可得

$$Q_\eta(0,\hat{m}) \simeq \frac{k+1}{\eta^4 \hat{m}^4}\, \mathscr{R}_{0^+}\!\left(0, \frac{1}{\eta^2 \hat{m}}\right) \simeq (k+1)\, C_{\mathscr{R}}\, \eta^{1+\beta}\, (\eta\hat{m})^{\beta-3}\,, \qquad \eta^{-1} \ll \hat{m} \ll \eta^{-2}\,. \tag{97}$$

因此，$m = 0$ 处分布的完整结构为

$$\overline{Q}_\eta(\hat{m}) \propto \begin{cases} \hat{m}^{-1-\beta}\,[1 + O((\eta\hat{m})^{2\beta-1})] & 1 \ll \hat{m} \ll \eta^{-1}, \\ \eta^{1+\beta} (\eta\hat{m})^{\beta-3} & \eta^{-1} \ll \hat{m} \ll \eta^{-2}, \end{cases} \tag{98}$$

在交叉点 $\hat{m} \sim 1/\eta$ 处，这两个表达式同阶；第一行中来自零模的相对修正 $(\eta\hat{m})^{2\beta-1}$ 在交叉点处恰为 $O(1)$。我们强调，对 $m = 0$ 进行条件化至关重要：在大 $\hat{g}$ 时，$\hat{g}$ 的非条件边缘分布由区间 (i) 的最后一步共振$|g| \gg 1$ 主导。由于当 $\beta > 1/2$ 时，$f_\beta(g) \simeq |g|^{2\beta-2} C_{\mathscr{R}}$ 在大 g 处不可积，对 $f_\beta(g)\hat{g}^{-1-\beta}$ 关于 $|g| \lesssim \sqrt{\hat{g}}$ 积分会使指数 $1+\beta$ 变成熟悉的 $3/2$_ 局域化相局域态密度分布的指数，$P(I$ $mG) \sim \sqrt{\eta}/(\mathrm{Im}G)^{3/2}$ [22, 27]。相反，指数 $1+\beta$ 和 $\beta-3$ 分别是沿树传播及其反演像的特征；只有移除最后一个格点的平凡共振后，它们才会显现，例如在 $Q_\eta(0,\hat{m})$ 或振幅分布 $T(u)$ 中。

D. 临界性

在临界点处，$\beta = 1/2$，可以论证$f_{\text{typ}}(g, \hat{g})$ 具有对数尾部：

$$f_{\text{typ}}(g,\hat{g}) \simeq f_{1/2}(g)\, \frac{\ln \hat{g}}{\hat{g}^{3/2}}\,, \qquad \hat{g} \to \infty\,. \tag{99}$$

为此，我们回顾一下，当 $\hat{g}$ 较大时，$P_0(g,\hat{g})$ 的渐近方程有如下解：$P_0(g,\hat{g}) \approx f_\beta(g)/\hat{g}^{1+\beta}$。对整个腔方程 $P_0(g,\hat{g})$ 关于 β 求导，可得到一个与 $dW/d\beta$ 成正比的源项，以及一个与 $dP_0(g,\hat{g})/d\beta$ 成正比的平移项。然而，在临界点 $\beta = 1/2$，根据方程（18），我们有 $dW/d\beta = 0$；因此，$dP_0(g,\hat{g})/d\beta$ 满足与 $f_{\text{typ}}(g,\hat{g})$ 相同的方程（81）。请注意，尽管在 $\beta = 1/2$ 处 $dW/d\beta = 0$，$dP_0/d\beta$ 仍有限且非零，因为 P_0 通过 $\sqrt{W - W_c} \propto \beta - 1/2$ [33]依赖于 W，所以 $dW/d\beta$ 的消失会由 dP_0/dW 的发散所补偿。另一方面，当 $\hat{g}$ 较大时，$P_0(g,\hat{g}) = f_\beta(g)/\hat{g}^{1+\beta}$ 关于 β 的导数的主导行为为

$$\frac{dP_0(g,\hat{g})}{d\beta} \simeq -f_\beta(g)\, \frac{\ln \hat{g}}{\hat{g}^{\beta+1}}\,, \qquad \hat{g} \to \infty\,, \tag{100}$$

并且，根据上述论证，在 $\beta = 1/2$ 此处，它与$f_{\text{typ}}(g、\hat{g})$ 的行为相同，但相差一个归一化常数，这就得到了公式（99）。在 $\hat{g}$ 较大且 $\beta = 1/2$时，我们因此可以写成

$$P_\eta(g,\hat{g}) \approx f_{1/2}(g)\, \frac{1}{\hat{g}^{3/2}} + c_{\text{typ}}(\eta) f_{1/2}(g)\, \frac{\ln \hat{g}}{\hat{g}^{3/2}}\,. \tag{101}$$

根据前几节的论述，首要贡献和次要贡献变为同阶，

并且相互抵消，对于 $\hat{g} = O(\eta^{-1})$ 而言，这意味着

$$c_{\mathrm{typ}}(\eta) \propto -\frac{1}{|\ln \eta|}, \tag{102}$$

从而导致

$$I_2(\eta) - I_2^{\infty} \propto \frac{1}{|\ln \eta|} \qquad \text{for } W = W_c\,. \tag{103}$$

VIII. 对完整分布的数值检验

前几节的分析所作出的预测远不止平均逆参与率的指数，还涉及完整的概率分布。本节将这些预测与有限 η 时安德森模型腔方程的数值解进行比较，然后说明，在适当的变量下，同一个标度函数描述了本征态振幅分布的有限尺寸修正。

A. 有限 η 时的 $Q_\eta(\hat{m})$ 分布

我们通过种群动力学求解有限 η 时的方程 (10a)（种群规模最多为 10^8 个元素），并利用文献 [33] 的条件化技术对 $\hat{m} = 1 + \sum_{m \in \partial i} \hat{g}_{m \to i}$ at $m = 0$ 的分布 $Q_\eta(0, \hat{m})$ 进行抽样：由于 $m = \epsilon_i - \sum_{l \in \partial i} g_{l \to i}$ 且 ϵ_i 均匀分布，因此在 $m = 0$ 处的密度为 $1/W$，只要 $|\sum_{m} g_{m \to i}| < W/2$，否则为零；因此，只需对满足该约束的种群元素的 $(k+1)$ 元组中的 $\hat{m}$ 进行直方图统计，即可得到 $Q_\eta(0, \hat{m})$。分布 Q $\eta \to 0^+$ $\hat{m}_{0^+}(0,$ 以同样的方式由线性化方程 (13) 得到，二者均通过 $\int_0^{\infty} Q_{0^+}(0, \hat{m}) d\hat{m}$ 归一化，从而得到 Q_η 和 Q_{0^+}。

图 11 的 (a) 和 (b) 面板展示了若干个 η 值下的 $Q_\eta(\hat{m})$：对于 $W = 18.5$，接近相变（$\beta = 0.57 \pm 0.01$）；以及对于 $W = 34$，深处于局域化相（$\beta = 0.78 \pm 0.01$）。公式 (98) 预测的两个区间清晰可见：当 $\hat{m} \ll 1/\eta$ 时，呈现 $\eta = 0^+$ 幂律；而在 $\hat{m} \sim 1/\eta$ 处的交叉之后，幂律变得更陡，$\hat{m}^{\beta-3}$。随着 η 减小，交叉点移向更大的 $\hat{m}$。后者是第 VII C 节讨论的前者的反演像；注意，对于 $\beta \to 1/2$，两个指数 $-3/2$ 和 $-5/2$ 恰好相差 1，而对于 $\beta \to 1$，它们在两侧都趋于 -2。

面板 (c) 是对标度图景的核心检验。它显示了体区中 $Q_\eta(\hat{m}) - Q_{0^+}(\hat{m})$ 之差，该区域为 $\hat{m} = O(1)$；将其按 η^{κ} 重新缩放，其中 $\kappa = 2\beta - 1$ 取自同一 W 下 Q_{0^+} 的尾部指数：对于两种无序强度，所有曲线都塌缩到同一个主函数 $g_\eta(\hat{m})$ 上，且这一塌缩跨越了 η 的多个数量级。[100] 这是玩具模型图 6(c) 的直接对应结果，并证实了公式 (90)：体区中分布的全部修正可分解为振幅 $\eta^{2\beta-1}$ 乘以一个与 η 无关的函数。同样出色的塌缩也出现在其他取值的 W 下，对应的 $\kappa(W)$ 亦然。根据方程 (15)，$I_2(\eta) - I_2^{\infty}$ 就是该函数的矩 $\int g_\eta \hat{m}^{-1} d\hat{m}$，因此，这种塌缩是比图 2 中指数吻合更严格得多的检验：它表明，这一机制作用于局域态密度完整统计的层面，而不仅仅涉及其第一个逆矩。主函数 $g_\eta(\hat{m})$ 随 $\hat{m}$ 改变符号，这是它积分为零所必需的；$c_\eta = \int g_\eta \hat{m}^{-1} d\hat{m}$ 为正，反映出有限-η 分布在较小的 $\hat{m}$（较大的局域态密度）处比渐近分布具有更大的权重。我们在第七节 A 中的第二个假设进一步预言，在窗口 $1 \ll \hat{m} \ll 1/\eta$ 内，$g_\eta(\hat{m})$ 按 $\hat{m}^{-(2-\beta)}$ 衰减，即比 Q_{0^+} 本身衰减得更慢。图 11 的面板 (d) 和 (e) 对此进行了检验：它们以对数尺度展示了尾部区域中同一重新缩放后的差值，取 $W = 18.5$ 和 $W = 34$，并考察了跨越三个数量级的四个 η 值。塌缩在整个窗口 $1 \ll \hat{m} \ll 1/\eta$ 内都持续存在；对于最小的 η，该窗口在 $\hat{m}$ 上跨越五个数量级。主函数遵循预言的幂律 $\hat{m}^{-(2-\beta)}$（虚线），与 Q_{0^+} 按 $\hat{m}^{-(1+\beta)}$ 衰减（点线）明显不同：修正在整个尾部均为负，并以指数 $2-\beta$ 衰减；该指数对应 Abou-Chacra–Anderson–Thouless 条件的次主导根 $1-\beta$，而非分布本身的指数 $1+\beta$。在 $W = 34$ 时，两个候选指数 1.22 和 1.78 相差甚远，数据足以明确判定；在 $W = 18.5$ 时，它们则较为接近（1.43 和 1.57）。而且，由于此时接近 W_c，主函数的有效指数会缓慢趋向其渐近值（在 $\hat{m} = 100$ 以上的连续三个数量级中分别为 1.23、1.33 和 1.37），这正如第六节 B 中所述的对数交叉所预期的，因为 $|\ln \eta|$ 相对于 $(\beta - 1/2)^{-1} \approx 14$ 并不大；不过，η 中的塌缩与 $W = 34$ 时一样出色。因此，相对修正 $\eta^{\kappa} g_\eta / Q_{0^+} \propto (\eta \hat{m})^{2\beta-1}$ 沿尾部逐渐增大，并在交叉点 $\hat{m} \sim 1/\eta$ 达到量级为一，这与公式 (98) 的预期一致；在此处，图 11(d,e) 的曲线偏离主函数，第七节 B 和第七节 C 的边界层描述开始适用。接下来讨论的有限尺寸修正中，以变量 $u = 1/\hat{m}$ 表示时也会出现相同的幂律。

B. 有限尺寸修正具有相同的标度函数：对 N 修正项 $T_N(u)$

第 VII 节的推导有一个推论，其适用范围超出了有限-η 问题。体修正是线性化 $\eta = 0$、$N = \infty$ 递推的一个零模；方程（81）中没有任何内容涉及调节器。任何注入分布远尾部、且在体区消失的腔递推微弱扰动——无论是有限的 η，还是有限图上存在的环路诱导修正项；配套短文 [50] 指出，后者会激发与量级为 $1/N$ 的调节器相同的零模——在体区都必然弛豫至同一个零模；扰动的性质只会通过振幅体现出来，而振幅由两个问题有所不同的边界层决定。因此，完整分布的有限尺寸修正项应当……

