arXiv:2611.28785v1 [math.AT] 21 Nov 2026

塞弗特–范坎彭定理

一篇包含应用的自成体系论述

Djamel AIT-AKLI

2026年11月24日

摘要

塞弗特–范坎彭定理利用由两个道路连通子空间构成的开覆盖来计算空间的基本群，前提是它们的交集道路连通。本文对该定理作了完整自足的阐述，说明其在群范畴中的推出这一泛性质表述，并推导出若干标准计算。文中特别关注基点、道路连通性的作用，以及如何从拓扑分解过渡到群表示。本文旨在阐释这一经典结果，并不声称提出了新的定理。

2020年数学主题分类： 55Q05,20E05.
关键词： 基本群、合并自由积、Seifert–van Kampen 定理、楔和、细胞粘接。

目录

1 引言 2 **2 基本群与群的推出 2** **3 定理陈述 2**

4 证明 **3**
4.1 满射性 .3 4.2 单射性 .3

5 应用
4 5.1 两个圆的楔和的基本群 .4 5.2 圆的基本群 .4 5.3 球面的基本群 .5 5.4 曲面群的一个表示 .5 **6 概念性解释 5** **7 后续方向 5** **8 结论 6**

1 引言

基本群是最早能够检测非平凡整体拓扑的拓扑不变量之一。它的定义涉及以某点为基点的环路，以及这些环路之间的同伦。直接对空间中的所有环路进行分类往往很困难。塞弗特–范坎彭定理提供了一种强有力的替代方法：如果一个空间可分解为两个合适的开子集，那么就可以根据这两个子集及其交集的基本群重构该空间的基本群。

定理中出现的代数构造是带合并的自由积。如果两个群都接收来自第三个群的同态，那么它们的推出就是通过施加恰当的关系，使公共群中每个元素在两个群中的像相等而得到的群。该定理表明，这个代数推出刻画了并集的基本群。

全文中我们都使用带基点空间和连续映射。除非另有说明，在需要确保所选开集及其交集具有所述路径连通性时，我们假设所有空间都是局部道路连通的。主定理所用的精确假设将在文中明确给出。

2 基本群与群的推出

定义 2.1. 设 (X, x_0) 是一个带基点拓扑空间。在 x_0 处的环路是一个连续映射 $\gamma : [0,1] \to X$，满足 $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$。如果两个环路之间存在一条同伦，且同伦过程中端点始终等于 x_0，则称这两个环路基点同伦。环路的基点同伦类构成的集合在由拼接诱导的乘法下形成基本群$\pi_1(X, x_0)$。

对于连续的基点映射 $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$，复合诱导出一个同态

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0).$$

若 $A \subseteq X$ 且 $x_0 \in A$，包含映射诱导出一个同态 $\pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$。

定义 2.2。设 G_0，G_1，G_2 是群，并设 $\varphi_1 : G_0 \to G_1$ 和 $\varphi_2 : G_0 \to G_2$ 是同态。该图在群范畴中的一个推出是一个群 P，连同同态 $j_1 : G_1 \to P$ 和 $j_2 : G_2 \to P$，使得 $j_1\varphi_1 = j_2\varphi_2$，并满足以下泛性质：对于任意群 H 以及满足 $u_1\varphi_1 = u_2\varphi_2$ 的同态 $u_1 : G_1 \to H$、$u_2 : G_2 \to H$，存在唯一的同态 $u : P \to H$，使得对于 $i = 1, 2$，$uj_i = u_i$。

该推出存在，记作 $G_1 *_{G_0} G_2$。具体而言，它是自由积 $G_1 * G_2$ 按由.....生成的正规子群取商所得的商群

$$\varphi_1(g)\varphi_2(g)^{-1}, \qquad g \in G_0,$$

whe其中，两个因子被视为它们在自由积中的典范像。因此 s

$$G_1 *_{G_0} G_2 \cong (G_1 * G_2) / \left\langle\!\left\langle \varphi_1(g)\varphi_2(g)^{-1} : g \in G_0 \right\rangle\!\right\rangle.$$

3 定理的陈述

定理 3.1 (塞弗特–范坎彭**)**。 设 $X = U \cup V$，其中 U 和 V 是 X的开且道路连通子空间。假设 $U \cap V$ 非空且道路连通。

选取一个基点 $x_0 \in U \cap V$。那么由包含映射诱导的同态，

$$\pi_1(U \cap V, x_0) \longrightarrow \pi_1(U, x_0), \qquad \pi_1(U \cap V, x_0) \longrightarrow \pi_1(V, x_0),$$

