arXiv:2611.28767v1 [math.QA] 21 Nov 2026

小维数中的正交辛 K-矩阵

E. Ryzhkin[1], V. Stukopin[1,2]

[1] 莫斯科物理技术学院

[2] 南方数学研究所

电子邮箱：ryzhkin.ea@phystech.edu, stukopin.va@mipt.ru

2026年11月24日

摘要

我们采用初等方法描述小维数的量子正交辛代数的余理想子代数，对相应的 K-矩阵进行分类，并显式求出这些子代数在向量表示中的中心化子。重点关注带有 Cartan 项的生成元。对于这些生成元，在参数的一般取值下，我们求出中心化子和所有K-矩阵，并描述向量表示关于该余理想子代数的分解。我们找到了两类参数特殊取值，并在每一组特殊值的一般点处，描述向量表示的分解以及所有 K-矩阵。在第一类特殊值处，中心化子的维数增大。其中一张此类取值的超曲面与 Cartan 项有关，在该超曲面上，一个生成元由与量子电代数中相同的公式给出。在第二类特殊值处，中心化子的维数保持不变，但其中出现了非零幂零元。第二类特殊值集合上的 K-矩阵可通过代入相应条件，从已求得的矩阵得到，除此之外别无其他。我们描述经典极限，包括特殊值的极限。我们提出一项观察，指出 Cartan 项的可容许性与经典子代数的第一同调有关。

1 引言

反射方程（RE）在量子群和量子可积系统理论中发挥着基础性作用。它与量子 Yang–Baxter 方程一样，是一般理论中至关重要的组成部分。反射方程的出现与具有边界条件的量子可积系统有关。由此产生的反射方程代数

最终被证明与余理想子代数理论密切相关；这一理论由 Letzter [1]的奠基性工作开创，并在很长一段时间里不断发展（例如参见 [2], [3], ，该文反映了这一领域发展首个十年所取得的进展）。量子超代数的类似理论起步较晚，如今已成为一个活跃的研究领域（参见 [4], [7]）。值得注意的是，反射方程有多个版本：例如，除了通常的版本外，还有一个扭曲版本。近期的研究对反射方程 [5] 和上述扭曲反射方程 [6] 的解进行了分类；这两种情况均与量子超代数 $\mathfrak{gl}$（$m|n$）有关。正交辛超代数的情形，尤其是在小维数时，颇为特殊，且目前受到关注：一方面，维数增大后便会消失的效应常常出现在这里；另一方面，小维数情形通常对量子可积系统理论中的应用十分重要。还应指出，在可积系统理论中，选择不同的 K矩阵往往对应于选择不同的边界条件。本文描述小维数正交辛超代数的反射方程的解。这些解并不总是符合适用于足够大维数情形的一般分类。 [4], 探讨了正交辛李超代数的一般分类问题，但该文描述的是若干类余理想子代数及相应的 K矩阵系列，并未详细分析参数取不同值时的解。本文将详细描述反射方程的解及余理想子代数。我们仅用初等方法得出这一描述。在此过程中，我们注意到，在参数取特殊值时会出现一些有趣的余理想子代数实例。因此，我们考察小维数情形下正交辛电李代数（正交辛李超代数）的实例（见 [11], [12], [13]）；它们是余理想子代数的生成元参数取特殊值时所对应的余理想子代数的经典极限。值得注意的是，除了采用初等方法之外，我们还力求充分详细地解释所用的构造和所得结果。我们希望这项工作有助于进一步研究一般情形下余理想子代数的结构；本文针对参数特殊值所得的具体结果能够推动后续研究，并且也能应用于具有边界条件的量子可积系统理论。

我们研究李代数 $\mathfrak{so}(3)$、 $\mathfrak{so}(5)$、 $\mathfrak{so}(4)$、 $\mathfrak{so}(6)$及李超代数 $\mathfrak{osp}(1|2)$的量子化包络代数 $U_q(\mathfrak{g})$,

$\mathfrak{osp}(1|4)$、 $\mathfrak{osp}(2|2)$、 $\mathfrak{osp}(2|4)$在向量表示 V中。Satake 图定义了一个子代数 $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$。若矩阵 $K \in \mathrm{End}(V)$与余理想子代数 $\mathcal{B} = U_q(\mathfrak{k}) \subset U_q(\mathfrak{g})$ 的表示可交换，则称其为不变矩阵。本文中的 K-矩阵 是满足反射方程的偶可逆不变矩阵。

白根 α 对应的余理想子代数生成元具有如下形式 $X_\alpha = T_\alpha e_\alpha + c_\alpha F_{\tilde{\alpha}}$（第 3.1 节）。可以在这些生成元中加入一个嘉当项:

$$X_\alpha^{(s)} = X_\alpha + s\,(q^{h_{\tilde{\alpha}}} - 1), \qquad s \in \mathbb{C},$$

这对应于量子对称对 [3]的参数 s 。此时子代数仍然是一个左余理想（第 5.1 节）。本文主要讨论的情形是 $s \neq 0$。

得到以下结果。

1. 我们描述了上述代数的余理想子代数 $\mathcal{B}$ 的表示，以及在参数取一般值时所有相应的 K-矩阵（定理 2）。

2. 对于带有嘉当项的生成元，在参数取一般值时，我们求出了中心化子以及所有 K-矩阵（定理 3）。在 $\mathfrak{so}$（3）、 $\mathfrak{so}$（4）、 $\mathfrak{so}$（5）和 $1|4$中的节点 α_1 ，以及 $\mathfrak{osp}$（$1|4$）的情形下，存在非数量矩阵解；对于 $c_2 = c_3$，在 $\mathfrak{so}$（6）和 $2|4$（$2|4$）中的节点 α_1 的情形下也存在非数量矩阵解。在其余情形中，中心化子由数量矩阵构成。

3. 在所有节点集合上都考虑 Cartan 项。除了 $c_2 = c_3$ 关于 $\mathfrak{so}(6)$ 和 $\mathfrak{osp}(2|4)$ 的条件外，第一类特殊值中恰好存在一个超曲面，在该超曲面上中心化子比一般情形更大： $\mathfrak{so}(5)$，两个节点上都有项，并且 $c_1 = -(q-1)^2 s^2$。在该超曲面上，生成元 $X_1^{(s)}$ 具有量子电代数 [11], 中生成元的形式； K-矩阵有三个特征值，其重数为 2、2、1（而不是 3 、 1 、 1 ）；经典子代数同构于 $\mathfrak{gl}(2)$，这与仅在 α_1 上的项相同，但 V在其上分解为 $2+2+1$ （而不是 $3+1+1$）。

4. 在表 6 的情形中，一般点处的中心化子是交换的且半单的，并且 V 在 $\mathcal{B}$ 上分解时没有重数。我们找出了所有第二类特殊值，在这些值处，中心化子的维数保持不变，但其中出现了非零幂零元（表7）。为找出这些值，我们使用中心化子上的迹型。在这些超曲面内部，只有对于 $\mathfrak{so}(4)$ 才存在特殊值；这些值位于两个超曲面的交集处，此处 V 是不可分解的。在第二类特殊值集合上， K-矩阵可通过代入条件，从已找到的矩阵得到

，此外没有其他矩阵（命题 4）。

5. 我们描述经典极限： $\mathfrak{k}_\sigma \subset \mathfrak{g}$的子代数、它们的导出代数和第一同调群，以及特殊值的极限（表 10）。我们提出一个关于如下条件的观察：在该条件下，嘉当项允许出现非标量的 K-矩阵。

对于 $q \neq 1$， K-矩阵分两步求得。首先，我们找出与余理想子代数生成元对易的偶矩阵的一般形式，即该表示中的中心化子，然后从这些矩阵中筛选出反射方程的解。

2 预备知识

本文的定义和记号遵循 [4]。关于量子群的一般知识，参见 [8], ；关于超代数的一般知识，可参见著作 [10]。为方便读者，我们回顾下文将用到的主要定义和事实。

2.1 量子超代数

代数 $U_q(\mathfrak{g})$ 由元素 e_α、 f_α、 $q^{\pm h_\alpha}$ 生成，其中 α 遍历简单根集合 Π。我们用 $|\Pi|$表示简单根的数量。奇偶性： $|q^{h_\alpha}| = 0$、 $|e_\alpha| = |f_\alpha| = |\alpha|$。这些生成元满足以下关系，其中涉及对称化 Cartan 矩阵 $C = \big((\alpha_i,\ \alpha_j)\big)_{i,\ j=1}^{|\Pi|}$）的矩阵元以及简单根的标量积：

$$\begin{gathered} q^{h_\alpha} e_\beta q^{-h_\alpha} = q^{(\alpha,\beta)} e_\beta, \qquad q^{h_\alpha} f_\beta q^{-h_\alpha} = q^{-(\alpha,\beta)} f_\beta, \\ e_\alpha f_\beta - (-1)^{|\alpha||\beta|} f_\beta e_\alpha = 0 \quad (\alpha \neq \beta), \end{gathered} \tag{1}$$

余乘由以下公式给出

$$\begin{gathered} \Delta(e_\alpha) = q^{h_\alpha} \otimes e_\alpha + e_\alpha \otimes 1, \qquad \Delta(f_\alpha) = f_\alpha \otimes q^{-h_\alpha} + 1 \otimes f_\alpha, \\ \Delta(q^{h_\alpha}) = q^{h_\alpha} \otimes q^{h_\alpha}, \end{gathered} \tag{2}$$

而分次张量积遵循符号规则

$$(a \otimes b)(c \otimes d) = (-1)^{|b||c|}\, ac \otimes bd. \tag{3}$$

注意，余乘是超代数的同态： $\Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b)$。此外，我们省略了额外的 Serre 关系（见 [14]），这些关系对下文并不起重要作用。

2.2 向量表示

空间 V的基 v_1、.....、 v_N由权向量组成。它们的权为 $\pm\varepsilon_i$、 $\pm\delta_j$ ，而当 N为奇数时，还包括零权。向量 v_i 的奇偶性为$|i| \in \{0,1\}$：权为 $\pm\delta_j$ 的向量是奇的，其余为偶的。设$i' = N+1-i$。初等矩阵 E_{ij} （其唯一非零元素为 1，位于第 i行、第 j列）的奇偶性为 $|i|+|j|$。元素 q^{h_α} 作用于权为 ν 的向量时，会将其乘以 $q^{(\alpha,\nu)}$，其中（ε_i，ε_j）$=\delta_{ij}$，（δ_i，δ_j）$=-\delta_{ij}$，（ε_i，δ_j）$=0$。分级是对称的：$|i'|=|i|$。表示的数据取自 [4, 第 2.2 节、第 2.3] 节。基向量和简单根的奇偶性汇总于表1。

$\mathfrak{g}$	奇偶性	简单根
$\mathfrak{so}(3)$	(0,0,0)	ε_1
$\mathfrak{so}(5)$	(0,0,0,0,0)	$\varepsilon_1-\varepsilon_2$, ε_2
$\mathfrak{so}(4)$	(0,0,0,0)	$\varepsilon_1-\varepsilon_2$, $\varepsilon_1+\varepsilon_2$
$\mathfrak{so}(6)$	(0，0，0，0，0，0)	$\varepsilon_1-\varepsilon_2$，$\varepsilon_2-\varepsilon_3$，$\varepsilon_2+\varepsilon_3$
$\mathfrak{osp}$（1|2）	(1，0，1)	δ_1 （奇数）
$\mathfrak{osp}$（1|4）	(1,1,0,1,1)	$\delta_1-\delta_2$, δ_2 （奇）
$\mathfrak{osp}$（2|2）	(1,0,0,1)	$\delta_1-\varepsilon_1$, $\delta_1+\varepsilon_1$ （奇）
$\mathfrak{osp}$（2|4）	(1，1，0，0，1，1)	$\delta_1-\delta_2$, $\delta_2-\varepsilon_1$ (奇), $\delta_2+\varepsilon_1$ (奇)

表1：基向量和简单根的奇偶性。

生成元矩阵（对于处处成立的 $\mathfrak{so}(N)$ $f_i=e_i^t$）：

- $\mathfrak{so}(3)$：$e_1=E_{12}-E_{23}$，$q^{h_1}=\mathrm{diag}(q,\ 1,\ q^{-1})$,
- $\mathfrak{so}(5)$：$e_1=E_{12}-E_{45}$, $e_2=E_{23}-E_{34}$, $q^{h_1}=\mathrm{diag}(q,\ q^{-1},\ 1,\ q,\ q^{-1})$,$q^{h_2}=\mathrm{diag}(1,\ q,\ 1,\ q^{-1},\ 1)$,
- $\mathfrak{so}(4)$: $e_1=E_{12}-E_{34}$, $e_2=E_{13}-E_{24}$, $q^{h_1}=\mathrm{diag}(q,q^{-1},q,q^{-1})$,$q^{h_2}=\mathrm{diag}(q,q,q^{-1},q^{-1})$,
- $\mathfrak{so}(6)$：$e_1=E_{12}-E_{56}$，$e_2=E_{23}-E_{45}$，$e_3=E_{24}-E_{35}$，$q^{h_1}=\mathrm{diag}(q,\ q^{-1},\ 1,\ 1,\ q,\ q^{-1})$，$q^{h_2}=\mathrm{diag}(1,\ q,\ q^{-1},\ q,\ q^{-1},\ 1)$，$q^{h_3}=\mathrm{diag}(1,\ q,\ q,\ q^{-1},\ q^{-1},\ 1)$,
- $\mathfrak{osp}(1|2)$：$e_1=q^{-1}E_{12}+E_{23}$, $f_1=-qE_{21}+E_{32}$, $q^{h_1}=\mathrm{diag}(q^{-1},1,q)$,
- $\mathfrak{osp}(1|4)$：$e_1=E_{12}-E_{45}$, $f_1=E_{21}-E_{54}$, $q^{h_1}=\mathrm{diag}(q^{-1},\ q,\ 1,\ q^{-1},\ q)$,$e_2=q^{-1}E_{23}+E_{34}$, $f_2=-qE_{32}+E_{43}$, $q^{h_2}=\mathrm{diag}(1,\ q^{-1},\ 1,\ q,\ 1)$,

- $\mathfrak{osp}(2|2)$: $e_1 = q^{-1}E_{12} + E_{34}$, $f_1 = -qE_{21} + E_{43}$, q^{h_1} =diag(q^{-1}, q^{-1}, q, q), $e_2 = q^{-1}E_{13} + E_{24}$, $f_2 = -qE_{31} + E_{42}$, q^{h_2} =diag(q^{-1}, q, q^{-1}, q),
- $\mathfrak{osp}(2|4)$: $e_1 = E_{12} - E_{56}$, $f_1 = E_{21} - E_{65}$, $q^{h_1} =$ diag($q^{-1}, q, 1, 1, q^{-1}, q$), $e_2 = q^{-1}E_{23} + E_{45}$, $f_2 = -qE_{32} + E_{54}$, $q^{h_2} =$ diag($1, q^{-1}, q^{-1}, q, q, 1$), $e_3 = q^{-1}E_{24} + E_{35}$, $f_3 = -qE_{42} + E_{53}$, $q^{h_3} =$ diag($1, q^{-1}, q, q^{-1}, q, 1$).