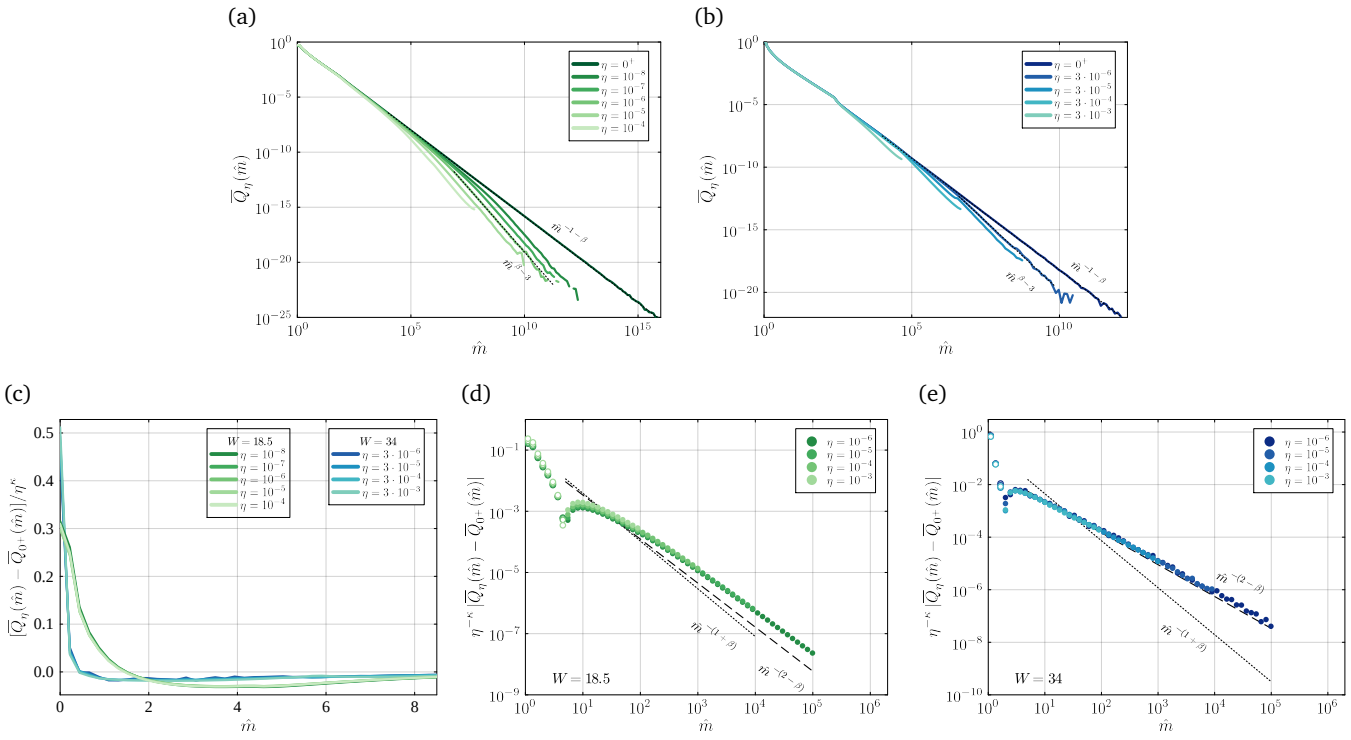

图 11。上排：在 $\hat{m} = 0$ 时变量 $\hat{m}$ 的归一化分布 $Q_\eta(\hat{m})$，由有限 η 下腔方程的人口动力学解得到，其中 (a) $W = 18.5$，(b) $W = 34$，并取若干调节器 η 的值。公式 (98) 的两个幂律区间——$\hat{m}^{-1-\beta}$（$\hat{m} \ll 1/\eta$）和 $\hat{m}^{\beta-3}$（$\hat{m} \gg 1/\eta$）——已标出。下排：标度函数 g_η，所有面板中 $\kappa = 2\beta - 1$，其中 $\beta = 0.57 \pm 0.01$（$\kappa = 0.14 \pm 0.02$）对应 $W = 18.5$，$\beta = 0.78 \pm 0.01$（$\kappa = 0.56 \pm 0.02$）对应 $W = 34$，由 Q_{0^+} 的尾部得到；误差条覆盖 (c) 以及 (d)、(e) 中独立运行的拟合结果，每次重标度均采用误差条范围内最能拟合相应运行的数值（所用数值分别为 (c) 中的 $\kappa = 0.152$ 和 0.546、(d) 中的 0.122 以及 (e) 中的 0.576）。(c) 体区 $\hat{m} = O(1)$ 内的重标度差值 $[Q_\eta(\hat{m}) - Q_{0^+}(\hat{m})]/\eta^\kappa$，曲线组与 (a)、(b) 相同（绿色：$W = 18.5$；蓝色：$W = 34$）。(d)、(e) 尾部：对数尺度下的 $\eta^{-\kappa}|Q_\eta(\hat{m}) - Q_{0^+}(\hat{m})|$，窗口为 $1 \ll \hat{m} \ll 1/\eta$（每条曲线均显示至 $\hat{m} = 0.1/\eta$），其中 (d) 对应 $W = 18.5$，(e) 对应 $W = 34$，且 $\eta = 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$（独立运行，每次运行的人口为 2^{23} 个元素，每个 η 值对应 $\sim 2.5 \times 10^9$ 个条件样本）。实心符号：$g_\eta < 0$；空心符号：$g_\eta > 0$（$W = 18.5$ 时 g_η 的零点位于 $\hat{m} \approx 4.6$，$W = 34$ 时位于 $\hat{m} \approx 1.8$）。虚线为零模的预测尾部 $\propto \hat{m}^{-(2-\beta)}$ [，见方程 (83)]；点线为 Q_{0^+} 本身的衰减 $\propto \hat{m}^{-(1+\beta)}$，以作比较。

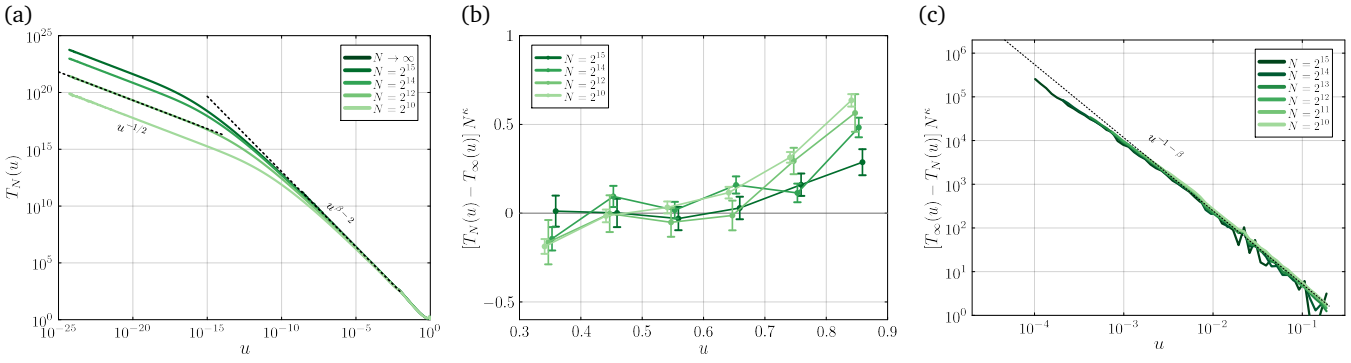

图 12. (a) 对随机正则图上含 $N = 2^n$ 个节点的安德森模型进行精确对角化，得到最接近 $E = 0$ 的本征态的振幅平方 $u = |\psi_\alpha(i)|^2$ 的分布 $T_N(u)$（归一化至 N），对应若干个 n（见图例）和 $W = 22$；$N \to \infty$ 分布 $T_\infty(u)$ 由腔解通过方程 (16) 得到。(b) 在体区 $u = O(1)$ 内，对重标度后的差值 $[T_N(u) - T_\infty(u)]N^\kappa$ 按宽度为 0.1 的线性分箱绘制，其中 $W = 22$ 为 $\kappa = 2\beta - 1 \approx 0.35$。数据分别包含 $N = 2^{10}$、212、214 和 2^{15} 时的 1.6×10^6、5.2×10^5、4.5×10^6 和 4.4×10^6 个本征态；误差棒为统计误差，且为便于辨认，各点在水平方向略有错开。(c) 在对数尺度上绘制 $3/N \le u \le 0.2$ 时的 $[T_\infty(u) - T_N(u)]N^\kappa$，其中 $T_N < T_\infty$，且 $N = 2^{10}$，……，2^{15}。点线表示方程 (106) 预测的幂律 $u^{-1-\beta}$，拟合振幅为 0.11 $u^{-1-\beta}$，即零模尾部 $\hat{m}^{-(2-\beta)}$ 在 $u = 1/\hat{m}$ 下的映像。所有面板中，T_∞ 均为人口动力学解，并满足求和规则 $\int u\, T_\infty(u) du = 1$。

因此，一旦用相应变量表示，它便可由与有限-η情形相同的标度函数描述。

有限 N 时自然的可观测量是本征态在 E = 0 处振幅平方 u = $|\psi_\alpha(i)|^2$ 的分布 $T_N(u)$，其归一化定义为$\int_0^1 T_N(u)du = N$ [；其二阶矩为 $I_2(N)$]，当 N → ∞ 趋于极限时，它与 Q_{0^+} 的关系由方程 (16) 给出。因此，这两个问题之间的对应关系为 u = 1/ˆm，其中 $T(u)\,du \leftrightarrow Q(\hat{m})\hat{m}\,d\hat{m}$：共振本征态在一个格点上的振幅为 u = 1/ˆm，即其以 $1/\eta$ 为单位的局域态密度（见第 II 节 B）。仿照方程 (90) 写出，

$$T_N(u) - T_\infty(u) = N^{-\kappa}\, g_N(u), \qquad \kappa = 2\beta - 1, \quad (104)$$

零模论证给出

$$g_N(u) = A u^{-3}\, g_\eta(1/u), \quad (105)$$

且常数 A 并非自由参数：由于 $c_\eta = \int_0^\infty g_\eta(\hat{m})\hat{m}^{-1}d\hat{m}$ 和 $c_N = \int_0^1 g_N(u)u^2du$ 是 IPR 修正项的振幅，方程 (105) 中的变量变换恰好给出 $A = c_N/c_\eta$。等价地，在体区中，大小为 N 的有限系统相当于有效调节参数为 $\eta_{\rm eff} = A^{1/\kappa}/N$ 的无限 BL。方程 (105) 的两个直接推论是：经 N^κ 重新标度且使用相同的 $\kappa = 2\beta - 1$后，$T_N(u) - T_\infty(u)$ 必须在 u = O(1) 的区域内塌缩到一条主曲线上；此外，这条主曲线必须继承零模的尾部：$g_\eta(\hat{m}) \propto \hat{m}^{-(2-\beta)}$ for $1 \ll \hat{m} \ll 1/\eta$ 转化为

$$g_N(u) \propto u^{-3} u^{2-\beta} = u^{-1-\beta}, \qquad N^{-1} \ll u \ll 1, \quad (106)$$

边界层 $\hat{m} \sim 1/\eta$ 被映射到 $u \sim \eta_{\rm eff} \sim 1/N$，即映射到遍历振幅 $|\psi|^2 \sim 1/N$的尺度上。注意，相对修正 $N^{-\kappa} g_N(u)/T_\infty(u) \propto (Nu)^{1-2\beta}$ 恰恰在此处变为一阶，正如$(\eta\hat{m})^{2\beta-1}$ 在 $\hat{m} \sim 1/\eta$ 处的方程 (98)中那样。

图 12 在含有 $N = 2^n$ 个格点、W = 22的随机正则图上，对安德森模型的精确对角化数据进行了检验（另见文献 [50]）。图 12(a) 展示了多个尺寸下的 $T_N(u)$，以及由腔解得到的渐近形式 $T_\infty(u)$：在有限 N 下，幂律 $T_\infty \propto u^{-(2-\beta)}$ 在极小振幅处被截断，即 $u \lesssim u_N \propto N^{-1/(1-\beta)}$，并由可积的 $u^{-1/2}$ 行为 [27, 33]取代；然而，这一截断对逆参与率产生的修正项仅为 $N^{-(1+\beta)/(1-\beta)}$量级，数值上远小于观测到的修正项，且符号相反，因此观测到的修正项必定来自 u = O(1)的区域。图 12(b) 展示了该区域中的 $[T_N(u) - T_\infty(u)]N^\kappa$，其中 W = 22时为$\kappa = 2\beta - 1 \approx 0.35$：在统计误差范围内，各曲线塌缩到同一个主函数上；对于最大的尺寸，统计误差较大，因为每个本征态仅有少数格点满足 u = O(1)。这是图 11(c) 的有限 N 对应物，并证实了方程 (104)。图 12(c) 展示了 $3/N \le u \le 0.2$ 时符号相反的同一重标度差值，其中 $T_N < T_\infty$：塌缩现象仍然存在；并且对于 $u \gtrsim 10^{-3}$，在所有尺寸下，主曲线都遵循方程 (106) 所预言的幂律 $u^{-1-\beta}$，而在最大的尺寸下，曲线在 $u \approx 10^{-3}$ 以下开始偏离该幂律。在该规律清晰成立的区间内，$10^{-3} \lesssim u \ll 1$，我们认为，这一现象是次主导根最直接的证据：在小 u 处，振幅分布的有限尺寸修正以指数 $1+\beta$ 衰减；用 Abou-Chacra–Anderson–Thouless 条件的语言来说，该指数对应于 $1-\beta$，而不是分布本身的指数$2-\beta$。对于 $u \lesssim 1/N$，亏损不再由零模给出：我们预期，在最小振幅 $u \sim u_N \propto N^{-1/(1-\beta)}$ 处，文献 [27] 首次预言的树律截断尺度（另见文献 [33]）T_N/T_∞ 会变为单一标度变量$z = Nu^{1-\beta}$ 的函数。这一交叉的结构将另文讨论。

对方程 (105)的检验可以通过直接叠加两条主曲线来完成，这要求两个问题在相同的 W 下拥有数据。图 13 展示了 W = 22处的结果；在该处，我们按照第 VIII 节 A 中的方法求解了有限 η 下的腔方程；精确对角化数据取自图 12，$N = 2^{10}$ 至 2^{15}。由 $\eta = 10^{-3}$ 至 10^{-6} 得到的有限调节器主曲线彼此重合，误差小于线宽，无论是在体区还是沿着 $u^{-1-\beta}$ 侧翼。有限尺寸主曲线的噪声大得多，因为每个本征态仅对具有 u =O(1)的少数格点作出贡献；不过它们具有相同的形状——负侧翼 $\propto u^{-1-\beta}$、一个零点，以及在更大 u 处的正体区——并且沿侧翼与前者重合，只要将后者乘以常数 A；A 与 η 无关且接近于 1，但会随 N 缓慢减小，从 $N = 2^{10}$处的 $A \approx 1.15$ 降至 $N = 2^{15}$处的 $A \approx 0.85$（大致如 $N^{-0.09}$）。在体区，有限尺寸曲线遵循有限-η 曲线，包括 u ≈ 0.3处的零点；除 u 的最小值处外，它们均处于统计误差范围内，而在最小 u 值处，最大的尺寸位于其上方。A 的缓慢漂移，与下文讨论的逆参与率修正的有效振幅以及接近 W_c 时 κ_N 超过 κ_η 的现象（第九节）一样，表明存在缓慢衰减的次领先有限尺寸修正。因此，在适当变量下，这两个标度函数实际上是同一个函数，正如方程 (105)所断言的：完整分布的有限尺寸修正和有限调节器修正，是线性化递推的同一个零模，只是以不同振幅激发；在体区，具有 N 个格点的系统等价于 $\eta_{\rm eff} = A^{1/\kappa}/N$ 处的无限 BL，其量级为 1/N。逆参与率修正的振幅与该值一致，通过 $A = c_N/c_\eta$得到：来自有限-η总体的 $c_\eta \approx 0.15$，其中 $[I_2(\eta) - I_2^\infty]/\eta^\kappa$ 在 η的三个数量级范围内基本保持不变；以及通过对参考文献 [50] 的精确对角化逆参与率采用相同的 κ对 $N \ge 8192$进行拟合得到的 $c_N = 0.15 \pm 0.02$，给出 $c_N/c_\eta = 1.0 \pm 0.15$，与 A 一致；有效振幅 $[I_2(N) - I_2^\infty]N^\kappa$本身也在缓慢减小，从 $N = 2^{10}$ 处的 0.19 降至 $N \gtrsim 10^4$处约 0.15，与 A(N)同步。

