arXiv:2611.28761v1 [math.AC] 21 Nov 2026

一个具有整直律、为整环但非 Cohen–Macaulay 的代数

TAKAYUKI HIBI 和 AYESHA ASLOOB QURESHI

Abstract. 构造了一个在任意域上为整环但非 Cohen–Macaulay 的4维带直化律的代数。此外，还证明了每个三维分次 ASL 整环都是 Cohen–Macaulay 的。

Introduction

所谓的 组合学与交换代数 这一研究领域诞生于20世纪70年代中期，其发展受到 Hochster [8] 的巨大影响，并源于 Stanley [11] 和 Reisner [10] 的工作。20世纪80年代初，随着 Cohen–Macaulay 和可壳化偏序集概念的出现， [1, 2], Eisenbud [4]引入了带直化律的代数这一新概念。我们将带直化律的代数缩写为 ASL。在 ASL 研究的早期阶段，人们曾猜想每个 ASL 整环都是 Cohen–Macaulay 的。 [7, 推论，第 32] 页证明了每个三维齐次ASL整环都是 Cohen–Macaulay 的。另一方面，当基域的特征为2时，Terai [13] 构造了一个非 Cohen–Macaulay 的4维齐次 ASL 整环。

在本文中，为补充上述已有结果，我们证明以下

定理 引理 0.1. 每个 $three$ 维分次 *ASL* 整环都是 *Cohen–Macaulay* $y.$

定理 0.2.存在一个 *4* 维分次 *ASL* 整环，它在任意域上都不是 *Cohen–Macaulay*。

在第 1 节回顾 ASL 的基本材料后，我们在第 2 节证明定理 0.1。第 3 节给出一种简单有效的分次 ASL 构造（引理 3.1）。最后，在第 4 节，为证明定理 0.2, 我们构造了一个在任意域上都不是 Cohen–Macaulay 的 4 维分次 ASL 整环。

关于偏序集和单纯复形的基本材料，请参阅 [6, 12] ；关于 Gr¨obner 基的介绍，请参阅 [5, 第 2] 章。

1. Algebras with straightening laws

所讨论的每个偏序集（部分有序集）都是有限的。 P 的链 是 P的一个全序子集。 P 中链 C 的长度 为 $|C| - 1$。P的秩 是 P中链的最大长度。令 rank P表示 P的秩。我们称

2020 数学主题分类。13H10,13G05.关键词和短语。具有整直律的代数。

P 是纯的，如果 P 的每条极大链长度都相同。秩为 d 的纯偏序集 P 若满足以下条件，则称为强连通：若 C 和 C' 是 P的极大链，则存在 P的极大链序列 C_0，C_1，$\ldots$，C_q，其中 $C_0 = C$ 且 $C_q = C'$，并且对每个 $1 \leq i \leq q$ 都有 $|C_{i-1} \cap C_i| = d$。

设 R 是域 K上的诺特代数。设 P 是一个偏序集，并给定一个单射 $\varphi : P \hookrightarrow R$，使得 K-代数 R 由 $\varphi(P)$ 在 K上生成。若一个标准单项式是 R 中形如 $\varphi(\gamma_1)\varphi(\gamma_2)\cdots\varphi(\gamma_s)$ 的元素，其中 $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \cdots \leq \gamma_s$ 属于 P，则称 R 是 K 上的带直化律的代数 [4]，条件是满足以下各项：

(ASL -1) 标准单项式集合是 R 的一个 K-基；(ASL -2) 若 α 和 β 属于 P 且不可比较，并且

$$\varphi(\alpha)\varphi(\beta) = \sum_i r_i\, \varphi(\gamma_{i_1})\varphi(\gamma_{i_2})\cdots,\ \ 0 \neq r_i \in K,\ \ \gamma_{i_1} \leq \gamma_{i_2} \leq \cdots,$$

是由 (ASL -1) 保证的、将 $\varphi(\alpha)\varphi(\beta) \in R$ 表示为不同标准单项式线性组合的唯一表达式，则对于每个 i，都有 $\gamma_{i_1} \leq \alpha,\ \beta$。