在这些表示中，以下关系成立：

$$e_\alpha f_\alpha - (-1)^{|\alpha|} f_\alpha e_\alpha = \pm \frac{q^{h_\alpha} - q^{-h_\alpha}}{q - q^{-1}}.$$

左侧是交换子（当根 α 为偶时），若其为奇则是反交换子。

2.3 Satake 图与子代数 $\mathfrak{k}$

我们先回顾李超代数及其子代数理论中的主要定义。基本李超代数与简单李代数一样，由 Dynkin图描述，其顶点对应于单根（见 [10]）。偶简单根画作圆圈，奇根画作方框。与基本李超代数 $\mathfrak{g}$ 相关联的 Satake 图，是 $\mathfrak{g}$ 的 Dynkin 图，其中一些节点涂成黑色，某些白色节点对之间用弧线连接（哪些着色和弧线是可容许的，将在 [4, 第 4]节中说明）。这些弧线定义了简单根的一个置换 τ：由弧线连接的两个根互换，其余根保持不变。该图按以下规则定义一个子代数$\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$。

- 如果根 α 是黑色的，那么 e_α、 f_α 和 h_α 属于 $\mathfrak{k}$。
- 如果根 α 是白色的，那么不取 e_α 和 f_α，而只取升算元与降算元的组合

$$x_\alpha = e_\alpha + c_\alpha f_{\tilde{\alpha}} \tag{4}$$

以及 Cartan元 $h_{\tilde{\alpha}} - h_\alpha$。这里， $c_\alpha \neq 0$ 是一个称为混合参数的数， $\tilde{\alpha}$ 是分配给根 α的正根。

子代数 $\mathfrak{k}$ 由所有这些元素生成。

根 $\tilde{\alpha}$ 的构造如下。如果没有黑色节点，那么$\tilde{\alpha} = \tau(\alpha)$：这就是根 α 本身，或弧的另一端。如果存在黑色节点，那么 $\tilde{\alpha} = w(\tau(\alpha))$，其中 w 是黑色

图表的部分 [4, 第4节。1], Weyl群最长元素的一个类似物。根 $\tilde{\alpha}$ 可能并非单根，而是若干简单根之和（复合根）。在第3.6节的例子中，有一个黑色根 β，它是偶的，并且 w 是反射

$$s_\beta(\gamma) = \gamma - \frac{2(\gamma,\beta)}{(\beta,\beta)}\,\beta.$$

例子。对于 $\mathfrak{so}(3)$，图表由一个白节点组成，而 $\mathfrak{k}$ 由一个元素 $x_1 = e_1 + c_1 f_1$生成。对于带有扭曲尾部的 $\mathfrak{so}(6)$，弧连接节点 α_2 和 α_3，因此 $x_2 = e_2 + c_2 f_3$、 $x_3 = e_3 + c_3 f_2$和 $\mathfrak{k}$ 包含 $h_3 - h_2$。

在所考虑的全部八种情形中，所有节点都是白节点（图 1）。对于 $\mathfrak{so}(3)$、 $\mathfrak{so}(5)$、 $\mathfrak{so}(4)$、 $\mathfrak{osp}(1|2)$ 和 $\mathfrak{osp}(1|4)$，置换 τ 是平凡的；对于 $\mathfrak{so}(6)$、 $\mathfrak{osp}(2|2)$、 $\mathfrak{osp}(2|4)$，置换 τ 交换尾部的两个根（“扭曲尾部”）。

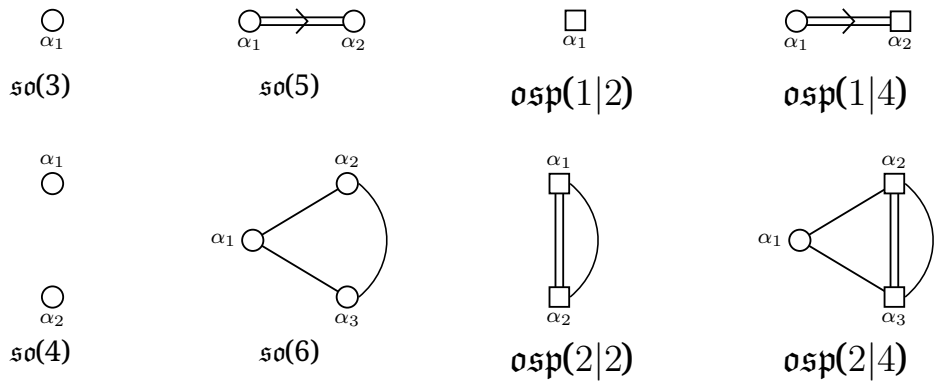

图 1：所研究代数的 Satake 图。圆形表示偶单根，方形表示奇单根。弧线连接被 τ 互换的根。

2.4 左余理想、 R-矩阵、反射方程

子代数 $\mathcal{B} \subset U_q(\mathfrak{g})$ 是一个左余理想，如果 $\Delta(\mathcal{B}) \subset U_q(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{B}$。由于 Δ 是同态，只需在 $\mathcal{B}$ 的生成元上验证这一点。

R-矩阵（ [4] 中的公式 (2.2)）， $\omega = q - q^{-1}$:

$$\begin{aligned} R = &\sum_{i,j} q^{(-1)^{|j|}(\delta_{ij}-\delta_{ij'})} E_{ii} \otimes E_{jj} \\ &+ \omega \sum_{i>j} \Big((-1)^{|j|} E_{ij} \otimes E_{ji} - (-1)^{|i|+|j|+|i||j|} \kappa_i \kappa_j q^{\rho_i - \rho_j} E_{ij} \otimes E_{i'j'} \Big). \end{aligned} \tag{5}$$

数字 κ_i 和 ρ_i 列于表 2 中。

$\mathfrak{g}$	κ	ρ
$\mathfrak{so}(3)$	$(1, 1, 1)$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
$\mathfrak{so}(5)$	全部 1	$(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$
$\mathfrak{so}(4)$	全部 1	$(1, 0, 0, -1)$
$\mathfrak{so}(6)$	全部 1	$(2, 1, 0, 0, -1, -2)$
$\mathfrak{osp}(1\|2)$	$(-1, 1, 1)$	$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
$\mathfrak{osp}(1\|4)$	$(-1, -1, 1, 1, 1)$	$(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$
$\mathfrak{osp}(2\|2)$	$(-1, 1, 1, 1)$	$(0, 0, 0, 0)$
$\mathfrak{osp}(2\|4)$	$(-1, -1、1、1、1、1)$	$(-1, 0、0、0、0、1)$

表 2：公式 (5) 中的数 κ_i 和 ρ_i。

注意，形式为 $A \otimes B$ 的算子按照以下规则作用于 $V \otimes V$

$$(A \otimes B)(v \otimes w) = (-1)^{|B||v|} Av \otimes Bw,$$

与 (3) 一致。分次置换 P 在$V \otimes V$中交换因子：

$$P(v_i \otimes v_j) = (-1)^{|i||j|} v_j \otimes v_i.$$

符号“–”仅在两个向量都是奇向量时出现。用初等矩阵 E_{ij} 表示，该算子为 $P = \sum_{i,\ j}(-1)^{|j|} E_{ij} \otimes E_{ji}$。事实上，$(E_{ij} \otimes E_{ji})(v_j \otimes v_i) = (-1)^{(|i|+|j|)|j|} v_i \otimes v_j$，再结合因子 $(-1)^{|j|}$，便得到符号 $(-1)^{|i||j|}$。利用 P，定义 $R_{21} = PR_{12}P$（即交换张量因子后的矩阵 R）和 $S = PR$。所得的辫关系 $S_{12}S_{23}S_{12} = S_{23}S_{12}S_{23}$ 等价于 R的杨–巴克斯特方程。

偶矩阵 K的反射方程 $SK_2SK_2 = K_2SK_2S$（[4]中的公式 (3.3)）经代换 $S = PR$后，形式为

$$R_{21}K_1R_{12}K_2 = K_2R_{21}K_1R_{12}, \qquad K_1 = K \otimes 1, \quad K_2 = 1 \otimes K. \tag{6}$$

对于扭曲尾部，[4,（3.5）] 考虑了由自同构 τ扭曲的反射方程：

$$R_{21}K_1R_{12}^{\tau_1}K_2 = K_2R_{21}^{\tau_2}K_1R_{12}, \tag{7}$$

其中，τ 作用于 R的相应张量因子上。在向量表示中，τ 是由交换 $v_{N/2}$ 和 $v_{N/2+1}$的矩阵 σ 所定义的共轭，并且 $\sigma \otimes \sigma$ 与 R对易。因此，K 是（6）的解，当且仅当 $K\sigma$是（7）的解。下面我们写出方程（6）的解 K。

注意，反射方程可视为 K 的矩阵元之间的一组关系，这些关系生成反射方程

代数。该代数可以嵌入量子群中。特别是，根据反射方程的一个解，可以构造一个余理想子代数，该解在此子代数作用下保持不变（见 [2], [4]）。

方程 (6) 关于 K 是二次齐次的：与 K 一起，矩阵 tK 是一个解，但两个解之和通常不是解。反射方程总有一个平凡解，即标量矩阵，也就是单位矩阵的倍数。

3 余理想子代数

3.1 一般推导

我们分析余理想子代数的构造，考察余理想子代数的最简单例子，并通过显式计算展示子代数退化为整个代数的一个例子。本节中，α 是一个白根，根 $\tilde{\alpha}$ 是简单根（以下讨论的八种情形均如此）。复合根的最简单情形将在第 3.6 节分析，一般情形则见 [4, 第 5] 节。

对于 $q = 1$，任意元素 $x \in \mathfrak{g}$ 的余乘都等于 $x \otimes 1 + 1 \otimes x$，因此由元素 (4) 生成的子代数自动对Δ封闭。对于 $q \neq 1$，情况并非如此。如果公式 (4) 原样照搬，那么对于元素 $e_\alpha + c f_{\tilde{\alpha}}$，由 (2) 可得

$$\Delta(e_\alpha + c f_{\tilde{\alpha}}) = q^{h_\alpha} \otimes e_\alpha + e_\alpha \otimes 1 + c\, f_{\tilde{\alpha}} \otimes q^{-h_{\tilde{\alpha}}} + c\, 1 \otimes f_{\tilde{\alpha}}.$$

因子 e_α 和 $f_{\tilde{\alpha}}$ 出现在不同的项中，而子代数只包含它们的组合。要满足余理想条件，每一项中的第二个因子都必须属于该子代数。这里进行了两处修正。

步骤 1：替换 $f_{\tilde{\alpha}} \to F_{\tilde{\alpha}} = q^{h_{\tilde{\alpha}}} f_{\tilde{\alpha}}$。由于 Δ 是一个同态，

$$\begin{aligned}\Delta(F_{\tilde{\alpha}}) &= \Delta(q^{h_{\tilde{\alpha}}})\Delta(f_{\tilde{\alpha}}) = (q^{h_{\tilde{\alpha}}} \otimes q^{h_{\tilde{\alpha}}})(f_{\tilde{\alpha}} \otimes q^{-h_{\tilde{\alpha}}} + 1 \otimes f_{\tilde{\alpha}}) \\ &= F_{\tilde{\alpha}} \otimes 1 + q^{h_{\tilde{\alpha}}} \otimes F_{\tilde{\alpha}}.\end{aligned}$$

按照规则 (3) 展开括号时，符号由左侧括号中第二个因子的奇偶性决定，也就是由$q^{h_{\tilde{\alpha}}}$的奇偶性决定。它是偶的，因此不会出现符号，即使 $f_{\tilde{\alpha}}$ 是奇的也是如此。

Step 2：替换为 $e_\alpha \to T_\alpha e_\alpha$**，其中** $T_\alpha = q^{h_{\tilde{\alpha}} - h_\alpha} = q^{h_{\tilde{\alpha}}} q^{-h_\alpha}$.

