arXiv:2611.28805v1 [physics.ao-ph] 21 Nov 2026

理想化深对流飑线的拉格朗日粒子模拟：聚合、碎裂及其极化特征

AxelSeifert*, Fabian Jakub, Christoph Siewert德国气象局，奥芬巴赫，德国

Mikl´os Szak´all约翰内斯·古腾堡大学，德国美因茨

Leonie von Terzi, Stefan Kneifel慕尼黑路德维希-马克西米利安大学，德国慕尼黑

摘要

本文利用与 ICON 耦合的拉格朗日粒子模型 McSnow，研究理想化深对流飑线中的次生冰生成（SIP）。该模型明确表示冰粒子的属性，包括晶体习性、淞附程度和质量组成，从而能够按过程分析冰形成路径。我们引入了一种新颖的碰撞诱发的冰-冰碎裂实现方案，通过表观密度这一粒子脆弱性的衡量指标，将碎裂与预报粒子属性联系起来。我们研究了三种次生冰产生机制——霜晶剥裂（RS）、冻结碎裂（FF）和碰撞诱发的冰-冰碎裂（CF），并评估它们的相对重要性以及湍流增强的碰撞率所起的作用。

模拟显示，在所模拟的飑线中，碰撞诱导碎裂是占主导地位的次生冰生成机制，使枝晶生长区内的冰粒子数浓度显著增加。相比之下，冻结碎裂受限于足够大的雨滴是否充足，在这种对流环境中的贡献很小。霰化碎裂会在较低高度产生次生冰，并间接促进大型聚合雪花的形成。

尽管湍流对碰撞诱导碎裂本身影响不大，却显著增强了所生成碎片的聚合。单独发生碎裂会使粒径分布向较小尺寸偏移，并减少降水；而湍流增强的聚合则会部分恢复大粒子尾部，并抵消碎裂导致的降水量减少。结果表明，碎裂与聚合会发生非线性相互作用，在深对流云中不能将二者视为彼此独立的过程。

使用极化雷达模型 McRadar 进行的正向模拟表明，次生冰生成会改变整体雷达矩和多普勒谱。在常规雷达矩中，比差
差分相位 KDP 展现出最清晰的碎裂特征，而谱差分反射率则通过多普勒谱慢速边缘增强的信号，识别出次生冰生成的源区。

总的来说，我们的结果表明，碰撞诱导碎裂是深对流中次生冰的一个关键来源，并证明其影响在很大程度上取决于其与聚合和湍流的相互作用。这些发现凸显了在云模式中表征耦合微物理过程的重要性，并表明谱极化雷达观测为约束自然界中的次生冰生成提供了一种很有前景的手段。

*通讯作者：axel.seifert@dwd.de

1 引言

深对流云中的许多云微物理过程仍未得到充分理解。主要挑战包括冰粒子的形成与生长、暖雨相对于冰相降水途径的重要性、湍流在增强碰撞率方面的作用，以及不同冰成核过程的影响（Morrison 等人，2020年）。次生冰生成（SIP）机制也带来了额外的不确定性，例如霰化碎裂、冻结碎裂和碰撞诱发破碎（Field 等人，2017年；Korolev 和 Leisner，2020年；Phillips 等人，2021年）。这些相互作用过程的复杂性，加上难以在深对流上升气流中获得可靠的原位观测，有助于解释为何我们对深对流中云微物理的理解仍然有限。

数值模拟是检验我们当前对过程层面认识的重要工具。尤其是，能够显式表示微物理过程的基于粒子的模型，为评估我们的理论描述是否足以再现深对流系统的关键特征提供了一种途径（Morrison 等人，2020）。例如，这类模型能否改进对深对流飑线观测特征的表征？它们是否需要次生冰生成（SIP）才能实现逼真的行为？它们能否提供碎裂过程的可观测特征，从而帮助约束其潜在机制?

多年来，Hallett–Mossop 霰粒碎裂一直被认为是深对流云中占主导地位的次生冰生成机制。原位观测（Mossop，1985；Harris-Hobbs 和 Cooper，1987；Blyth 和 Latham，1993年）和建模研究（Beheng，1987；Blyth 和 Latham，1997年；Sun 等人，2010）支持这一过程的存在及其在大气中的重要性；该过程最初是基于实验室实验提出的（Hallett 和 Mossop，1974）。

然而，近年来，针对冻结碎裂开展了更为详尽的实验室实验（Lauber 等人，2018年；Keinert 等人，2020年；Kleinheins 等人，2021年），并获得了相应的原位观测（Korolev 等人，2020年；Pasquier 等人，2022年；Korolev 等人，2022年；Pfeifer 等人，2025年），同时，冰-冰碰撞诱发碎裂的证据也日益增多（Phillips 等人，2017年；Dedekind 等人，2021年；Grzegorczyk 等人，2023年；Gautam 等人，2024年；Yadav 等人，2025年），这些进展重新引发了关于哪种次生冰产生机制在深对流云中占主导地位的争论。新的实验室实验对霰化碎裂机制的效率提出了质疑（Seidel 等人，2024年），使这一问题变得更加紧迫。

一些研究认为，冰-冰碎裂实际上可能是对流云中次生冰生成的主导机制，或至少是一种可行的替代机制（Gao 等人，2023年；Han 等人，2024年；Grzegorczyk 等人，2025a年、b、c；Qu 等人，2025年；Waman 等人，2026年）。另一些研究则支持冻结碎裂（Lachapelle 等人，2024年）、霰化碎裂（Sun 等人，2025年），或认为多种次生冰产生机制共同作用（Sullivan 等人，2018年；Waman 等人，2022年），以使模型结果与观测相符。

这些看似相互矛盾的结果，既凸显了次生冰产生机制对不同环境条件的依赖性，也反映出方法上的困难，例如整体微物理方案难以表征次生冰生成所需的特定条件（如 Blyth 和 Latham，1998年）。

人们对碰撞诱导碎裂的兴趣日益浓厚，这也凸显了深入理解湍流增强的碰撞率的必要性，而目前对此仍知之甚少（Shaw，2003年；Grabowski 和 Wang，2013年）。尤其对于非球形冰颗粒，由于其形状和运动方式不规则，它们与湍流之间的相互作用十分复杂（Siewert 等，2014a,b；Voth 和 Soldati，2017 年；Sheikh 等，2024 ）。虽然已有针对球形粒子的湍流效应碰撞率参数化方案（Ayala 等，2008年；Onishi 和 Seifert，2016年），但非球形冰颗粒的相应公式化方案仍然缺失。这一缺口限制了我们在云模式中一致表征湍流、聚合与碎裂之间相互作用的能力。

在本研究中，我们使用耦合至

ICON 耦合的拉格朗日粒子模型 McSnow，研究深对流云中的次生冰生成。我们尤其关注碰撞诱导碎裂的作用及湍流可能对其产生的增强效应，并评估能否通过可观测的极化雷达特征识别此类过程。

本文其余部分的组织如下：第2节介绍 ICON/McSnow 模型，第3节概述实验设计。第4节分析控制模拟的微物理结构，第5节考察随机雪花几何形态和湍流在聚合中的作用。第6节研究次生冰生成，第7节探讨由此产生的极化雷达特征。最后，第8节总结主要结论。附录提供了次级冰生产过程的实现细节以及湍流效应对聚合影响的详细说明。

2 ICON/McSnow 拉格朗日粒子模型

蒙特卡罗拉格朗日粒子模型 McSnow 应用 Shima 等人（2009年）的超级液滴算法，模拟液态和冰粒子的演化与相互作用（Brdar 和 Seifert，2018年）。在 McSnow 中，每个超级粒子由八个完全预报的属性描述：冰质量m_i、聚合体的单体数 N 、淞质量 m_r、淞体积 V_r、液态质量m_ℓ、冻结质量 m_f、长宽比 ϕ_m以及冰体积 V_i。后者用于描述冰粒子习性，对于表征冰晶的分枝和中空化至关重要。每个超级粒子代表许多真实粒子。这由多重度 ξ描述，多重度是一个额外的预报变量。

所有粒子的末端下落速度和碰撞效率均基于 B¨ohm（1992a年、b、c）的参数化方案，并采用依赖晶习的经验通风系数（Welss 等人，2024年）。晶体习性预测遵循 Chen 和 Lamb（1994）的球状体模型，并结合 Jensen 和 Harrington（2015年）以及 Welss 等人（2024年）的扩展。 ϕ_m 和 V_i 的演化由固有生长函数控制；即使在更新后的形式中，该函数也仅取决于温度。对于霰化粒子，我们采用经典的 Heymsfield（1982）填充模型，而不是 Seifert 等人（2019）的相似性模型。

淞质量 m_r 和淞体积 V_r 通过与过冷液滴发生碰撞而增加。控制淞体积演化的瞬时淞密度 ρ_{rime} 按照 Cober 和 List（1993年）的方法进行参数化。单体数 N 通过聚合增加。仅通过凝华或淞附生长的初生冰晶保留 $N = 1$。

融化和湿增长采用每个超级粒子的准稳态热量收支进行处理，依据 Rasmussen 和 Heymsfield（1987a,b）以及 Rasmussen 等人（1984a,b）的参数化方案。融化会增加液态质量 m_ℓ，该变量对每个粒子均为预报变量。液滴冻结采用对 Barklie 和 Gokhale（1959）的概率性、随时间变化的解释进行表示，从而增加冻结质量 m_f。

在当前模型配置中，凝华增长仅影响冰质量 m_i ，不会对 m_r 或 m_f 产生贡献。严格区分生长路径对于表示破碎过程至关重要。新实现的次生冰生成（SIP）机制，包括冻结碎裂和碰撞诱发的冰-冰碎裂，将在附录中介绍。

McSnow 还可选择采用聚合体几何形状的随机模型（Seifert 等，2026）。在这种情况下，聚合事件发生后，将从预设的概率分布中抽取最大尺度、长宽比和横截面积等几何属性，并在聚合事件之间不断演变。这使微物理状态空间扩展至 9 个维度。

McSnow 与非静力正二十面体 ICON 模型（Z¨angl 等，2015年）完全耦合。在这一框架中，只有冰粒子和雨滴以超级粒子表示，而云滴

仍由体积方案描述。因此，McSnow 用超级粒子取代了 Seifert 和 Beheng（2006）的双矩体积微物理方案中的云冰、雪、霰、冰雹和雨类别，无需采用这些人为划分的水凝物类别。例如，McSnow 仅采用一种水凝物末端下落速度参数化；碰撞效率、通风系数和质量-尺寸关系也同样如此。这些参数化均不受人为阈值或类别的限制。这一设计主要基于 B¨ohm（1992a年、b、c）的参数化，源于最初通过高保真基准模拟改进冰相表示的目标，此后逐渐发展为一种灵活的研究工具，可用于详细的过程研究。

由于与双矩 bulk 方案耦合，雨滴通过自转换初始化，遵循 Seifert 和 Beheng（2001）的方法。bulk 方案中表示的冰成核过程，例如非均相成核、云滴均相冻结以及硫酸盐气溶胶冻结，会在 McSnow 中生成新的超级粒子。与许多其他拉格朗日粒子模型不同，因此超级粒子只存在于云区和降水区域内。

由于超级粒子只占据计算域的一部分，高效的负载均衡至关重要。McSnow 利用 ICON 基础设施，该基础设施采用非结构网格，并支持网格单元与 MPI 任务之间的灵活映射。这使得可以进行细粒度但静态的域分解，让每个 MPI 任务都能采样分布范围广泛的粒子。不过，这种灵活性会增加 MPI 通信，并可能降低动力核心的效率。实际应用中，必须在优化云微物理的负载均衡与维持动力性能之间取得折中。

3 基准模拟和敏感性实验

我们采用与 Weisman 等人（1997）和 Rotunno 等（1988）相似的设置，对理想化三维飑线进行模拟；此前的模型研究，如 Bryan 等人（2003）和 Tijhuis 等人（2025），也采用了类似设置。初始探空遵循 Weisman 和 Klemp（1982），风廓线从地面到 2500 m 高度呈线性变化，其上风速保持恒定，为 10 m/s。近地面的水汽混合比为 12 g/kg。ICON 模拟采用双周期三角网格，对应的等效网格间距为 300 m，含有 1024×128 个网格单元。垂直网格包含 128 层，模拟区域顶高为 25 km，阻尼层从 22.5 km 高度开始。

垂直方向的扩散采用基于湍流动能的Mellor-Yamada 2.5级边界层方案，水平方向则结合二维 Smagorinsky闭合。冰成核采用 Phillips 等（2008）的参数化方案，其中尘埃和烟炱的数密度设为常数，分别为 $n_{\mathrm{dust}} = 3.2 \times 10^{6}\mathrm{m}^{-3}$ 和 $n_{\mathrm{soot}} = 60 \times 10^{6}\,\mathrm{m}^{-3}$，与 Seifert 等（2012）的做法类似。云凝结核激活基于 Segal 和 Khain（2006）进行参数化，采用 $N_{\mathrm{CN}} = 250 \times 10^{6}\,\mathrm{m}^{-3}$。