IX. 逆参与率的有限尺寸标度

前几节的结果确定了局域相中逆参与率的有限尺寸标度形式，包括

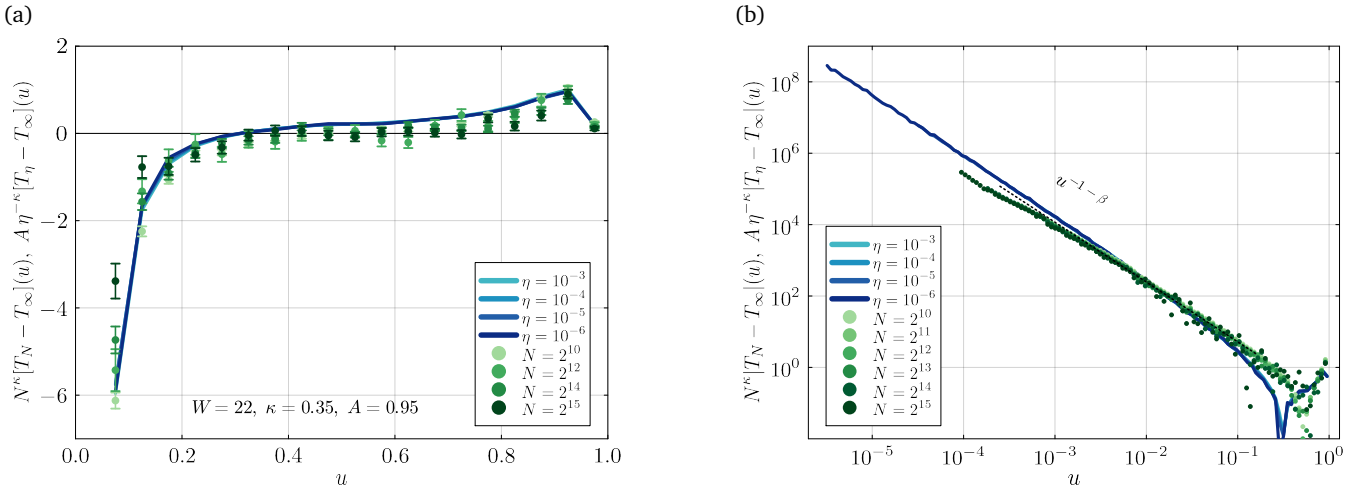

图13。在 W ＝22 ($\beta \approx 0.675, \kappa \approx 0.35$) 处对两个标度函数的直接比较。符号：有限尺寸主曲线 $N^{\kappa}[T_N(u) - T_\infty(u)]$，来自精确对角化，与图12中的数据相同：(a) 中 N ＝2^{10}、212、214、215；(b) 中 N ＝2^{10}、……、2^{15}。曲线：有限调节器主曲线 $A\eta^{-\kappa}[T_\eta(u) - T_\infty(u)]$，其中 $T_\eta(u) \equiv u^{-3}Q_\eta(1/u)$，来自腔方程的人口动力学解，$\eta = 10^{-3}$、……、$10^{-6}$。(a) 体区，宽度为 0.05 的线性分箱。(b) 对数尺度上的绝对值，分别位于区域 $1/N \ll u \ll 1$ 和 $\eta \ll u \ll 1$，其中两条主曲线均为负值并遵循 $u^{-1-\beta}$（虚线：$0.11\,u^{-1-\beta}$）；$u \approx 0.3$ 处的凹陷是零点 [，见 (a)]。曲线按 A ＝0.95 绘制；在侧翼 $\max(3\times10^{-3}, 3/N) < u < 0.08$ 上的拟合给出与 η 无关且接近于 1 的 A，随 N 从 1.15 （N ＝2^{10}）缓慢降至 0.85 （N ＝2^{15}）。

其向临界点的交叉，且标度变量中不含自由参数。由于随机正则图上逆参与率的有限尺寸标度一直是长期争论的主题 [28, 55–61], ，我们明确写出这一形式，在有限-η 和有限-N 数据上对其进行检验，并讨论其对先前有限尺寸分析的影响。

A. 标度形式

在玩具模型中，第 VIB 节的方程（74）描述了从幂律 $H^{2\beta-1}$ 到临界 $1/|\ln H|$衰减的整个交叉过程，该过程是单一变量 $x = (2\beta-1)|\ln H|$的函数，其振幅 C 是通过计算得到的，而非拟合得到的。

在安德森模型中，预计也具有相同的结构：在有限 η时为 $L = \ln(1/\eta)$，在有限 N时为 $L = \ln N$，因为一个包含 N 个格点的图在体区中充当调节器 $\eta_{\rm eff} \propto 1/N$（第 VIII B 节）：

$$I_2 - I_2^{\infty} \simeq \frac{1}{L}\,\Phi(\kappa L), \qquad \Phi(x) = \Phi_0 f(ax) = \frac{\Phi_0\, a\, x}{e^{ax} - 1}, \tag{107}$$

其中 $\kappa = 2\beta - 1$。对于 $x \gg 1$，即 $L \gg 1/\kappa$，方程 (107) 化为 $I_2 - I_2^{\infty} \simeq \Phi_0 a\kappa e^{-a\kappa L}$，即第二节 C 中的幂律：这是渐近区间，随着 $W \to W_c$，该区间会移向越来越大的尺寸（更小的 η），而幂律的前因子 $\Phi_0 a\kappa$ 会如方程 (76) 所示趋于零 $\propto 2\beta - 1$。对于 $x \ll 1$，修正项变为 Φ_0/L，且振幅有限。振幅 Φ_0（对应于 C）并非普适量，理论预言其为 ＝1，这与渐近指数 $\kappa = 2\beta - 1$的要求一致。偏离 W_c时，$b_3 c_3 \neq 1$ 在方程 (73) 中以 $e^x - 1$ 替换为 $e^x - b_3 c_3$，并使振幅依赖于 W；而 $\eta_{\rm eff} \propto 1/N$ 中的一个常数因子仅使L 平移一个常数，这是相对阶为 $1/L$的修正，因此这些效应均不会改变a。不过，在下面的拟合中，我们仍将a 保留为有效参数，用以吸收振幅对W的依赖以及有限L时的次级修正；在分离这些效应后，数据证实$a = 1$。结合渐近值的$I_2^{\infty} \simeq I_2^{\infty,\rm crit} + c_{I_2}(W - W_c)^{1/2}$ 平方根奇异性（第二节 B），以及 $\kappa \propto (W - W_c)^{1/2}$，方程 (107) 给出接近$W_c$

$$I_2(N, W) - I_2^{\infty,\rm crit} \simeq \frac{1}{\ln N}\,\mathscr{F}\big(\kappa \ln N\big), \qquad \mathscr{F}(x) \simeq \frac{c_{I_2}}{2c_\beta}\,x + \Phi(x), \tag{108}$$

其中我们在接近 $c_\beta (W - W_c)^{1/2}$ 的条件下使用了W_c，方程 (18)。这具有文献 [55, 57], 中“线性”单参数标度试探形式的形式，其标度变量为 $\ln N/\xi_\kappa$，但标度长度为 $\xi_\kappa = 1/\kappa \propto (W - W_c)^{-1/2}$，即$\nu = 1/2$，而非文献中的 $\nu = 1$ （如第 IX 节 C 所述，这种对单一变量的塌缩并不意味着底层流是单参数的）；临界值以 $1/\ln N$ 的方式逼近，即满足 $\zeta = 1$，其中 ζ是第 VI 节引入的临界修正 $(\ln N)^{-\zeta}$ 的指数（在后两篇文献 [28, 59, 61], 所讨论的临界局域化情景中，文献μ 将其记为另一符号），而不是文献 [28], 拟合所暗示的有效 $\zeta \simeq 1/2$；正如我们在第 VI 节所论证的，后者属于前渐近行为。除振幅 Φ_0 之外，标度形式中的所有要素都已通过独立途径确定：β由局域态密度分布的尾部给出，从而确定标度变量；I_2^{∞} 则来自 $\eta \to 0^+$ 腔解。

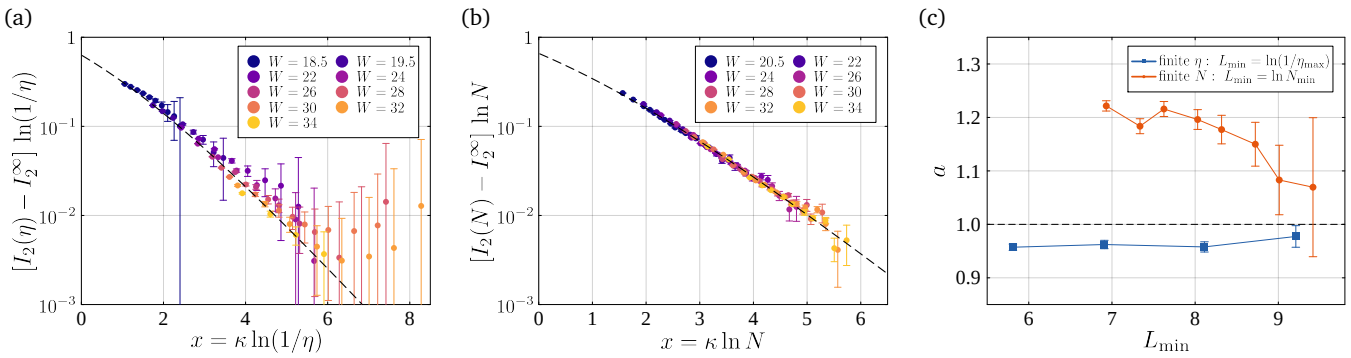

图14。检验有限尺寸标度形式（107）： $\kappa = 2\beta - 1$ 取自局域态密度分布的尾部，I_2^∞ 取自 $\eta \to 0^+$ 腔解，因此标度变量中没有任何参数经过调整。(a) 有限 η，在无限 Bethe格上进行种群动力学， $\eta \le 10^{-3}$，W $= 18.5$ 至 34： $[I_2(\eta) - I_2^\infty]$ln$(1/\eta)$ 对x $= \kappa \ln(1/\eta)$作图。(b) 有限 N，对N $= 2^8$ 至 2^{15}、W $= 20.5$ 至 34的随机正则图进行精确对角化： $[I_2(N) - I_2^\infty]$ln N对x $= \kappa \ln N$作图。虚线：方程（107）的 Φ(x)，所有W共用 Φ_0和a，并在$\eta \le 10^{-3}$ [(a)上拟合得到： $\Phi_0 = 0.63$，a $= 1.26$]；在N $\ge 2^{11}$ [(b)上拟合得到： $\Phi_0 = 0.66$，a $= 1.19$]。(c) 采用所有W共用a、而每个W的振幅自由变化进行拟合所得的形状参数a，对截断L_{min}作图：有限 η，其中 $\eta \le \eta_{max}$ 以及$L_{min} = \ln(1/\eta_{max})$（方块）；以及有限N，其中N $\ge N_{min}$ 且$L_{min} = \ln N_{min}$（圆）；虚线为a $= 1$的首阶值。

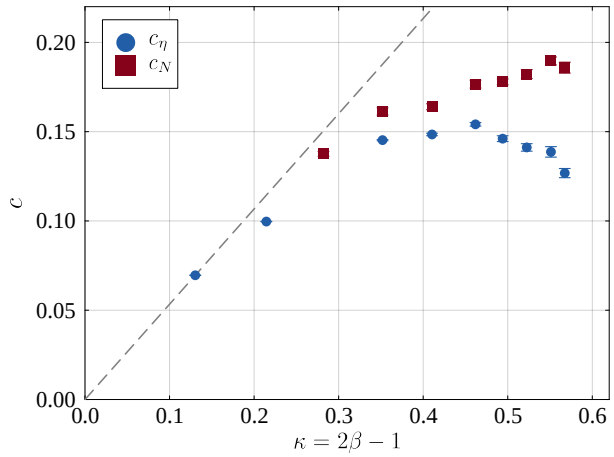

图15. 渐近幂律 $I_2(\eta) - I_2^\infty \simeq c_\eta \eta^\kappa$ 和$I_2(N) - I_2^\infty \simeq c_N N^{-\kappa}$的前因子$c_\eta$（圆形）和$c_N$（方形）与$\kappa = 2\beta - 1$的关系。它们是通过对图14中的数据进行标度形式（107）拟合得到的，其中$a = 1$ 和振幅 Φ_0 在每个W处均为自由参数，拟合分别采用$c = \Phi_0 \kappa$、$\eta \le 10^{-3}$（种群动力学，$W = 18.5$至34）和$N \ge 2^{11}$（精确对角化，$W = 20.5$至34）。虚线 $\propto \kappa$为视觉参考线。

B. 有限-η和有限-N 数据

图14利用图1中的群体动力学数据检验方程 (107)，数据范围为 $\eta \le 10^{-3}$ [$\ln(1/\eta) \approx 7$ 至 19；在$W = 18.5$], 处，x 降至 ≈ 1 。此外，还使用了文献 [50], 中的精确对角化数据，$N = 2^8$ 至 2^{15} （ln$N \le$10.4）。在这两种情况下，不同无序强度下的数据以$x = \kappa L$ [为函数均塌缩到单一曲线上，如图14(a)和(b)],所示，且 $\zeta = 1$：标度变量正如预测的那样为 $(2\beta - 1)\ln N$[101]。

图14(a)和(b)中的虚线表示标度函数 (107)，所有无序强度共用一个振幅 Φ_0 和一个形状参数 a。

在有限 η 下拟合得到的形状参数为 a $= 1.26$，在有限 N 下则为 a $= 1.19$，与其首阶值 a $= 1$不同。原因在于振幅并非对所有 W 都完全相同：在每个 W 下分别拟合（取 a $= 1$）时，有限 η下的振幅会从 W $= 18.5$ 时的 $\Phi_0 = 0.53$ 平滑下降至 W $= 34$ 时的 0.22；在 W_c之外，这种依赖是允许的，此时 $b_3, c_3 \neq 1$。渐近幂律对应的前因子 c $= \Phi_0 \kappa$ ——有限 η 时为 c_η，有限 N 时为 c_N —— 见图 15：在 W_c 附近， Φ_0 趋于有限值，前因子如方程 (76) 所预测的那样随 κ线性趋于零；而在局域化相更深处， Φ_0 的减小使它们对 W 的依赖很弱。由于较大的 W 对应较大的 x，采用共同振幅会使塌缩曲线看起来更陡，拟合则通过取 a > 1来补偿。采用所有 W 共用形状参数 a、但允许振幅在各个 W 下自由变化的拟合，将这两种效应区分开来 [（图14(c)）]。由于方程 (107) 描述的是渐近区间，只有随着 L 增大而衰减的修正项，因此我们逐步排除最大的 η 值或最小的尺寸，重复这一拟合；也就是说，将数据限制在 L $\ge$ Lmin ，其中 $L_{min} = \ln(1/\eta_{max})$ 或 ln N_{min}：不依赖于 Lmin 的 a 值不受此类修正项影响，而随 Lmin 发生漂移则表明存在这些修正项。在有限 η 下，对于介于 3×10^{-3} 和 10^{-4} 之间的每个截断 η_{max}，拟合得到的 a 均介于 0.96 和 0.98 之间：标度函数的形状与预测一致，未见明显漂移。在有限 N 下，纳入所有尺寸 N $\ge 2^{10}$ 时，拟合得到 a $= 1.22$；随着逐步排除较小尺寸，a 会向 1 减小，最低达到 1.07 ± 0.13。