$$\begin{aligned}\Delta(T_\alpha e_\alpha) &= (T_\alpha \otimes T_\alpha)(q^{h_\alpha} \otimes e_\alpha + e_\alpha \otimes 1) \\ &= q^{h_{\tilde{\alpha}}} \otimes T_\alpha e_\alpha + T_\alpha e_\alpha \otimes T_\alpha,\end{aligned}$$

因为 $T_\alpha q^{h_\alpha} = q^{h_{\tilde{\alpha}}}$。同样没有出现符号，因为 T_α 是偶数。

结果。现在，在 $T_\alpha e_\alpha$ 和 $F_{\tilde{\alpha}}$ 处的第一个因子相同，并且对于

$$X_\alpha = T_\alpha e_\alpha + c_\alpha F_{\tilde{\alpha}} \tag{8}$$

我们得到

$$\Delta(X_\alpha) = q^{h_{\tilde{\alpha}}} \otimes X_\alpha + T_\alpha e_\alpha \otimes T_\alpha + c_\alpha F_{\tilde{\alpha}} \otimes 1. \tag{9}$$

第二个张量因子分别为 X_α、T_α 和 1，此外 $\Delta(T_\alpha) = T_\alpha \otimes T_\alpha$。因此，由所有白根 α 对应的元素 X_α 和 $T_\alpha^{\pm 1}$ 生成的子代数是一个左余理想。记作 $U_q(\mathfrak{k})$（参见 [4] 中的定理5.3）。若 $\tilde{\alpha} = \alpha$，则 $T_\alpha = 1$ 和 $\Delta(X_\alpha) = q^{h_\alpha} \otimes X_\alpha + X_\alpha \otimes 1$。由于 $q \to 1$，我们有 $T_\alpha \to 1$、$F_{\tilde{\alpha}} \to f_{\tilde{\alpha}}$，而 X_α 变为 x_α。

3.2 示例：$\mathfrak{osp}(1|2)$

奇偶性 (1，0，1)，权 δ_1、0、$-\delta_1$。矩阵 E_{12} 的奇偶性为 $|1|+|2| = 1$，因此 e_1 和 f_1 为奇数，且该关系包含一个反交换子：

$$e_1 f_1 = -E_{11} + E_{22}, \qquad f_1 e_1 = -E_{22} + E_{33},$$
$$e_1 f_1 + f_1 e_1 = \mathrm{diag}(-1, 0, 1) = \frac{q^{h_1} - q^{-h_1}}{q - q^{-1}},$$

也就是说，$h_1 = \mathrm{diag}(-1, 0, 1)$。该节点为白色，$\tilde{\alpha}_1 = \alpha_1$, $T_1 = 1$:

$$F_1 = q^{h_1} f_1 = q(-E_{21} + E_{32}),$$
$$X_1 = e_1 + c_1 F_1 = q^{-1} E_{12} + E_{23} + c_1 q(-E_{21} + E_{32}),$$
$$\Delta(X_1) = q^{h_1} \otimes X_1 + X_1 \otimes 1.$$

3.3 示例：$\mathfrak{so}(6)$，扭曲尾部

这里 $\tau(\alpha_2) = \alpha_3$，因此 $\tilde{\alpha}_1 = \alpha_1$, $\tilde{\alpha}_2 = \alpha_3$, $\tilde{\alpha}_3 = \alpha_2$ 和

$$T_1 = 1, \qquad T_2 = q^{h_3 - h_2} = \mathrm{diag}(1, 1, q^2, q^{-2}, 1, 1), \qquad T_3 = T_2^{-1}.$$

计算：$T_2 e_2 = E_{23} - q^{-2} E_{45}$, $T_3 e_3 = E_{24} - q^{-2} E_{35}$, $F_1 = q^{-1}(E_{21} - E_{65})$, $F_2 = q^{-1}(E_{32} - E_{54})$，$F_3 = q^{-1}(E_{42} - E_{53})$。生成元：

$$X_1 = e_1 + c_1 F_1 = E_{12} - E_{56} + c_1 q^{-1}(E_{21} - E_{65}),$$
$$X_2 = T_2 e_2 + c_2 F_3 = E_{23} - q^{-2} E_{45} + c_2 q^{-1}(E_{42} - E_{53}),$$
$$X_3 = T_3 e_3 + c_3 F_2 = E_{24} - q^{-2} E_{35} + c_3 q^{-1}(E_{32} - E_{54}),$$

以及 $T_2^{\pm 1}$。由公式 (9) 给出的余乘积:

$$\begin{aligned}\Delta(X_1) &= q^{h_1} \otimes X_1 + X_1 \otimes 1,\\ \Delta(X_2) &= q^{h_3} \otimes X_2 + T_2 e_2 \otimes T_2 + c_2 F_3 \otimes 1,\\ \Delta(X_3) &= q^{h_2} \otimes X_3 + T_3 e_3 \otimes T_3 + c_3 F_2 \otimes 1.\end{aligned}$$

由 $T_2 E_{ij} T_2^{-1} = (t_i/t_j) E_{ij}$, 其中 t_i是 T_2的对角线元素, 可得 $T_2 X_2 T_2^{-1} = q^{-2} X_2$, $T_2 X_3 T_2^{-1} = q^2 X_3$, $T_2 X_1 = X_1 T_2$。用权表示亦然:

$$T_2 e_2 T_2^{-1} = q^{(\alpha_3 - \alpha_2, \alpha_2)} e_2 = q^{-2} e_2, \qquad T_2 f_3 T_2^{-1} = q^{-(\alpha_3 - \alpha_2, \alpha_3)} f_3 = q^{-2} f_3.$$

这些因子相同, 因此 $T_2 X_2 T_2^{-1}$与 X_2成比例。对于 e_2, f_2这一对, 因子则会不同: q^{-2} 和 q^2。

经典极限: $x_2 = e_2 + c_2 f_3$, $x_3 = e_3 + c_3 f_2$。由于 $(\alpha_2, \alpha_3) = 0$, 我们有 $[e_2, e_3] = [f_3, f_2] = 0$ 和

$$[x_2, x_3] = c_3 h_2 - c_2 h_3. \tag{10}$$

对于 $c_2 \neq c_3$, 该元素与 $h_3 - h_2$ 一起分别给出 h_2 和 h_3。于是 $[h_2, x_2] = 2e_2$ 和 $[h_3, x_3] = 2e_3$, 因此 e_2, f_3, e_3, f_2 分别进入 $\mathfrak{k}$, 而由 $[h_2, x_1] = -e_1 + c_1 f_1$ 还可得到 e_1 和 f_1。因此 $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}$。所以对于$\mathfrak{so}(6)$, 唯一有意义的情形是 $c_2 = c_3$。

3.4 示例: $\mathfrak{osp}(2|4)$, 扭曲尾部

基向量的权: δ_1, δ_2, ε_1, $-\varepsilon_1$, $-\delta_2$, $-\delta_1$。奇偶性为 (1, 1, 0, 0, 1, 1)。简单根: $\alpha_1 = \delta_1 - \delta_2$ 为偶, $\alpha_2 = \delta_2 - \varepsilon_1$ 和$\alpha_3 = \delta_2 + \varepsilon_1$ 为奇,

$$\begin{aligned}(\alpha_1, \alpha_1) &= -2, \qquad (\alpha_2, \alpha_2) = (\alpha_3, \alpha_3) = 0,\\ (\alpha_1, \alpha_2) &= (\alpha_1, \alpha_3) = 1, \qquad (\alpha_2, \alpha_3) = -2.\end{aligned}$$

与 $\mathfrak{so}(6)$ 的差异: 生成元 e_2, e_3, f_2, f_3 为奇, $e_2^2 = e_3^2 = f_2^2 = f_3^2 = 0$ (奇根的标准关系, 其中 $(\alpha, \alpha) = 0$; 对于第2.2节的矩阵, 可通过直接相乘验证) 以及 $e_2 f_3 + f_3 e_2 = 0$, 而 $(\alpha_2, \alpha_3) = -2$, 而非 0。置换 τ 相同: $\tau(\alpha_2) = \alpha_3$, $T_2 = q^{h_3 - h_2} = \mathrm{diag}(1, 1, q^2, q^{-2}, 1, 1)$, $T_3 = T_2^{-1}$。

计算: $T_2 e_2 = q^{-1} E_{23} + q^{-2} E_{45}$, $T_3 e_3 = q^{-1} E_{24} + q^{-2} E_{35}$, $F_1 = q(E_{21} - E_{65})$, $F_2 = -E_{32} + q E_{54}$, $F_3 = -E_{42} + q E_{53}$。生成元:

$$X_1 = e_1 + c_1 F_1 = E_{12} - E_{56} + c_1 q (E_{21} - E_{65}),$$

$$X_2 = T_2 e_2 + c_2 F_3 = q^{-1} E_{23} + q^{-2} E_{45} + c_2(-E_{42} + q E_{53}),$$
$$X_3 = T_3 e_3 + c_3 F_2 = q^{-1} E_{24} + q^{-2} E_{35} + c_3(-E_{32} + q E_{54}),$$

以及 $T_2^{\pm 1}$。元素 X_1 是偶的， X_2 和 X_3 是奇的。 X_2 是齐次的，因为 e_2 和 f_3 都是奇的。余乘积：

$$\Delta(X_2) = q^{h_3} \otimes X_2 + T_2 e_2 \otimes T_2 + c_2 F_3 \otimes 1,$$
$$\Delta(X_3) = q^{h_2} \otimes X_3 + T_3 e_3 \otimes T_3 + c_3 F_2 \otimes 1.$$

关系： $T_2 X_1 = X_1 T_2$、 $T_2 X_2 T_2^{-1} = q^{-2} X_2$、 $T_2 X_3 T_2^{-1} = q^2 X_3$ （如 $\mathfrak{so}$（6）中所示），此外还有

$$X_2^2 = X_3^2 = 0.$$

关于矩阵：在 X_2^2 中有两个非零乘积， $E_{45}E_{53}$ 的系数为$+c_2 q^{-1}$， $E_{42}E_{23}$ 的系数为 $-c_2 q^{-1}$。二者都等于 E_{43}，因此这些项相互抵消。在代数中：

$$X_2^2 = (T_2 e_2)^2 + c_2^2 F_3^2 + c_2 q^2 T_2 q^{h_3}(e_2 f_3 + f_3 e_2) = 0.$$

经典极限： $x_2 = e_2 + c_2 f_3$、 $x_3 = e_3 + c_3 f_2$，而且与（10）相反，

$$[x_2, x_3] = x_2 x_3 + x_3 x_2 = 2E_{25} - 2c_2 c_3 E_{52} + c_3 h_2 + c_2 h_3,$$

因为 $[e_2, e_3] = 2E_{25} \neq 0$ （根 $\alpha_2 + \alpha_3 = 2\delta_2$）。该元素不属于Cartan子代数，因此，对于 $\mathfrak{so}$（6）中的 $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}$，此前的论证不再适用。根据第4.3节的结果， $\mathfrak{k} \neq \mathfrak{g}$ 对任意非零的 c_2、 c_3 都成立：在那里找到的矩阵 K 在 $q = 1$处不是标量矩阵，并且与 x_1、 x_2、 x_3 和 $h_3 - h_2$对易。

3.5 八元代数的生成元

向量表示中的生成元 X_i 汇总于表 3。对于扭曲图表 T 也给出了相应内容。

$\mathfrak{so}(3)$	$X_1 = E_{12} - E_{23} + c_1(E_{21} - q^{-1}E_{32})$
$\mathfrak{so}(5)$	$X_1 = E_{12} - E_{45} + c_1 q^{-1}(E_{21} - E_{54})$
	$X_2 = E_{23} - E_{34} + c_2(E_{32} - q^{-1}E_{43})$
$\mathfrak{so}(4)$	$X_1 = E_{12} - E_{34} + c_1 q^{-1}(E_{21} - E_{43})$
	$X_2 = E_{13} - E_{24} + c_2 q^{-1}(E_{31} - E_{42})$
$\mathfrak{so}(6)$	$T_2 = q^{h_3 - h_2} = \mathrm{diag}(1, 1, q^2, q^{-2}, 1, 1)$
	$X_1 = E_{12} - E_{56} + c_1 q^{-1}(E_{21} - E_{65})$
	$X_2 = E_{23} - q^{-2}E_{45} + c_2 q^{-1}(E_{42} - E_{53})$
	$X_3 = E_{24} - q^{-2}E_{35} + c_3 q^{-1}(E_{32} - E_{54})$
$\mathfrak{osp}(1\|2)$	$X_1 = q^{-1}E_{12} + E_{23} + c_1 q(-E_{21} + E_{32})$
$\mathfrak{osp}(1\|4)$	$X_1 = E_{12} - E_{45} + c_1 q(E_{21} - E_{54})$
	$X_2 = q^{-1}E_{23} + E_{34} + c_2 q(-E_{32} + E_{43})$
$\mathfrak{osp}(2\|2)$	$T_1 = q^{h_2 - h_1} = \mathrm{diag}(1, q^2, q^{-2}, 1)$
	$X_1 = T_1 e_1 + c_1 F_2 = q^{-1}E_{12} + q^{-2}E_{34} + c_1(-E_{31} + qE_{42})$
	$X_2 = T_2 e_2 + c_2 F_1 = q^{-1}E_{13} + q^{-2}E_{24} + c_2(-E_{21} + qE_{43})$
$\mathfrak{osp}(2\|4)$	$T_2 = q^{h_3 - h_2} = \mathrm{diag}(1, 1, q^2, q^{-2}, 1, 1)$
	$X_1 = E_{12} - E_{56} + c_1 q(E_{21} - E_{65})$
	$X_2 = q^{-1}E_{23} + q^{-2}E_{45} + c_2(-E_{42} + qE_{53})$
	$X_3 = q^{-1}E_{24} + q^{-2}E_{35} + c_3(-E_{32} + qE_{54})$