ICON 使用 2 s 的时间步。McSnow 以 1 s 的子步长进行积分，而扩散生长、淞附和融化则进一步采用 0.25 s 的子步长，以确保数值稳定性。按照 Weisman 等人（1997）的做法，并与 Tijhuis 等人（2025）类似，我们采用冷池初始化：地表处的温度降低 5 K，并随高度线性递减，在 2500 m 高度处降至零。施加最大幅度为 0.1 K 的随机温度扰动，以触发湍流运动。与 Bryan 等人（2003）一样，我们模拟了 180分钟，这足以使飑线达到准定常状态。

表 1 概述了所有实验及其总体特征。首先，我们进行了一系列敏感性模拟，改变超级粒子的多重度 ξ_0。请注意，在 ICON/McSnow 中，每个过程、每个时间步和每个网格点新增的超级粒子数（可为小数）上限为 1.25（通过随机抽样取 1 或 2）。因此，指定的基准多重度 ξ_0 发生变化，并不会使模拟中的超级粒子数随之线性变化。

与控制模拟（$\xi_0 = 7 \times 10^{9}$）相比，将 ξ_0 增加到 3×10^{10} 会使超级粒子数量减少一半以上，而对于 $\xi_0 = 7 \times 10^{10}$，超级粒子的平均数量

表 1：ICON/McSnow 实验及选定的区域平均诊断量列表。 ξ_0 为基准多重性。运行时间表示使用 2048 个处理器核心时的实际运行时间，单位为小时。 N_{sp} 为每个网格单元中的超级粒子数（无量纲）；此处给出了云内平均值和第90百分位数。最大垂直速度 $w_{\max}$ 的单位为 m s^{-1}，向上质量通量 M_{up} 的单位为 kg m^{-2} s^{-1}，云水路径（CWP）、雨水路径（RWP）和冰水路径（IWP）的单位为 kg m^{-2}。降水率的单位为 mm h^{-1}。所有量均在 120–180 分钟模拟时间内取平均。对于区域平均降水率，给出了标准误差，以便在实验之间进行具有统计意义的比较。

# 实验	运行时间	N_{sp}	$N_{\mathrm{sp,p90}}$	$w_{\max}$	M_{up}	云水路径 CWP、雨水路径 RWP、冰水路径 IWP			降水率
1 $\xi_0 = 3 \times 10^9$	45.7	154.9	333.1	31.12	3.69	0.130	0.184	1.003	1.628 ± 0.019
2 $\xi_0 = 7 \times 10^9$ (CTL)	36.2	108.9	232.7	29.82	3.64	0.129	0.183	1.032	1.667 ± 0.022
3 $\xi_0 = 3 \times 10^{10}$	20.5	51.7	108.8	32.03	3.62	0.129	0.187	1.058	1.758 ± 0.021
4 $\xi_0 = 7 \times 10^{10}$	14.8	31.5	64.6	28.65	3.56	0.135	0.205	1.047	1.878 ± 0.030
5 幂律聚集 (MAgg)	34.5	110.9	236.2	31.05	3.67	0.132	0.193	1.049	1.650 ± 0.026
6 幂律聚并 +湍流 (MAggT)	42.2	109.8	242.5	30.31	3.44	0.124	0.155	0.960	1.873 ± 0.029
7 随机聚并 +湍流 (SAggT)	43.7	107.5	239.2	30.41	3.56	0.123	0.157	0.968	1.895 ± 0.028
8 霜晶剥裂（RS）	34.0	115.6	249.5	29.64	3.54	0.136	0.182	1.113	1.683 ± 0.036
9 冻结破碎（FF）	36.5	108.6	233.0	31.95	3.52	0.135	0.185	1.038	1.666 ± 0.033
10 碰撞诱发的冰-冰破碎(CF)	38.2	161.9	364.3	27.61	3.68	0.130	0.193	1.134	1.627 ± 0.039
11 冰-冰碎裂 +湍流（CFT）	47.3	159.0	377.8	27.75	3.65	0.108	0.127	0.958	2.086 ± 0.052

降至每个网格盒40个以下。每个网格点的超级粒子数量近似服从指数分布（未显示），部分网格点的数值较高，尤其是在对流核心中。第90百分位数约为平均值的两倍，略低于纯指数分布的预期值。尽管存在这种变化，实验1–4的模型运行时间仍与超级粒子数量近似呈线性关系。

在减少超级粒子数量后，即使对于最大的 ξ_0，整体模拟特征在定性上仍大致相似，但降水率等平均量显示出显著差异。相比之下，将 ξ_0 减少至 3×10^9 会大幅增加计算成本，而物理量仅发生细微变化。 $\xi_0 = 3 \times 10^9$ 与控制模拟之间不存在统计显著差异，这表明区域平均降水率相对于超粒子多重度已基本收敛。因此，后续所有实验均使用 $\xi_0 = 7 \times 10^9$ 作为控制配置。

本研究的敏感性实验表明，每个网格单元平均约有 100 个超级粒子，能够在计算成本与本文所考察的整体诊断量的收敛性之间取得适当的平衡。这与此前针对具有多种粒子属性的复杂粒子系统开展的研究结果一致（Jaruga and Pawlowska，2018年；Shima 等人，2020年）。但这并不意味着系统在高阶矩或粒径分布方面已收敛。要实现这些方面的收敛，需要更多的超级粒子。在一维 McSnow 模拟中，我们发现，只有当每个网格单元的粒子数超过 1000 时，结果才真正收敛。

以下各节将详细分析其余实验。在此，我们简要总结区域平均降水率的响应。

实验1–4（包括 CTL）采用了 Seifert 等（2026）的雪花聚合随机模型。使用仅预测聚合雪花平均几何形状（MAgg）的聚合确定性描述，不会使降水率发生显著变化。湍流对聚合的影响始终会提高降水率。无论是聚合几何形状（MAgg 与 MAggT）还是随机聚合（CTL 与

平均 SAggT）的比较中，均观察到这种增加).

霜晶剥裂（RS）导致地表降水略有减少，而碰撞诱发的冰-冰碎裂（CF）则使降水率显著且具有统计学稳健性地降低。另一方面，冻结破碎（FF）对降水没有显著的统计学影响。将碰撞诱导碎裂与湍流对碰撞的影响（CFT）结合后，湍流引起的增强效应足以抵消碎裂导致的降水减少，使降水率略高于 CTL。

最大上升气流速度的变化幅度较小，各项实验中均未表现出系统性响应。上升气流质量通量的变化也很弱，无法解释降水差异。云水路径随降水增加而增加（CFT 除外）；而在基准多重性相同的模拟中，冰水路径则随降水增加而减少。雨水路径与降水变化之间没有呈现一致的关系。这表明，降水差异主要源于微物理过程效率的变化，而非动力学反馈。这与实验设计相符，因为所有修改主要影响冰相过程，因此与潜热加热和动力学的耦合较弱。

事实证明，静态负载均衡策略对于这些模拟相当有效。所有模拟均在 16 个 AMD EPYC 节点上进行，共使用 2048 个 CPU核心；采用 64 个 MPI任务，每个任务配备 32 个 OpenMP线程。相对较多的 OpenMP线程有助于进一步改善拉格朗日粒子的负载均衡（最多 272×10^6 个超级粒子）。CTL 的总实际运行时间为 36.2 小时，相当于 74,137 个核心小时。在相同配置下，采用双矩 bulk 方案的可比模拟需要 1,212 个核心小时，这意味着 McSnow 的计算成本约为其 60 倍。

4 控制实验的微物理结构

图 1 和图 2 展示了 CTL模拟中总质量密度、总数密度、淞质量分数、冻结质量分数、液态质量分数、最大尺度、表观密度和单体数的垂直剖面。由于云液态水并未由超级粒子表示，因此不予显示。各物理量在 y 方向上对计算域的二十分之一范围（约 1 km）取平均，并展示总含水量最高的剖面。对流核心的特征是总水密度高，且液态质量分数接近 1。在对流核心内，约从 $x = 60$ km 到 $x = 80$ km 的范围内，过冷雨滴冻结，随后通过淞附迅速增长，形成模拟中最大的粒子。因此，小粒子和大粒子近距离共存，而大多数粒子的单体数为 1，表明聚合作用有限。

相比之下，后随层状云区（约从 $x = 30$ km 到 $x = 60$ km）在对流核心后方的中层表现为霜冰和冻结质量分数减少、单体数增加以及表观密度降低。这表明该区域以轻度霰化和未霰化的聚合雪花为主。在高度超过 8 km 的对流砧状云中，冰粒子的数密度最高，而霰化粒子和冻结水滴基本不存在。单体数接近 1，这与未霰化的初生冰晶相符。这与人们熟知的飓线结构一致（例如 Xue 等，2017年）。虽然砧状云中的冰水含量较高，但与许多观测到的系统相比，后随层状云区相对较弱。一方面，较低的降水效率与 10 m/s 的弱低层风切变和 12 g/kg 的中等低层水汽含量相符；这些条件有利于形成倾斜程度更大、动力上不那么“理想”的对流组织。另一方面，层状云区相对较弱，可能表明 McSnow 中的粒子生长过慢，无法有效产生足以维持层状降水的中等尺寸粒子。要量化这一可能性，需要与观测结果或

其他微物理方案进行专门比较，而这超出了本研究的范围。

这些模式共同表明，生长过程从对流核心中由霰化主导，过渡到后随层状云区中由聚合主导。

图3展示了与图1和图2相同剖面中粒子属性的散点图。图中显示了约50,000个超级粒子子集，这些粒子从剖面中的所有粒子中按总质量进行对数分箱采样。此采样有助于确保分布尾部得到充分呈现。散点图中的颜色编码提供了有关粒子属性的更多信息。对于 $N = 1$ 的单体，长宽比以绿至蓝色标色带编码。对于霜冰含量比例为 $f_{\mathrm{rime}} < 0.5$ 且冻结分数为$f_{\mathrm{frz}} < 0.5$ 的无淞附和轻度附霜聚合体，单体数 N 以棕红黄颜色标色带显示。对于 $f_{\mathrm{rime}} \geq 0.5$的霰化粒子，霜冰含量比例以洋红色色标显示；对于 $f_{\mathrm{frz}} \geq 0.5$的粒子，冻结分数以灰色色标显示。图3a中的质量–尺度关系显示，初生冰晶和球形粒子呈立方标度关系，而无淞附聚合体呈平方标度关系。霰化粒子则分布在这两种状态之间的过渡区域。

无淞附聚合体的面积分数（图 3b）约为 0.2 至 0.7，但会随淞附迅速增大。单体主要呈板状，面积分数较高，不过也存在一些长旋转椭球状的针状冰晶，如图 3c 所示。无淞附聚合体通常呈长旋转椭球状，长宽比介于 1 和 3 之间，与 Seifert 等人（2026年）的结果一致。图 3c 中位于 $\phi = 0.8$ 和 $\phi = 1.25$ 处的两条水平线表示准球形翻滚霰粒子的范围（ Jensen 和 Harrington，2015 年）；详情另见 Welss 等人（2024年）第2.1.3节。初生冰晶和冻结水滴的表观密度较高，而聚合雪花的表观密度可能很低。正如预期，淞附会提高表观密度。

末端下落速度的变化范围跨越四个数量级，从下落速度微不足道的小型初生冰晶，到速度超过 10 m/s 的大型霰（图3e）。对于无淞附聚合体，末端下落速度在对数-线性图中呈线性增加（图3f），表明末端速度随最大尺度近似呈对数增长。霰化雪花因密度较高而下落更快。冻结质量占比较大的粒子具有最高的末端下落速度。总体而言，粒子属性与 Shima 等人（2020）的图4–7一致。

三元表示简洁地展示了凝华、冻结和淞附对粒子生长的相对贡献。三元图有助于识别主导粒子生长路径，这些路径对应于组成空间中的不同轨迹。三元图基于关系式 $m_i + m_f + m_r = m_{\mathrm{tot}}$，即冰质量、冻结质量和淞质量之和等于总质量。相应的质量分数 m_k/m_{tot} with $k \in \{i, f, r\}$ 之和为1，并定义了三角形内的坐标。三元表示广泛用于可视化三组分组成，例如化学中的可燃性图、土壤学中的土壤质地三角图、岩石学中的岩石分类图，以及群体遗传学中的德·芬内蒂图。图4展示了来自高度为3至7 km的混合相区域内粒子的三元图，显示其概率密度、单体数和最大尺度。概率密度表明，模拟中存在范围广泛的质量组成，但某些组成出现的频率低得多。纯粹由霜冰主导的状态（$m_r/m_{\mathrm{tot}} \approx 1$）基本不存在，因为在混合相条件下，淞附通常伴随着沉积增长。

由非均质冰成核形成的粒子起源于 $m_i/m_{\mathrm{tot}} = 1$ 角附近，并通过凝华、聚合和淞附生长。冻结水滴、正在经历湿增长的粒子以及再冻结粒子起源于 $m_f/m_{\mathrm{tot}} = 1$ 角附近，通常通过淞附快速生长。只有达到足够尺寸后，它们才会参与聚合。毫米尺度范围内的大多数粒子要么是大型聚合体，要么是严重淞附的霰或冰雹粒子。由此呈现出两种主要演变路径。初生冰晶从以凝华为主的角落出发，通过凝华和聚合演变为聚合体；而冻结水滴起源于冻结质量角附近，并演变为