（ASL-2）中的关系称为 R 的直化关系。注意，（ASL-2）关系的右端可以是空和（$= 0$）；但是，尽管 1 是标准单项式，却没有任何 $\varphi(\gamma_{i_1})\varphi(\gamma_{i_2})\cdots$ 能等于 1。于是有

$$\dim R = \operatorname{rank} P + 1.$$

由此可知，若 R 是定义在 P 上、系数取自 K 的 ASL 整环，则 P 有唯一极小元。事实上，若 α 和 β 是 P 中满足 $\alpha \neq \beta$ 的极小元，则 $\varphi(\alpha)\varphi(\beta)$ 的（ASL-2）关系必为 $\varphi(\alpha)\varphi(\beta) = 0$。

若一个定义在 P 上、系数取自 K 的 ASL R 满足以下条件，则称其为分次的：$R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$ 是域 $R_0 = K$ 上的诺特分次代数，且 $\varphi(P) \subset \bigoplus_{n=1}^{\infty} R_n$。此外，若一个定义在 P 上、系数取自 K 的分次 ASL $R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$ 满足 $\varphi(P) \subset R_1$，则称其为齐次的。

2. Proof of Theorem 0.1

设 $R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$ 是 P 上关于 K 和 $S = K[x_\alpha$ 的分次ASL：$\alpha \in P]$ 是 K 上以 $|P|$ 个变量为变量的多项式环，并定义满环同态 $\pi : S \to R$，令 $\pi(x_\alpha) = \varphi(\alpha)$。$R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$ 的定义理想 I_R 是 π 的核 $\ker(\pi)$。若 $\alpha, \beta \in P$ 不可比较，则定义

$$f_{\alpha,\beta} := x_\alpha x_\beta - \sum_i r_i\, x_{\gamma_{i_1}} x_{\gamma_{i_2}} \cdots,\ \ 0 \neq r_i \in K,\ \ \gamma_{i_1} \leq \gamma_{i_2} \leq \cdots,$$

由（ASL-2）得到。于是 $f_{\alpha,\beta} \in I_R$。令 $\mathcal{G}_R$ 表示满足以下条件的多项式集合：$f_{\alpha,\beta}$，其中 α 和 β 在 P 中不可比较。令 $<_{\mathrm{rev}}$ 表示由变量的一种排序所诱导的反向字典序 [5, 例 2.1.2(b)]，该排序满足：若 $\alpha < \beta$ 属于 P，则 $x_\alpha <_{\mathrm{rev}} x_\beta$。每个

$$\mathrm{in}_{<_{\mathrm{rev}}}(f_{\alpha,\beta}) = x_\alpha x_\beta.$$

由 (ASL-1) 可知，$\mathcal{G}_R$ 是关于 $<_{\mathrm{rev}}$ 的 I_R 的格罗布纳基。特别地，I_R 由 $\mathcal{G}_R$ 生成。

引理 2.1。设 $R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$ 是定义在 P 上、系数环为 K 的分次 *ASL* 整环，且 T 是 P 的唯一极小元。则 $P \setminus \{T\}$ 是纯的且强连通的。

证明。由于相对于 $<_{\mathrm{rev}}$，I_R 的初始理想 $\mathrm{in}_{<_{\mathrm{rev}}}(I_R)$ 由这样的单项式 $x_\alpha x_\beta$ 生成，其中 α 和 β 在 P 中不可比较。因此，相对于 $<_{\mathrm{rev}}$，I_R 的初始复形 [9, p. 366] 是 P 的序复形 [6, p. 119]。由于 I_R 是素理想，由 [9, 定理 1] 可知，P 是纯的且强连通的。由于 P 的 T 是唯一极小元，因此 $P \setminus \{T\}$ 是纯的且强连通的。□

现在，设 R 是关于 K 在 P 上的三维分次 ASL 整环，并且 P 的 T 是唯一极小元。由引理 2.1，$P \setminus \{T\}$ 是连通的。由于 $\dim R = 3$，有 $\mathrm{rank}(P \setminus \{T\}) = 1$。因此，$P \setminus \{T\}$ 是 Cohen– Macaulay（[6, 练习（23.2）]）。特别地，P 是 Cohen–Macaulay。最后，ASL 基本定理 [6, 定理（40.1）] 保证了 R 是 Cohen– Macaulay。这就完成了定理 0.1 的证明。