表 3：余理想子代数 $U_q(\mathfrak{k})$ 的生成元 X_i （在向量表示中）。

对于 $\mathfrak{osp}(2|2)$，这里有 $T_2 = T_1^{-1}$。对于非扭曲图 $\Delta(X_i) = q^{h_i} \otimes X_i + X_i \otimes 1$。

3.6 复合根

如果图表中有黑色节点，根 $\tilde{\alpha}$ 可能是复合根。此时，元素 $F_{\tilde{\alpha}}$ 由简单根的元素 F_β 通过 q-交换子构造而成。下面我们分析最简单的情况，即 $\tilde{\alpha}$ 是两个简单根之和。一般情况参见 [4, 第 5] 节。设 A, B 是权为 $-\beta, -\gamma$ 的元素，使得

$$\Delta(A) = A \otimes 1 + q^{h_\beta} \otimes A, \qquad \Delta(B) = B \otimes 1 + q^{h_\gamma} \otimes B,$$

以及 $[A, B]_{q'} = AB - (-1)^{|A||B|} q' BA$。于是

$$\begin{aligned}\Delta([A, B]_{q'}) = [A, B]_{q'} \otimes 1 + q^{h_\beta + h_\gamma} \otimes [A, B]_{q'} \\ + (1 - q' q^{-(\beta,\gamma)})\, A q^{h_\gamma} \otimes B \\ + (-1)^{|A||B|} (1 - q' q^{(\beta,\gamma)})\, q^{h_\beta} B \otimes A. \quad (11)\end{aligned}$$

这个公式是通过直接计算得到的。乘积 $\Delta(A)\Delta(B)$ 根据规则 (3) 展开为四项:

$$\Delta(A)\Delta(B) = AB \otimes 1 + Aq^{h_\gamma} \otimes B + (-1)^{|A||B|} q^{h_\beta} B \otimes A + q^{h_\beta + h_\gamma} \otimes AB,$$

并且 $\Delta(B)\Delta(A)$ 也以相同方式展开。形如 $(\ldots) \otimes 1$ 和 $q^{h_\beta+h_\gamma} \otimes (\ldots)$ 的项合并为（11）中的前两项。在剩下的两项中，根据规则 $q^{h_\gamma} A = q^{-(\beta,\gamma)} A q^{h_\gamma}$ 和 $Bq^{h_\beta} = q^{(\beta,\gamma)} q^{h_\beta} B$，元素 q^{h_γ} 和 q^{h_β} 穿过 A 和B 移动（这些规则源于 A 和 B 具有权 $-\beta$ 和 $-\gamma$ 这一事实）。括号中的因子正是由此产生的。

（11）的前两项与 A 和 B 本身的前两项具有相同的形式。后两项是多余的。选择参数 q'，使其中一项消失，而剩下的一项的第二个因子中含有一个黑根的元素（它位于子代数中）。如果这是 A，则取 $q' = q^{(\beta,\gamma)}$；如果是 B，则取 $q' = q^{-(\beta,\gamma)}$。在 [4] 中，q-交换子的指标有不同的理解: $[F_\alpha, F_\beta]_{q^{\pm 1}} = F_\alpha F_\beta - (-1)^{|F_\alpha||F_\beta|} q^{\mp(\alpha,\beta)} F_\beta F_\alpha$。

例：$\mathfrak{osp}(1|4)$，节点 α_1 为黑色，α_2 为白色。关于 α_1 的反射会互换 δ_1 和 δ_2，因此 $\tilde{\alpha}_2 = \delta_1 = \alpha_1 + \alpha_2$和 $T_2 = q^{h_{\tilde{\alpha}_2} - h_2} = q^{h_1}$。这里 $(\alpha_1, \alpha_2) = 1$，黑色的 F_1 位于左侧，因此需要 $q' = q$。计算:

$$F_1 = q(E_{21} - E_{54}), \qquad F_2 = q(-E_{32} + E_{43}),$$
$$F_1 F_2 = -q^2 E_{53}, \qquad F_2 F_1 = -q^2 E_{31},$$
$$F_{\tilde{\alpha}_2} = [F_1, F_2]_q = F_1 F_2 - q F_2 F_1 = q^3 E_{31} - q^2 E_{53}$$

（用 [4] 的记号表示即为 $[F_1, F_2]_{q^{-1}}$）。由 (11) 得:

$$\Delta(F_{\tilde{\alpha}_2}) = F_{\tilde{\alpha}_2} \otimes 1 + q^{h_1+h_2} \otimes F_{\tilde{\alpha}_2} + (1-q^2)\, q^{h_1} F_2 \otimes F_1,$$

多余项的第二个因子中含有黑色的 F_1。此外，$q^{h_1} e_2 = E_{23} + E_{34}$ 和

$$X_2 = q^{h_1} e_2 + c_2 F_{\tilde{\alpha}_2} = E_{23} + E_{34} + c_2(q^3 E_{31} - q^2 E_{53}).$$

与第 3.1 节中一样，$\Delta(q^{h_1} e_2) = q^{h_1+h_2} \otimes q^{h_1} e_2 + q^{h_1} e_2 \otimes q^{h_1}$，因此

$$\Delta(X_2) = q^{h_1+h_2} \otimes X_2 + q^{h_1} e_2 \otimes q^{h_1} + c_2 F_{\tilde{\alpha}_2} \otimes 1 + c_2(1-q^2)\, q^{h_1} F_2 \otimes F_1.$$

第二个因子 X_2、q^{h_1}、1 和 $F_1 = q^{h_1} f_1$ 都属于由元素 e_1、f_1、$q^{\pm h_1}$、X_2生成的子代数，因此它是一个左余理想。

命题 1 由表 *3* 中元素生成的子代数是左余理想子代数。除 $\mathfrak{so}(6)$与$c_2 \neq c_3$ 的情形外，它们全都是真子代数。

这些是左余理想子代数这一点可通过直接计算验证，并且上文已对此作了基本说明（见（9））。它们是真子代数这一点将在第4.3节中通过展示非平凡不变量来证明，即 K-矩阵：由于表示 V 是不可约的，与整个代数 $U_q(\mathfrak{g})$交换的偶矩阵必为数量矩阵。对于 $\mathfrak{so}(6)$与 $c_2 \neq c_3$ 的情形，中心化子由数量矩阵构成，因此这一论证不适用。在此情形下， $q = 1$ 见（第3.3节中的 $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}$ ）。

4 K-矩阵

4.1 R-矩阵

对于 $\mathfrak{osp}(1|2)$，例如，公式 (5) 给出了量子 R-矩阵的以下表达式：

$$\begin{aligned} R = q^{-1}(E_{11}\otimes E_{11} + E_{33}\otimes E_{33}) + q\,(E_{11}\otimes E_{33} + E_{33}\otimes E_{11}) \\ + \sum{}' E_{ii}\otimes E_{jj} + \omega\big(-E_{21}\otimes E_{12} - q\,E_{21}\otimes E_{23} \\ - (1+q)E_{31}\otimes E_{13} + E_{32}\otimes E_{23} + E_{32}\otimes E_{12}\big), \end{aligned}$$

其中 $\sum'$ 是其余五对 (i,j) 的和。

4.2 求反射方程的解

我们求解扭曲反射方程 (7)：对于没有弧的图表，τ =id，而这就是方程 (6)；对于扭曲尾部，其解为矩阵 $K\sigma$，其中 K 是方程 (6) 的解（第 2.4 节）。因此，以下所有情况都求解方程 (6)。反射方程的解是通过Maple系统中的程序求得的。对于每个代数，都进行了以下计算。

1. 首先，通过公式 (8) 构造了生成元 X_i （以及 T），其中参数 c_i 是自由符号。2. 然后，对偶矩阵 K 的各个元素求解线性系统 $KX_i = X_iK$ $KT = TK$。其解构成中心化子，即与 U_q（$\mathfrak{k}$）交换的偶矩阵集合。所得答案为带有自由参数 b_k 的一般形式（这些参数是线性系统中的自由未知量）。3. 将所得的中心化子表达式代入反射方程 (6)，随后求解并分析关于 b_k 的二次方程组。

第3步的每个解都是中心化子中的一条直线 $\{tK\}$、 $t \neq 0$。对于每个解，计算其行列式。参数 c_i 定义了余理想子代数的一族，从而也定义了解的一族。计算使用符号 q 和 c_i进行。假设 $c_i \neq 0$ ，且 q 不是单位根。所得矩阵与生成元交换并满足反射方程，以及其行列式的值，都是参数中的恒等式。对于所有非零 c_i ，这些恒等式均成立（并且在满足形如 $c_2 = c_3$ 的条件时，对所有满足该条件的取值都成立）。中心化子的维数和解的列表，是通过求解带有符号系数的线性与二次方程组得到的，并且对应于参数的一般取值，即除去参数中有限个非零多项式的零点之外的所有取值（精确定义见第 5.3 节）。

4.3 不含嘉当项的结果：K-矩阵的公式

表 4 给出了中心化子的维数，以及位于中心化子中的反射方程的所有解（t 是任意非零数）。表后列出了每个代数在该表示中的中心化子的一组基。维数为二时，这组基为 1 和 K。对于 $\mathfrak{so}(5)$、 $\mathfrak{so}(6)$（其中 $c_2 = c_3$，$\mathfrak{osp}(1|4)$）以及 $\mathfrak{osp}(2|4)$（其中$c_2 = c_3$ ），维数为三，这组基由 1、 K 和另一个矩阵 K' 组成。矩阵 K'不满足反射方程，因此不是 K-矩阵。 $\mathfrak{so}(3)$、 $\mathfrak{so}(4)$ 以及 $\mathfrak{so}(6)$（其中 $c_2 \neq c_3$）这几种情形的排列方式不同，故另行说明。对于所有非零 c_i，所有矩阵 K 均可逆：它们的行列式是关于 q 和 c_i 的单项式，并在相应公式之后列出。需要强调的是，该表给出的是 $\mathrm{End}(V)$ 中的中心化子维数，也就是该表示中的中心化子维数。余理想子代数 $U_q(\mathfrak{k}) \subset U_q(\mathfrak{g})$ 本身是无限维的，因此用生成元的个数或 Gelfand–Kirillov 维数来描述它们是很自然的。

代数	中心化子的维数	反射方程的解
$\mathfrak{so}(3)$	3	$t\cdot 1,\ tK$
$\mathfrak{so}(5)$	3	$t\cdot 1,\quad tK$
$\mathfrak{so}(4)$	4	$t\cdot 1,\quad tX_1,\quad tX_2,\quad tX_1X_2$
$\mathfrak{so}(6),\quad c_2=c_3$	3	$t\cdot 1,\quad tK$
$\mathfrak{so}(6),\quad c_2\neq c_3$	1	$t\cdot 1$
$\mathfrak{osp}(1\|2)$	2	$t\cdot 1,\quad tK$
$\mathfrak{osp}(1\|4)$	3	$t\cdot 1,\quad tK$
$\mathfrak{osp}(2\|2),\quad c_1=c_2$	2	$t\cdot 1,\quad tK$
$\mathfrak{osp}(2\|2),\quad c_1\neq c_2$	2	$t\cdot 1,\quad tK$
$\mathfrak{osp}(2\|4),\quad c_2=c_3$	3	$t\cdot 1,\quad tK$
$\mathfrak{osp}(2\|4),\quad c_2\neq c_3$	2	$t\cdot 1,\quad tK$

表 4：End(V) 中中心化子的维数及反射方程的解。

中心化子和解本身由以下公式给出。

$\mathfrak{so}(3)$. 中心化子：span$(1, X_1, K)$（ X_1 的多项式），

$$K=\begin{pmatrix}-(1-q^{-1})c_1 & 0 & 1\\ 0 & -c_1 & 0\\ q^{-1}c_1^2 & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{12}$$

行列式：$\det K=q^{-1}c_1^3$。

$\mathfrak{so}(5)$。

$$K=\begin{pmatrix}q^{-1}(1-q^{-1})c_1c_2 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & q^{-1}(1-q^{-1})c_1c_2 & 0 & -q^{-1}c_1 & 0\\ 0 & 0 & q^{-1}c_1c_2 & 0 & 0\\ 0 & -q^{-2}c_1c_2^2 & 0 & 0 & 0\\ q^{-3}c_1^2c_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{13}$$

$$K'=\begin{pmatrix}0 & -q^{-1}c_2 & 0 & -1 & 0\\ -q^{-2}c_1c_2 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -q^{-2}c_1c_2^2 & 0 & 0 & 0 & c_2\\ 0 & q^{-2}c_1c_2^2 & 0 & q^{-1}c_1c_2 & 0\end{pmatrix}.$$

行列式：$\det K=q^{-7}c_1^5c_2^5$。

$\mathfrak{so}(4)$。这里有 $X_1X_2=X_2X_1$, $X_1^2=q^{-1}c_1\cdot 1$, $X_2^2=q^{-1}c_2\cdot 1$。中心化子由元素 X_1, X_2 生成，其基为$1, X_1, X_2$,

X_1X_2，其中

$$X_1X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & q^{-1}c_1 & 0 \\ 0 & q^{-1}c_2 & 0 & 0 \\ -q^{-2}c_1c_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