该标度形式还解释了为什么图 1 和图 2 中的纯幂律拟合得到的指数系统性地大于 $2\beta - 1$ 接近W_c时的值：在有限的 η 下如此，在有限的N下更是如此。接近W_c时， κ 很小，而L 的可达取值无法进入$x = \kappa L \gg 1$ 这一范围，在该范围内方程 (107) 才会化为纯幂律。对于$x = O(1)$， -1 在 $\Phi(x)$ 的分母中不可忽略，因此局部衰减率 $-\mathrm{d}\ln[I_2 - I_2^\infty]/\mathrm{d}L$ 为$a\kappa/(1 - e^{-a\kappa L})$，大于 κ。一个

在这一交叉区域上的幂律拟合因此会给出一个大于 $2\beta-1$的表观指数，而方程 (107) 在 $\kappa=2\beta-1$时能够描述这些数据。

最后，有限 η 与有限N 时a 表现出的不同，说明两个问题之间的对应关系 $\eta \leftrightarrow 1/N$ 仅渐近成立，即当 $\eta\to 0$ 且 $N\to\infty$时成立；但在有限N 时，这种对应关系会受到次阶修正的影响。这些修正使有效衰减随N 的变化略微快于方程 (107) 在$a=1$时的预测，而且它们随N增加而缓慢减小。它们与图13中关联两条主曲线的常数A随N缓慢漂移的原因相同，也与图2中拟合得到的 κ_N 超出 κ_η 的现象同源。

方程 (107) 还提供了一种实用的外推方法。仅用精确对角化数据进行拟合，令 $\mathrm{N}\geq 2^{11}$，在每个 W 下让 $\mathrm{I}_2^{\infty}(\mathrm{W})$ 保持自由，并采用共同的 Φ_0 和 a，可得 $\mathrm{I}_2^{\infty}(\mathrm{W})$，其结果与种群动力学数值一致，所有 W 在 20.5 到 34 之间时，偏差均在 2 到 5×10^{-4} 以内。临界值 $\mathrm{I}_2^{\infty\ \mathrm{crit}}$ 受到这些数据的约束较弱：在 $20.5\le \mathrm{W}\le 34$ 的范围内，种群动力学数值紧密符合 $\mathrm{I}_2^{\infty\ \mathrm{crit}}+、\mathrm{c}_{I_2}(\mathrm{W}-\mathrm{W}_c)^{1/2}$，其中 $\mathrm{I}_2^{\infty\ \mathrm{crit}}\approx 0$，.30；但偏离纯平方根的部分约为 5×10^{-3}，比统计误差大一个数量级以上，而从这一区间提取的 $\mathrm{I}_2^{\infty\ \mathrm{crit}}$，取决于对这些偏差的建模方式。要精确确定临界值，并检验方程 (107) 的临界分支 $\mathrm{x}\to 0$，需要获取更接近 W_c 的数据。

总之，局域化相中逆参与率的有限尺寸标度由变量 $(2\beta-1)\ln N$ 控制，即由长度 $\xi_\kappa=1/(2\beta-1)\propto(W-W_c)^{-1/2}$ 控制，并在临界点交叉到 $1/\ln N$修正；向热力学极限外推时应使用带有$\kappa=2\beta-1$的方程 (107)，其中 $\kappa=2\beta-1$是独立已知的。[102]

C. 对此前有限尺寸分析的影响

由于公式（107）给出了局域化相和临界点处所有N 与W 下逆参与率的尺寸依赖性，因此可以解析地重新考察以往关于随机正则图上安德森跃迁的研究所依据的有限尺寸量。除标度变量的选择（其中的 $\nu=1/2$ 和 $\zeta=1$已在公式（108）之后讨论）之外，我们在此考察其中的两个量：运行分形维数 [60], 的重整化群（RG）流，以及有限图的分形维数及其对无序的导数 [65]。我们研究I_2，，其标度形式已经过检验，但下面的整体图景适用于任意矩I_q ，其中 $q>\beta$。振幅分布体区部分的修正可因子化为一个依赖N 的振幅与一个固定函数的乘积（第七节A和第八节B），其矩 $\int g_\eta(\hat{}m)\hat{}m^{1-q}\,\mathrm{d}\hat{}m$ 在大m 处对于$q>\beta$收敛。因此，对于这些q，$I_q-I^{\infty}{}_q$具有相同的标度函数、相同的尺度 $1/\kappa$ 以及与临界$\ln N$行为相同的交叉行为，并且仅通过一个依赖q的振幅 [与q 不同；对于整数q ，这一点也可由公式（24）推出

并且已在$q=3$ 和4的情况下于第三节B]进行了数值检验。在领阶下，运行维数$D_q=-\mathrm{d}\ln I_q/[(q-1)\,\mathrm{d}\ln N]$,，包括由参与熵（$q\to 1$）得到的$D_1$，以及$D_\infty$，因此彼此均成正比，其比值与$N$无关，并且具有相同的流函数 $\mathscr{B}$ （定义如下）：D_q 的流与下文推导的D_2 相同，只是常数g取决于q；特别地，在 $\mathscr{B}=-(2\beta-1)$处达到的不动点线对所有 $q>\beta$都是相同的。

a. 运行分形维数的重整化群流。 Following Ref. [60],，我们定义运行分形维数及其流函数，

$$D_2(N)=-\frac{\mathrm{d}\ln I_2}{\mathrm{d}\ln N},\qquad \mathscr{B}=\frac{\mathrm{d}\ln D_2}{\mathrm{d}\ln N}. \tag{109}$$

参考文献 [60] 使用D_1，，即参与熵，而不是$\ln I_2$，，这只会改变下面常数g 的值。将带有 $a=1$ 和 $L=\ln N$ 的方程 (107) 代入后，在 $(I_2-I_2^{\infty})/I_2^{\infty}$ 的领阶下，我们得到：

$$D_2=\frac{\Phi_0}{I_2^{\infty}}\,\frac{\kappa^2}{4\sinh^2(\kappa L/2)},\qquad \mathscr{B}=-\kappa\coth\frac{\kappa L}{2}. \tag{110}$$

消去L后得到

$$\mathscr{B}^2-2g\,D_2=\kappa^2,\qquad \frac{\mathrm{d}\mathscr{B}}{\mathrm{d}\ln N}=g\,D_2,\qquad g=\frac{2I_2^{\infty}}{\Phi_0}. \tag{111}$$

这些正是文献 [60] [的方程（15）和（16）中从现象学角度提出的流方程，$\frac{1}{2}\mathscr{B}^2=c\,(D-D_A)$，其中$c$ 被视为与W]无关的常数。这里，这些方程是从理论推导得到的，适用于局域化相和临界点；常数由 κ、I_2^{∞} 以及标度函数的振幅 Φ_0 确定：

- g，它从$g\approx 1.2$（对应W_c ）增至$g\approx 6$（对应$W=34$ ）（其中 Φ_0 取自第九节的拟合）；
- $D_A=-\kappa^2/(2g)=-\Phi_0\kappa^2/(4I_2^{\infty})$，该量为负，并随 $W-W_c$线性趋于零，因为 $\kappa^2\propto W-W_c$，也就是说，这是文献 [60] [方程（13）]的拟合中在扩展侧发现的线性关系向局域侧的延续。

所得的流如图16所示。在局域化相中，每条轨迹最终都会落在不动点线$D_2=0$上，其中 $\mathscr{B}=-\kappa$，即$D_2\propto N^{-(2\beta-1)}$。

参考文献 [60] 通过类比Berezinskii–Kosterlitz–Thouless（BKT）相变的低温相 [51, 52, 103, 104],，预见了这一结构；随机正则图上的安德森跃迁也曾在参考文献 [55, 61], 中与该相变进行比较，而这种类比事实上是严格成立的。令$x=-\mathscr{B}$、$y=(2gD_2)^{1/2}$以及$\ell=\frac{1}{2}\ln N$，方程（111）变为$\mathrm{d}x/\mathrm{d}\ell=-y^2,\mathrm{d}y/\mathrm{d}\ell=-xy$，这正是BKT相变的重整化群方程 [104, 105],，其不变量为$x^2-y^2=\kappa^2$:

•局域化相类似于低温相，其不动线为$y=0$、$x=\kappa$;

- 临界点是分界线$x = y$，在该线上$D_2 \simeq \Phi_0/(I^{\infty}_{\text{crit}\,2}\ln^2 N)$以及 $\mathscr{B} = -2/\ln N = -(2gD_2)^{1/2}$（图16中的点线）。这是边缘流，在$W_c$处运行分形维数呈现 $1/\ln^2 N$ 行为，该结果见文献 [60]。

该理论对文献 [60] 所作的补充，是确定了其中参数 D_A，该参数决定了不动点线上的 $\mathscr{B}$ 值，即 $-(-2gD_A)^{1/2} = -(2\beta - 1)$。这是我们的结果与文献 [60],结果唯一不同之处；在后者中，这一数值与局域化长度相关，即 $\mathscr{B} = -1/(\xi \ln k)$，其中 ξ 由预期的共振数量定义。这是与基于第三节 C 中讨论的平均衰减所得估计相同类型的估计。在 $\xi = \xi_{\text{loc}}$的情况下，它在 $W = 22$处给出 0.16，而不是 0.35；在接近 W_c时，它随 $W - W_c$线性趋于零，而不是按 $(W - W_c)^{1/2}$的方式趋于零。这种线性行为也很难与文献 [60] 本身的数值结果相协调：如果其流方程在相变两侧均成立，并且将其在延展侧拟合得到的 D_A 对 $W - W_c$ 的线性依赖关系延续到局域化侧，那么不动线上的数值 $-(-2gD_A)^{1/2}$将呈现平方根行为，即指数为 $2\beta - 1$。文献 [106]也独立得出了相同结论。

对D_A 的识别也阐明了流的结构。在局域化相中，流无法简化为单变量D_2) 的函数：每条轨迹都由D_A标记，即由沿轨迹守恒的 κ标记。因此，双参数流（111）就是方程（107）的微分形式。尽管N 在方程（107）中只通过变量 $\kappa \ln N$出现，但除了临界因子 $1/\ln N$之外， $\mathscr{B}$并非仅为 D_2 的函数，因为W) 随$D_2 \to 0$变化：正是不动点线，也就是连续变化的指数 κ，使得该流成为双参数流。在变量(x、y) 中，流是自治的；而在图16的 (D_2 $\mathscr{B}$) 平面中，常数g 作为依赖于W的参数出现，且不随流变化。轨迹（110）的形式与BKT相变低温相中的轨迹完全相同；同样，在除去临界行为后，单变量坍缩并不会使该流成为单参数流。由于 $\mathscr{B}$ 涉及I_2，的二阶对数导数，它作为数值诊断的精确度远低于图14中的坍缩；我们的有限N和有限η 数据在其精度范围内与方程（111）相符（未显示）。

b. 关于扩展侧的一个猜想。对于$W < W_c$，方程（19）], 的两个解 β 和 $1 - \beta$ 在W_c处合并后变为复数， $\beta = \frac{1}{2} \pm i_2\,\tilde{\kappa}$，因此 $\kappa^2 = (2\beta - 1)^2 = -\tilde{\kappa}^2 < 0$。接近$W_c$时， $\kappa^2 \simeq 4c_\beta^2 (W - W_c)$ 解析地连续穿过相变。在领阶下，方程（110）中的D_2 和 $\mathscr{B}$ 仅通过 κ^2依赖于 κ ：方程（107）中的项 $-\Phi_0\kappa/2$关于 κ为奇函数，不依赖L，因此在D_2中消失。

因此很自然地可以猜想，在扩展侧接近W_c 时，方程（111）仍然成立，其中 $\kappa^2 = -\tilde{\kappa}^2$和$g$ 取W_c 处的值（因为$I_2^{\infty} = 0$ 对于$W < W_c$），即$D_2 = \tilde{\kappa}^2/[2g \sin^2(\tilde{\kappa}L/2)]$ 和 $\mathscr{B} = -\tilde{\kappa}\cot(\tilde{\kappa}L/2)$（图16中的虚线）：

- 随着N 增大，D_2 先像在临界点处那样减小；
- 它达到最小值$D_A = \tilde{\kappa}^2/(2\,) > 0$ $\mathscr{B} = g$，其中，$\ln N_A W_c W$；
- 随后它逐渐增加，趋向于遍历值 $D_2 = 1$。

这是文献 [60] 在扩展侧 [的方程（13）、（19）和（20）], 中数值发现的行为，并且长度 $\ln N_A$ 在离域侧 [29] 具有关联体积的指数 $\nu = 1/2$ 。点 $D_2 = D_A$,$\mathscr{B} = 0$ 并不是不动点，正如文献 [60],中已经指出的那样，因为在那里 $d\mathscr{B}/d\ln N = gD_A > 0$：流越过该点并继续向遍历不动点 $D_2 = 1$, $\mathscr{B} = 0$演化。因此，D_2 在 N_A 附近的最小值只是一个有限尺寸平台，能够在可达到的尺寸上模拟多重分形（例如 $D_A \approx 0.03$ at $\ln N_A \approx 11$ for $W = 16.5$），而不是一个中间相：在热力学极限下，对于所有 $W < W_c$，$D_2 = 1$，正如精确解 [29]所示。D_2 在 $\tilde{\kappa}L = 2\pi$ 处的发散表明，当 $D_2 = O(1)$时，展开失效；随后向遍历性的流动无法由方程（107）描述。两个根β 在 W_c 处合并 $1 - \beta$，并延伸到复平面中的情形，在场论中被称为“保角性丧失”[107]；将从线性化腔方程出发，沿此思路推导相变两侧的流动，将在文献 [106]中 प्रस्तुत。

c. 固定 N 时的分形维数及其对无序的导数。多项研究通过分形维数 $\tilde{D}_q(N) = \ln I_q/[(1-q)\ln N]$, 来刻画有限图，而文献 [65] 则根据其导数 $d\tilde{D}_q/dW$来确定相变位置。

- $\tilde{D}_2$ 本身。在局域化相中，方程 (107) 给出

$$\tilde{D}_2(N) = -\frac{\ln I_2^{\infty}}{\ln N} - \frac{\Phi(\kappa \ln N)}{I_2^{\infty} \ln^2 N} + \dots . \qquad (112)$$