使下图在群范畴中成为一个推出：

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U \cap V, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(U, x_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(V, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(X, x_0). \end{array}$$

等价地，

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(U, x_0) *_{\pi_1(U \cap V, x_0)} \pi_1(V, x_0).$$

在标准证明中，开性假设十分重要，因为它们允许将紧区间或正方形上的道路或同伦细分为足够小的片段，使每个片段都落在覆盖的某个成员中。还有更一般的版本，但上述表述正是下文应用中所采用的版本。

4 证明

证明。 我们证明泛性质。设

$$G = \pi_1(U, x_0) *_{\pi_1(U \cap V, x_0)} \pi_1(V, x_0).$$

U 和 V 到 X 中的包含映射诱导出到 $\pi_1(X,\ x_0)$的同态。它们在 $\pi_1(U \cap V,\ x_0)$上的限制相同，因此推出的泛性质给出了一个同态

$$\Phi : G \longrightarrow \pi_1(X, x_0).$$

我们证明 Φ是一个同构。

4.1 满射性

设 $[\gamma] \in \pi_1(X,\ x_0)$ 由一个环路 $\gamma\colon [0,1] \to X$ 表示。由于 $[0,1]$ 是紧致的，且$\{\gamma^{-1}(U)\ \gamma^{-1}(V)\}$ 是一个开覆盖，勒贝格数引理给出一个细分

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$$

使得每个子区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 都完全映入 U 或 V。

在所选成员发生变化的细分点处，点 $\gamma(t_i)$ 属于 $U \cap V$。由于 $U \cap V$是道路连通的，选取一条位于 $U \cap V$中的道路，从 x_0 连接到每个这样的过渡点。并在两个端点处使用以 x_0 为基点的常值道路。这些连接道路将原环路（在基点保留同伦意义下）表示为若干个环路的乘积，其中每个环路都完全位于 U 或完全位于 V中：在每个细分点处插入一条道路，随后接上它的反向道路。因此， $[\gamma]$属于 Φ的像。由此， Φ 是满射。

4.2 单射性

我们对同伦使用标准的细分论证。设 G 中的一个元素可表示为如下乘积

$$[g_1][h_1] \cdots [g_r][h_r],$$

其中每个 g_i 都是 U 中的一个环路，每个 h_i 都是 V中的一个环路；按通常约定，因子可以缺省。假设它在 Φ下的像是恒等元。那么相应的拼接环路 γ 在 X中基于基点零伦；令

$$H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$$

是一个基点保留零伦，其中 $H(s,\ 0) = \gamma(s)$，$H(s,\ 1) = x_0$，且 $H(0,\ t) = H(1,\ t) = x_0$。

逆像 $H^{-1}(U)$ 和 $H^{-1}(V)$ 构成紧方形的开覆盖。根据勒贝格数引理，选取足够精细的矩形细分，使得每个小矩形的像都包含在 U 或 V 中。沿着不同类型矩形共享的边，其像包含在 $U \cap V$ 中。

读取每个小矩形的边界，可得到相应群中边路径之间的一个关系。若矩形映入 U，则在将边界沿着连通交集中的道路（必要时）运送到基点之后，这是 $\pi_1(U,\ x_0)$ 中的一个关系；若其映入 V，则这是 $\pi_1(V,\ x_0)$ 中的一个关系。公共边上的关系在融合积中是一致的，因为 $U \cap V$ 中每个环路的两个副本都在那里被识别。将整个网格中的矩形关系相乘时，每条内部边都会与反向 traversed 的同一条边相消。剩下的外边界就是原环路以及常值道路。由此可知，原词在 G 中是平凡的。

因此$\mathrm{Ker}(\Phi)$是平凡的，并且 Φ是单射。这证明了定理 3.1。 □

注4.1：单射性论证通常使用同伦方形的网格细分来表述。为了明确每一次基点传输，可以在$U \cap V$中选择从 x_0 到位于界面上的顶点的道路，并用这些道路对相应的边环路取共轭。所得的关系正是融合关系。这就是泛性质证明的几何内涵。

5 应用

5.1 两个圆的楔和的基本群

设 $X = S^1 \vee S^1$ 为两个圆的楔和，楔点为 x_0。选择两个圆的开邻域 U 和 V，并在楔点附近略作扩张，使得 U 变形收缩到第一个圆，V 变形收缩到第二个圆，而 $U \cap V$ 是可缩的。由定理可得

$$\pi_1(S^1 \vee S^1, x_0) \cong \pi_1(S^1, x_0) * \pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