生成元 X_1、 X_2 本身及其乘积都满足反射方程。三个矩阵均可逆: $\det\ X_i = q^{-2}c_i^2$，$\det(X_1X_2) = q^{-4}c_1^2c_2^2$。矩阵 1、 X_1、 X_2、 X_1X_2的线性组合若有多个非零系数，则不是解。

$\mathfrak{so}(6)$， $c_2 = c_3$。

$$K = \begin{pmatrix} (1-q^{-2})c_1c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & (1-q^{-2})c_1c_2 & 0 & 0 & -q^{-1}c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_1c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_1c_2 & 0 & 0 \\ 0 & -q^{-1}c_1c_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q^{-2}c_1^2c_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$K' = \begin{pmatrix} 0 & -q^{-1}c_2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -q^{-2}c_1c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q^{-1}c_1c_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & qc_2 \\ 0 & q^{-1}c_1c_2^2 & 0 & 0 & c_1c_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

行列式：$\det K = q^{-4}c_1^6c_2^6$。对于 $c_2 \neq c_3$，其中心化子由数量矩阵构成。

$\mathfrak{osp}(1|2)$。

$$K = \begin{pmatrix} -q(1+q)c_1 & 0 & 1 \\ 0 & -qc_1 & 0 \\ -q^3c_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

行列式：$\det K = -q^4c_1^3$。

$\mathfrak{osp}(1|4)$。

$$K = \begin{pmatrix} q^2(1+q)c_1c_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & q^2(1+q)c_1c_2 & 0 & -qc_1 & 0 \\ 0 & 0 & q^2c_1c_2 & 0 & 0 \\ 0 & q^4c_1c_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ -q^5c_1^2c_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

$$K' = \begin{pmatrix} 0 & q^2c_2 & 0 & -1 & 0 \\ q^3c_1c_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q^4c_1c_2^2 & 0 & 0 & 0 & qc_2 \\ 0 & -q^4c_1c_2^2 & 0 & q^2c_1c_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

行列式：$\det K = q^{12}c_1^5c_2^5$。

$\mathfrak{osp}(2|2)$。下面的公式给出了所有非零 c_1、c_2（包括 $c_1 = c_2$）的一个解：

$$K = \begin{pmatrix} -q^2(c_1+c_2) & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -q^2c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q^2c_1 & 0 \\ -q^4c_1c_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

行列式：$\det K = q^8c_1^2c_2^2$。当 $c_1 \neq c_2$ 时，矩阵 K 可对角化：其特征值 $-q^2c_1$ 和 $-q^2c_2$ 的重数均为 2。当 $c_1 = c_2$ 时，只有一个特征值，并且 K 不可对角化：其若尔当块的大小为 2、1、1。

$\mathfrak{osp}(2|4)$。下面的公式给出了所有非零 c_1、c_2、c_3（包括 $c_2 = c_3$）的一个解：

$$K = \begin{pmatrix} q^3c_1(c_2+c_3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & q^3c_1(c_2+c_3) & 0 & 0 & -qc_1 & 0 \\ 0 & 0 & q^3c_1c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^3c_1c_2 & 0 & 0 \\ 0 & q^5c_1c_2c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q^6c_1^2c_2c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

行列式：$\det K = q^{18}c_1^6c_2^3c_3^3$。当 $c_2 \neq c_3$ 时，矩阵 K 可对角化：其特征值 $q^3c_1c_2$ 和 $q^3c_1c_3$ 的重数均为 3。当 $c_2 = c_3$ 时，只有一个特征值，并且 K 不可对角化：其若尔当块的大小为 2、2、1、1。当 $c_2 = c_3$ 时，中心化子还包含

$$K' = \begin{pmatrix} 0 & q^2c_2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ q^3c_1c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q^5c_1c_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & q^2c_2 \\ 0 & -q^5c_1c_2^2 & 0 & 0 & q^3c_1c_2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad K'^2 = 0.$$

所得结果可表述为以下定理。

定理 2 由公式(12)–(19)给出的矩阵，以及对于 $\mathfrak{so}(4)$的矩阵 X_1, X_2, X_1X_2, 在参数取任意非零值时（对于 $\mathfrak{so}(6)$，对于 $c_2 = c_3$），均与相应余理想子代数的生成元对易，满足反射方程且可逆。在参数取一般值时，中心化子中除表 *4* 所列的解外，不存在其他反射方程的解。对于表中满足条件 $c_1 = c_2$ 或 $c_2 = c_3$ 的行，这指的是相应超曲面上的一般点。由图 *1* 中 *Satake* 图所定义的相应余理想子代数的生成元在表示 V 中的像列于表 *3*。除 $\mathfrak{so}(6)$ 且 $c_2 \neq c_3$的情形可能例外外，这些子代数均为真子代数（命题 *1*）。

5 嘉当项

上文未考虑元素 x_α 中的 Cartan 和项。本节将其加入，重复第4节的计算，并求出经典极限。在 [4, Section 4]中，仅当一个偶根 α 与黑根正交，且满足 $\tilde{\alpha} = \alpha = \tau(\alpha)$ 时，才允许这样的和项。这里对所有节点进行计算。本文的主要结果是定理 3。

5.1 带嘉当项的生成元

对于白根 α，我们设

$$X_\alpha^{(s)} = T_\alpha e_\alpha + c_\alpha F_{\tilde{\alpha}} + s\,(q^{h_{\tilde{\alpha}}} - 1), \qquad s \in \mathbb{C}. \tag{20}$$

由于 $\Delta(q^h - 1) = q^h \otimes (q^h - 1) + (q^h - 1) \otimes 1$，由 (9) 得到

$$\Delta(X_\alpha^{(s)}) = q^{h_{\tilde{\alpha}}} \otimes X_\alpha^{(s)} + T_\alpha e_\alpha \otimes T_\alpha + \left(c_\alpha F_{\tilde{\alpha}} + s\,(q^{h_{\tilde{\alpha}}} - 1)\right) \otimes 1,$$

因此，由元素 (20) 和 $T_\alpha^{\pm 1}$生成的子代数是一个左余理想。

由于 $q \to 1$、$(q-1)s \to \sigma$，元素 $X_\alpha^{(s)}$变为 $x_\alpha + \sigma h_{\tilde{\alpha}}$。由元素 x_β 和 $h_{\tilde{\beta}} - h_\beta$生成的 $\mathfrak{g}$子代数记为 $\mathfrak{k}_\sigma$，其中在一个或多个节点处，x_α 被 $x_\alpha + \sigma_\alpha h_{\tilde{\alpha}}$替换。在 $\sigma = 0$处，它变为 $\mathfrak{k}$。

5.2 K-矩阵

计算遵循第4节的方案：将其中一个生成元 X_α替换为 $X_\alpha^{(s)}$（对于 $\mathfrak{so}$(4)，则将二者都替换，并分别使用独立的 s_1 和 s_2。

对于 $s_2 = 0$ 或 $s_1 = 0$，仅在一个节点上得到嘉当项（本节关于 $\mathfrak{so}(4)$ 的公式在这些情况下仍然有效），而 s 是另一个自由符号。结果汇总于表5中（t 是任意非零数）。$\mathfrak{so}(6)$ 中的节点 α_3、$\mathfrak{osp}(2|4)$ 以及 $\mathfrak{osp}(2|2)$ 中的节点 α_2，分别映射到 τ 所列出的节点，并且对它们的计算得到相同的结果。

（超）代数	作用于.....上的嘉当项	.....的维数 中心化子	.....的解 反射方程
$\mathfrak{so}(3)$	α_1	3	$t\cdot 1$, $tK(s)$
$\mathfrak{so}(5)$	α_1	3	$t\cdot 1$, $tK(s)$
$\mathfrak{so}(5)$	α_2	1	$t\cdot 1$
$\mathfrak{so}(4)$	α_1、α_2、α_1 和 α_2	4	$t\cdot 1$、tK_1、tK_2、tK_1K_2
$\mathfrak{so}(6)$，$c_2 = c_3$	α_1	3	$t\cdot 1$、$tK(s)$
$\mathfrak{so}(6)$，$c_2 = c_3$	α_2	1	$t\cdot 1$
$\mathfrak{osp}(1\|2)$	α_1	1	$t\cdot 1$
$\mathfrak{osp}(1\|4)$	α_1	3	$t\cdot 1$, $tK(s)$
$\mathfrak{osp}(1\|4)$	α_2	1	$t\cdot 1$
$\mathfrak{osp}(2\|2)$	α_1	1	$t\cdot 1$
$\mathfrak{osp}(2\|4)$，$c_2 = c_3$	α_1	3	$t\cdot 1$, $tK(s)$
$\mathfrak{osp}(2\|4)$，$c_2 \neq c_3$	α_1	1	$t\cdot 1$
$\mathfrak{osp}(2\|4)$，$c_2 = c_3$	α_2	1	$t\cdot 1$

表5：嘉当项：中心化子的维数与反射方程的解。

下文中，$K(s)$表示带有嘉当项的非标量解。在$s = 0$ 处，它与第4.3节中的矩阵 K 重合。

$\mathfrak{so}(3)$，α_1上的项：

$$K(s) = \frac{c_1}{q}\cdot 1 - (1-q^{-1})\, s\, X_1^{(s)} - \left(X_1^{(s)}\right)^2 = \begin{pmatrix} -(1-q^{-1})c_1 - (q-1)\omega s^2 & -\omega s & 1 \\ -c_1\omega s & -c_1 & 0 \\ q^{-1}c_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{so}(4)$，两个节点上的项为 s_1、s_2。这里 $X_{(s_1)1}$ $X_{(s_2}$ $= X^{(s_2))}$ $_2$ $X_{(s_1)1}$，解为 K_1、K_2 和 K_1K_2，其中 $K_i = X^{(s_i)}{}_i$ $^2 + (1-q^{-1})\, s_i \cdot 1$：

$$K_1 = \begin{pmatrix} \omega s_1 & 1 & 0 & 0 \\ q^{-1}c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega s_1 & -1 \\ 0 & 0 & -q^{-1}c_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad K_2 = \begin{pmatrix} \omega s_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \omega s_2 & 0 & -1 \\ q^{-1}c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q^{-1}c_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{so}(5)$, α_1上的项:

$$K(s)=\begin{pmatrix} q^{-1}c_2\big((1-q^{-1})c_1-\omega^2 s^2\big) & -q^{-1}c_2\omega s & 0 & -\omega s & 1\\ -q^{-2}c_1c_2\omega s & q^{-1}(1-q^{-1})c_1c_2 & 0 & -q^{-1}c_1 & 0\\ 0 & 0 & q^{-1}c_1c_2 & 0 & 0\\ -q^{-2}c_1c_2^2\omega s & -q^{-2}c_1c_2^2 & 0 & 0 & 0\\ q^{-3}c_1^2c_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{so}(6)$, $c_2=c_3$, α_1 上的项:

$$K(s)=\begin{pmatrix} c_2\big((1-q^{-2})c_1-q^{-1}\omega^2 s^2\big) & -q^{-1}c_2\omega s & 0 & 0 & -\omega s & 1\\ -q^{-2}c_1c_2\omega s & (1-q^{-2})c_1c_2 & 0 & 0 & -q^{-1}c_1 & 0\\ 0 & 0 & c_1c_2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & c_1c_2 & 0 & 0\\ -q^{-1}c_1c_2^2\omega s & -q^{-1}c_1c_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ q^{-2}c_1^2c_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{osp}(1|4)$, α_1 上的项:

$$K(s)=\begin{pmatrix} q^2c_2\big((1+q)c_1+\omega^2 s^2\big) & -q^2c_2\omega s & 0 & \omega s & 1\\ -q^3c_1c_2\omega s & q^2(1+q)c_1c_2 & 0 & -qc_1 & 0\\ 0 & 0 & q^2c_1c_2 & 0 & 0\\ -q^4c_1c_2^2\omega s & q^4c_1c_2^2 & 0 & 0 & 0\\ -q^5c_1^2c_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{osp}(2|4)$, $c_2=c_3$, α_1 上的项:

$$K(s)=\begin{pmatrix} q^2c_2\big(2qc_1+\omega^2 s^2\big) & -q^2c_2\omega s & 0 & 0 & \omega s & 1\\ -q^3c_1c_2\omega s & 2q^3c_1c_2 & 0 & 0 & -qc_1 & 0\\ 0 & 0 & q^3c_1c_2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & q^3c_1c_2 & 0 & 0\\ -q^5c_1c_2^2\omega s & q^5c_1c_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -q^6c_1^2c_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

行列式: $\det K(s)=\det K$, 即 $c_1^3q^{-1}$, $c_1^5c_2^5q^{-7}$, $c_1^6c_2^6q^{-4}$,$q^{12}c_1^5c_2^5$, $q^{18}c_1^6c_2^6$ 分别对应 $\mathfrak{so}(3)$、 $\mathfrak{so}(5)$、 $\mathfrak{so}(6)$、 $\mathfrak{osp}(1|4)$、 $\mathfrak{osp}(2|4)$, 而对于 $\mathfrak{so}(4)$, $\det K_i=c_i^2q^{-2}$ 和 $\det(K_1K_2)=c_1^2c_2^2q^{-4}$。这些行列式不依赖于 s, s_i, 因此对于 s, s_i 的所有取值以及非零的 c_i, 这些矩阵都是可逆的。

5.3 参数的特殊取值

用 $A=\mathrm{End}_{\mathcal{B}}(V)$ 表示中心化子: 它是一个由与 $\mathcal{B}$ 交换的偶矩阵组成的含幺结合代数。用 $\mathrm{rad}\,A$ 表示根基,