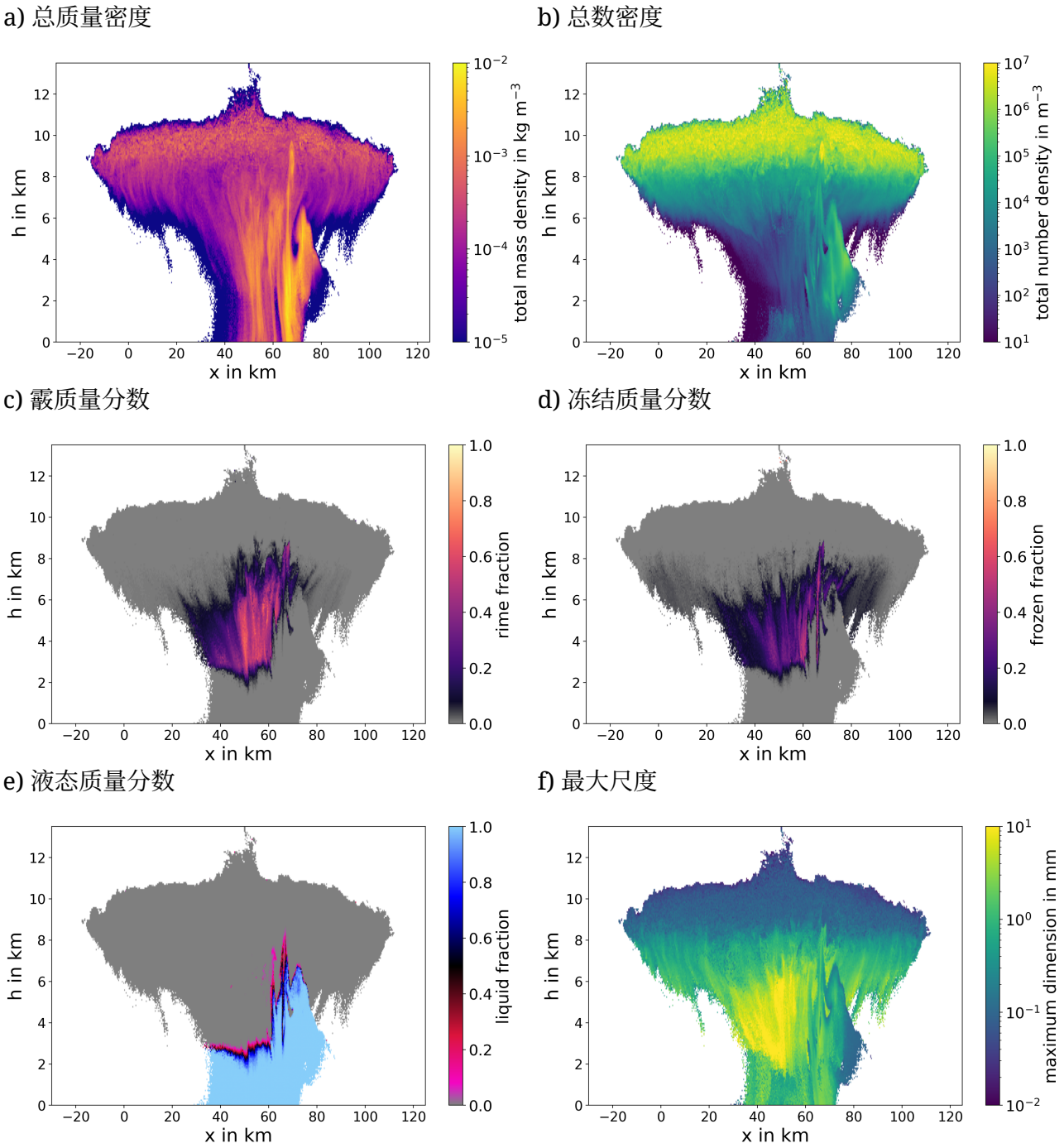


图1：CTL模拟180分钟时的线平均垂直剖面，分别表示：（a）总质量密度；（b）总数密度；（c）霰质量分数；（d）冻结质量分数；（e）液态质量分数；（f）最大尺度。线平均取模型区域的1/20，对应长度为1 km。对于强度变量（c、d、e、f），采用质量加权平均。

a) 单体数　　b) 表观密度

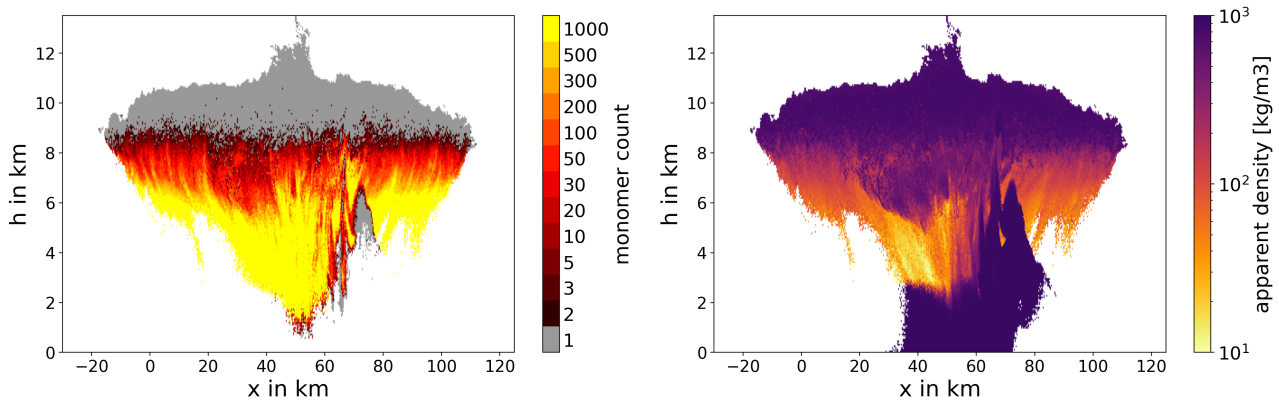


图2：与图1相同，但显示 (a) 单体数和 (b) 表观密度。

经淞附后形成的重度淞附霰，最终进入聚合体区制。图中没有显示质量为 $m_f/m_{\mathrm{tot}} \approx 1$ 和 $D_{\mathrm{max}} > 5$ 毫米的大冰雹，并不意味着模拟中不存在此类粒子；而是因为它们过于稀少，无法通过图中采用的采样方式（按粒子质量进行对数分箱）捕捉到。

总体而言，CTL模拟呈现出三种截然不同的微物理区制：由初生冰晶主导的砧状云、以淞附和冻结水滴为特征的对流核心，以及由聚合雪花主导的后随层状云区。粒子属性分析和三元分析揭示了两条主要生长路径：一条始于初生冰晶，另一条始于冻结水滴；两者最终汇聚为经历了聚合和大量淞附的粒子。

5 聚合、随机雪花与湍流

云中的聚合主要由冰粒子的差异沉降驱动。相应的重力收集核为：

$$K_{\mathrm{grav}} = \pi (r_1 + r_2)^2 \, |v_1 - v_2| \, \eta_g \tag{1}$$

其中，r_1 和 r_2 是垂直于流动方向的半径，v_1 和 v_2 是末端下落速度，η_g 是收集效率。对于非球形粒子，我们采用椭球体模型，并使最大尺度垂直于流动方向：

$$r_n = \frac{D_n}{2} \min\left(1, \, \phi^{-\frac{1}{2}}\right) \tag{2}$$

其中，ϕ 是长宽比，D_n 是最大尺度。项 $\phi^{-1/2}$ 表示柱状冰晶或针状晶等长旋转椭球状粒子的横截面积减小，而对于扁圆粒子，横截面积不依赖于 ϕ。

在湍流中，收集核采用动力学公式：

$$K_{\mathrm{dyn}} = 2\pi (r_1 + r_2)^2 \, \langle |w_r| \rangle \, g_{12} \, \eta_g \, \eta_e \tag{3}$$

该公式基于接触时的平均径向相对速度 $\langle |w_r| \rangle$ 及相应的径向分布函数 g_{12}。因子 η_e 考虑了碰撞效率的湍流增强（Ayala 等，2008年）。在 McSnow 中，湍流参数化遵循 Onishi 和 Seifert

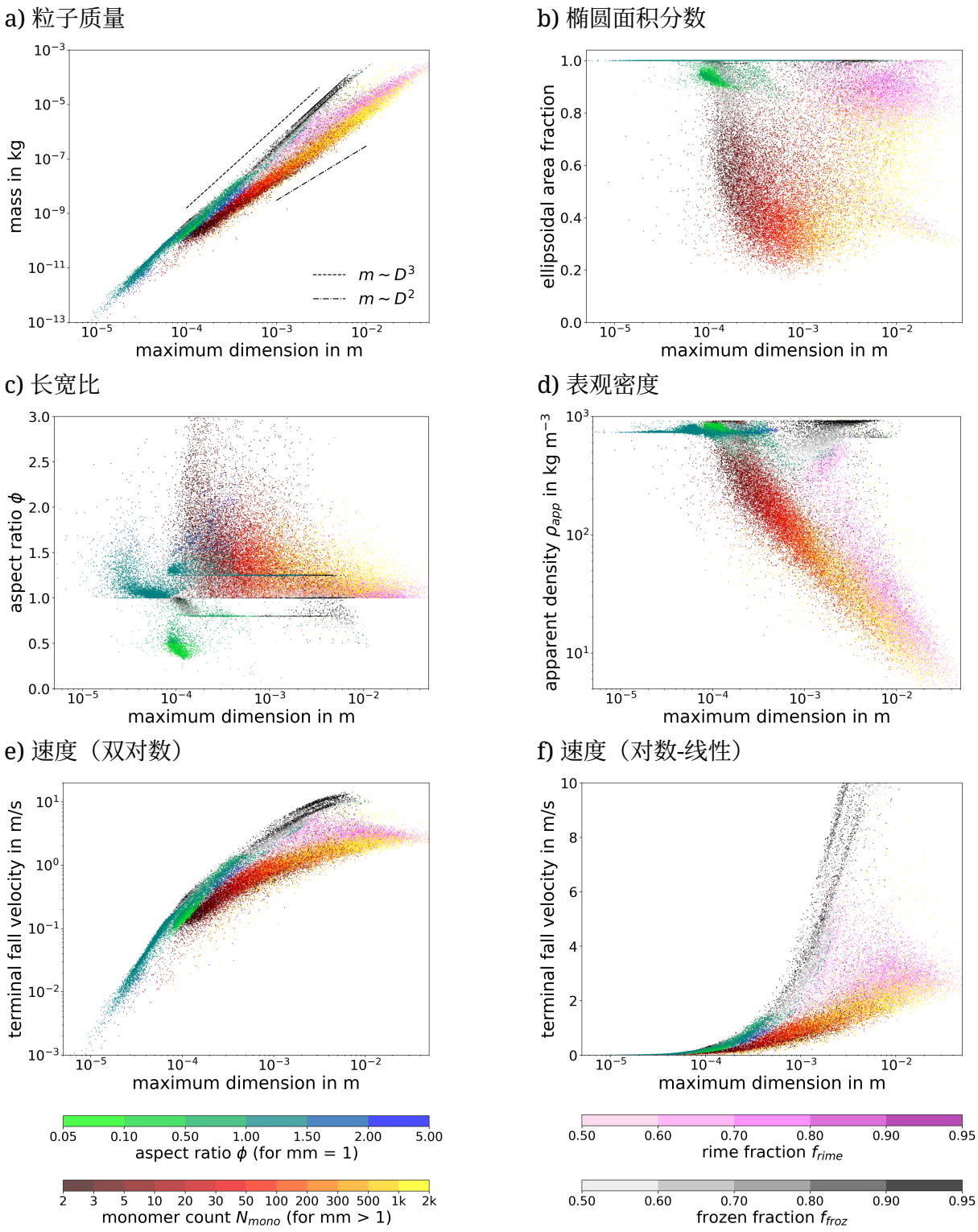


图3：散点图展示了 CTL模拟中粒子几何形状和下落速度随最大尺寸的演变。图中显示了：a）粒子质量，b）椭圆面积分数，c）长宽比，d）表观密度，以及采用对数坐标轴（e）和线性坐标轴（f）表示的末端下落速度。请注意，末端下落速度并非参考压力下的数值。数据取自与前几幅图相同的剖面，但仅展示了极少一部分超级粒子。子采样按粒子质量进行对数分箱，以便也显示分布尾部中的一些粒子。