3. Stanley–Reisner rings

设 Δ 是顶点集为 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 的单纯复形，$S = K[x_1, \ldots, x_n]$ 是域 K 上以 n 个变量为元的多项式环。令 I_Δ 表示 Δ 的 Stanley–Reisner 理想，并令 $K[\Delta] := S/I_\Delta$ 表示 Stanley–Reisner 环。令 P_Δ 表示由 Δ 的所有非空面组成的偏序集，按逆包含关系排序。由于满足 $\mathrm{supp}(u) := \{x_i : a_i > 0\} \in \Delta$ 的那些单项式 $u = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ 构成 $K[\Delta]$ 的一个 K 基，因此 $K[\Delta]$ 是 P_Δ 上的 ASL（底域为 K），且其每个直化关系的右端均为空和（$= 0$）。

令 $S[t] = K[x_1, \ldots, x_n, t]$ 表示域 K 上以 $n+1$ 个变量为元的多项式环，其中每个变量的次数均为 $\deg x_i = e_i > 0$，且 $\deg t = e > 0$。取 x_1 中的无平方单项式 w_1、……、w_s，以及 x_n 中的齐次多项式 x_1、……、x_n，形式如下

$$f_i = w_i - tg_i(x_1, \ldots, x_n, t), \quad 1 \le i \le s$$

其中，$g_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ 中出现的每个单项式都不能被单项式 $w_1, \ldots, w_s$ 中的任何一个整除，并引入商环

$$R = S[t]/(f_1, \ldots, f_s).$$

令 Δ 表示定义在 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 上的单纯复形，其顶点为 $K[\Delta] = S/(w_1, \ldots, w_s)$ ^ ^ 和 $P_\Delta = P_\Delta \cup \{T\}$，其中 T 是 P_Δ 的唯一极小元。

引理 3.1。设 $<$ 是 $S[t]$ 上的单项式序，并假设 $\{f_1, \ldots, f_s\}$ 是理想 $(f_1, \ldots, f_s)$ 关于 $<$ 的 *Gröbner* 基，其中每个 $\mathrm{in}_<(f_i) = w_i$。^那么 R 是 P_Δ 上的分次*ASL*，其系数环为 K。

证明。由于 $\{f_1, \ldots, f_s\}$ 是关于 $<$ 的 Gr¨obner 基，且每个 $\mathrm{in}_<(f_i) = w_i$ 都属于 $(f_1, \ldots, f_s)$，因此，所有不被 $w_1, \ldots, w_s$ 中任何一个整除的 $S[t]$ 的单项式 u 所构成的集合 Ω 是 R 的 K-基。根据上文对 Stanley–Reisner 环的观察，对于带有 $\varphi(T) = t$ 的典范嵌入 ^$\varphi : P_\Delta \hookrightarrow R$，(ASL-1) 的条件，即标准单项式集合是 K- 基的条件，

R 的条件得以满足。我们证明 (ASL-2) 的条件也得以满足。设 α 和 βˆ 是 Δ 的非空面，且 α 和 β 在 P_Δ 中不可比较。

• 若 $\alpha \cup \beta$ 是 Δ的一个面，则

$$\varphi(\alpha)\varphi(\beta) = \varphi(\alpha \cup \beta)\varphi(\alpha \cap \beta), \tag{1}$$

其中，若 $\varphi(\alpha \cap \beta) = 1$，则 $\alpha \cap \beta = \emptyset$。由于 $\varphi(\alpha \cup \beta) < \varphi(\alpha)$ 且 $\varphi(\alpha \cup \beta) < \varphi(\beta)$ ˆ属于 P_Δ，因此 (1) 是 $\varphi(\alpha)\varphi(\beta)$ 的 (ASL -2) 关系。