与方程 (109) 中随尺度变化的 D_2 不同， $\tilde{D}_2$ 包含项 $-\ln I_2^{\infty}/\ln N$，因此只有在 $1/\ln N$ 增大时才趋于零。例如，当 $W = 20.5$ 时， $\tilde{D}_2 \approx 0.08$（当$N = 3 \times 10^4$），而当 $N = 10^6$时仍为 ≈ 0.06。因此，在局域侧可达到的尺寸下， $\tilde{D}_q$ 的有限取值是一种对数有限尺寸效应，并不意味着局域态具有多重分形。

- 其导数。对于 $d\tilde{D}_2/dW \simeq -(\ln N)^{-1} d\ln I_2^{\infty}/dW$，结论也相同。由于 I_2^{∞} 的平方根奇点，当 $\kappa \ln N \gg 1$时，其表现为 $(W - W_c)^{-1/2}/\ln N$；该量在 W_c 处发散，但其前因子在热力学极限下趋于零。对于有限 N，奇点在临界窗口 $\kappa \ln N \lesssim 1$内被抹平。在该窗口边缘，$|d\tilde{D}_2/dW| \approx c I2\, c_\beta/I^{\infty}$,crit 2，为几个 10^{-2}„, 且与 N 无关。

因此，在任何可达到的规模下，$d\tilde{D}_q/dW$ 都不应出现发散，即使在相变的局域侧也是如此；在那里，奇点已被精确获知。在文献 [65], 中观察到的这一缺失，不能被视为反对从局域态直接相变到遍历态的证据，也不能作为支持多重分形金属的依据。

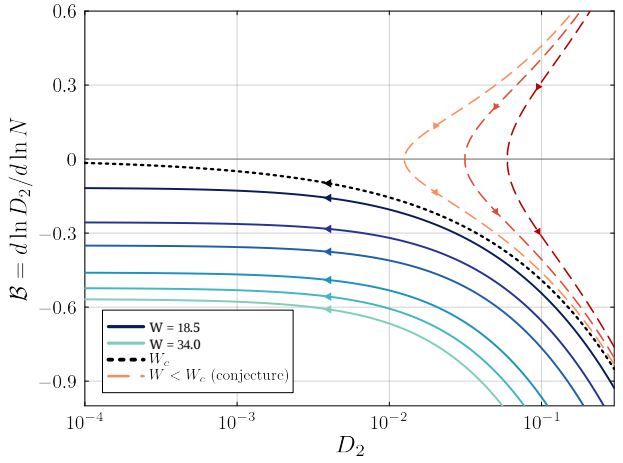

图16。在 (D2, $\mathscr{B}$) 平面中运行分形维数D$_2$ =−d ln I$_2$/d ln N的流，其中 $\mathscr{B}$ =d ln D$_2$/d ln N，来自方程（111）。图中未显示数据；在局域化相中，参数 $\kappa = 2\beta - 1$、I_2^{∞} 和 Φ_0 是在每个W处通过群体动力学获得的（第九节）。实线：局域化相，W =18.5、20、22、26、30和34（从上到下）；每条轨迹都在 $\mathscr{B} = -(2\beta - 1)$处终止于不动点线D$_2$ = 0 。点线：临界点，$\mathscr{B} = -(2g\, D_2)^{1/2}$。虚线：向扩展侧的猜想延拓，$\kappa^2 = -\tilde{\kappa}^2$，对应W =17.5、16.5和15（从左到右），其中 $\tilde{\kappa}^2 = 4c_\beta^2(W_c - W)$，且g固定为其在W$_c$处的取值：它们在 $\mathscr{B}$ = 0处穿过D$_A$ N$_2$(的最小值，该点不是不动点，随后流向遍历不动点D$_2$ = 1, $\mathscr{B}$ = 0，超出图示范围以及方程（107）的适用范围。三角形表示N增加的方向。

X. 结论与展望

我们通过解析地分析Bethe晶格上安德森模型局域化相中逆参与率的异常有限调节器修正，得出了{style i d='1'>I$_2(\eta) - I_2^{\infty} \propto \eta^{2\beta-1}$；具体而言，我们研究了双曲超平面上的一个玩具NL$\sigma$M模型。该模型具有相同的非紧致分次对称性，并且正如Gruzberg和Mirlin [70], 所表明的那样，体现了Bethe格上真实安德森相变的临界性。由此显现出的机制十分简单，而且我们相信具有普适性。在 $\eta \to 0^+$ ($H \to 0$)极限下，围绕其不动点线性化的腔方程在尾部具有两个幂律解，其指数 β和 $1-\beta$ 关于 1/2对称；未扰动解由较大的指数控制。一个小调节器会在由调节器设定的尺度处、边界层内，从分布尾部移除权重 $\propto H^{\beta}$（分别为 η^{β}）。这一扰动无法沿主导模传播进入体区，因为主导模由与未扰动解的匹配所确定；它会沿次主导模传播，即$e^{(1-\beta)t}$（分别为$\hat{m}^{-(2-\beta)}$），并在边界层与体区之间被$H^{-(1-\beta)}$ 放大。因此，体修正是线性化递推的一个零模，具有普适的形状和振幅 $\propto H^{2\beta-1}$；对于任何由体区主导的可观测量，尤其是逆参与率，其修正也是如此。在临界点，两个根合并，零模获得一个对数前因子，修正变为 $\propto 1/|\ln H|$；交叉介于两种行为发生在 $|\ln H| \sim (\beta - 1/2)^{-1}$。在玩具模型中，这一推导链的每一步都显式可得，所有常数均由腔方程计算得出，且无需任何可调参数，理论预测便与腔方程的数值解相吻合。

对于安德森模型，我们证明，在以下三个明确假设下，同一套推导也成立：线性化$\eta = 0$ 递推存在一个零模；它以 Abou-Chacra–Anderson–Thouless 条件的次主导根 $1-\beta$衰减；以及尾部由单个邻居主导。第二个假设带来的推论最为丰富，第 VIII 节的数值结果从两个相互独立的方面支持了这一假设：按 $\eta^{2\beta-1}$重新缩放后，共振位点处局域态密度分布的有限-η 修正塌缩到同一个主函数；本征态振幅分布的有限尺寸修正在小u 处按 $u^{-1-\beta}$衰减，其中 $u^{-1-\beta}$是 $\hat{m}^{-(2-\beta)}$ 在 $u = 1/\hat{m}$下的像。对于相同无序强度下直接比较的两个标度函数，在适当变量下，它们实际上是同一个函数，只相差一个接近 1 的乘法常数；由于次阶有限尺寸修正，这个常数随N 缓慢变化（第九节）。此外，边界层以外的递推结构表现为求逆而非放大，由此预测了有限 η时共振位点处局域态密度分布远尾部的指数 $\beta - 3$，与数值结果一致；还可用 $\eta = 0$ 解给出该尾部的完整形状。

反常修正也有直接的实空间解释。根据谱恒等式（6）和（24）以及求和规则（8），所有矩I_q的有限-η修正，以及逆参与率的有限-N 修正，完全源于能量接近的本征态对：有限的 η无法分辨劈裂小于 η的态对，而有限图则缺少最稀有的态对。这些关系是精确的：指数 $\kappa = 2\beta - 1$ 对应于它们的关联函数$N^2\mathscr{C}(\omega) \propto \omega^{-\mu}$及其振幅高次幂推广形式的指数$\mu = 2(1-\beta)$；修正项的振幅则对应于关联函数的振幅，因此推导 κ 也就推导出了 μ。在 $\eta = 0^+$ 处直接进行的精确对角化和种群动力学验证了这一预测，包括振幅，且无需任何可调参数；在玩具模型中，将腔解解析延拓到复数H 也能解析地得到同一规律及其振幅（第五节 F）。然而，这两种计算都未揭示修正项的物理起源；现象学的 Mott 型共振计数虽能清楚地说明这一点，却只能确定其指数，无法确定其振幅。局域态密度分布的尾部决定了 β，它由远离给定格点的单一本征态产生：这些本征态的指数尾延伸至该格点，留下很小的权重u，因此 β 就是振幅分布的小振幅尾部$T_{\infty}(u) \propto u^{\beta-2}$ 的指数；局域在该格点的态与这样的远处态之间，若能量间隔小于其耦合$\sim \sqrt{u}$，便会发生杂化；按照精确的振幅统计计数这些共振，便能重现 $\mu = 2(1-\beta)$——即将波函数的平均衰减替换为其完整统计后的参考文献 [66], 估算。

–

精确对角化逐个本征态地证实了这一图像：共振态对共享两个局域中心，其间距随 $\ln(1/\omega)$增大，且其密度遵循 $\omega^{-2(1-\beta)}$；在有限图上，若双峰本征态的局域中心间距超过典型位点间距$\sim \ln N/\ln k$，这些态便会缺失，取而代之的是逆参与率更大的紧致态；这种种群转移解释了大部分有限尺寸修正。局域态密度分布尾部的稀有事件，以及远距离局域本征态之间稀有的 Mott型共振，是同一现象的两个侧面。最后，劈裂小于 η的共振伙伴数量 $\propto \eta^{2\beta-1}$，只有在 $\beta > 1/2$时才会按 $\eta \to 0$ 趋于零：用这种语言来说，局域化条件$\beta > 1/2$ 就是局域态抵御共振增殖 [1, 15]的稳定性。

最后，同一机制确定了局域化相和临界点处 IPR 的有限尺寸标度，即方程 (107)：标度变量为 $(2\beta-1)\ln N$，也就是说，标度长度为 $1/\kappa \propto (W - W_c)^{-1/2}$；临界值以 $1/\ln N$ 的形式逼近，并且同一形式同时描述了有限-η 和有限-N 数据。其微分形式正是文献 [60], 中从唯象角度提出的、关于运行分形维数的双参数重整化群流，因此事实证明它是精确的，并且恰好属于 Kosterlitz 类型。指数 $\kappa = 2\beta - 1$ 沿每条轨迹保持不变，作为 Kosterlitz 方程的不变量，因此该流可以被精确积分；其常数由 κ、I_2^{∞} 以及标度函数的振幅 Φ_0 确定，而每条轨迹最终都结束于不动点线 $D_2 = 0$，并在 $\mathscr{B} = -(2\beta - 1)$ 处达到该线（第 IX 节 C）。特别地，唯象流中的参数 D_A 被确定为$-\kappa^2/(2g)$，正是这一数值决定了不动点线上的指数。同一形式表明，在可达到的尺寸下，局域态具有有限分形维数，以及其关于无序 W_c 的导数不存在发散，都是对数有限尺寸效应，并不意味着存在中间多重分形相。

仍有若干方向有待探索。在解析方面，自然的下一步是对安德森跃迁的超对称 NLσM 重复进行标度分析 [16, 19,22] ，并最终将分析推广到安德森模型本身；在该模型中，自洽方程作用于一个双变量分布，而我们所假设的零模是否存在也应得到证明。如今机制已得到理解，这似乎已触手可及；这也将使我们能够求得幂律的振幅 c_η 和 c_N 。根据经验，在局域化相深处，这些振幅对 W 的依赖很弱；而当接近W_c时，它们趋于零，此时幂律区间 $\ln N \gg 1/\kappa$移向越来越大的尺度（第九节）。只要矩 $\int g_\eta(\hat{m})\,\hat{m}^{1-q}\mathrm{d}\,\hat{m}$ 在 $\hat{m}$趋大时收敛，高阶矩 I_q 的推广就很直接；结合尾部 $\hat{m}^{-(2-\beta)}$ ，这要求$q > \beta$。于是，所有整数矩都具有相同的指数 $2\beta - 1$ [；这一结果由本征态关联（方程（24））得出，并在第三节 B 中针对$q = 3$和 4 进行了数值验证], 。而当$q < \beta$ 时，修正项由边界层主导，并具有不同的、依赖于q的指数，

指数。我们根据流的解析延拓 $\kappa^2 \to -\tilde{\kappa}^2$ 猜想，标度形式可延拓至扩展侧；它在那里再现了数值观察到的运行分形维数的非单调行为 [60], ，从而将其推广到相变两侧。在“共形性丧失”情景 [107], 下对此进行的推导将发表于参考文献 [106]。标度形式的临界分支，即 $\ln N$定律——安德森模型中对应于方程（70）的结果——以及 W_c 处逆参与率的精确值，都值得针对更接近W_c的安德森模型开展专门的数值研究，因为它们直接关系到长期以来的一个难题：如何在相变附近将逆参与率数据外推至热力学极限 [28, 55–64]。最后，我们在体零模层面利用的有限-η 修正与有限-N 修正之间的对应关系，将从实空间视角加以讨论——有限图中的环会激发同一个零模，其作用相当于一个量级为 $1/N$ 的调节器——详见配套短文 [50]。要完整解决这一问题，还需弄清振幅c_N 如何在有限-N 边界层中确定；在那里，这两个问题有所不同。在实空间中，有限图上共振的截断（第三节E）如何与单圈方案中产生有限-N 修正的长环相协调 [50], ，为何它在劈裂达到平均能级间距的量级时开始出现 $1/(N\langle\rho\rangle)$，以及它如何恰好产生$N^{-\kappa}$，这些问题仍有待解析地理解；对共振计数本身进行可控处理的方法也同样如此。

致谢

我们感谢 W. Chen、V. E. Kravtsov、G. Lemarié、A. D. Mirlin、A. Scardicchio 和 C. Vanoni 的宝贵讨论。我们感谢 ANR ManyBodyNet 研究资助（ANR-24-CE30-5851）提供的经费支持。

附录 A：玩具模型腔方程的数值解

本附录介绍用于计算第 V 节和第 VI 节中函数 $\mathrm{P}_H(\mathrm{t})$、$\mathrm{P}_0(\mathrm{t})$、$\mathrm{f}_{\mathrm{typ}}(\mathrm{t})$ 和 $\mathrm{f}_{\min}(\Delta\mathrm{t})$ 的算法。代码（两个 Mathematica 笔记本，分别用于 $\mathrm{J} < \mathrm{J}_c$ 和 $\mathrm{J} = \mathrm{J}_c$，以及一个更快的 C++实现的临界点算法（算法 5），用于最小场强下的计算，$\ln \mathrm{H} = -50$ 和 -54）可在参考文献 [93]的公共代码仓库中获取。所有结果均针对 $\mathrm{k} = 2$；这一选择唯一明确起作用之处，是算法 5 中 P^k 的展开，将其推广到任意 k 十分直接。线性化问题的两个特征常数通过求根得到：β 由方程（38）给出，J_c 则由 $\mathrm{k}\,\mathrm{K}_0(\mathrm{J}_c) = \mathrm{K}_{-1/2}(\mathrm{J}_c)$给出，结果为 $\beta = 0.7530159$（$\mathrm{J} = 0.01$ 时）和 $\mathrm{J}_c = 0.0265402$。