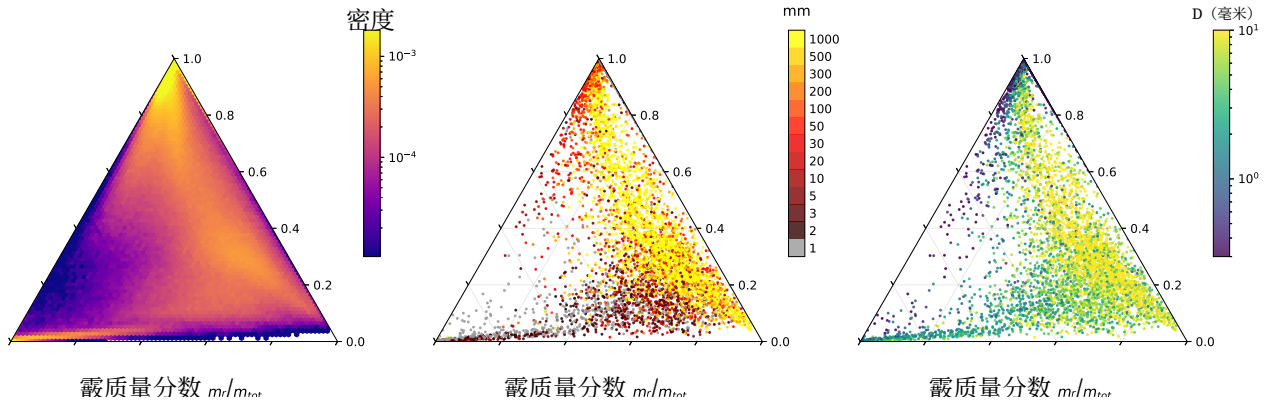


图4：飑线混合相区域内、4000 m至7000 m高度处冰粒子质量组成的三元图，展示了主要的粒子生长路径。概率密度（左），以及单体数（中）和最大尺度（右）的散点图。

（2016），参见附录C，总收集核结合了重力和湍流的贡献，如下所示：

$$K_{\text{coll}} = \sqrt{K_{\text{grav}}^2 + K_{\text{dyn}}^2}. \tag{4}$$

Seifert等人（2026）的随机雪花模型还考虑了聚合体自然的几何变异性。

标准幂律描述预测，质量相同的粒子具有相同的终端速度和碰撞截面。因此，质量相同的粒子之间的重力碰撞核为零。然而，随机模型使质量相同的粒子的 v 和 r 也具有变异性，从而使得原本会被纯重力碰撞核忽略的碰撞得以发生。这使随机雪花模型成为湍流物理效应的一个有力几何对应物；不过，随机几何改变的是进入碰撞核的粒子属性，而湍流则直接作用于碰撞率。

以下四个实验揭示了随机粒子几何形态和湍流对聚合的影响。图5展示了飑线混合相区域中，粒径分布随质量等效直径的变化。实验包括：无湍流条件下的确定性聚集案例（MAgg）、随机基准（CTL）、有湍流条件下的确定性聚集（MAggT），以及有湍流条件下的随机聚合（SAggT）。

正如预期，湍流增强了聚合，产生了更多大型聚合体和霰。相比之下，随机雪花几何形态减少了大型雪花的数量。乍看之下，这似乎有悖直觉，因为随机几何形态会使质量相近的粒子之间的下落速度和投影面积产生差异，从而使原本具有相同终端速度的粒子之间发生差异沉降。然而，这种几何形态也会产生投影截面更小的紧凑型聚合体。尽管这些粒子的下落速度更快，但碰撞截面的减小抵消了差异下落速度的增加。在当前模拟中，聚合因此更多地受粒子几何形态而非相对速度控制。投影截面的主导作用源于雪花较高的雷诺数；对于雪花而言，阻力定律——因而终端下落速度——对粒子尺寸和形状的依赖性变得较弱。因此，碰撞截面的减小在很大程度上补偿了更紧凑雪花下落速度的增加。

因此，在本次飑线模拟中，随机雪花几何形态减缓了聚合，

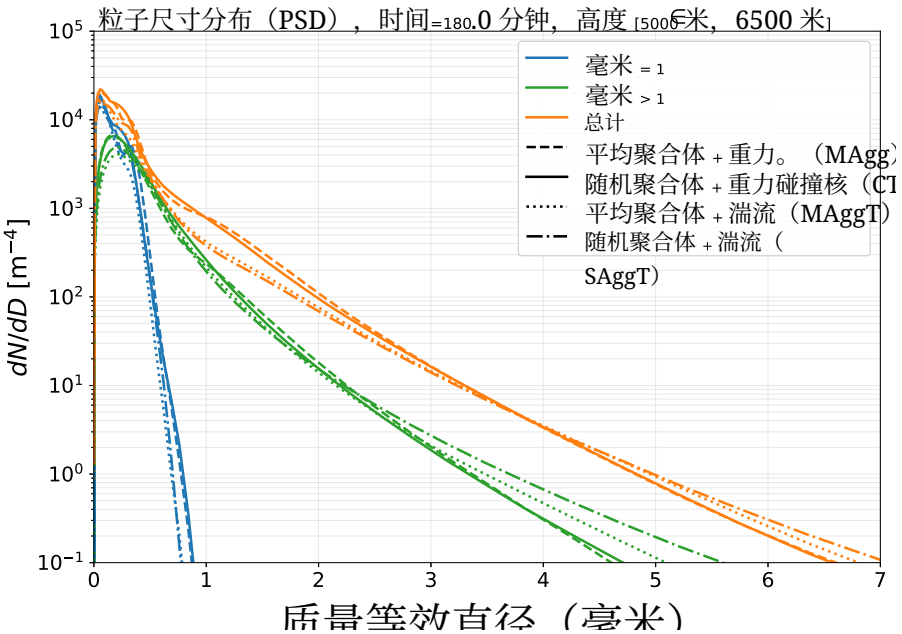


图5：单体晶体（毫米=1，蓝色）、未附霜和轻度附霜聚合体（毫米 $>$ 1，绿色）以及总计（橙色）的粒径分布。图中显示的是以下实验结果：假设采用平均聚合雪花和重力碰撞核的 MAgg 实验（实线）、采用随机聚合体和重力碰撞核的 CTL 实验（虚线）、采用平均聚合体并考虑湍流对碰撞影响的 MAggT 实验（点线），以及采用随机聚合体并考虑湍流对碰撞影响的 SAggT 实验（点划线）。所有粒径分布均对应于模拟时间为180分钟、覆盖5000米至6500米高度的整个层。

而非加速聚合。具体影响可能因不同云状态而异，取决于当地雪花的粒径分布。关于湍流，我们发现其会适度但显著地增强聚合，进而促进降水形成。纳入湍流效应后，降水量增加约8–10%。如附录C所述，将Onishi核应用于非球形粒子应被视为一项敏感性研究，而非完全一致的基于物理的参数化。

6 冰粒子的碎裂

我们研究三种次生冰生成（SIP）机制：霰化碎裂（RS）、冻结碎裂（FF）和碰撞诱发的冰-冰碎裂（CF）。附录中详细介绍了这些机制的实现方式；本节重点讨论它们在模拟飑线中的发生情况、效率和相对重要性。

图6显示，在碰撞诱导碎裂实验（CF）中，飑线模拟里确实会发生碰撞动能较高的碰撞 K_c，涉及多种粒子类型，包括低密度无霰聚合体、带枝晶的霰和裸霰。在这些碰撞类型中，低密度粒子和带枝晶的霰产生的碎片数量最多。

尽管这种行为部分由参数化所规定，但模拟云中所需的碰撞是否频繁到足以产生大量次生冰生成，并不显而易见。尤其是，大型无霰聚合体与大型霰粒子在时空中可能相距足够远，因此这类碎裂事件很少发生。相反，模拟结果表明，脆弱的聚合雪花（或具有枝晶状表面结构的霰）与霰或冰雹等快速下落的高密度粒子之间频繁发生碰撞

a) 碰撞动能依赖性　　b) 温度依赖性

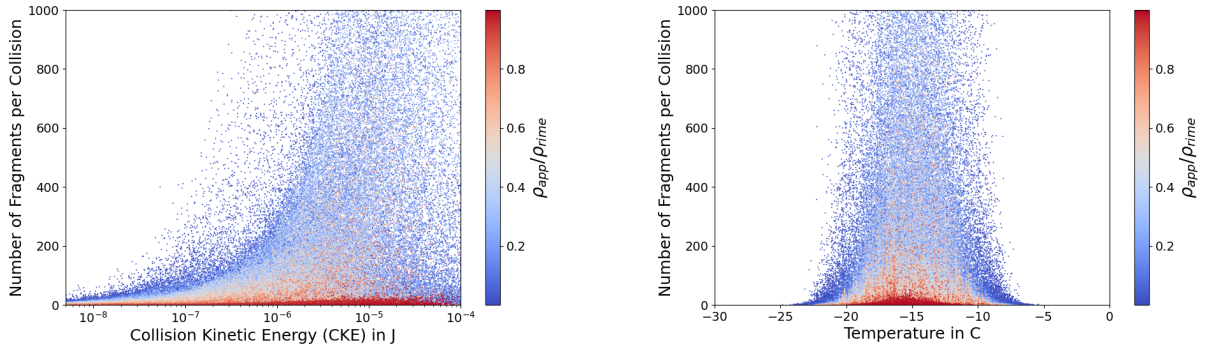


图6：实验 CF 中，碰撞诱导的冰-冰碎裂过程中，每次碎裂事件产生的碎片数随碰撞动能 CKE（a）和温度（b）变化的散点图。颜色表示表观密度与淞密度之比（公式（21））。因此，无淞附聚合体等低密度粒子用蓝点表示，带枝晶的霰等中等密度粒子用灰点表示，裸霰用红点表示。该密度表征两个碰撞伙伴中较脆弱的粒子。

，足以维持大量碎裂。温度依赖性主要由式（24）中的显式温度函数决定，并且仅限于枝晶生长区。

如图7所示，冻结碎裂在接近 -15℃ 时最为高效，这与参数化中规定的温度依赖性（附录B）一致。对于直径小于 2 毫米的雨滴，每次冻结事件产生的碎片数随液滴直径线性增加。因此，直径为 1 毫米及以上的大雨滴产生的碎片数量远多于更常见的直径为 0.2-0.5 毫米的雨滴。冻结碎裂事件发生在较宽的温度范围内，从接近 0℃ 延伸至约 -30℃，但仅限于存在雨滴且雨滴发生冻结的区域。较大的雨滴往往在相对较高的零下温度下冻结，而较小的毛毛雨滴则可保持过冷状态，直至温度降至显著更低的水平。因此，直径大于约 1.5 毫米的雨滴仅出现在高于约 -20℃ 的温度下，这极大限制了大雨滴在较低温度下对冻结碎裂的贡献。

实验 RS、FF、CF、CFT 和 CTL 的垂直廓线（见图8）揭示了次生冰生成过程的总体影响。对于 CTL，基本垂直结构呈现双峰：冰粒子数密度在高度约 3.5 km 处达到局部最大值，冰水含量（IWC）则在约 5 km 处达到局部最大值；随后两者分别在约 6 km 和 7.5 km 处达到最小值，并在更高处再次增加。这一结构反映了非均质冰成核、毛毛雨滴冻结、随后发生的粒子生长、聚合和沉降共同产生的影响。随着水凝物生长，其末端下落速度增大，从而使给定高度处的粒子数密度和冰水含量均降低。约 6 km 处粒子数的局部最小值与冰晶生长区（DGZ）相吻合；在该区域，聚合尤为高效，因为黏附效率在接近 -15 ℃ 时最高。此处所示廓线是对空间和时间进行平均后的结果，因此难以直接从过程层面进行解读。

不过，这些结果足以评估次生冰生成（SIP）的影响。与 CTL 相比，RS、CF 和 CFT 中的冰粒子数明显增加，尤其是在高度为 4 至 7 km 的区域。对于 CF 和 CFT，冰粒子数的增加主要发生在冰晶生长区，因为在我们的模拟中，该过程仅限于这一温度范围。因此，碰撞诱发的冰-冰破碎逆转了 CTL 中冰晶生长区内粒子数的减少，使其转而出现局部最大值。CFT 中的湍流效应并未增加碎裂，但会加速

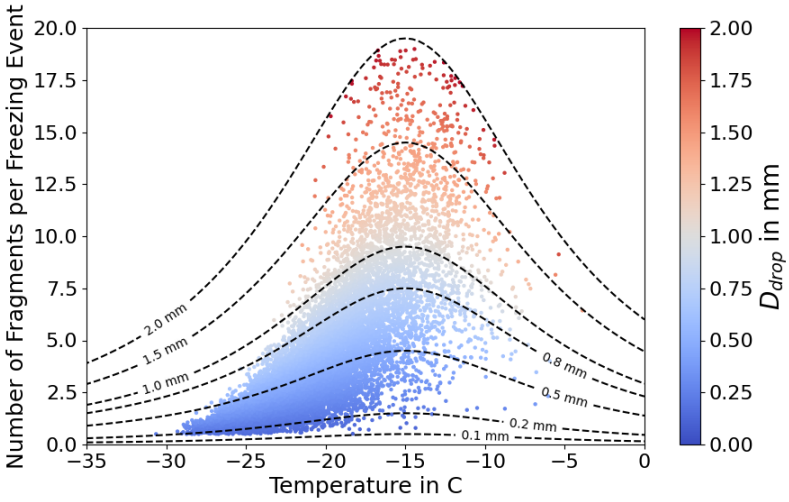


图7：雨滴每次冻结碎裂事件产生的碎片数随温度变化的散点图，数据来自FF实验。颜色表示雨滴直径。虚线表示FF参数化方案针对六种固定雨滴直径规定的每次事件碎片数。请注意，只有在飑线模拟中存在足够大的雨滴并发生冻结时，才会发生冻结碎裂。

新生成碎片的聚合，导致冰晶生长区外的冰粒子数密度相较于 CTL 降低。与包含湍流效应但不包含碎裂的 SAggT 相比，CFT 在所有高度层的冰粒子数均有所增加。RS 中高度为 4 至 6 km 的区域内，冰粒子数密度仅适度增加。