也就是说，它是 A 中由幂零元组成的最大理想（两个这样的理想之和仍由幂零元组成，因此最大理想存在）。在所考虑的所有情形中，A 都是交换的（这一点是在下文所考虑的各参数集的一般点处通过计算验证的）。对于交换的 A，根基由其所有幂零元组成。

定义。如果一个命题在不可约集合 Y 的一般点（处于一般位置）成立，那么它在 Y 上除某个真（Zariski）闭子集之外的所有点都成立。在一般点处进行计算，就是在 Y 上的有理函数域中进行计算。设 d 和 r 分别为 Y 的一般点处 $\dim A$ 和 $\dim \operatorname{rad} A$ 的值。若不可约超曲面 $Y' \subset Y$ 满足在 Y' 的一般点处 $\dim A > d$，则称其为第一类特殊值的集合；若在 Y' 的一般点处 $\dim A = d$ 且 $\dim \operatorname{rad} A > r$，则称其为第二类特殊值的集合。

首先，Y 是整个参数空间（在其一般点处，所有情况下 $\operatorname{rad} A = 0$）。然后在找到的集合内部应用相同的定义。这里假定参数 c_i 和 Cartan 项的参数均非零：参数取零值对应于该节点处没有 Cartan 项的情形，这类情形将单独考虑。处处假定 q 不是单位根。

引理。设 $A \subset \operatorname{End}(V)$ 是 $\mathbb{C}$ 上含单位元的子代数，且 $b_1, \dots, b_d$ 是其一组基。则 $\operatorname{rad} A = \{a \in A : \operatorname{tr}(ab) = 0 \text{对所有 } b \in A\}$ 均成立。特别地，$\dim \operatorname{rad} A = d - \operatorname{rank}\big(\operatorname{tr}(b_i b_j)\big)$，且 $\operatorname{rad} A \neq 0$ 当且仅当 $\det\big(\operatorname{tr}(b_i b_j)\big) = 0$。

证明。将右侧的集合记为 I。它是一个子空间，因为条件 $\operatorname{tr}(ab) = 0$ 对 a 是线性的。

设 $a \in \operatorname{rad} A$ 且 $b \in A$。由于 $\operatorname{rad} A$ 是一个理想，$ab \in \operatorname{rad} A$，因此 ab 是幂零的。幂零矩阵的所有特征值均为零，且 $\operatorname{tr}(ab) = 0$。因此 $\operatorname{rad} A \subset I$。

反过来，I 是一个双边理想：若 $a \in I$ 且 $c \in A$，则由迹的循环性，$\operatorname{tr}((ca)b) = \operatorname{tr}(a(bc)) = 0$，且对所有 $b \in A$，$\operatorname{tr}((ac)b) = \operatorname{tr}(a(cb)) = 0$，因为 $bc,\ cb \in A$。下面证明 I 中的元素都是幂零的。设 $a \in I$。由于 A 包含单位元，因此对所有 $k \geqslant 1$，$a^{k-1} \in A$，并且 $p_k := \operatorname{tr}(a^k) = \operatorname{tr}(a \cdot a^{k-1}) = 0$。若 $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ 是 a 的特征值（计入重数），则 $p_k = \sum_i \lambda_i^k$，由牛顿恒等式

$$k\, e_k = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} e_{k-i}\, p_i, \qquad e_0 = 1,$$

其中 e_k 是 $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ 的初等对称多项式，通过归纳法给出 $e_1 = \cdots = e_N = 0$（在 $\mathbb{C}$ 上可以除以 k）。因此

a 的特征多项式等于 λ^N，根据凯莱–哈密顿定理，$a^N = 0$。因此，I 是由幂零元构成的理想，而 $I \subset \operatorname{rad} A$，因为 $\operatorname{rad} A$ 是最大的此类理想。

最后，元素 $a = \sum_i x_i b_i$ 属于 I，当且仅当对于所有 j，都有 $\sum_i x_i \operatorname{tr}(b_i b_j) = 0$。因此，$\operatorname{rad} A = I$ 是矩阵 $\big(\operatorname{tr}(b_i b_j)\big)$ 的核，由此 $\dim \operatorname{rad} A = d - \operatorname{rank}\big(\operatorname{tr}(b_i b_j)\big)$。□

特殊值由 Maple 程序求得。在集合 Y 的一般点处，可以找到中心化子的一个基 $b_1, \dots, b_d$，且 $r = d - \operatorname{rank}\big(\operatorname{tr}(b_i b_j)\big)$（由引理可知）。特殊值的候选项是以下表达式的不可约因子：

1. 线性系统 $KX_i = X_i K$，$KT = TK$ 的系数矩阵的最高阶子式（Bareiss消元的最后一个主元）。在其零点之外，系统的秩以及 $\dim A$ 均不变。2. $\big(\operatorname{tr}(b_i b_j)\big)$ 的最高阶子式的分子和分母。在它们的零点之外，$\dim \operatorname{rad} A$ 不变。3. 基元素 b_k 的分母。在它们的零点之外，该基有定义。

等于参数 c_i、s、s_i 本身的因子会被舍弃，仅依赖于 q 的因子也会被舍弃：这些因子是 $q-1$、$q+1$、q^2+1、q^2+q+1，且它们的根是单位根。在候选值的零点之外，$\dim A$ 和 $\dim \operatorname{rad} A$ 与 Y 的一般点处相同。对于每个候选值 f，将一个线性地进入 f 的参数由方程 $f = 0$ 表示出来（对于所有候选值都找到了这样的参数）。在所得超曲面 $\{f = 0\} \subset Y$ 的一般点处，可以得到 $\dim A$ 和 $\dim \operatorname{rad} A$，随后无论这些数是否发生变化，都会对其重复整个过程。每一步都会使自由参数的数量减少一个，因此该过程是有限的，并且能够找到所有特殊值集合，包括那些包含在已找到集合内部的特殊值集合。该过程针对八个代数的所有节点集合（包括不含嘉当项的集合）都进行了执行。参数 c_i 在此处彼此独立，而 $\mathfrak{so}$ 的条件 $c_2 = c_3$（6）、$2|4$ 的条件 $\mathfrak{osp}$ 以及 $\mathfrak{osp}$ 的条件 $c_1 = c_2$（$2|2$）则作为特殊值获得。

第一类的特殊值 为 $c_2 = c_3$ $\mathfrak{so}(6)$ 和 $\mathfrak{osp}(2|4)$（α_1 不含嘉当项和含嘉当项），以及下文中 $\mathfrak{so}(5)$ 在两个节点上均有项时的超曲面 (21)。除此之外，没有其他解，包括特殊值集合内部也没有。多个节点同时含有项时，只有在 $\mathfrak{so}(4)$（第 5.2 节）和满足条件 (21) 的情况下，中心化子才是非标量的。对于 $\mathfrak{osp}(2|4)$ 在 $c_2 = c_3$ 处不含嘉当项的情形，根基随维数一起变化：$\dim A = 3$，$\dim \operatorname{rad} A = 2$。这里 V 不可分解

在 $\mathcal{B}$ 上（采用表7的记号，$(2|4)^{2,2,1,1}$），反射方程的解仍为第4.3节中的 $t\cdot 1$ 和 tK。

$\mathfrak{so}(5)$，作用于两个节点上的项。我们考虑生成元

$$X_1^{(s)} = X_1 + s\,(q^{h_1}-1), \qquad X_2^{(s_2)} = X_2 + s_2\,(q^{h_2}-1).$$

对于参数的一般取值，中心化子由标量矩阵组成。在超曲面的一般点处

$$c_1 = -(q-1)^2 s^2 \tag{21}$$

它是三维的，其中反射方程的解为$t\cdot 1$ 和 $tK(s,\ s_2)$，其中

$$K(s,s_2) = \begin{pmatrix} \mu - q^{-1}c_2\omega^2 s^2 & -q^{-1}c_2\omega s & q^{-1}(q-1)\omega s s_2 & -\omega s & 1 \\ -q^{-2}c_1c_2\omega s & \mu & q^{-1}c_1\omega s_2 & -q^{-1}c_1 & 0 \\ q^{-2}(q-1)c_1c_2\omega s s_2 & q^{-1}c_1c_2\omega s_2 & q^{-1}c_1c_2 & 0 & 0 \\ -q^{-2}c_1c_2^2\omega s & -q^{-2}c_1c_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ q^{-3}c_1^2c_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\mu = q^{-1}(1-q^{-1})c_1c_2 + q^{-1}(q-1)c_1\omega s_2^2$，且处处有 c_1 通过条件 (21) 与s相关联。对于 $s_2=0$，矩阵 $K(s,\ s_2)$ 与第 5.2 节中的 $K(s)$ 重合。其行列式与 K的行列式相同：$\det K(s,\ s_2) = c_1^5c_2^5q^{-7}$。由于 $q\to 1$，$(q-1)s\to\sigma$，条件 (21) 化为 $c_1=-\sigma^2$。

Re标记。在条件 (21) 下，生成元 $X_1^{(s)}$ 可写为

$$X_1^{(s)} = e_1 - a^2 q^{h_1} f_1 - a\,\frac{q^{h_1}-1}{q-1}, \qquad a = -(q-1)s,$$

也就是说，它具有第3节 [11, 量子电代数生成元的形式1]（该节中，这些生成元是针对 $\mathfrak{sl}$（N）和扭曲反射方程考察的）。其经典极限 $x_1+\sigma h_1 = e_1 - \sigma^2 f_1 + \sigma[e_1,f_1]$ 具有第3节 [11,电李代数生成元的形式 $e_\beta - a_\beta^2 f_\beta - a_\beta[e_\beta,f_\beta]1]$，其中 $a_\beta=-\sigma$（关于电李代数，参见 [12, 13]）。

式（21）中没有第一类特殊值。式（21）中的第二类特殊值见表7。

条件 K下的特征值(21)。任意矩阵$K\in A$在每个不可分解直和项 p_iV上的作用为 $\lambda_i\cdot 1$加上一个幂零矩阵（参见下文“ V的分解”一段）。因此，K 的特征值及其重数与 V在 $\mathcal{B}$上的分解有关。在条件 (21) 下，对于一般的 s_2，我们有 $V=1+2+2$ 和 $\operatorname{rad} A=0$（表 6）。矩阵 $K(s,s_2)$ 可对角化，且具有

three 个特征值，其重数分别为 2、2 和 1，每个直和项上各有一个：

$$K(s,s_2)\sim\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_1 & & & & \\ & & \lambda_2 & & & \\ & & & \lambda_2 & & \\ & & & & \lambda_3 & \end{pmatrix},$$

其中，$\lambda_3=q^{-3}c_1c_2$以及 λ_1、λ_2 是 $t^2-\big(2q^{-1}c_1c_2+q^{-1}(q-1)\omega c_1s_2^2\big)t+q^{-2}c_1^2c_2^2=0$的根。

对于参数的一般取值，并且仅在 α_1上有一个嘉当项时，我们有 $V=3+1+1$。矩阵 $K(s)$有三个特征值，其重数分别为3、1和1；而对于第4.3节中的 K，两个一维直和项上的取值相同，重数则为3和2。

对于 $s_2=0$，即对于仅在 α_1上有一个嘉当项的 $\mathfrak{so}(5)$，条件(21)定义了第二类特殊值（表7）：$V=1+4_{2,\ 1,\ 1}$以及$\dim\operatorname{rad}\ A=1$。矩阵 $K(s)$在此处不可对角化。它在一维直和项上有一个单重特征值，并且有一个重数为4的特征值，其在四维直和项上的若尔当块大小为2、1、1：

$$K(s)\sim\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & & \\ & \lambda & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \lambda & \\ & & & & \lambda_3\end{pmatrix},\qquad \lambda=q^{-1}c_1c_2,\quad \lambda_3=q^{-3}c_1c_2.$$

条件 (21)下的经典极限。当 $q\to 1$时，条件 (21)变为 $c_1=-\sigma^2$。在 $c_1=-\sigma^2$ 处两个节点上都有嘉当项的子代数 $\mathfrak{k}_\sigma$ 同构于 $\mathfrak{gl}(2)$，而 V 在其上的分解为维数分别为 2、2 和 1 的子空间之和。对于参数的一般取值，子代数 $\mathfrak{k}$ 以及在 α_1 上带有一项的子代数 $\mathfrak{k}_\sigma$ 同构于$\mathfrak{so}(3)\oplus\mathfrak{so}(2)\ \cong\mathfrak{gl}(2)$，但 V在它们上的分解为维数分别为 3、1 和 1 的子空间之和。对于仅在$c_1=-\sigma^2$处的 α_1 上带有一项的子代数 $\mathfrak{k}_\sigma$，其导出代数是二维阿贝尔代数。

的分解 V。设 b_1、……、b_d是在所考虑集合的一般点处 A的一组基，并设 $a=t_1b_1+\cdots+t_db_d$，其中 t_j是新的独立符号（ A的一般元）。V的分解如下求得。

1. $V=V_1\oplus\cdots\oplus V_n$分解为 $\mathcal{B}$ 上的子模直和，与一组和为 1 的正交幂等元 $p_1,\dots,p_n\in A$一一对应：p_i是沿着其他直和项对 V_i的投影