以下所有方程均以式（34b）中的核$K_H(t, t')$ 表示；在 $H = 0$ 处，它简化为$L_0(t - t')$，即式（36）。

1. 常见组成部分

1. **网格**。 $t_i = t_{\min} + i\,\delta t$，$i = 0, \ldots, M$，取区间$[t_{\min}, t_{\max}]$上的点，其中$t_{\max} = 10$和 $\delta t = |t_{\min}|/N_t$选取为接近目标值（$\delta t \simeq 0.08$，在大多数运行中），从而使$t_{\min}$和$t = 0$均为网格点。

2. **指数** y。 定义 $y = Je^{t+t'}(ss' - 1)/H^2$，（其中 $s \equiv s(t)$, $s' \equiv s(t')$）是两个 $Je^{t+t'}/H^2$，阶项之差，该项在 $H \to 0$ 时发散。它可等价地写成

$$y(t,t') = -J\,\frac{e^{t-t'} + e^{t'-t} - H^2 e^{-t-t'}}{1 + s(t)s(t')}, \qquad \text{(A1)}$$

该形式不存在相消项，并使极限 $y \to -J\cosh(t - t')$ 显式呈现。

3. **贝塞尔因子**。 $e^{F(x)} = \sqrt{2\pi x e^{-x}}\,\tilde{I}_1(x)$ 通过 $\exp\left[\ln \tilde{I}_1(x) - x + \frac{1}{2}\ln(2\pi x)\right]$ 计算，其中 $\ln x < 15$；对于 $\ln x \geq 15$，则使用渐近展开 $e^{F(x)} \simeq 1 - 3/(8x)$；这避免了 $\tilde{I}_1(x)$ 在 $x = O(H^{-2})$时发生溢出。

4. **端点** $t' = t_{\min}$。 存在$s(t') = 0$ 和$x = 0$：被积函数具有 0/0 的形式（因子$s'^{-3/2}$发散，而 $\tilde{I}_1(x) \simeq x/2$趋于零）。其有限极限以解析方式代入，

$$K_H(t, t_{\min}) = \tfrac{1}{2}\,e^{J} s^2(t) \left(\frac{Je^{t}}{H}\right)^2 e^{-Je^{t}/H}. \qquad \text{(A2)}$$

5. 求积。对 t' 的积分采用端点修正梯形法计算，$\int dt' g(t') \simeq \delta t \sum_j w_j g(t_j)$，权重 $w_j = \frac{95}{288}$ 在前五个节点 $j = 0, \ldots\ldots, 4$ 上依次为 317 240、23 30、793 720、$\overline{157\,160}$，而在其他位置为 $w_j = 1$。在 $t_{\max}$ 处无需修正，因为被积函数受 $e^{-e^{t'}}$ 抑制。采用三个修正权重（3 8、7 6、23 24）时，解的误差按 δt^4，缩放；我们在 $t_{\min} = -6$ 处取 $\delta t = 0.08$、0.04、0.02 进行了验证。五权重法预计具有 $O(\delta t^6)$ 的精度。精确恒等式 $1 = e^{J(1-e^{t}/H)} + \int_{t_{\min}}^{\infty} dt' K_H(t, t')$ 表明，当边界值和因子 $e^{-e^{t'}}$ 均设为 1 时，$P \equiv 1$ 是方程（34a）的解，参见方程（45）]。该恒等式为端点处理和权重提供了严格检验：在网格 $\delta t = 0.08$ 上的 $t_{\min} = -20$ 处，它满足到 10^{-8}。

6. **不动点迭代**。 皮卡德迭代 $P^{(n+1)} = \mathcal{T}_H[P^{(n)}]$，其中 $\mathcal{T}_H$ 为方程 (34a) 的离散化右端项，当 $\max_i |P^{(n+1)}(t_i) - P^{(n)}(t_i)| < \epsilon$ 时停止。

2. 算法1：$P_H(t)$，当 $J < J_c$ 时

1. 初始化 $P^{(0)}(t_i) = e^{H/(k-1)} e^{-e^{t_i}}$，或使用邻近 H 处已收敛的解。

2. 固定边界值 $P(t_0) = P(t_{\min}) = e^{H/(k-1)}$。

3. 对于 $i = 1, \ldots, M$ 更新

$$P^{(n+1)}(t_i) = e^{J(1-e^{t_i}/H)} e^{\frac{H}{k-1}} + \delta t \sum_{j=0}^{M} w_j K_H(t_i, t_j)\, e^{-e^{t_j}} \left[P^{(n)}(t_j)\right]^k,$$

使用核的共同组成部分的步骤 2–4。

4. 迭代直到 $\epsilon = 10^{-10}$；在同一网格上计算 $I_2(H) = \int_{t_{\min}}^{\infty} dt\, e^{-e^{t}} e^{t} P^{k+1}{}_H(t)$ [这就是以变量 t 表示的方程 (32)，相差一个常规因子 $e^{-2H/(k-1)} = 1 - O(H)$，该因子被舍弃]。

图 6、7 和 8 的运行使用 $J = 0.01$, $\delta t \simeq 0.08$ 和$t_{\min} = -6, \ldots, -16$。

同一算法采用复数运算运行后，可得到第五节 F 和附录 B 中复数 $H = |H| e^{-i\chi}$ 的解。我们保留实变量 $t = \ln(|H|\cos\theta)$和实核 $K_{|H|}(t, t')$，因此 H 仅通过边界值和源项（两者均为 $\propto e^{H/(k-1)}$）以及因子 $\exp\left(-e^{t'} - i\chi\right)$ 进入；该因子取代 $e^{-e^{t'}}$，并在 t'较大时振荡。此时网格间距会相应缩小$1/(e^{t'}\sin\chi)$（每个振荡周期约取十个点，并在映射后的变量中应用经过端点修正的权重）；皮卡德迭代被牛顿法取代，而因子 $e^{-2H/(k-1)}$ 保留在 $I_2(H)$中，这是 $I_2(H) \to 1$ 在 H 较大时所要求的。在 $\chi = 0$ 处，该方法可将实数 H 的解复现至十二位有效数字；细化网格对 I_2 的影响小于 10^{-8}，且我们已将其用于最高达 $\chi = 0.496\pi$的情形。

3. 算法2：$P_0(t)$与常数 c

当$H = 0$ 时，源项$s \equiv 1$、$e^F \equiv 1$ 和$K_H(t, t') \to L_0(t - t')$均消失，见式（36）。此时，方程（35）定义在整个实轴上，而左边界条件必须通过渐近形式（39）给出，其中的前因子c 未知。

1. 在 $[t_-$ 上以 $_{\max}] = [-60, 10]$ 为步长建立网格，范围为 $\delta t = 0.16$；初始化 $P^{(0)}(t) = e^{-e^{t}}$。2. 选取一个 c 的试探值，并在每次迭代中强制令条带 $t_- \leq t \leq t_- + 10$ 上的 $P_0(t) = 1 - c\,e^{\beta t}$ 成立。3. 在条带外更新 $P^{(n+1)}(t_i) = \delta t \sum_j L_0(t_i - t_j) e^{-e^{t_j}} [P^{(n)}(t_j)]^k$（被积函数在两端都可忽略不计，因此简单的矩形法则足够准确）。4. 迭代直至 $\epsilon = 10^{-7}$。5. 检查 $t_- + 10$ 处的连接点：$1 - P_0(t)$ 的对数导数在连接点两侧必须保持等于 β a。调整 c 并重复，直至满足这一条件；若 c 不正确，迭代仍会收敛，但会得到一个解，其中 $1 - P_0(t)$ 的局部指数在连接点的一个核范围内偏离 β。

当 J = 0.01 时，这给出 c = 0.8551。条带必须位于尾部足够深处，因为 $1-P_0$ 还包含一个次主导项 $\propto e^{t}$，其相对于 $c\,e^{\beta t}, e^{(1-\beta)t}$ 的大小衰减缓慢：若连接点设在 $t=-30$，则会得到 $c\approx 0.853$。当 $J=J_c$ 时，采用相同方法并使用 $\beta=1/2$，得到 $c=0.67573$。由于 P_0 是在比 P_H 更粗的网格上计算的，图 6 和图 9 中的差值 $\Delta P(t,H)=P_H(t)-P_0(t)$ 是通过将 P_0 插值到算法 1 的网格上得到的。

4. 算法 3：体区零模 $f_{\rm typ}(t)$

1. 网格与算法2相同，且使用来自算法2的 P_0。

2. 在条带 $t_- \le t \le t_- +10$ 上施加 $f_{\rm typ}(t)=e^{(1-\beta)t}$；这会选出次主导根，并确定归一化（42）。

3. Outside the strip iterate $f_{\rm typ}^{(n+1)}(t_i)=k\,\delta t\sum_j L_0(t_i-t_j)\,e^{-e^{t_j}}P_0^{k-1}(t_j)\,f_{\rm typ}^{(n)}(t_j)$, Eq. (41), until $\epsilon=10^{-7}$.

当 $J=0.01$ 时，这给出 $\max f_{\rm typ}(t)=0.5710$，以及 $(k+1)\int dt\,e^{-e^t}e^t P_0^k f_{\rm typ}=1.08772$，即方程（54）中的常数。当 $J=J_c$ 时，函数 $f_{\rm typ}$ 和 $f_{\rm min}$（算法4）以完全相同的方式计算，采用 $\beta=1/2$，并在条带上施加第 VI 节的临界渐近形式，$f_{\rm typ}(t)\simeq -te^{t/2}$ 和 $f_{\rm min}(\Delta t)\simeq \Delta t\,e^{\Delta t/2}$。

5. 算法4：边界层函数 $f_{\rm min}(\Delta t)$ 和 c_3

在变量 $\Delta t = t - t_{\rm min}$ 中，核恰好与 H 无关（第 VC 节）。因此，利用算法1中的方法，在 $H=1$、$t_{\rm min}=0$ 处求解方程（46），从而 $t\equiv\Delta t$，并省略因子 $e^{-e^{t}}$（它在边界层中趋于 1）。

1. 在 $[0,\Delta t_{\max}]=[0,40]$ 上建立步长为 0.16 的网格；三组校正后的权重 $\tau(\frac{3}{8},\frac{7}{6},\frac{-23}{24})$。2. 选择 c_3 的一个试探值，并对每次迭代中的 $\Delta t>\Delta_*=30$ 施加 $f_{\rm min}(\Delta t)=e^{\beta\Delta t}-c_3\,e^{(1-\beta)\Delta t}$，方程（49）。3. 对于 $0<\Delta t\le\Delta_*$，迭代 $f^{(n+1)}\min(\Delta t_i)=k\,\delta t\sum_j w_j K_{H=1}(\Delta t_i,\Delta t_j) f^{(n)}\min(\Delta t_j)$，其中 $K_{H=1}$ 是在 $H=1$ 处的核（34b），直至 $\epsilon=10^{-5}$。边界值更新为 $f^{(n+1)}\min(0)=k e^{-1} f^{(n)}\min(0)$，这是一个将其驱动至 $f_{\rm min}(0)=0$ 的收缩过程。

4. 检查 $[e^{\beta\Delta t}-f_{\rm min}(\Delta t)]e^{-(1-\beta)\Delta t}$：它必须保持平坦，直至 Δ_*。调整 c_3 并重复；若 c_3 错误，该函数会在接近 Δ_* 处弯曲。

这给出 $c_3=0.969181$（对应 $J=0.01$）。注意，在边界层中，对于 Δt，$\tilde{x}=J\,e^{\Delta t+\Delta t'}\tilde{s}\tilde{s}'=O(1)$，$\Delta t'=O(1)$，因此 $e^{F(\tilde{x})}$ 与 1 的差为 O(1)：这里需要使用完整的贝塞尔函数，公共步骤3中的渐近分支只有在 $\Delta t+\Delta t'$ 较大时才接替。在小 H 下运行算法1时，t、$t'=O(t_{\rm min})$也会出现同样情况，而在体区中 $x=O(H^{-2})$；$\ln x=15$ 处的切换可在同一次运行中处理这两个区间。

6. 算法 5：$P_H(t)$ 在 $J=J_c$

在临界点，只有当 $-\ln H\gtrsim 50$ 时，方程（71）的渐近区间才会达到（图10）。在区域 $t_{\rm min}<t\le 0$ 中，亏损量 $1-P_H(t)\sim e^{t/2}$ 会小至 $e^{-27}\approx 10^{-12}$：算法 1 迭代计算 P，将 $1-P$ 作为两个接近于1的数之差计算，因此在那里只能保留少数有效数字；而我们关注的量是这些亏损量之差 P_H-P_0，其精度必须高于这一程度。对于 $J=J_c$ 和 $|t_{\rm min}|\lesssim 30$，可以直接使用算法1，此时 $1-P_H\gtrsim 10^{-7}$；对于更小的 H，我们针对 $t\le 0$迭代计算重标度后的亏损量

$$\delta\psi(t)\equiv[1-P_H(t)]\,e^{-t/2}=O(1). \tag{A3}$$

其方程源于对核的精确归一化，即 $1=e^{J(1-e^t/H)}+\int_{t_{\rm min}}^{\infty}dt'\,K_H(t,t')$；这表达了以下事实：当因子 $P\equiv 1$ 求解方程（34a）且 $e^{-e^{t'}}$ 和边界值均设为1时[（参见方程（45）]）。将方程（34a）从中减去，

$$\begin{aligned}1-P_H(t)=&\,e^{J(1-e^t/H)}\left[1-e^{H/(k-1)}\right]\\&+\int_{t_{\rm min}}^{\infty}dt'\,K_H(t,t')\left[1-e^{-e^{t'}}P_H^k(t')\right],\end{aligned} \tag{A4}$$

而对于 $k=2$，括号中的表达式写成未作消去的形式，即

$$\begin{aligned}1-e^{-e^{t'}}P_H^2=&\,2\,e^{-e^{t'}/2}\sinh\left(e^{t'}/2\right)\\&+e^{-e^{t'}}\left[2\,e^{t'/2}\delta\psi(t')-e^{t'}\delta\psi^2(t')\right],\end{aligned}$$