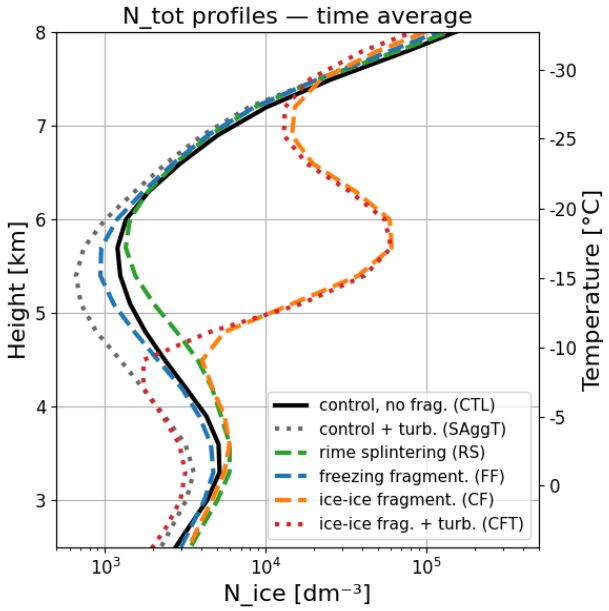
RS和CF的冰水含量均呈现相应增加，而FF和CFT的响应则弱得多，这与CFT中碎裂和湍流增强聚并之间的部分补偿一致。冰水含量增加并不直接意味着降水通量增强，而主要反映了新生成碎片较慢的下落速度和较长的驻留时间。尽管相较于CF，湍流抵消了部分冰水含量增幅，但CFT在冰晶生长区的冰水含量仍高于SAggT，证实碰撞诱导碎裂会稳健地增加该层中的冰质量。

次级冰生产过程的影响还可通过冰增殖因子进一步说明。本文将其定义为给定实验中的冰粒子数密度与控制模拟（CTL）中冰粒子数密度之比；控制模拟不包含次级冰生产过程。这一定义与传统的冰增殖因子直接类似，后者定义为冰粒子浓度与初生冰粒子（或活化冰核粒子）浓度之比。CF和CFT实验在约6 km高度处的冰增殖因子增加了50倍以上，而RS在4.5–5.5 km高度范围内达到约1.5倍。相比之下，FF产生的放大因子约为1，甚至低于1。

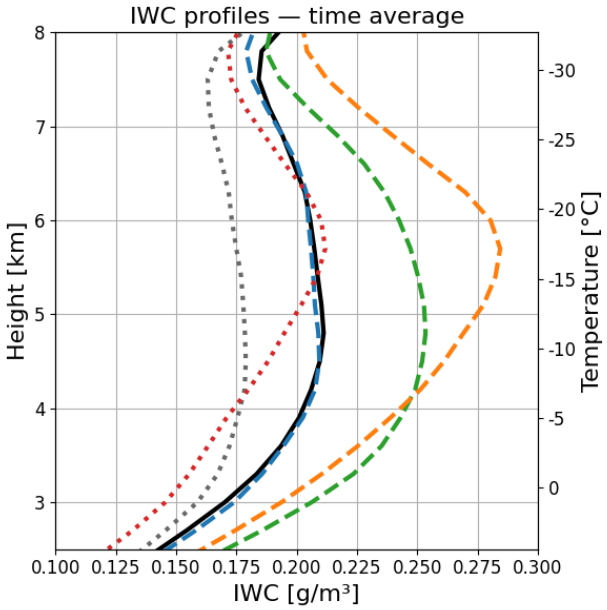
虽然冰增殖因子量化了SIP对冰相粒子总体的净效应，但拉格朗日粒子框架还使我们能够直接追踪SIP粒子。每个SIP粒子都会被标记，任何至少包含一个SIP粒子的水凝物都会被计数。由此得到的垂直廓线表明，RS的SIP粒子数在高度约4 km处最多。然而，4.5 km以上的霰化碎裂有所减少，而碰撞诱导碎裂的源区位于冰晶生长区，因此其最大值出现在约6 km处。

粒子追踪表明，湍流对碎片本身的产生几乎没有影响。相反，其主要作用是加快这些碎片后续的聚合。这表明，产生碎裂的碰撞处于某一斯托克斯数状态区间

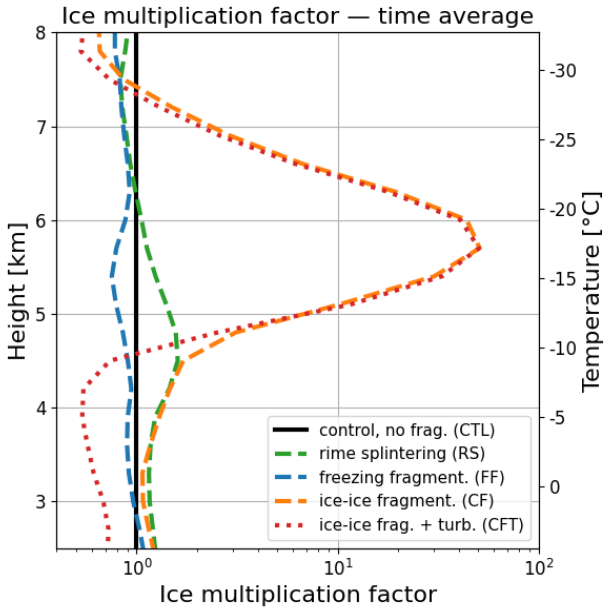
a）冰粒子数密度



b）冰水含量



c）冰增殖因子



d）SIP粒子数

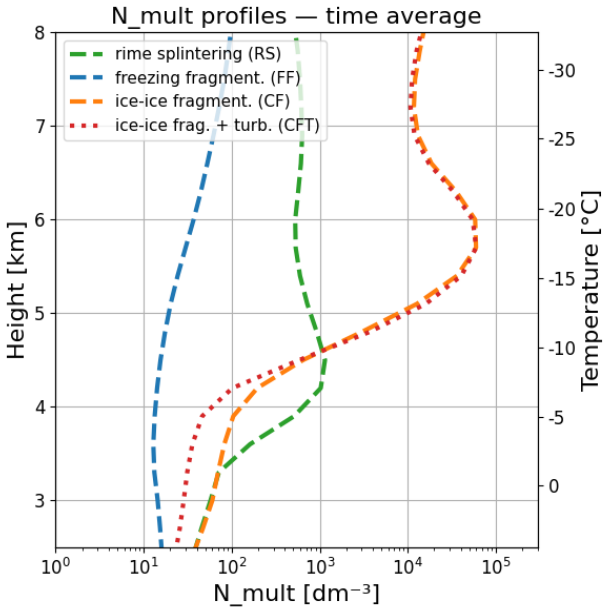


图8：实验CTL、SAggT、RS、FF、CF和CFT中，(a)冰粒子数密度、(b)冰水含量（IWC）、(c)冰粒子数冰增殖因子（相对于控制模拟CTL）以及(d)次生冰生成（SIP）粒子数密度的垂直廓线。廓线是在120–180分钟的时间段内，使用5分钟采样间隔，并对整个计算域取平均得到的。图中仅显示高度2500米至8000米之间的混合相区域。(c)中的冰增殖因子量化了SIP对冰相粒子总体的净效应，而(d)显示了在拉格朗日框架中进行显式跟踪的SIP粒子的贡献。控制模拟CTL以黑色实线表示；无湍流的破碎模拟以虚线表示（RS、FF、CF）；考虑湍流对碰撞影响的模拟以点线表示（SAggT和CFT）。右侧y轴上的温度廓线基于环境WK82廓线。

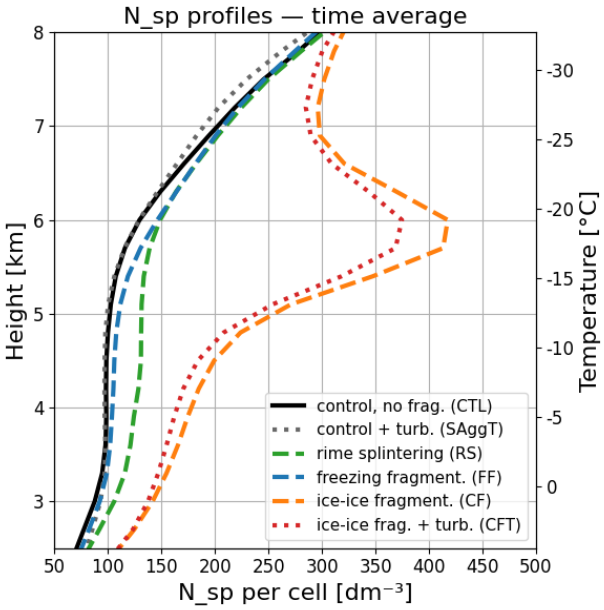


图9：与图8相同，但展示了实验 CTL、SAggT、RS、FF、CF 和 CFT 中每个网格单元内超级粒子数的垂直廓线。实验之间的差异反映了 SIP 导致的粒子数直接变化，以及沉降和驻留时间改变所产生的间接影响。

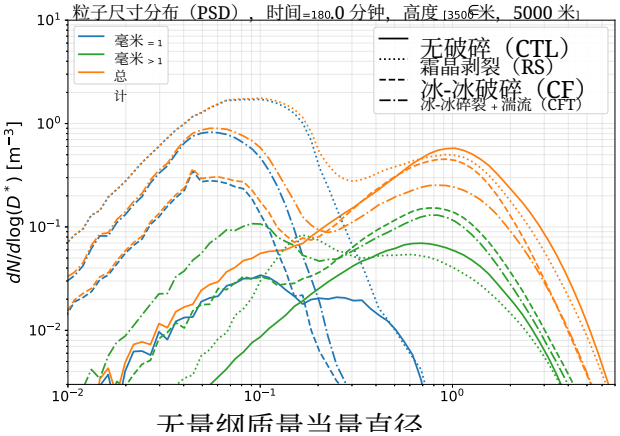
不在湍流碰撞增强最强的范围内（约为 $St = 1$）。因此，湍流对导致碎裂的高碰撞动能碰撞影响很小，但会显著影响随后生成碎片的聚合。

在本次模拟中，冻结碎裂仅贡献约 10–100 个 SIP 粒子 L^{-1} 。每次 FF 事件的碎片产率和 FF 事件的数量均远小于碰撞诱导碎裂。后者反映出可用于冻结碎裂的足够大过冷雨滴数量有限。FF 的净贡献取决于每次事件的碎片产率和冻结碎裂事件的发生频率。在本次飑线模拟中，其对冰相粒子总体的总贡献仍然很小，这一点可由 FF 实验中冰粒子数密度和冰增殖因子的微弱响应看出（图8）。因此，尽管 FF 参数化方案允许在较宽的温度范围内发生碎裂，但足够大过冷雨滴的有限供应，限制了它在这一深对流体制中的总体重要性。因此，在本次模拟中，FF 对 IWC 和冰粒子数浓度的影响很小。

尽管超级粒子的数量是数值量而非物理量，但它能进一步揭示碎裂的表示方式及其对应的物理机制。RS 在 3 至 6 km 高度范围内有所增加，而 FF 则没有显著变化。在 CF 和 CFT 模拟中，冰晶生长区内的超级粒子数量大幅增加，整个区域内也都有增加。这表明，许多碎裂事件都处于碎片质量远小于粒子总质量的情形，例如冰晶生长区内，表面附着有枝晶冰的霰粒子之间发生的霰-霰碰撞；在我们的实现中，这会导致生成新的超级粒子（附录C）。

图 10 所示的粒径分布（PSDs）证实了根据总体廓线得出的解释。在 3500 米至 5000 米高度之间，与 CTL 相比，霜晶剥裂（RS）使小冰晶显著增加，因为该区域是霜晶剥裂的源区。CF 和 CFT 在这一高度的小粒子数量也有所增加，但小粒子的浓度低于 RS

a) 3500 米 – 5000 米



b) 5000 米 – 6500 米

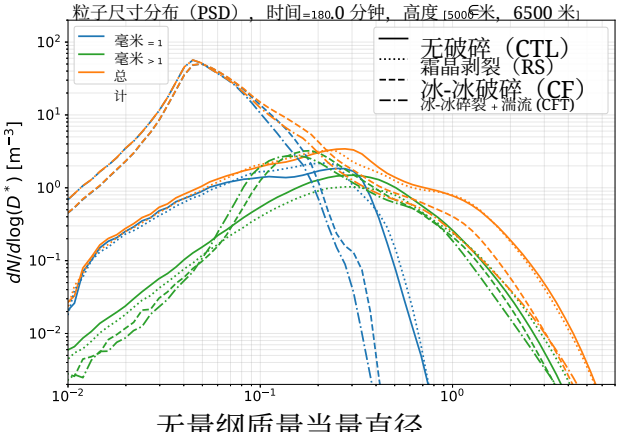


图10：以质量等效直径表示的单体晶体（mm=1，蓝色）、未附霜和轻度附霜聚合体（mm $>$ 1，绿色）以及总计（橙色）的粒径分布。图中显示了180分钟模拟中 CTL、RS、CF 和 CFT 的粒径分布。此处，D^* 是以 $\ell = 1$ m归一化的无量纲质量等效直径。