。当且仅当 p_i 不能表示为 A中两个非零正交幂等元之和时，直和项 V_i 不可分解。

2. 由于 A 是交换的，根据阿廷–韦德伯恩定理，$A/\mathrm{rad}\ A \cong \mathbb{C}^n$，其中 $n = \dim\ A - \dim \mathrm{rad}\ A$。$A/\mathrm{rad}\, A$ 的本原幂等元唯一提升为正交幂等元 $p_1, \ldots, p_n \in A$，其和为 1，并且每个代数 $p_i A$ 都是局部代数：$p_i A = \mathbb{C}\, p_i \oplus \mathrm{rad}(p_i A)$。因此，$V = \bigoplus_i p_i V$ 是不可分解子模的分解，而且不存在其他此类分解：在交换代数中，正交本原幂等元完备系是唯一的。（对于非交换的 A，分解仅在直和项的同构意义下唯一，这是克鲁尔–施密特定理的结论，见 [9,§3.8]。）

3. 一般元具有形式 $a = \sum_i (\lambda_i p_i + \nu_i)$，其中 λ_i 两两不同，且 $\nu_i \in p_i A$ 幂零。在 $p_i V$ 上，矩阵 $a - \lambda_i$ 是幂零的；而在满足 $j \neq i$ 的 $p_j V$ 上，它是可逆的。因此，直和项 $p_i V$ 恰好是 a 的广义特征空间，并且这样的空间恰有 n 个。

4. 任意矩阵 $K \in A$ 也具有形式 $\sum_i (\lambda_i(K) p_i + \nu_i(K))$，但不同直和项上的数值 $\lambda_i(K)$可能相同，且幂零部分可能小于一般元的幂零部分。若 $\mathrm{rad}\, A = 0$，则 $A \cong \mathbb{C}^{\dim A}$，所有 ν_i 均为零，每个矩阵 $K \in A$ 都可对角化，且这些直和项两两不同构，也就是说，V 在 $\mathcal{B}$ 上分解时不存在重数。

直和项的确定方法如下。将a 的特征多项式在参数及 t_j所生成的有理函数域上分解为不可约因子：$\chi_a = \prod_k g_k^{m_k}$。因子 g_k 的每个根 λ 都给出直和项 $\ker(a - \lambda)^{m_k}$，其维数为 m_k。若 $\deg g_k = \ell > 1$，则这些 ℓ 根互为共轭，其对应的直和项以相同方式排列。通过秩$R_j = \mathrm{rank}\ g_k(a)^j$ 可确定 a在这些直和项上的若尔当块：对于 g_k的每个根，大小为 j的块数等于 $(R_{j-1} - 2R_j + R_{j+1})/\ell$。事实上，在对应于 g_k的根λ 的直和项上，矩阵 $g_k(a)$与 $a - \lambda$ 相差一个可逆因子；而在对应于其他因子的直和项上，矩阵 $g_k(a)$ $g_{k'}$ 可逆。对应于 g_k的各个 ℓ 根的直和项贡献相同，因此 $R_j = \dim\ V - \ell m_k + \ell \rho_j$，其中 $\rho_j = \mathrm{rank}(a-\lambda)^j$ 表示该直和项上的秩，而 $\rho_{j-1} - \rho_j$是大小至少为 j的块数。对于超代数，$g_k(a)^{m_k}$ 是一个偶矩阵。其核是 ℓ 直和项之和，且每个直和项的偶部分维数为 $(n_0 -$

rank P_0)/ℓ，其中 $n_0 =$ dim $V_{\bar{0}}$，而 P_0 是矩阵 $g_k(a)^{m_k}$在 $V_{\bar{0}}$上的块。若一个超维数为 $(m_0|m_1)$（对于 $\mathfrak{so}(n)$，维数为m）的直和项上，a 的若尔当块大小为 $j_1 \geqslant j_2 \geqslant \ldots$ 且不全为 1，则记作 $(m_0|m_1)_{j_1,\ j_2,\ \ldots\ldots}$（分别记作$m_{j_1,\ j_2,\ \ldots\ldots}$）。例如，$4_{2,1,1}$是一个维数为 4 的直和项，其块大小为 2、1、1。在每种情况下，所找到的直和项数都等于 dim $A -$ dim rad A。一般点处直和项的超维数见表 6:

代数	嘉当项在	维数 A	V的分解
$\mathfrak{so}(3)$	无，α_1	3	$1+1+1$
$\mathfrak{so}(4)$	无，α_1、α_2、α_1 和 α_2	4	$1+1+1+1$
$\mathfrak{so}(5)$	无，α_1	3	$3+1+1$
$\mathfrak{so}(5)$, (21)	α_1 和 α_2	3	$1+2+2$
$\mathfrak{so}(6)$，$c_2 = c_3$	无，α_1	3	$4+1+1$
$\mathfrak{osp}(1\|2)$	none	2	$(1\|1) + (0\|1)$
$\mathfrak{osp}(1\|4)$	无，α_1	3	$(1\|2) + (0\|1) + (0\|1)$
$\mathfrak{osp}(2\|2)$，$c_1 \neq c_2$	none	2	$(1\|1) + (1\|1)$
$\mathfrak{osp}(2\|4)$，$c_2 \neq c_3$	none	2	$(1\|2) + (1\|2)$
$\mathfrak{osp}(2\|4)$、$c_2 = c_3$	α_1	3	$(2\|2) + (0\|1) + (0\|1)$

表 6 ：参数的一般取值下，V 在 $\mathcal{B}$ 上的分解 .

在其余情况下，一般点处的中心化子由数量矩阵组成，并且 V 在 $\mathcal{B}$上是不可分解的。

第二类特殊值列于表7中。在表中的每个超曲面上，dim rad $A = 1$，但 $\mathfrak{so}(4)$除外，此时dim rad $A = 2$。在这里，V分解中的两个直和项被替换为一个直和项，在该直和项上，A 的一般元不可对角化（对于$\mathfrak{so}(4)$，这发生在两对直和项上）。对于 $\mathfrak{so}(4)$，超曲面 $4qc_i = -(q^2-1)^2 s_i^2$ 对于仅在 α_i 上的一项和对于同时位于两个节点上的项是相同的。在表中的超曲面内部，新特殊值仅在 $\mathfrak{so}(4)$具有位于两个节点上的项时出现：在两个超曲面的交集处，dim $A = 4$，dim rad $A = 3$，并且 V是不可分解的（表7中 $\mathfrak{so}(4)$的最后一行）。最后一列给出了当 $q \to 1$、$(q-1)s \to \sigma$、$(q-1)s_i \to \sigma_i$时该条件的极限。对于 $\mathfrak{so}(3)$，表中的条件与矩阵 $K(s)$的特征多项式有关:

$$\det\big(K(s) - t\big) = -\big(t - q^{-1}c_1\big)\big(t^2 + (2c_1 + (q-1)\omega s^2)\, t + c_1^2\big).$$

第一个条件是判别式 $(q-1)\omega s^2\big(4c_1 + (q-1)\omega s^2\big)$ 的二次因子为零，第二个条件是该因子具有根 $q^{-1}c_1$。

代数，Cartan项条件		V的分解	极限
$\mathfrak{so}(3)$，α_1	$4qc_1 = -(q-1)^2(q+1)s^2$	$1+2_2$	$c_1 = -\sigma^2/2$
	$(q+1)c_1 = -(q-1)^2 s^2$	$1+2_2$	$c_1 = -\sigma^2/2$
$\mathfrak{so}(4)$，α_i 或 α_1，α_2	$4qc_i = -(q^2-1)^2 s_i^2$	2_2+2_2	$c_i = -\sigma_i^2$
	$i=1$ 对于 $i=2$ 4也是如此	$_{3,1}$	$c_i = -\sigma_i^2$
$\mathfrak{so}(5)$，α_1	$4qc_1 = -(q^2-1)^2 s^2$	$3+2_2$	$c_1 = -\sigma^2$
	$c_1 = -(q-1)^2 s^2$	$1+4_{2,1,1}$	$c_1 = -\sigma^2$
$\mathfrak{so}(5)$、(21)、α_1 和 α_2	$4qc_2 = -(q-1)^2(q+1)s_2^2$	$1+4_{2,2}$	$c_2 = -\sigma_2^2/2$
	$(q+1)c_2 = qs_2^2$	$2+3_{2,1}$	none
$\mathfrak{so}(6)$、$c_2=c_3$、α_1	$4qc_1 = -(q^2-1)^2 s^2$	$4+2_2$	$c_1 = -\sigma^2$
	$(q^2+1)^2 c_1 = -q(q^2-1)^2 s^2$	$1+5_{2,1,1,1}$	$c_1 = -\sigma^2$
$\mathfrak{osp}(1\|4)$，α_1	$4q^3 c_1 = -(q^2-1)^2 s^2$	$(1\|2)+(0\|2)_2$	$c_1 = -\sigma^2$
	$q^2 c_1 = (q+1)^2 s^2$	$(0\|1)+(1\|3)_{2,1,1}$	none
$\mathfrak{osp}(2\|2)$，无	$c_1 = c_2$	$(2\|2)_{2,1,1}$	—
$\mathfrak{osp}(2\|4)$，$c_2=c_3$，α_1	$4q^3 c_1 = -(q^2-1)^2 s^2$	$(2\|2)+(0\|2)_2$	$c_1 = -\sigma^2$

表7：第二类特殊值以及在相应集合的一般点处分解 V 的情况。$\mathfrak{so}(4)$ 的第二行是两个超曲面的交集，其项位于两个节点上（余维 2）。

在标记为“无”的两种情况下，在所示的极限变换下，c_i 的值无限增长。

特殊值集合上的K-矩阵。在每个特殊值集合的一般点处，按照第4节的方案重新求解反射方程。在每个第二类集合上，解与环境集合的一般点处的相同，只需代入条件：$t\cdot 1$ 和 $tK(s)$（对于条件 (21)中的 $\mathfrak{so}(5)$，这些条件为 $t\cdot 1$ 和$tK(s,\ s_2)$；对于 $c_1=c_2$ 处的 $\mathfrak{osp}(2|2)$，这些条件为第4.3节中的 $t\cdot 1$ 和 tK；对于 $\mathfrak{so}(4)$，这些条件为 $t\cdot 1$、tK_1、tK_2、tK_1K_2）。不存在其他解。它们的行列式是在代入条件后得到的相同单项式，因此这些矩阵是可逆的。矩阵 $K(s)$（分别为 $K(s,\ s_2)$或 K；对于 $\mathfrak{so}(4)$，则为矩阵K_1K_2）在表7中每个集合的一般点处的若尔当块，与 A的一般元的若尔当块相同，也就是说，它们由“ V的分解”一列给出。特别地，该矩阵不可对角化。对于 $\mathfrak{so}(4)$，在超曲面 $4qc_1=-(q^2-1)^2s_1^2$ 上，矩阵 K_1 有一个特征值及两个大小为2的块，而 K_2 可对角化。在两个超曲面的交集处，K_1 和 K_2 各自都有一个特征值及两个大小为2的块。在第一类集合上，新解为 K 以及 $K(s)$（对于 $c_2=c_3$处的$\mathfrak{so}(6)$）、$K(s)$（对于 $c_2=c_3$处的 $\mathfrak{osp}(2|4)$）以及满足条件 (21)时的 $K(s,\ s_2)$（对于 $\mathfrak{so}(5)$）。

我们将第5.2节和第5.3节的结果表述为一个定理。

定理 3 将 *Cartan* 项(20) 加到某个节点的生成元上。对于参数的一般取值，中心化子的维数以及反射方程的所有解均列于表*5*中（对于带有条件 $c_2 = c_3$ 的行，则取该超曲面上的一般点），非标量解在第 *5.2* 节中明确写出。如果将具有彼此独立参数的 *Cartan* 项加到多个节点的生成元上，那么对于参数的一般取值，仅当 $\mathfrak{so}(4)$ 时，中心化子才是非标量的。此外，在超曲面 $c_1 = -(q-1)^2 s^2$ 的一般点处，当 $\mathfrak{so}(5)$ 时，中心化子也是非标量的，此时反射方程的解为 $t \cdot 1$和 $tK(s, s_2)$。除 $c_2 = c_3$ （对于 $\mathfrak{so}(6)$ 和 $\mathfrak{osp}(2|4)$）之外，不存在其他第一类特殊值，包括特殊值集合内部的情形。对于 *Cartan* 项参数的所有取值以及非零 c_i，所有非标量解均可逆。

命题 4 在表 *6* 的情形下，对于参数的一般取值，中心化子 A 是交换的且半单的，并且 V 在 $\mathcal{B}$ 上分解且没有重数，如表 *6* 所示。这些情形中第二类特殊值的集合（对于 $\mathfrak{so}(5)$ 中两个节点上都有项的情形，在 (21)内）已由表*7*穷尽：它们是超曲面；而对于 $\mathfrak{so}(4)$ 中两个节点上都有项的情形，则是这些超曲面的交集。在这些集合的每个一般点处， A 是交换的， V 的分解见表*7*，并且中心化子中反射方程的解可通过将该条件代入环境集合的一般点处的解而得到。不存在其他解。在其余情形中（一般点处的中心化子是标量的），除第一类的集合外，不存在特殊值。

5.4 经典极限

子代数 $\mathfrak{k}$ 和 $\mathfrak{k}_\sigma$ 是通过对生成元应用超交换子构造的分次闭包（生成元的偶部和奇部是分别取的）。计算以一般形式进行： c_i、 σ 和 σ_2 （当两节点上都有项时， α_2 上的项的参数）保持为符号，并在由它们构成的有理函数域上求秩和维数；也就是说，结果对应于参数的一般取值。我们将 $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$ 记为导出代数，将 H_1（$\mathfrak{k}$） $= \mathfrak{k}/[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$ 记为第一同调，将 Z（$\mathfrak{k}$）记为代数 $\mathfrak{k}$的中心，将 C（$\cdot$）记为 End(V)中的偶中心化子，并将 rad C（$\cdot$）记为其根基（根据第 5.3 节的引理求得）。 $\mathfrak{k}$ 和 $\mathfrak{k}_\sigma$的生成元、参数条件以及 K-矩阵的极限，均可通过代换 $s = \sigma/$（$q-1$）从量子情形得到（以及