其中 $1-e^{H/(k-1)}=-2e^{H/(2k-2)}\sinh[H/(2k-2)]$。

1. 网格同算法1，取 $J=J_c$；$\delta t=0.08$（当 $|t_{\rm min}|\le 30$ 时），较大的 $|t_{\rm min}|$ 则取 $\delta t=0.02$。2. 从邻近 t 处已收敛的解初始化（在新网格上插值），或者从 J_c 处算法2的 $H=0$ 解初始化，其中 $\delta\psi^{(0)}(t)=\delta\psi_0(t)(1-t/t_{\rm min})$（当 $t<0$时）；该解已在 $t_{\rm min}$ 处为零，符合匹配条件 (64)。3. 对于 $t_i\le 0$，用方程 (A4) 乘以 $e^{-t_i/2}$更新 $\delta\psi$，并令 $P_H(t_i)=1-e^{t_i/2}\delta\psi(t_i)$；边界值为 $\delta\psi(t_{\rm min})=-2H^{-1/2}e^{H/(2k-2)}\sinh[H/(2k-2)]$。4. 对于 $t_i>0$，用算法1的步骤3更新 P_H，并令 $\delta\psi(t_i)=[1-P_H(t_i)]e^{-t_i/2}$。

5. 迭代直至 $\epsilon=10^{-10}$。

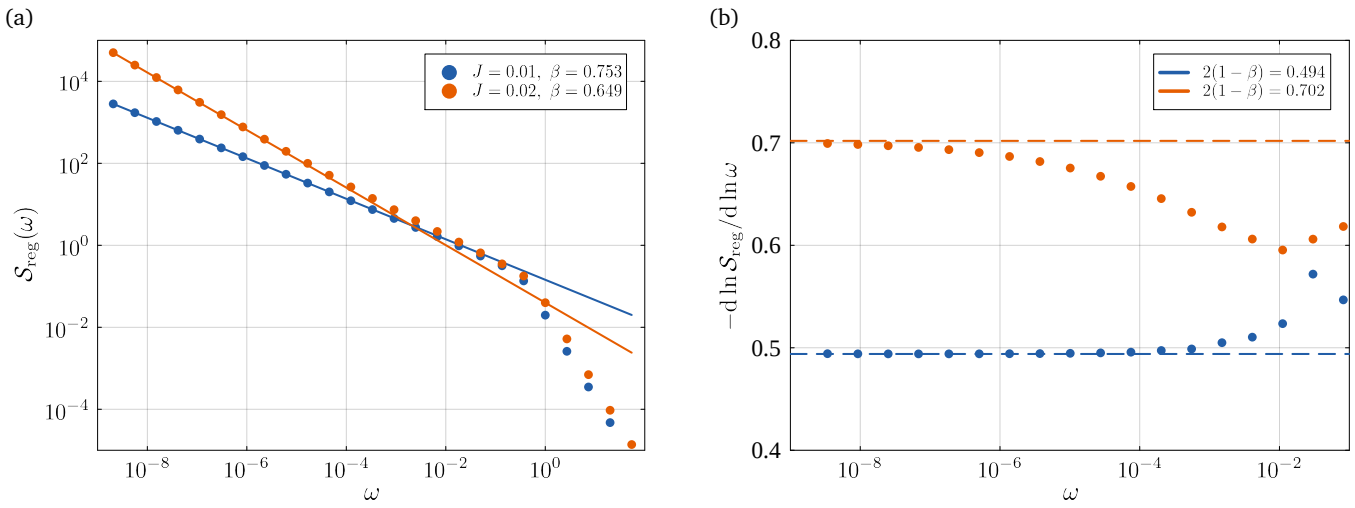

图 17. 复场 $H = \eta - \mathrm{i}\omega/2$ 下的玩具模型，其中 $k = 2$，以及 $J = 0.01$（$\beta = 0.753$，蓝色）和 $J = 0.02$（$\beta = 0.649$，橙色）。(a) $I_2(H)/H$ 的谱权重的规则部分 $\mathcal{S}_{\rm reg}(\omega)$，公式（60），即 $\langle\rho\rangle\, N^2\mathscr{C}(\omega)$ [图 3(a)]，在复版本算法1中外推至 $\eta \to 0^+$（符号）的玩具模型对应物。曲线：无参数预测（61）。(b) (a) 中相邻点之间的局部指数 $-\mathrm{d}\ln\mathcal{S}_{\rm reg}/\mathrm{d}\ln\omega$；虚线：$\mu = 2(1-\beta)$。

7. 关键细节

标度分析中涉及的量，是不同 H [ΔP(t 解之间的微小差异。图 6(b)], 中，H)的范围从几倍 10^{-3} 到 10^{-6}；这些差异必须在跨越许多个数量级的 t 范围内得到分辨，而在临界点则须覆盖 $|t_{\rm min}|$，直至约 54。上述算法围绕四种误差来源设计。(i) 消去误差：y(t、t′), $\tilde{I}_1(x)$, $1-e^{-e^t}$, $1-e^{H/(k-1)}$，以及在临界性下的 $1-P_H(t)$，绝不能通过大数或近似相等的数相减来计算；采用朴素实现时，误差会大于 ΔP 本身。(ii) 端点 $t_{\rm min}$：方程 (34a) 的被积函数在 $t' = t_{\rm min}$ 处有限且光滑（在原变量 θ' 中，它是偶解析函数），但核的因子化形式 (34b) 在此处未定，因为 $s(t') \to 0$ 而 $x \to 0$；必须解析地代入极限，并且端点处存在一个 O(1) 贡献，必须使用高阶求积规则进行积分。早期版本的代码省略了端点，或使用普通梯形法则处理端点，因此分别产生了量级为 δt 和 δt^2 的误差；这些误差在ΔP(t、H)中表现为虚假的隆起。(iii) 无穷远边界条件：方程 (35)、(41) 和 (46) 存在一族解，物理解则通过在 a 上施加渐近形式来选定宽度大于核 [$L_0(t)$ 范围的条带在$|t| \simeq \ln(2/J)$处被因子 $e^{-J\cosh t}$]截断，并通过调节自由常数（c 或 c_3），直到解与施加的形式平滑衔接。(iv) 在 J 处的收敛c：皮卡德迭代在此处收敛缓慢，需要许多次迭代，因此每次运行都从前一个 $t_{\rm min}$处的解开始初始化至关重要。

附录 B：复场玩具模型：数值检验

我们使用算法1的复数版本（附录A），求解了复数 H $= |H|e^{-i\chi}$ 处的腔方程，其中 k = 2 以及 J = 0.01 和 0.02（$\beta = 0.7530$ 和 0.6490，$c_3 = 0.9692$ 和 0.9783，$c_H = 0.9014$ 和 0.341）。沿着射线 $0 \le \chi \le 0.495\pi$，将 $[I_2(H) - I_2(0)]/(c_H H^{2\beta-1})$外推至 $|H| \to 0$后，对于每个 χ：c_H，其值在 10^{-4} 内等于一，因此 c_3，不依赖于χ，且方程（54）的小 H 定律在整个右半平面内成立。在接近虚轴处，直到 $\chi = 0.496\pi$，我们计算了 H $= \eta - \mathrm{i}\omega/2$ 处的 $I_2(H)/H$，其中 $e^{-20} \le \omega \le e^4$，并将其外推至 $\eta \to 0^+$。所得的 $\mathcal{S}_{\rm reg}(\omega)$ 与无参数预测（61）（图 17）高度吻合。它在所有 ω处也为正，满足求和规则 $\int \mathrm{d}\omega\, \mathcal{S}_{\rm reg} = 1 - I_2(0)$，误差优于 0.5%；将其代回实数 H $= \eta$处的公式（60），所得 $I_2(\eta) - I_2(0)$与直接求解结果的差异小于 0.2%。

[1] P. W. Anderson，《某些随机晶格中不存在扩散》，Physical Review **109**，1492（1958）。[2] P. A. Lee 和 T. Ramakrishnan，《无序电子系统》，Reviews of Modern Physics **57**，287（1985）。[3] F. Evers 和 A. D. Mirlin，《安德森跃迁》，Reviews of Modern Physics **80**，1355（2008）。[4] A. Lagendijk、B. v. Tiggelen 和 D. S. Wiersma，《安德森局域化五十年》，Physics Today **62**，24（2009）。[5] D. M. Basko、I. L. Aleiner 和 B. L. Altshuler，《具有局域单粒子态的弱相互作用多电子系统中的金属–绝缘体相变》，Ann. Phys. **321**，1126（2006）。

[6]I. V. Gornyi、A. D. Mirlin 和 D. G. Polyakov，《无序导线中的相互作用电子：安德森局域化与低温输运》，《物理评论快报》95，206603（2005年）。[7] B. L. Altshuler、Y. Gefen、A. Kamenev 和 L. S. Levitov，《有限系统中的准粒子寿命：一种非微扰方法》，《物理评论快报》78，2803（1997年）。[8] E. Altman 和 R. Vosk，《普适动力学与多体局域化系统中的重整化》，Annu. Rev. Condens. Matter Phys. 6，383（2015年）。[9] R. Nandkishore 和 D. A. Huse，《量子统计力学中的多体局域化与热化》，Annu. Rev. Condens. Matter Phys. 6，15（2015年）。[10] D. A. Abanin 和 Z. Papi´c，《多体局域化的最新进展》，Annalen der Physik 529，1700169（2017年）。[11] F. Alet 和 N. Laflorencie，《多体局域化：简介与精选专题》，Comptes Rendus Physique 19，498（2018年）。[12] D. A. Abanin、E. Altman、I. Bloch 和 M. Serbyn，《专题评论：多体局域化、热化与纠缠》，Reviews of Modern Physics 91，021001（2019年）。[13] P. Sierant、M. Lewenstein、A. Scardicchio、L. Vidmar 和 J. Zakrzewski，《经典计算时代的多体局域化》，Rep. Prog. Phys. 88，026502（2025年）。[14] R. Abou-Chacra、D. J. Thouless 和 P. W. Anderson，《一种局域化的自洽理论》，J. Phys. C: Solid State Phys. 6，1734（1973年）。[15] R. Abou-Chacra 和 D. Thouless，《局域化的自洽理论。II. 带边附近的局域化》，Journal of Physics C: Solid State Physics 7，65（1974年）。[16] K. Efetov，《金属颗粒系统中的安德森金属-绝缘体转变：最小金属电导率与最大介电常数的存在性》，Zh. Eksp. Teor. Fiz 88，1032（1985年）。[17] K. Efetov，《Bethe晶格无序金属模型中的密度–密度关联函数》，Zh. Eksp. Teor. Fiz. 92，638（1987年）。[18] K. Efetov，《Bethe晶格上的安德森跃迁（辛系综与正交系综）》，Zh. Eksp. Teor. Fiz 93，1125（1987年）。[19] M. R. Zirnbauer，《Bethe晶格上的局域化转变》，Physical Review B 34，6394（1986年）。[20]M. R. Zirnbauer，《安德森局域化与具有分级对称性的非线性σ模型》，Nuclear Physics B 265，375（1986年）。[21] J. Verbaarschot，《时间反演不变系统中 Bethe晶格上的分级对称性与安德森局域化》，Nuclear Physics B 300，263（1988年）。[22] A. D. Mirlin 和 Y. V. Fyodorov，《Bethe晶格安德森模型中的局域化转变：自发对称性破缺与关联函数》，Nuclear Physics B 366，507（1991年）。[23] A. Mirlin 和 Y. V. Fyodorov，《稀疏随机矩阵能级关联函数的普适性》，Journal of Physics A: Mathematical and General 24，2273（1991年）。[24] Y. V. Fyodorov 和 A. D. Mirlin，《稀疏随机矩阵系综中的局域化》，《物理评论快报》67，2049（1991年）。[25] Y. V. Fyodorov、A. D. Mirlin 和 H.-J. Sommers，《安德森局域化的一种新型场论方法：稀疏随机跃迁模型》，Journal de Physique I 2，1571（1992年）。[26] A. D. Mirlin 和 Y. V. Fyodorov，《无序系统中单点格林函数的统计性质与临界行为-

安德森跃迁附近的行为，Journal de Physique I**4**，655（1994）。[27] A. D. Mirlin 和 Y. V. Fyodorov，局域态密度、序参量函数以及安德森跃迁附近临界行为的分布，《物理评论快报》**72**，526（1994）。[28] K. S. Tikhonov 和 A. D. Mirlin，随机正则图上局域化转变附近本征态的统计，Phys. Rev. B **99**，024202（2019）。[29] K. S. Tikhonov 和 A. D. Mirlin，随机正则图上局域化转变处的临界行为，Physical Review B**99**，214202（2019）。[30] G. Biroli、G. Semerjian 和 M. Tarzia，贝特格上的安德森模型：态密度、局域化性质与孤立本征值，Progress of Theoretical Physics Supplement**184**，187（2010）。[31]G. Parisi、S. Pascazio、F. Pietracaprina、V. Ros 和 A. Scardicchio，贝特格上的安德森跃迁：一种采用实能量的方法，Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**53**，014003（2020）。[32] S. Pascazio、A. Scardicchio 和 M. Tarzia，贝特格上的安德森局域化，载于*Spin Glass TheoryandFarBeyond: Replica Symmetry BreakingAfter 40Years*（World Scientific，2023），第335–352页。[33] T. Rizzo 和 M. Tarzia，贝特格上安德森模型的局域化相，Physical Review B**110**，184210（2024）。[34] C. Castellani、C. Di Castro 和 L. Peliti，关于安德森局域化的上临界维数，Journal of Physics A: Mathematical and General**19**，L1099（1986）。[35]E. Tarquini、G. Biroli 和 M. Tarzia，安德森局域化转变的临界性质与高维极限，Physical Review B**95**，094204（2017）。[36] M. Baroni、G. G. Lorenzana、T. Rizzo 和 M. Tarzia，安德森局域化的贝特格解的修正项，Physical Review B**109**，174216（2024）。[37] A. Montanari 和 T. Rizzo，如何计算贝特近似的环修正，J. Stat. Mech.，P10011（2005）。[38] G. Parisi 和 F. Slanina，格点模型贝特–佩尔斯近似周围的环展开，J. Stat. Mech.，L02003（2006）。[39] M. Chertkov 和 V. Y. Chernyak，图上离散统计模型的环级数，J. Stat. Mech.，P06009（2006）。[40]U. Ferrari、C. Lucibello、F. Morone、G. Parisi、F. Ricci-Tersenghi 和 T. Rizzo，Erd˝os-Rényi 随机图上无序系统的有限尺寸修正，Phys. Rev. B**88**，184201（2013）。[41] C. Lucibello、F. Morone、G. Parisi、F. Ricci-Tersenghi 和 T. Rizzo，随机正则图上无序伊辛模型的有限尺寸修正，Phys. Rev. E**90**，012146（2014）。[42] F. L. Metz、G. Parisi 和 L. Leuzzi，正则随机图谱的有限尺寸修正：解析解，Phys. Rev. E**90**，052109（2014）。[43] A. De Luca 和 A. Scardicchio，呈现多体局域化的模型中的遍历性破缺，EPL (Europhysics Letters)**101**，37003（2013）。[44] D. E. Logan 和 S. Welsh，福克空间中的多体局域化：局域视角，Physical Review B**99**，045131（2019）。[45] K. S. Tikhonov 和 A. D. Mirlin，从随机正则图上的安德森局域化到多体局域化，Annals of Physics**435**，168525（2021）。