在该层中，与上文讨论的总体廓线一致。该层中，CFT 的小粒子模态比 CF 更明显，而这一点从图 8 所示的总体廓线中并不明显。CF 和 CFT 的聚合体模态相似，其峰值对应的等效直径约为 1 毫米。

在5000米至6500米之间，CF和CFT中的小冰粒子显著增加，这与冰晶生长区是碰撞破碎源区的判断一致。RS模拟在这一高度没有明显的小粒子模态。在CF和CFT模拟中，我们都发现聚合体模态向较小尺寸偏移，并且在3500–5000米高度的聚合体中出现双峰性。因此，碎片是新增聚合体模态的来源，其等效直径约为0.1毫米；没有碰撞诱导碎裂时，该模态并不存在。有趣的是，尽管较大的聚合体可能因碰撞破碎而减少，但在CF和CFT模拟中，其出现频率并未降低。在这两种模拟中，聚合体粒径分布的尾部与CTL相似，甚至更为突出。

有趣的是，尽管持续发生碎裂，CF 和 CFT 模拟中大型聚合体的数量并未减少。相反，粒子尺度分布的展宽增加了小尺寸和中等尺寸碰撞伙伴的可用性，从而促进聚合。因此，碎裂不断补充粒径谱中最容易被较大雪花捕获的部分。碰撞诱导碎裂非但没有抑制聚合，反而在将冰质量重新分配至较小粒子的同时，维持了大型聚合体的增长。

总粒子尺度分布向较小粒子偏移，表明重度附霜雪花和霰因碰撞破碎而损失质量。在许多情况下，这可能属于“带枝晶的霰”机制：霰在冰晶生长区通过水汽沉积生长时，可能在霰-霰碰撞中失去这些枝晶。这种碎裂机制限制了霰的增长，并以碎片的形式提供更多质量，供聚合体增长。因此，碰撞破碎会影响整个粒径分布，使其向较小粒子偏移，并使质量从霰转移至聚合体。总体而言，粒子尺度分布显示，RS 和 CF/CFT 均显著影响小冰粒子的出现，尤其是在次生冰生成活跃的高度层。

最后，图11的垂直剖面显示，增加的粒子浓度位于对流核心之后，并延伸至高度约6 km处的后随层状云区。相比之下，该区域的总质量密度没有明显增加，除去

a) 总质量密度　　b) 总数密度

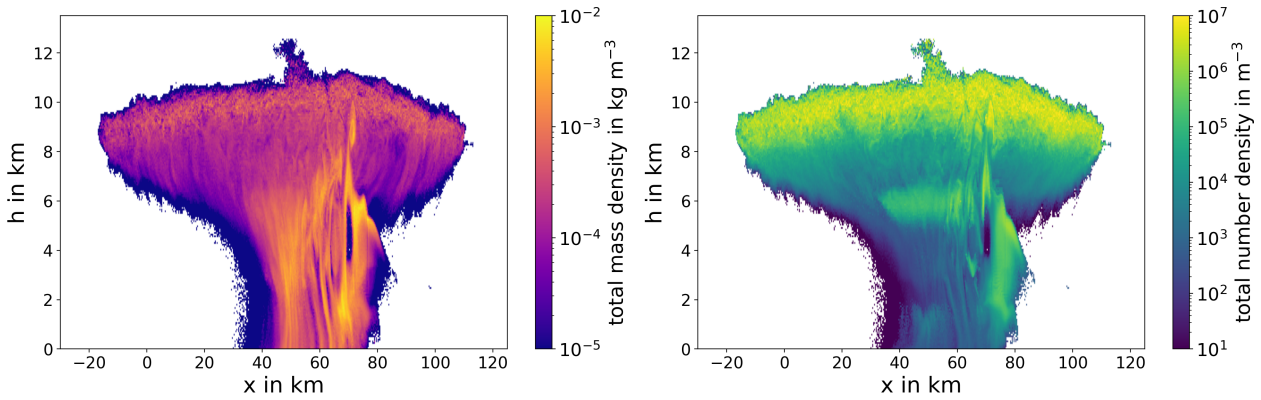


图11：CF模拟在180分钟时的线平均垂直剖面，分别显示(a)总质量密度和(b)总数密度。线平均取自模型区域的1/20，对应长度为1千米。

随机的对流和湍流结构外，看起来与图1所示的CTL非常相似。我们在图8中看到的冰水含量显著增加，在图11中并不明显，因为色标跨越了四个数量级。

7 模拟雷达特征

雷达遥感为了解深对流系统及一般云的云微物理提供了宝贵信息。尤其是对于深对流，获取原位观测颇具挑战，在对流云内部测量垂直廓线的情况也十分罕见。偏振雷达测量对粒子数、尺寸和形状敏感，因此更容易获得，并有望用于验证或证伪模型假设。

云雷达通常工作在比天气雷达更高的频率，例如Ka波段或W波段；天气雷达则工作在X波段、C波段或S波段。较高的频率对小冰粒子更为敏感，但在深对流中可能遭受严重衰减和多重散射的影响，从而限制其观测飓线全深度的能力。X波段系统常用于研究应用，因为在观测对流云时，它们在灵敏度与衰减之间实现了良好的折中（Wurman等，1997年）。与传统的Ka波段或W波段云雷达类似，X波段系统也用于垂直模式。

雷达技术的最新进展使X波段系统能够达到与传统云雷达相当的灵敏度，同时还能获取多普勒谱（Kneifel et al., 2016; von Terzi et al., 2022）。我们使用 McRadar，根据 ICON/McSnow模拟为虚拟X波段雷达模拟极化雷达参量和多普勒谱。这使我们能够量化雷达观测量对淞化碎裂和碰撞诱导的冰-冰碎裂等次生冰产生机制的敏感性。

McRadar（von Terzi et al., 2026）专为使用基于离散偶极子近似的微波散射数据库，对超级粒子模拟进行正向建模而设计。由于它直接基于 McSnow超级粒子表示运行，无需经过中间谱网格（Seifert 等，2026），因此能够对偏振雷达变量和多普勒谱进行物理一致的模拟。

针对穿过 ICON/McSnow 域的六个剖面进行了 McRadar 模拟。沿每个剖面，在 $x = 40$ 至 65 km 范围内以 1 km

的间隔采样虚拟雷达位置。在 30° 和 90° 仰角下计算雷达观测量。在每个虚拟位置模拟了十个具有小幅空间偏移的波束，随后取平均以降低抽样变异。我们假设雷达波束宽度为 1°，噪声水平为 -50 dBZ。

对于以 dBZ 表示的等效雷达反射率 Z_e（图 12a），我们发现，在融化层上方 4–5 km 高度处，RS、CF 和 CFT 的反射率增加了 2 dB；在 5–6 km 高度处则没有显著差异；而在更高处，CF 和 CFT 的反射率较 CTL 进一步增加。总体而言，Z_e 对次生冰生成仅表现出较弱的敏感性，因为粒径分布和冰水含量的变化可以在雷达反射率中相互抵消。

对于差分反射率（ZDR，图 12b），各模拟之间的平均差异很小（约为 0.05 dB）。由于这些差异与模拟中的 ZDR 噪声相近，因此应谨慎解读结果。总体而言，小型非球形单体贡献增加会使 ZDR 趋于增大，而较大、形状更趋于各向同性的聚合体形成则会使其趋于减小。由于次生冰生成会同时改变小型单体和较大聚合体的丰度，这些相反的效应在很大程度上会相互抵消，因此 ZDR 仅发生细微变化。

在传统的极化雷达参量中，KDP 对 SIP 的响应特征最为明显（图12c）。对于 RS，我们发现 KDP 在3–4.5 km高度范围内中等程度增加，此处正是霰化碎裂活跃的区域。与 RS 相比，CF 引起的 KDP 增幅要大得多，且影响层更深，范围为3–6.5 km高度。6500 m处 KDP 的初始增加与数浓度的大幅增加（图8a）以及聚合体尺寸的增大（未显示）一致。尽管在5800至4500 m之间数浓度有所下降，KDP 却在4800 m处出现明显峰值。由于 KDP 与数浓度和单个粒子的质量成正比，KDP 的最大值反映了这两个因素之间的竞争关系。在峰值以上，平均聚合体质量的增加足以抵消数浓度的下降；在峰值以下，数浓度持续下降占据主导地位，从而导致观测到的 KDP 减小。湍流对碰撞的影响增强了聚合，降低了粒子数密度，进而降低 KDP；与 CTL 相比的 SAggT，以及与 CF 相比的 CFT 中，都清楚地显示了这一点。在 CFT 中，以 SAggT 而非 CTL 作为参照时，可以看到由碎裂导致的 KDP 增加。因此，在整体雷达矩中，KDP 是识别 SIP 最有希望的候选指标，尽管其解释仍可能受到其他微物理过程的干扰。为获得更具过程特异性的 SIP 特征，我们因此进一步考察偏振多普勒谱，因为与整体雷达矩相比，偏振多普勒谱能够提供更详细的信息。

为从飑线高度多变的对流动力学中分离出微物理特征，合成多普勒谱仅根据水凝物的末端下落速度计算。我们有意忽略由背景风引起的动力展宽和谱移，从而能够评估所涉及微物理过程的最大潜在雷达特征。

垂直观测的多普勒谱（云雷达通常采用这种观测方式）显示在图13的上排图中。下排图则展示了沿飑线单个剖面、仰角为30°时的多普勒谱（要观测极化特征，必须采用倾斜视角）。请注意，倾斜观测得到的谱较窄，因为在这一仰角下，径向多普勒速度只有50%来自垂直分量。反射率多普勒谱（图13a-c）显示，粒子的下落速度分布范围很广，从0.5 m/s到3 m/s以上。对于大于1 m/s的速度，CTL、RS和CF之间的差异很小。对于较低速度，我们在RS中4至5 km高度处以及CF中约6 km高度处发现了信号。这些是发生次级冰生成过程的源区，小粒子在此生成，并且这一点在多普勒谱中清晰可见。在实际测量中，这种微弱的谱信号可能难以与噪声底区分。相比之下，谱差分反射率（sZDR）在霜冰碎裂和碰撞诱导碎裂源区的谱线低速端均呈现出显著增强。由于谱差分反射率能够解析极化特征随末端下落速度的变化，因此它可以

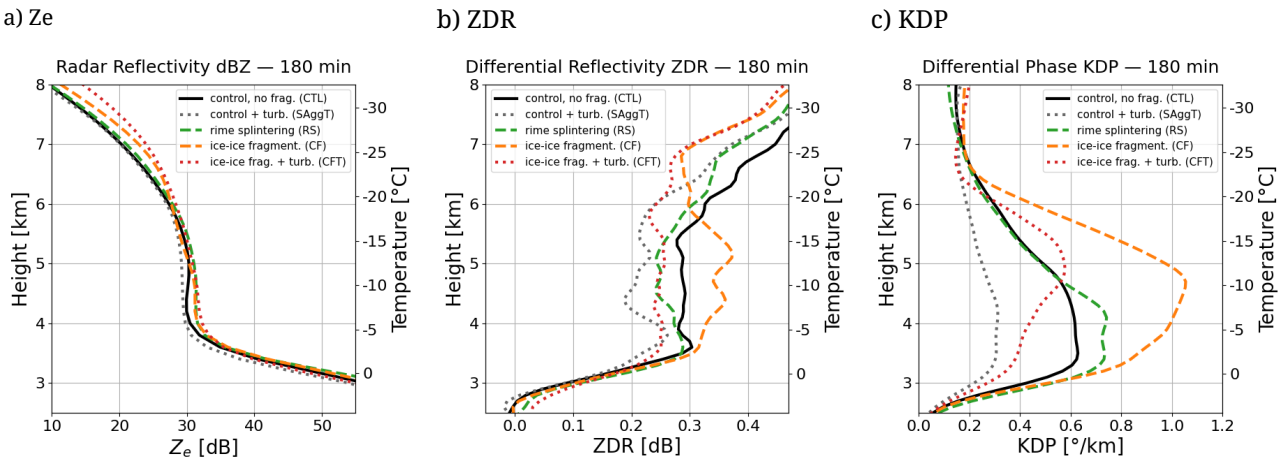


图12：模拟时间为180分钟时，90°仰角处的雷达反射率因子（Ze）、以及30°仰角处的差分反射率（ZDR）和比差分相位（KDP）的垂直廓线。图中展示了CTL、SAggT、RS、CF和CFT模拟。

将新生成的冰粒子与其多普勒速度和高度关联起来。因此，sZDR保留了整体雷达矩中大多会丢失的微物理特征。

因此，偏振多普勒谱为识别次生冰产生机制提供了一种很有前景的方法，因为谱差分反射率（sZDR）有望定位新生成冰粒子的源区。这有助于区分霰化碎裂（主要发生在 $-3\,^{\circ}\mathrm{C}$至 $-8\,^{\circ}\mathrm{C}$之间）与碰撞诱发的冰-冰碎裂，后者的源区集中在 $-15\,^{\circ}\mathrm{C}$附近的枝晶生长区。