• 若 $\alpha \cup \beta \notin \Delta$，则 $\varphi(\alpha)\varphi(\beta)$ 必须能被单项式$w_1, \ldots, w_s$中的一个整除，设为 $\varphi(\alpha)\varphi(\beta) = uw_i$，其中 u 是 $x_1, \ldots, x_n$中的一个单项式。因此

$$\varphi(\alpha)\varphi(\beta) = tug_i(x_1, \ldots, x_n, t). \tag{2}$$

在 (2) 的右边，若 v 是 $g_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ 中出现的一个单项式，且若 uv 能被单项式 $w_1, \ldots, w_s$中的一个整除，设为 $uv = u'w_j$，其中 u' 是 $x_1, \ldots, x_n, t$中的一个单项式，则

$$uv = tu'g_j(x_1, \ldots, x_n, t),$$

其中

$$\deg u'g_j(x_1, \ldots, x_n, t) < \deg ug_i(x_1, \ldots, x_n, t).$$

继续上述过程，(2) 的右侧最终可表示为标准单项式之和，而最终表达式就是 $\varphi(\alpha)\varphi(\beta)$ 的（ASL-2）关系。

这就完成了引理 3.1 的证明。 □

4. Proof of Theorem 0.2

现在，我们在任意域上构造一个维数为 4 且不是 Cohen–Macauley 的分次 ASL 整环。令 $S = K[a, b, c, d, e, t]$ 表示域 K 上 6 个变量的多项式环，其中

$$\deg t = \deg d = \deg e = 1, \quad \deg b = \deg c = 2, \quad \deg a = 3$$

以及 $R = S/(f_1, f_2, f_3, f_4)$，其中

$$\begin{aligned} f_1 &= bc - t^2de, \\ f_2 &= abe - tb^2d - t^3e^3, \\ f_3 &= acd - tc^2e - t^3d^3, \\ f_4 &= ade - tbd^2 - tce^2. \end{aligned}$$

f_1、f_2、f_3、f_4 均为齐次的，且

$$\deg f_1 = 4, \quad \deg f_2 = 6, \quad \deg f_3 = 6, \quad \deg f_4 = 5.$$

注 4.1. 我们通过对 [3, 例 3.14] 中非科恩–麦考利整环的定义方程进行加权齐次化，得到 f_1、f_2、f_3、f_4。

Buchberger 判据 [5, 定理 2.3.2]保证

引理 4.2。 设 $<_{\mathrm{rev}}$ 表示由排序 $t<a<b<c<d<e$诱导的 S 上的反字典序。则 $\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$ 是理想(f_1,f_2,f_3,f_4)关于 $<_{\mathrm{rev}}$的 ***Gröbner*** 基，且

$$\mathrm{in}_{<_{\mathrm{rev}}}(f_1)=bc,\quad \mathrm{in}_{<_{\mathrm{rev}}}(f_2)=abe,\quad \mathrm{in}_{<_{\mathrm{rev}}}(f_3)=acd,\quad \mathrm{in}_{<_{\mathrm{rev}}}(f_4)=ade.$$

令 Δ 表示在 $\{a,b,c,d,e\}$ 上的单纯复形，其中

$$K[a,b,c,d,e]/(bc,abe,acd,ade)=K[\Delta].$$

推论 4.3。 分次环 R 是 K 上的分次*ASL*，定义在 P_Δ 上。

Δ 的极大面为

$$\{a,b,d\},\quad \{a,c,e\},\quad \{b,d,e\},\quad \{c,d,e\}.$$

由于 $\mathrm{link}_\Delta(\{a\})$ 不连通，Reisner 判据 [6, 定理（22.3）] 保证 Δ 不可能是 K 上的 Cohen–Macaulay 环。换言之，

引理 4.4。 偏序集 P_Δ 不可能是 K 上的 *Cohen–Macaulay* 环。

由此可得 [3]

推论 4.5。 分次*ASL* R 不可能是 *Cohen–Macaulay*。

引理 4.6。 分次*ASL* R 是一个整环。

证明。 令 $I=(f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4)$。由于 R是定义在 P_Δ上的 ASL，且 t是 P_Δ 的唯一极小元，由 [4,推论 3.6]可知， t 是 R上的非零因子。