$s_i = \sigma_i/$（$q-1$）），并取极限 $q \to 1$。生成元 $T = q^h$在此处变为 h（$(T-1)/(q-1)$ 的极限）。结果汇总于表8、表9和表10中。

代数	$\mathfrak{g}$维上的嘉当项		$\mathfrak{k}$ 维	$\mathfrak{k}_\sigma$维	$[\mathfrak{k},\mathfrak{k}]$ 维	H_1维（$\mathfrak{k}$）	$x_\alpha \in [\mathfrak{k},\mathfrak{k}]$
$\mathfrak{so}$（3）	α_1	3	1	1	0	1	no
$\mathfrak{so}$（4）	α_1 和 α_2	6	2	2	0	2	no
$\mathfrak{so}(5)$	α_1	10	4	4	3	1	no
$\mathfrak{so}(5)$	α_2	10	4	10	3	1	yes
$\mathfrak{so}(5)$, $c_1 = -\sigma^2$	α_1 和 α_2	10	4	4	2	2	no
$\mathfrak{so}(6)$, $c_2 = c_3$	α_1	15	7	7	6	1	no
$\mathfrak{so}(6)$, $c_2 = c_3$	α_2	15	7	15	6	1	yes
$\mathfrak{so}(6)$, $c_2 \neq c_3$	无项	15	15	15	15	0	yes
$\mathfrak{osp}$（$1|2$）	α_1（奇数）	5	2	5	1	1	no
$\mathfrak{osp}$（$1|4$）	α_1	14	6	6	5	1	no
$\mathfrak{osp}(1|4)$	α_2（奇）	14	6	14	5	1	yes
$\mathfrak{osp}(2|2)$	α_1（奇）	8	4	8	3	1	yes
$\mathfrak{osp}(2|4)$, $c_2 = c_3$	α_1	19	9	9	7	2	no
$\mathfrak{osp}$（$2|4$），$c_2 = c_3$	α_2（奇数）	19	9	19	7	2	yes
$\mathfrak{osp}$（$2|4$），$c_2 \neq c_3$	α_1	19	9	19	8	1	yes

表8：经典极限：$\mathfrak{k}$、$\mathfrak{k}_\sigma$、导出代数和 $H_1(\mathfrak{k})$的维数。在 $\mathfrak{so}(5)$这一行中，$c_1 = -\sigma^2$、$\mathfrak{k}$ 表示在α_1上带有项 σh_1 的子代数，$\mathfrak{k}_\sigma$ 表示在 α_2上添加项 $\sigma_2 h_2$ 后的同一子代数，以及$x_\alpha = x_2$。

代数	维数为 $Z(\mathfrak{k})$	$Z(\mathfrak{k}) \oplus [\mathfrak{k},\mathfrak{k}] = \mathfrak{k}$	维 $C(\mathfrak{k})$	的嘉当项	$\dim C(\mathfrak{k}_\sigma)$	极限 of K
$\mathfrak{so}(3)$	α_1	1	yes	3	3	yes
$\mathfrak{so}(4)$	α_1 和 α_2	2	yes	4	4	yes
$\mathfrak{so}(5)$	α_1	1	yes	3	3	yes
$\mathfrak{so}(5)$	α_2	1	yes	3	1	—
$\mathfrak{so}(5)$, $c_1 = -\sigma^2$	α_1 和 α_2	1	no	3	3	yes
$\mathfrak{so}(6)$, $c_2 = c_3$	α_1	1	yes	3	3	yes
$\mathfrak{so}(6)$, $c_2 = c_3$	α_2	1	yes	3	1	—
$\mathfrak{so}(6)$, $c_2 \neq c_3$	无项	0	yes	1	1	—
$\mathfrak{osp}(1\|2)$	α_1	1	no	2	1	—
$\mathfrak{osp}(1\|4)$	α_1	1	no	3	3	yes
$\mathfrak{osp}(1\|4)$	α_2	1	no	3	1	—
$\mathfrak{osp}(2\|2)$	α_1	1	no	2	1	—
$\mathfrak{osp}(2\|4)$, $c_2 = c_3$	α_1	1	no	3	3	yes
$\mathfrak{osp}(2\|4)$, $c_2 = c_3$	α_2	1	no	3	1	—
$\mathfrak{osp}(2\|4)$, $c_2 \neq c_3$	α_1	1	yes	2	1	—

表9： $K(s)$的中心、偶中心化子及极限。最后一列表示当 $q \to 1$时， $K(s)$的极限（$q-1$）$s \to \sigma$是否与$\mathfrak{k}_\sigma$ 对易（对于 $\mathfrak{so}(4)$，则表示 K_1 和 K_2的极限）。在 $c_1 = -\sigma^2$这一行中，这是 $K(s, s_2)$的极限，（$q-1$）$s_2 \to \sigma_2$。

对于 $\mathfrak{so}(4)$，无论仅在 α_1 还是仅在 α_2 上有嘉当项，表8和表9中的所有量都与同时在两个节点上有项的行 $\mathfrak{so}(4)$相同。表9所有行中， $C(\mathfrak{k}_\sigma)$ 的根基均为零。 $C(\mathfrak{k})$ 的根基在以下各行中非零： $\mathfrak{osp}(1|2)$（$\dim \operatorname{rad} C(\mathfrak{k}) = 1$）、$\mathfrak{osp}(1|4)$（维数为2）、$\mathfrak{osp}(2|4)$ 在 $c_2 = c_3$ （维数为2）以及 $\mathfrak{so}(5)$、$c_1 = -\sigma^2$ （维数为2）。其余各行中根基均为零。

特殊取值的极限。在表7中每个集合的极限的一般点处（条件的极限见同一表），我们得到 $\mathfrak{k}_\sigma$、 $C(\mathfrak{k}_\sigma)$ 以及 V 关于 $\mathfrak{k}_\sigma$ 的分解。结果见表10。表7中标记为“none”的两行没有极限。在每个极限的一般点处， $\mathfrak{k}_\sigma$ 和 $C(\mathfrak{k}_\sigma)$ 的维数与环境集合的一般点处相同。表7中具有相同极限条件的两个超曲面（对于 $\mathfrak{so}(3)$、对于带有 α_1 上一项的 $\mathfrak{so}(5)$ 以及对于 $\mathfrak{so}(6)$）变为同一个集合，并且在其一般点处 $\dim \operatorname{rad} C(\mathfrak{k}_\sigma) = 2$，而 V 关于 $\mathfrak{k}_\sigma$ 是不可分解的。在其余各行中， V 关于 $\mathfrak{k}_\sigma$ 的分解与表7中关于 $\mathcal{B}$ 的分解相同。在每个极限的一般点处， K- 矩阵的极限与 $\mathfrak{k}_\sigma$ 对易，并且 $K(s)$ 的极限的若尔当块（分别为 $K(s,\ s_2)$ 或 K，以及对于 $\mathfrak{so}(4)$，K_1K_2 的极限的若尔当块）与 $C(\mathfrak{k}_\sigma)$ 的一般元的若尔当块相同，也就是说，它们列于表10的最后一列。在表10除 $\mathfrak{osp}(2|2)$ 之外的所有行中，极限条件恰好是这样的条件：对于参数进入该条件的每个节点 α

其生成元 $x_\alpha + \sigma h_{\tilde{\alpha}}$ 具有 $e_\alpha - a^2 f_\alpha - a[e_\alpha, f_\alpha]$ 的形式，即电李代数 [11, 第 3 节中生成元的形式 1] （另见 [12, 13]），其中 $a = \pm\sigma$。对于 $\mathfrak{so}$(3) 以及 $\mathfrak{so}$(5) 中的节点 α_2，其中 $[[e_\alpha, f_\alpha], e_\alpha] = e_\alpha$，在此公式中将 f_α 替换为 $2f_\alpha$，并且 $a = -\sigma/2$。在这种情况下，$x_\alpha + \sigma h_{\tilde{\alpha}}$ 是幂零的，而对于参数的一般取值，它是半单的。对于在 $c_2 = c_3$ 处没有 Cartan 项的 $\mathfrak{osp}(2|4)$，经典极限中的情形与量子情形相同：dim $C(\mathfrak{k})$ $= 3$，dim rad $C(\mathfrak{k})$ $= 2$，并且 V 关于 $\mathfrak{k}$ 是不可分解的，$(2|4)^{2,2,1,1}$。

代数，条件极限上的嘉当项	dim $C(\mathfrak{k}_\sigma)$	dim rad $C(\mathfrak{k}_\sigma)$	Vover $\mathfrak{k}_\sigma$	
$\mathfrak{so}$(3)， α_1	$c_1 = -\sigma^2/2$	3	2	3_3
$\mathfrak{so}$(4)， α_i 或 α_1， α_2	$c_i = -\sigma_i^2$	4	2	$2_2 + 2_2$
$\mathfrak{so}$(4)， α_1 和 α_2	$c_1 = -\sigma_1^2$， $c_2 = -\sigma_2^2$	4	3	$4_{3,1}$
$\mathfrak{so}$(5)， α_1	$c_1 = -\sigma^2$	3	2	$5_{3,1,1}$
$\mathfrak{so}$(5)、(21)、 α_1 和 α_2	$c_2 = -\sigma_2^2/2$	3	1	$1 + 4_{2,2}$
$\mathfrak{so}$(6)、 $c_2 = c_3$、 α_1	$c_1 = -\sigma^2$	3	2	$6_{3,1,1,1}$
$\mathfrak{osp}$(1|4)、 α_1	$c_1 = -\sigma^2$	3	1	$(1\|2) + (0\|2)_2$
$\mathfrak{osp}$(2|2)，无项	$c_1 = c_2$	2	1	$(2\|2)^{2,1,1}$
$\mathfrak{osp}$(2|4)， $c_2 = c_3$, α_1	$c_1 = -\sigma^2$	3	1	$(2\|2) + (0\|2)_2$

表10：第二类特殊值的经典极限：表7中的条件的极限、中心化子 $C(\mathfrak{k}_\sigma)$，以及在该极限的一般点处 V 在 $\mathfrak{k}_\sigma$ 上的分解。对于带有 α_1 上一项的 $\mathfrak{so}$(3)、 $\mathfrak{so}$(5) 和 $\mathfrak{so}$(6)，表7中的两个超曲面都会转化为此极限。

5.5 观察

节点 α 上的嘉当项称为可容许的，如果存在一个带有该嘉当项的非标量 K-矩阵。

观察。在表8的所有情形中，子代数 $\mathfrak{k}_\sigma$ 与 $\mathfrak{g}$ 不同，当且仅当 x_α 为偶数且 $x_\alpha \notin [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$，也就是说，$x_\alpha$ 在 $H_1(\mathfrak{k}) = \mathfrak{k}/[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$ 中的类非零。此外，α 上的嘉当项可容许，当且仅当 $\mathfrak{k}_\sigma \neq \mathfrak{g}$ （表5和表8；对于行 $\mathfrak{so}$(5)，参见 $c_1 = -\sigma^2$、第 5.3 节）。

致谢。

本工作在 MIPT 纯数学中心完成。作者 E. A. Ryzhkin 和 V. A. Stukopin 获得俄罗斯科学基金会编号为26-11-00115的资助。

参考文献

[1] G. Letzter, 《量子包络代数的对称对》, 《代数杂志》**220** (1999), 729–767.[2] S. Kolb, 《量子对称对与反射方程》, 《代数与表示理论》**11**(2008), 519–544.[3]S. Kolb, 《量子对称 Kac–Moody 对》, 《数学进展》**267**(2014), 395–469; arXiv:1207.6036.[4]D. Algethami, A. Mudrov, V. Stukopin, 《量子超球面对》, 《代数杂志》**674**(2025), 276–313; arXiv:2407.19477.[5] D. Algethami, A. Mudrov, V. Stukopin, 《GL 型分次反射方程的解》, 《数学物理通讯》**114** (2024), 22.[6] D. Algethami, A. Mudrov, 《分次扭曲反射方程的解：任意-型的完全分类 $\mathbb{Z}_2$分次》, arXiv:2610.02463 (2026).[7]Y. Shen, W. Wang, 《基本类型的量子超对称对》, 《数学物理通讯》**406** (2025), no. 8, Paper No. 187; arXiv:2408.02874.[8] A. Klimyk, K. Schm¨udgen, 《量子群及其表示》, Springer, 柏林, 1997.[9] P. Etingof, O. Golberg, S. Hensel, T. Liu, A. Schwendner, D. Vaintrob, E. Yudovina, 《表示论导论》, Student Mathematical Library, 第59卷, 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, 2011.[10] S.-J. Cheng, W. Wang, 《李超代数的对偶与表示》, Graduate Studies in Mathematics, 第144卷, 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, 2012.[11]D. Algethami, A. Mudrov, V. Stukopin, 《电量子群》, arXiv:2611.02100 (2026).[12] T. Lam, P. Pylyavskyy, 《电网络与李理论》, 《代数与数论》**9** (2015), no. 6, 1401–1418.[13] A. Berenstein, A. Gainutdinov, V. Gorbounov, 《广义电李代数》, 《数学进展》**478** (2025), 110405; arXiv:2405.02956.

[14]H. Yamane, 与单李超代数相关的量子包络代数及其通用 R-矩阵, 京都大学数理解析研究所出版物**30** (1994),15–87.