总体而言，我们发现，在传统雷达矩中，KDP是对次生冰生成最敏感的指标，而ZDR主要通过聚合体丰度的变化作出响应；由于粒子尺寸和冰水含量的补偿效应，雷达反射率的诊断能力最弱。这些整体雷达矩均无法唯一识别潜在的次生冰产生机制。相比之下，sZDR等谱偏振观测量能够同时提供新生成冰粒子的高度信息（该高度通常可与局地温度状况联系起来）和末端下落速度信息，因此是次生冰生成一种很有前景的观测诊断指标。需要分析真实的雷达观测，以研究这些谱特征能否在真实观测中被识别，还是会被动力展宽及其他谱变异性来源所掩盖。

8 总结与结论

本研究使用拉格朗日粒子模型 ICON/McSnow，探究了聚合、碎裂、随机雪花几何形态和湍流如何共同控制理想化飑线中冰粒子的演变。对粒子属性和生长路径的显式表示，使我们能够开展详细的过程层面分析，避免整体微物理方案的许多局限。

控制模拟显示，对流区与层状云区彼此分离：对流核心以霰化粒子和冻结水滴为主，层状云区则以未霰化或轻度附霜聚合体为主。粒子生长由凝华、淞附和聚合共同控制，而拉格朗日粒子框架自然呈现出粒子属性的显著差异。

一项关键发现是，雪花几何形态的随机变化虽然增加了下落速度的变异性，却会减少聚合。在模拟的飑线中，聚合主要受

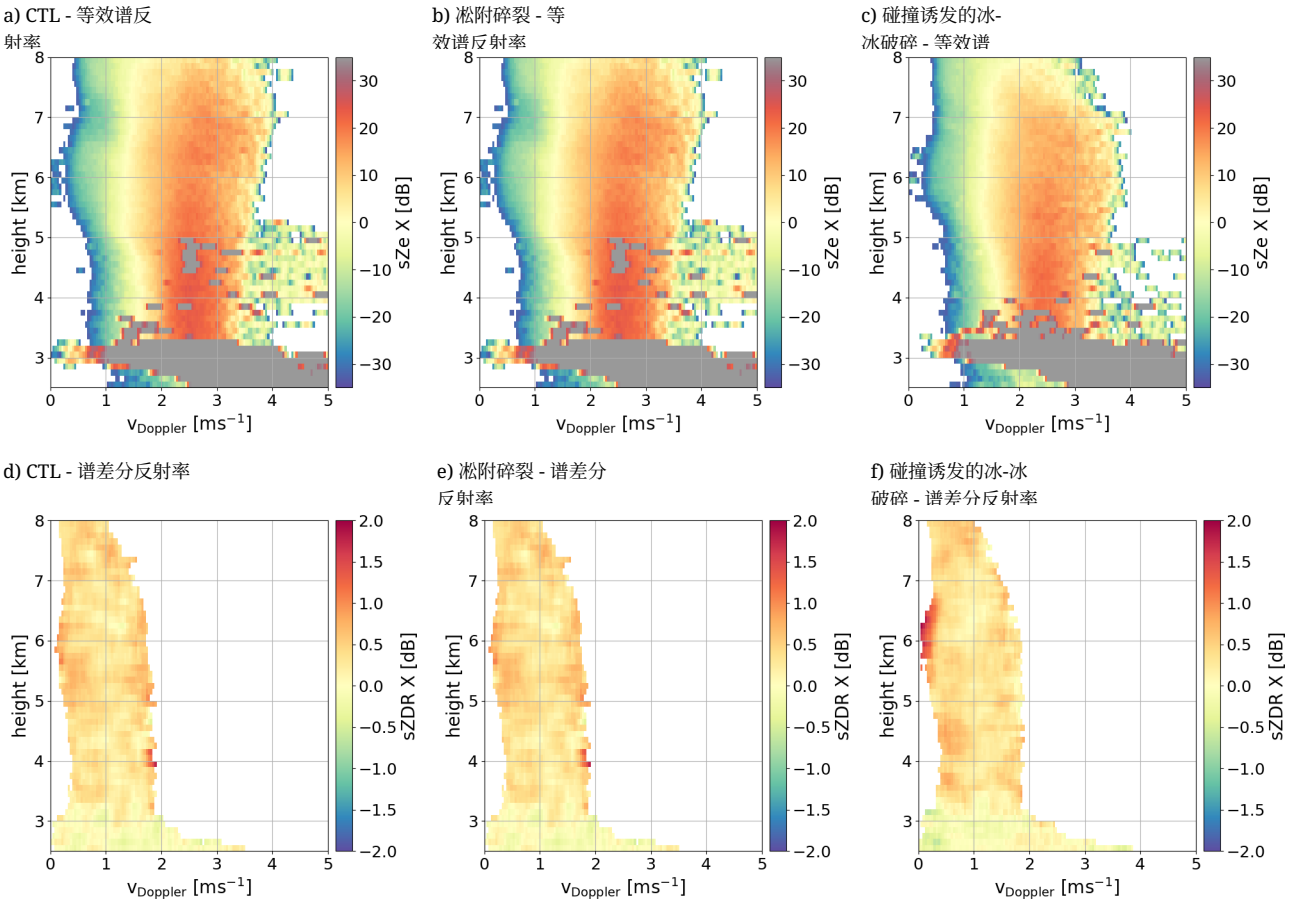


图13：模拟得到的等效谱反射率 sZe 多普勒谱（上排，a–c，90°仰角）和谱差分反射率 sZDR（下排，d–f，30°仰角），对应模拟 CTL、RS 和 CF。

粒子截面控制，而非差异沉降，因为在雪花较高的雷诺数下，末端下落速度的变化很小。湍流对碰撞率的影响会促进聚合，并使降水率提高约 8–10 %。

在各种次生冰产生机制中，碰撞诱导破碎（CF）是模拟飓线中最有效的次生冰来源。它在枝晶生长区产生大量碎片，并显著提高冰粒子数浓度。霰化碎裂和碰撞破碎会增加 KDP，且二者在各自机制的次生冰源区都表现出谱差分反射率 sZDR 中的次生冰生成特征。因此，偏振多普勒谱有望成为识别次生冰生成的重要工具。

本研究的主要结论是，对流上升气流促使低密度聚合体与快速下落的霰化粒子共存，从而创造有利于高效碰撞诱导破碎（CF）的条件。霜晶剥裂（RS）主要在较低高度发挥作用，并增加小冰晶的数量，因而间接促进聚合，但对降水影响甚微。相比之下，冻结破碎（FF）受到足够大雨滴可用性的严重限制，在这一环境下作用很小。在雨滴粒径分布不同、垂直输送较弱或融化后发生再冻结的环境中，冻结破碎可能发挥更大的作用。

尽管碰撞诱导碎裂的参数化基于对雪花、带枝晶的霰和霰开展的实验室测量，但结果可能取决于所假定的

拉格朗日框架中粒子脆弱性与表观密度之间的关系。尽管这一公式化具有物理依据，但其仍存在不确定性，并可能影响模拟的次生冰产生的定量强度。同时，拉格朗日颗粒方法提供了有关粒子属性和碰撞特性的详细信息，例如碰撞动能，而这些粒子属性的变异性使得破碎过程能够得到物理上一致的表示。

本研究的另一项关键结果是碎裂与湍流之间的相互作用。单独考虑碰撞诱导碎裂时，粒径分布会向较小尺寸偏移，降水效率也会降低；而加入湍流后，碰撞率升高，从而促进聚合。湍流引起的聚合增强，能够抵消碎裂导致的大粒子减少，并恢复降水尺度水凝物的形成。因此，碰撞诱导碎裂与湍流共同作用时，降水率与不含碎裂的控制模拟相当，但仍低于仅考虑湍流增强聚并的模拟。尽管湍流会提高碰撞率，却不会显著增强碰撞诱导碎裂，因为碰撞诱导碎裂需要足够的碰撞动能，而这只会出现在高斯托克斯数区间。因此，湍流效应对碰撞诱导碎裂本身影响较小，其主要作用是促进碰撞诱导碎裂所产生碎片的聚合。

所采用的湍流参数化基于球形粒子的公式，而将其扩展至非球形冰颗粒，会进一步增加湍流效应大小的不确定性。未来研究应通过联系取向统计的现有结果（Gustavsson 等，2017）、扫掠体积分析（Gavze 和 Khain，2022）、直接数值模拟（Sheikh 等，2024）和理论模型（Zaichik 等，2009；Luo 等，2026），弥补这一不足。

使用 McRadar 进行的正向模拟进一步表明，传统极化雷达参量只能有限地区分不同的次生冰产生机制。其中，KDP 的响应最为明显；而 sZDR 等谱偏振观测量保留了新生成冰粒子的高度和下落速度分布信息，因此有望成为诊断次生冰生成的观测指标。

本研究的结果仅适用于所模拟的飑线天气系统，其特征是上升气流强劲且霰生成显著。在其他云类型中，例如层状云或浅对流云，各种次生冰产生机制的相对重要性可能有所不同。

总体而言，我们的结果表明，在深对流云中，碎裂、聚合、随机雪花几何形态和湍流不能彼此孤立地看待。它们之间的耦合作用控制着冰粒子粒径分布和次生冰生成的演变，并最终影响降水形成。因此，要实现物理上逼真的深对流云云微物理模拟，似乎必须捕捉这些相互作用。

A 霰化碎裂的实现

McSnow 中 Hallett–Mossop 霰粒碎裂的实现遵循成熟的公式（Pruppacher 和 Klett，1998年，以下简称 PK98）。对于大于 $24\ \mu$m 的云滴，假设每附着 10^{-6} kg 霜冰会产生 350 个碎片，相当于 C_{RS} =$3.5\times10^{8}\,\mathrm{kg}^{-1}$。霰化碎裂发生在一个狭窄的温度范围内，介于 -3℃ 和 -8℃ 之间，并在 -5℃ 时达到最大值。

在 McSnow 中，该过程采用随机公式化表示，

$$p_{\mathrm{RS}} = \frac{N_{\mathrm{RS}}}{\xi_0}, \tag{5}$$

其中 ξ_0 是超级粒子的基准多重性，与冰成核等其他过程所用的基准多重性相同。每个网格盒每个时间步产生的碎片数为

$$N_{\mathrm{RS}} = C_{\mathrm{RS}}\, f_{\mathrm{RS}}(T) \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{SP}}} \Delta m_{\mathrm{rime},i}. \tag{6}$$

此处，$\Delta m_{\mathrm{rime},\ i}$ 表示一个时间步内由第 i 个超级粒子附着的淞质量，N_{SP} 表示网格盒中的超级粒子数。与温度相关的因子表示为

$$f_{\mathrm{RS}}(T) = \begin{cases} 0, & T > 270.16\ \mathrm{K}, \\ (270.16 - T)/2, & 270.16 \geq T > 268.16\ \mathrm{K}, \\ (T - 265.16)/3, & 268.16 \geq T \geq 265.16\ \mathrm{K}, \\ 0, & T < 265.16\ \mathrm{K}. \end{cases} \tag{7}$$

这对应于 PK98 中的公式（16-71）。

为限制超级粒子数的增长，每个网格盒和时间步最多创建一个碎片超级粒子。量 p_{RS} 用作霰化碎裂事件的控制参数。当 $p_{\mathrm{RS}} \geq 1$ 时，触发确定性事件，并生成一个代表所产生碎片总数的单个超级粒子，其多重度为 $\xi_{\mathrm{RS}} = N_{\mathrm{RS}}$。当 $p_{\mathrm{RS}} < 1$ 时，应用伯努利抽样：抽取一个随机数 $r \in [0, 1]$，仅当 $r < p_{\mathrm{RS}}$ 时才创建一个多重度为 $\xi_{\mathrm{RS}} = \xi_0$ 的新超级粒子。当 $r \geq p_{\mathrm{RS}}$ 时，该时间步内不会发生霜冰碎裂。这可以紧凑地写成关于 ξ_{RS} 的方程：

$$\xi_{\mathrm{RS}} = \begin{cases} N_{\mathrm{RS}}, & p_{\mathrm{RS}} \geq 1, \\ \xi_0, & p_{\mathrm{RS}} < 1 \text{ and } r < p_{\mathrm{RS}}, \\ 0, & p_{\mathrm{RS}} < 1 \text{ and } r \geq p_{\mathrm{RS}}, \end{cases} \tag{8}$$

这种方法在限制超级粒子数量的同时，保留了预期的碎片数量。

通常假设 Hallett–Mossop 碎片的直径为几微米，因此主要增加冰数浓度，而不会直接增加冰质量。在 McSnow 中，我们假设碎片的直径为 $5\ \mu$m，并将其视为实心球形冰粒子。碎片仅赋予冰质量 m_i，不赋予淞质量 m_r。因此，在 McSnow 中，碎片被视为较小的无雾淞冰晶。