我们断言， b 也是 R上的非零因子。假设对于某个$h\in S$ 有 $bh\in I$ ，使得 $h\notin I$。不妨设 h 关于 I处于其标准形。 R 中的关系 $t^3e^3=b(ae-tbd)$给出 $t^3e^3h\in I$。在 R中约去 t^3 ，得到$e^3h\in I$。若 $h\neq 0$，则 $bh,\ e^3h\in I$推出 b属于(h) e^3属于(h) $\in J$并且

$$\mathrm{in}(h)\in(J:b)\cap(J:e^3)=(c,ae)\cap(bc,ab,ad)=J,$$

这与 h 的选择相矛盾。因此， b是 R 上的非零因子，且局部化映射 $R\longrightarrow R[(bt)^{-1}]$ 是单射。

令 $A:=K[a,e,b^{\pm1},t^{\pm1}]$。将 bt 取逆后， b 和 t 都成为单位，因此将 S 在 bt 处局部化得到 $A[c,d]$。由于 $f_1=bc-t^2de$ 且 b 是 A中的单位，代入$c=t^2de/b$ 得到同构 $A[c,d]/(f_1)\cong A[d]$。在此代换下， f_2保持不变，而 f_3 和 f_4 分别变为 $(t^2d^2/b^2)f_2$ 和 $(d/b)f_2$。因此， f_2、 f_3、 f_4 的像生成了 $A[d]$中的主理想 (f_2)，于是

$$R[(bt)^{-1}]\cong A[d]/(f_2).$$

现在令 $d_0:=(abe-t^3e^3)/(tb^2)$。由于 tb^2 是 A中的单位，我们有 $d_0\in A$ 且 $f_2=-tb^2(d-d_0)$。因此，在 $A[d]$中，$(f_2)=(d-d_0)$。在 $d=d_0$ 处求值固定了 A，且其核为 $(d-d_0)$，所以它诱导出同构 $A[d]/(f_2)\cong A$。因此，$R[(bt)^{-1}]\cong K[a,e,b^{\pm1},t^{\pm1}]$ 是一个整环。由于局部化映射 $R\longrightarrow R[(bt)^{-1}]$ 是单射， R 是一个整环。□

最后，引理 4.6 与推论 4.3 和 4.5 一起证明了定理 0.2。

References

[1] K. Baclawski，Cohen–Macaulay有序集，《代数杂志》**63** (1980), 226–258.[2] A. Bj¨orner，Shellable and Cohen–Macaulay偏序集，《美国数学会汇刊》**260**(1980), 159–183.[3] A. Conca and M. Varbaro，Square-free Gr¨obner degenerations，《数学发明》**221**(2020), 713–730.[4] D. Eisenbud，带直化律的代数导论，载于 “环论与代数 III”（B. R. McDonald 编），第三届俄克拉何马会议论文集，《纯粹与应用数学讲义》第 55 卷，Dekker，1980，243–268.[5] J. Herzog and T. Hibi，“单项式理想”，GTM 260，Springer，2011.[6]T. Hibi，“凸多胞体上的代数组合学”，Carslaw Publications，Glebe，新南威尔士州，澳大利亚，1992.[7] T. Hibi and K.-i. Watanabe，Gorenstein整环带直化律三维代数的研究 I，《广岛数学杂志》**15** (1985), 27–54.[8] M. Hochster，环面不变量环、由单项式生成的Cohen–Macaulay环及多胞体，《数学年刊》**96** (1972), 318–337.[9] M. Kalkbrener and B. Sturmfels，素理想的初始复形，《数学进展》**116**(1995), 365–376.[10] G. Reisner，Cohen–Macaulay多项式环的商环，《数学进展》**21** (1976), 30–49.[11] R. Stanley，上界猜想与Cohen–Macaulay环，《应用数学研究》**54**(1975), 135–142.[12] R. P. Stanley，“组合学与交换代数，第二版”，Birkh¨auser，波士顿，1996.[13] N. Terai，关于带直化律代数的若干评注，《纯粹与应用代数杂志》**95**(1994), 87–101。

(Takayuki Hibi) Department of Pure and Applied Mathematics, Graduate School of Information Science and Technology, The University of Osaka, Suita, Osaka 565–0871, Japan电子邮件地址：hibi@math.sci.osaka-u.ac.jp

(Ayesha Asloob Qureshi) Faculty of Engineering and Natural Sciences, Sabanci University, Orta Mahalle, Tuzla 34956, Istanbul, Turkey电子邮件地址：aqureshi@sabanciuniv.edu, ayesha.asloob@sabanciuniv.edu