[46]G. Biroli 和 M. Tarzia，离域玻璃态动力学与多体局域化，Phys. Rev. B **96**，201114(R)（2017）。[47] G. Biroli 和 M. Tarzia，多体局域化转变遍历侧的反常动力学与无序介质中定向聚合物的玻璃态，Phys. Rev. B**102**，064211（2020）。[48] J.-N. Herre、J. F. Karcher、K. S. Tikhonov 和 A. D. Mirlin，大连通度随机正则图及多体量子点中的遍历性到局域化转变，Phys. Rev. B**108**，014203（2023）。[49] G. Biroli、A. K. Hartmann 和 M. Tarzia，多体局域化转变中稀有共振的大偏差分析，Phys. Rev. B**110**，014205（2024）。[50] T. Rizzo、M. Tarzia 和 A. Vecchiarelli，贝特格上安德森模型局域化相中逆参与率的修正项（2026），配套短文，准备中。[51] V. L. Berezinskii，具有连续对称群的一维和二维系统中长程有序的破坏 I. 经典系统，苏联物理学报**32**，493（1971），[Zh. Eksp. Teor. Fiz.**59**，907（1970）]。[52] J. M. Kosterlitz 和 D. J. Thouless，二维系统中的有序化、亚稳性与相变，J. Phys. C: Solid State Phys. **6**，1181（1973）。[53] R. B. Griffiths，随机伊辛铁磁体临界点以上的非解析行为，Phys. Rev. Lett. **23**，17（1969）。[54]T. Vojta，经典、量子与非平衡相变中的稀有区域效应，J. Phys. A: Math. Gen.**39**，R143（2006）。[55] I. García-Mata、J. Martin、O. Giraud、B. Georgeot、R. Dubertrand 和 G. Lemarié，随机图上安德森跃迁的临界性质：双参数标度理论、科斯特利茨-索利斯型流与多体局域化，Phys. Rev. B**106**，214202（2022）。[56] P. Sierant、M. Lewenstein 和 A. Scardicchio，可变连通度随机图上安德森局域化的普适性，SciPost物理**15**，045（2023）。[57] I. García-Mata、O. Giraud、B. Georgeot、J. Martin、R. Dubertrand 和 G. Lemarié，随机图上安德森跃迁的标度理论：遍历性与普适性，《物理评论快报》**118**，166801（2017）。[58] W. Chen、O. Giraud、J. Gong 和 G. Le marié，量子对数多重分形，Phys. Rev. Res. **6**，L032024（2024）。[59] W. Chen、O. Giraud、J. Gong 和 G. Le marié，利用随机矩阵系综描述无限维中的安德森跃迁临界行为：对数多重分形与临界局域化，Phys. Rev. B**110**，014210（2024）。[60] C. Vanoni、B. L. Altshuler、V. E. Kravtsov 和 A. Scardicchio，随机正则图上安德森模型的重整化群分析，美国国家科学院院刊**121**，e2401955121（2024）。[61]I. García-Mata、W. Chen、J. Martin、B. Georgeot 和 G. Lemarié，连接随机图上安德森局域化中的有限尺寸标度与重整化群流（2026），arXiv:2609.31872。[62] A. De Luca、B. L. Altshuler、V. E. Kravtsov 和 A. Scardicchio，贝特格上的安德森局域化：扩展态的非遍历性，Phys. Rev. Lett. **113**，046806（2014）。[63] B. L. Altshuler、E. Cuevas、L. B. Ioffe 和 V. E. Kravtsov，强无序随机正则图中的非遍历相

[64] K. S. Tikhonov、A. D. Mirlin 和 M. A. Skvortsov，《随机正则图上的安德森局域化与遍历性》，Phys. Rev. B 94, 220203(R) (2016).[65] M. Pino，《随机正则图上安德森跃迁的标度》，Phys. Rev. Res. 2, 042031(R) (2020).[66] K. S. Tikhonov 和 A. D. Mirlin，《多体局域化转变附近的本征态关联》，Phys. Rev. B 103, 064204 (2021).[67] L. Schäfer 和 F. Wegner，《每个格点具有 n 个轨道的无序系统：拉格朗日表述、双曲对称性与戈德斯通模》，《物理学杂志B：凝聚态》38, 113 (1980).[68] M. R. Zirnbauer，《介观输运中的傅里叶反演定理》，《物理学A辑：统计力学及其应用》167, 132 (1990).[69] M. R. Zirnbauer，《常曲率双曲超流形上的傅里叶分析》，Communications in Mathematical Physics 141, 503 (1991).[70]I. A. Gruzberg 和 A. D. Mirlin，《Bethe 晶格上具有非紧致对称性的模型中的相变与复制极限》，Journal of Physics A: Mathematical and General 29, 5333 (1996).[71]T. Dupré，《三维局域化转变：非线性 σ 模型的蒙特卡罗模拟》，Physical Review B 54, 12763 (1996).[72] A. D. Mirlin，《无序系统中的能级与特征函数统计》，《物理报告》326, 259 (2000).[73] J. T. Chalker，《迁移率边附近的标度与特征函数关联》，《物理学A辑》167, 253 (1990).[74] Y. V. Fyodorov 和 A. D. Mirlin，《安德森局域化转变附近的强本征函数关联》，Phys. Rev. B 55, R16001 (1997).[75] E. Cuevas 和 V. E. Kravtsov，《多重分形金属与绝缘体中的双特征函数关联》，Phys. Rev. B 76, 235119 (2007).[76] M. Mézard 和 G. Parisi，《重新审视 Bethe 晶格自旋玻璃》，《欧洲物理学杂志B：凝聚态与复杂系统》20, 217 (2001).[77] V. Kravtsov、B. Altshuler 和 L. Ioffe，《Bethe 晶格和正则图上安德森模型中的非遍历离域相》，Annals of Physics 389, 148 (2018).[78] 如参考文献 [50], 所述，有限 N 时的逆参与率是根据每个样本中最接近 $E = 0$ 的两个本征态计算的。若改为对 $E = 0$ 附近固定能量窗口内的所有本征态取平均，样本的权重就会不同，因为窗口内本征态的数量会在不同样本间波动，而这种波动与样本的局域化强度相关。这会改变修正项的振幅，最多可相差一倍；并且在可达到的尺寸范围内，会得到略大的有效指数。[79]在变量 $t = \omega^2$ 下，方程（6）右端正比于$4\eta^2 \int dF(t)/(t + 4\eta^2)$，其中 $F(\omega^2) = \int_{-\omega}^{\omega} N^2 \mathscr{C}(\omega')d\omega'$ 是非递减的，也就是说，它正比于某个正测度的斯蒂尔切斯变换。根据斯蒂尔切斯变换的卡拉马塔陶伯定理 $4\eta^2$，对于 [80]，$0 < \kappa < 1$，当且仅当 $F(t) \simeq A\, t^{\kappa/2}$ $(t \to 0)$ 时，该变换具有渐近形式 $A\Gamma(1 + \kappa/2)\Gamma(1 - \kappa/2)(4\eta^2)^{\kappa/2-1}$；随后，单调密度定理 [80] 给出 $N^2\mathscr{C}(\omega)$ 本身的幂律。[80] N. H. Bingham、C. M. Goldie 和 J. L. Teugels，《正则变差》，《数学及其应用百科全书》第27卷（剑桥大学出版社，剑桥，1987年）。

, Phys. Rev. Lett. **117**, 156601（2016）.

[81] N. F. Mott, 《非晶态系统中的传导。I. 无序系统中的局域化电子态》, Philos. Mag. 17, 1259 (1968).[82] D. A. Ivanov、M. A. Skvortsov、P. M. Ostrovsky 和 Y. V. Fomin, 《一维局域化中的波函数杂化》, Phys. Rev. B 85, 035109 (2012).[83] I. García-Mata、J. Martin、R. Dubertrand、O. Giraud、B. Georgeot 和 G. Lemarié, 《随机图上安德森跃迁中的两个临界局域长度》, 《物理评论研究》2, 012020(R) (2020).[84] M. Aizenman 和 S. Molchanov, 《大无序和极端能量下的局域化：一种初等推导》, Commun. Math. Phys. 157, 245 (1993).[85] M. Aizenman 和 S. Warzel, 《树图上随机薛定谔算符的共振离域》, J. Eur. Math. Soc. 15, 1167 (2013).[86] F. Wegner, 《迁移率边问题：连续对称性与一个猜想》, 《物理学杂志B：凝聚态》35, 207 (1979).[87] K. Efetov, 《超对称性与无序金属理论》, Advances in Physics 32, 53 (1983).[88] F. Wegner, 《每个格点具有 n 个轨道的无序系统：$n=\infty$ 极限》, Phys. Rev. B 19, 783 (1979).[89] M. Disertori 和 T. Spencer, 《超对称西格玛模型的安德森局域化》, Commun. Math. Phys. 300, 659 (2010).[90]M. Disertori、T. Spencer 和 M. R. Zirnbauer, 《三维超对称双曲西格玛模型中的准扩散》, Commun. Math. Phys. 300, 435 (2010).[91]C. Sabot 和 P. Tarrès, 《边增强随机游走、顶点增强跳跃过程与超对称双曲西格玛模型》, J. Eur. Math. Soc. 17, 2353 (2015).[92] 准确确定 c 需要格外谨慎，因为只有在 $t\to-\infty$时才达到渐近区间（39）；此时 $P_0(t)$ 与 1 的差异呈指数级小：通过要求数值解平滑地衔接渐近形式 $1-c\,e^{\beta t}$ 来确定 c（附录 A 的算法2）。[93]T. Rizzo、M. Tarzia 和 A. Vecchiarelli, 《Bethe 晶格上玩具非线性 σ-模型的腔方程求解器》, https://github.com/marcotarzia/ toy-NLsM-IPR-corrections (2026), GitHub 代码库。[94] 这种类比有两点局限。首先，在安德森模型中，按构造，$\mathscr{S}\geq 0$ 是对本征态对求和；而玩具模型的哈密顿量（28）是经典自旋模型的能量函数，并非具有本征态的量子哈密顿量，因此$\mathscr{S}$的正性（等价于 $\mathrm{Re}[I_2(H)/H]\geq 0$，其中 $\mathrm{Re}\,H>0$）必须经过检验。其次，在安德森模型中，能量为 $\pm\omega/2$ 时的两个格林函数不再互为复共轭，必须像方程（25）那样，针对这两个能量进行联合递归：不能仅对单能量分布 $P_\eta(g,\hat{}g)$进行解析延拓，频率也不只是一个复数 η。而在超对称 NLσM 中，η 和 ω 只通过对称性破缺项[17, 72, 87],的复系数进入，正如这里的 H，因此下文讨论的解析延拓

在那里也应当成立。[95] 这假设极限 $|\chi|\to\pi/2$ 是一致的。附录 B 中的数值结果支持这一假设、延续固定点的存在性，以及在小 ω 之外 $\mathscr{S}_{\mathrm{reg}}$ 的正性，但尚未证明；在小 ω时，正性可由方程（61）推出，因为对于 $\beta>1/2$，$\cos[\pi(1-\beta)]>0$。[96] 严格来说，条件 $f_{\min}(0)=0$ 并不能确定 $f_{\min}$在大-Δt 时渐近行为中的常数项：一般而言，$f_{\min}(\Delta t)\simeq(\Delta t+A_c)e^{\Delta t/2}$，其中常数 A_c 由 J_c处的完整方程（46）确定，正如非临界情形中的 c_3 一样。于是匹配给出 $a_{\mathrm{typ}}(H)=c/(|\ln H|+A_c)$，以及 $a_{\min}(H)=c\,H^{1/2}/(|\ln H|+A_c)$。领阶 $1/|\ln H|$行为，以及公式（65）和（66）的领阶结果，均保持不变；而 A_c 会产生相对量级为 $1/|\ln H|$的修正项，这些修正项促成了图 10(c)中可见的渐近定律的缓慢逼近。[97] B. Derrida 和 H. Spohn, 《无序树上的聚合物、自旋玻璃与行波》, J. Stat. Phys. 51, 817 (1988)。[98] C. Monthus 和 T. Garel, 《不同概率分布下，Cayley树上的安德森跃迁作为行波临界点》, J. Phys. A: Math. Theor. 42, 075002 (2009)。[99] E. Brunet 和 B. Derrida, 《截断导致的前沿速度偏移》, Phys. Rev. E 56, 2597 (1997)。[100] 在 $W=18.5$、接近相变处，$\kappa\approx 0.14$ 很小，且因子 η^{κ} 在所示的 η 范围内仅变化约两倍，因此这种塌缩检验的是因子分解形式，而不是 κ的精确值；后者在 $W=34$处受到严格检验。[101] 一种通用的塌缩检验方法是用标度变量的光滑函数拟合 $[I_2-I_2^{\infty}]\,L^{\zeta}$，检验结果证实了这一判断。取标度变量 $\propto(W-W_c)^{1/2}L$（即 κL 或 $(W-W_c)^{1/2}L$）时，ζ 在 0.5 到 1.5 之间均可得到最佳塌缩，与两组数据的 $\zeta=1$ 相符。取 $\nu=1$，即标度变量 $\propto(W-W_c)\,L$ 时，若要达到质量相当的塌缩，有限-η 数据要求 $\zeta\approx 1.5$，而有限 N 数据要求 $\zeta\approx 2.5$；二者彼此不一致，也与临界点处的 $1/\ln N$ 行为不符。[102] 拟合中采用的统计误差将同一样本的本征态视为相互独立，因此可能略有低估，但这不会影响上述结论。[103] V. L. Berezinskii, 《具有连续对称群的一维和二维系统中长程有序的破坏。II. 量子系统》, 苏联物理学报 34, 610 (1972), [Zh. Eksp. Teor. Fiz. 61, 1144 (1971)]。[104]J. M. Kosterlitz, 《二维 xy 模型的临界性质》, J. Phys. C: Solid State Phys. 7, 1046 (1974)。[105] J. V. José、L. P. Kadanoff、S. Kirkpatrick 和 D. R. Nelson, 《二维平面模型中的重整化、涡旋与对称性破缺扰动》, Phys. Rev. B 16, 1217 (1977)。[106]A. Scardicchio 等, 《无限维极限下安德森模型中的共形性丧失》（2026）, 即将发表。[107] D. B. Kaplan、J.-W. Lee、D. T. Son 和 M. A. Stephanov, 《共形性丧失

, Phys. Rev. D **80**, 125005（2009）.