两个无限循环群的自由积是由 F_2 个生成元生成的自由群。更一般地，n 个圆的楔和的基本群是由 F_n生成的自由群。

5.2 圆的基本群

为完整起见，标准计算 $\pi_1(S^1,\ 1) \cong \mathbb{Z}$ 可由覆盖映射 $p :\ \mathbb{R} \to S^1,\ p(t) = e^{2\pi i t}$得到。以 1 为基点的环路有唯一一个从 0 出发的提升，其端点为整数。在基点保留同伦下，端点保持不变；在拼接下，端点具有可加性。每个整数都能取到，而提升的端点为 0 的环路是零伦的。因此，端点映射是与 $\mathbb{Z}$的同构。

5.3 球面的基本群

对于 $n \geq 2$，记作 $S^n = U \cup V$，其中 U和 V是两个不同点的补集，并稍作调整，使其成为开半球邻域。U 和 V 各自都是可缩的，并且当 $n \geq 2$ 时，它们的交集是道路连通的（它变形收缩到 S^{n-1}）。选取 $x_0 \in U \cap V$，该定理给出

$$\pi_1(S^n, x_0) \cong 1 *_{\pi_1(S^{n-1}, x_0)} 1 = 1, \qquad n \geq 2.$$

因此，所有维数至少为二的球面都是单连通的。对于 $n = 2$，交集与 S^1同伦等价，但映射到平凡群的两个映射都是平凡的，因此推出仍然是平凡的。

5.4 曲面群的一个表示

亏格为 g 的闭定向曲面具有一个 CW分解，其中包含一个顶点、 $2g$个一胞腔 a_1， b_1，$\ldots$，a_g， b_g，以及一个沿着词粘接的二胞腔

$$[a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g], \qquad [a, b] = aba^{-1}b^{-1}.$$

将范坎彭定理应用于一骨架和所粘接的二胞腔，可得

$$\pi_1(\Sigma_g) \cong \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = 1 \rangle .$$

这说明了该定理的一个核心用途：粘接一个二维胞腔会增加一个由其粘接环路表示的关系。

6 概念性解释

该定理体现了拓扑学与范畴论之间的相容性。并集 $X = U \cup V$ 是拓扑学中的一种类似余极限的构造，而在所述假设下，基本群函子会将该覆盖转化为群的推出图。

重要的是，不要将这一结果理解为基本群保持任意并集。关于交集、基点和开覆盖的假设都是该定理的一部分。特别是，如果交集不是道路连通的，就必须采用更复杂的表述，通常会涉及群胚。基本群胚版本更加灵活，因为它可以同时保留多个基点。

7 后续方向

若干自然的推广将该定理置于更广泛的同伦框架中。

(1) **群胚 van Kampen 定理**。 将一个基点替换为一组基点，便得到一个能够处理不连通交集的定理；对于复杂的分解，这种表述往往更加自然。

(2) **CW复形与表示**。 反复应用 van Kampen 定理，可以根据 CW复形的一骨架和二骨架得到基本群的表示。维数至少为三的胞腔不会改变基本群。

(3) **同伦余极限**。推出公式是更广泛的同伦余极限原理在一次层面的体现。在现代同伦论中，人们研究在什么条件下，同伦不变函子会将适当的同伦推出转化为同伦拉回或其他可计算的构造。

(4) 高阶同伦。基本群只是第一个非平凡的同伦不变量。Mayer–Vietoris 序列和同伦切除为理解高维信息提供了互补的工具。

8 结论

塞弗特–范坎彭定理将拓扑分解转化为代数推出。它的实际作用源于两个思想的结合：可以对环路进行细分，使每一部分都落在开覆盖的某个成员中；而过渡处的不确定性则由交集的基本群加以控制。这使得该定理对于计算图、曲面以及通过粘附胞腔构造的空间的基本群不可或缺。

参考文献

[1] A.Hatcher，代数拓扑，剑桥大学出版社，剑桥，2002年。在线查阅：https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf。[2] J. P. May，代数拓扑简明教程，芝加哥大学出版社，芝加哥，1999年。[3] W. S. Massey，代数拓扑基础教程，数学研究生教材，第127卷，施普林格出版社，纽约，1991年。[4] T. tom Dieck，代数拓扑，欧洲数学学会，苏黎世，2008年。