B 冻结碎裂的实现

冻结碎裂的实现遵循 Pfeifer 等人（2025，以下简称 Pf25）和 Phillips 等人（2018，以下简称 Ph18）。尺寸依赖性基于 Pf25 的经验性原位数据（其图 5）。我们假设碎裂概率随直径呈分段线性变化，在最佳直径 $D_{\mathrm{opt}} = 0.5$毫米处达到最大值$p_{\mathrm{max}} = 0.30$。直径小于 $D_{\mathrm{min}} = 0.05$毫米 $= 50\ \mu$米的液滴不会发生冻结碎裂。对于直径大于 D_{opt}的液滴，碎裂概率线性下降至最小值 $p_{\mathrm{min}} = 0.05$，并在直径达到 $D_{\mathrm{max}} = 2$毫米后保持不变。

$$p_1(D) = \begin{cases} 0, & D \leq D_{\mathrm{min}}, \\ p_{\mathrm{max}} \frac{D - D_{\mathrm{min}}}{D_{\mathrm{opt}} - D_{\mathrm{min}}}, & D_{\mathrm{min}} < D \leq D_{\mathrm{opt}}, \\ \max\left(p_{\mathrm{max}} - (p_{\mathrm{max}} - p_{\mathrm{min}}) \frac{D - D_{\mathrm{opt}}}{D_{\mathrm{max}} - D_{\mathrm{opt}}}, p_{\mathrm{min}}\right), & D > D_{\mathrm{opt}}. \end{cases} \tag{9}$$

基于 Ph18 和 Keinert 等（2020），我们假设最适温度为 $T_{\mathrm{opt}} = -15$ °C，且低于 $T_{\mathrm{min}} = -30$ °C 时不会发生冻结碎裂。温度依赖性由高斯概率表示:

$$p_2(T_c) = \begin{cases} 0, & T_c \leq T_{\mathrm{min}}, \\ \exp\left(-\left(\frac{T_c - T_{\mathrm{opt}}}{\sigma_{\mathrm{FF}}}\right)^2\right), & T_{\mathrm{min}} < T_c \leq 0\ ^\circ\mathrm{C}, \\ 0, & T_c > 0\ ^\circ\mathrm{C}. \end{cases} \tag{10}$$

在 $\sigma_{\mathrm{FF}} = 10$ K 时。假设温度和尺寸效应在统计上相互独立，因此总冻结碎裂概率为

$$p_{\mathrm{FF}}(D, T_c) = p_1(D)\, p_2(T_c) \tag{11}$$

且上限为 $0 \leq p_{\mathrm{FF}} \leq p_{\mathrm{max}}$。每次碎裂事件产生的碎片数 n_{FF} 遵循 Ph18（其模式 1）:

$$n_{\mathrm{FF}} = \alpha_{\mathrm{FF}}\ \min\left(\frac{D}{D_{\mathrm{min}}}, 40\right)\left(1 + \left(\frac{T_c - T_{\mathrm{opt}}}{\sigma_{\mathrm{FF}}}\right)^2\right)^{-1} \tag{12}$$

其中 $\alpha_{\mathrm{FF}} = 0.5$。碎片质量从形状参数为 $k = 1$ 的伽马分布中抽样，其平均质量对应于直径为 $5\,\mu$m 的粒子。为提高计算效率，我们假设一次超级粒子碎裂事件产生的所有碎片尺寸相同。此外，我们假设冻滴会碎裂成两个半球。在 McSnow 中，半球近似为长宽比为 0.5 的椭球体。对于每次冻结碎裂事件，McSnow 都会创建一个新的超级粒子来表示这些碎片，而已有的超级粒子则表示碎裂后的残余体或未碎裂的残余体。

C 碰撞诱发的冰-冰碎裂实现

McSnow 中碰撞诱导的冰-冰碎裂的实现基于 Grzegorczyk 等（2023年，以下简称 G23）和 Yadav 等人（2025年，以下简称 Y25）的经验参数化方案。公式化遵循 Phillips 等（2017年）和 Gautam 等（2024年）的方法。决定碎裂事件的主要变量是碰撞动能

$$K_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}|v_1 - v_2|^2 \tag{13}$$

碎片数量则遵循

$$N_f = \alpha_f A_f \left[1 - \exp\left(-\left(\frac{C_f K_{\mathrm{c}}}{\alpha_f A_f}\right)^{\gamma}\right)\right] \tag{14}$$

其中，α_f 是较易碎粒子的表面积，A_f 是可破碎微凸体面数密度的量度。C_f 是凸起易碎性系数，$\gamma = 0.78$ 是无量纲指数。

首先，根据表观密度确定两个碰撞伙伴中较脆弱的粒子。假设表观密度较低的粒子会发生碎裂。下文中的所有 McSnow 变量均指这个较脆弱的粒子，并假设它是粒子 1，其质量为 m_1，表面积为 $\alpha_f = \pi D_1^2$，表观密度为

$$\rho_{\mathrm{app}} = \begin{cases} \frac{6 m_1}{\pi D_1^3 \phi}, & \phi \leq 1, \\ \frac{6 m_1 \phi^2}{\pi D_1^3}, & \phi > 1. \end{cases} \tag{15}$$

长宽比为 ϕ。

G23 给出了雪-霰碰撞和霰-霰碰撞的关系，后者包括枝晶霰和非枝晶（裸）霰。Y25 为裸霰以及不同表观密度的冰球提供了参数化方案。因此，我们有三个需要以连续方式衔接的区域：系数为 $C_{f,\ sg}$ 和 $A_{f,\ sg}$的雪-霰，系数为 $C_{f,\ gg}$和 $A_{f,\ gg}$的带枝晶的霰，以及系数为$C_{f,\ bg}$ 和$A_{f,\ bg}$的裸霰（包括实心球或冻滴）。后者根据 Y25 的表4进行插值。下文所述的方法利用 McSnow 预测的粒子属性，确保这三个区域之间实现连续过渡。

实心板状冰晶或柱状冰晶等初生冰晶很可能不会导致碎裂。我们使用椭圆面积分数 q_A 来排除这些粒子

$$C^*_{f,sg} = C_{f,sg} \min(1, \max(0, (0.7 - q_A)/0.3)) \tag{16}$$

因此，对于具有 $q_A \geq 0.7$ 的粒子，棱角脆弱性系数变为零；只有对于 $q_A \leq 0.4$（显然属于枝晶生长或聚合体），我们才保留 G23 的原始值。

为了实现从雪到带枝晶的霰的过渡，我们使用霜冰和冻结分数

$$f_{\mathrm{rf}} = \frac{m_r + m_f}{m_1} \tag{17}$$

a，并对面数密度和凸起易碎性系数进行线性插值 :

$$C_{f,dg} = C^*_{f,sg}(1 - f_{\mathrm{rf}}) + C_{f,gg} f_{\mathrm{rf}} \tag{18}$$

$$A_{f,dg} = A_{f,sg}(1 - f_{\mathrm{rf}}) + A_{f,gg} f_{\mathrm{rf}} \tag{19}$$

使用这组系数，我们根据公式（14）得到枝晶生长区间的 $N_{f,\ dg}$ 。

裸霰区间的碎片数量 $N_{f,\ bg}$ 基于 Y25 的表4，并使用霰化冻结密度

$$\rho_{\mathrm{rf}} = \frac{m_r + m_f}{V_r + V_f} \tag{20}$$

其中， V_r 是霜冰体积，在 McSnow 中它是一个预报变量； $V_f = m_f/\rho_i$ 是粒子冻结质量的体积。这里， ρ_i 是冰质材料的密度。

最后，我们使用表观密度与霜化冻结密度之比

$$f_\rho = \frac{\rho_{\mathrm{app}}}{\rho_{\mathrm{rf}}} \tag{21}$$

来判断粒子处于枝晶生长区间还是裸霰区间。对于 $f_\rho = 1$ ，粒子为裸霰或冻滴；对于 $f_\rho < 1$ ，粒子经历了枝晶生长；对于$f_\rho \ll 1$ ，粒子为未附着过冷水滴的雪花。因此，对于 $f_\rho \leq f^*_\rho = 0.5$ ，我们应用 $N_{f,\ dg}$；对于 $f_\rho = 1$ ，则使用 $N_{f,\ bg}$ 。在两者之间，则基于 f_ρ 进行线性插值，具体为:

$$N_f = N_{f,dg}(1 - x_\rho) + N_{f,bg} x_\rho \tag{22}$$

and

$$x_\rho = \min\left(\max\left[\frac{f_\rho - f^*_\rho}{1 - f^*_\rho}, 0\right], 1\right) \tag{23}$$

在进行此线性插值之前，$N_{f,\ dg}$ 和 $N_{f,\ bg}$ 分别限制为 1000 个和 100 个粒子。

通过采用 McSnow 的形态预测来处理碰撞诱导碎裂，我们已经能够捕捉不同的生长区间：枝晶雪花和聚合雪花、带枝晶的霰、裸霰以及冻结水滴，同时排除了板状冰晶或柱状冰晶等初生冰晶。即使没有明确的温度约束，该方案也能产生

物理上合理的温度依赖性；对于理想化飓线，碎裂最大值约出现在 -20 °C。

然而，遵循 Phillips 等（2017）和 Gautam 等（2024）的方法，我们施加了额外的温度约束，以更强地抑制枝晶生长区间之外的冰-冰碎裂。因此，最终碎片数为

$$N_f^* = N_f \exp\left[-\left(\frac{T_c - T_{\mathrm{opt}}}{\sigma_{\mathrm{cf}}}\right)^2\right] \tag{24}$$

其中 $T_{\mathrm{opt}} = -15$ °C 和 $\sigma_{\mathrm{cf}} = 2.5$ K。

碎片质量 m_{frag} 从伽马分布中抽样，其形状参数为 $k = 1$，平均质量对应的直径为 $75\,\mu$m。为提高计算效率，我们假设单次碎裂事件中由一个超级粒子产生的所有碎片尺寸相同。

碰撞诱导碎裂在飓线模拟中频繁发生。若每次碎裂事件都创建一个新的超级粒子，超级粒子数将迅速增加。这里我们采用双重策略：对于碎片总质量远小于发生碎裂的冰粒子质量的事件，即 $m_{\mathrm{frag}} < 10^{-3} m_1$，我们收集该时间步内每个网格点上所有碎裂事件产生的碎片，并生成一个平均质量等于所有碎片平均质量的单个 SP。该碎片 SP 为纯冰质量 m_i。对于碎片质量并未远小于发生碎裂的粒子的情况，即 $m_{\mathrm{frag}} \geq 10^{-3} m_1$，则采用质量加权的超级抽样策略（亦称随机模式选择），这一方法由 Seifert 和 Siewert（2023）提出，并由 de Jong 等人（2023）和 Bayley 等人（2025）用于雨滴的碰撞破碎。因此，对于每次碎裂事件，超级粒子根据概率代表碎片或残余粒子

$$p_{\mathrm{res}} = \frac{m_{\mathrm{res}}}{m_1}, \quad \text{with} \quad m_{\mathrm{res}} = m_1 - m_{\mathrm{frag}}\, N_f^* \tag{25}$$

对于每个碎裂事件，通过抽取一个随机数 $r_p \in [0, 1]$ 进行伯努利抽样。对于 $r_p \leq p_{\mathrm{res}}$，选择残余模式，并调整超级粒子的多重度以守恒质量。对于 $r_p > p_{\mathrm{res}}$，超级粒子在碎片模式下代表 m_1/m_{frag} 个碎片。这种随机模式选择在每次单独实现中都能精确守恒质量，并产生残余模式和碎片模式的正确期望贡献。请注意，N_f^* 仅用于 p_{res} 的定义，并不会被显式实现，这与按质量加权的抽样策略一致。对于碎片和残余粒子，超级抽样保留了冰粒子的微物理结构/组成，即其中的冰、霜冰和冻结质量等。

这种方法限制了由碎裂产生的超级粒子数量，但要求超级粒子数量足够大，以充分抽样随机碎裂过程。与雨滴破碎不同，雨滴破碎中的碎片群体可以合并；对于冰碎裂，由于碎片属性的维度很高（例如尺寸、形状、密度和覆霜状态），这并不容易实现，因为高维度阻碍了在相空间中进行高效平均。

D 湍流对碰撞影响的实现

McSnow 中湍流效应的实现遵循 Onishi 和 Seifert（2016年，以下简称 OS16）的研究，以及作为在线补充材料提供的相应 Fortran 代码。Onishi 核由三项组成：径向分布函数 g_{12}、平均径向相对速度 $\langle |w_r| \rangle$以及湍流增强因子 η_e。

对于 g_{12}，Onishi等人（2015年）提出了一种模型，用于描述非沉降粒子单分散系统中的聚集，其主要取决于斯托克斯数

$$\mathrm{St} = \frac{\tau_p}{\tau_k} = \frac{v_t}{g\,\tau_k} \qquad \text{with} \qquad \tau_p = \frac{v_t}{g}, \qquad \tau_k = \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{26}$$

这里，τ_p 是颗粒弛豫时间，v_t 是末端下落速度，g是重力加速度。科尔莫哥洛夫时间尺度 τ_k 是流体运动黏度 ν 和湍流耗散率 ε 的函数。不同于原始公式化方法，我们根据末端下落速度估算τ_p ，即 $\tau_p = v_t/g$，其中隐式地考虑了非线性阻力效应。这应被解释为有效颗粒响应时间，从而将参数化方法的适用范围扩展到严格的斯托克斯流态之外。

OS16给出了斯托克斯数St_n 的单分散系统径向分布函数：

$$g_{nn} - 1 = \begin{cases} A_1\,\mathrm{St}_n^2, & \text{for } \mathrm{St}_n < \mathrm{St}_a, \\ A_2\,\mathrm{Re}_\lambda\,\mathrm{St}_n^{-2}, & \text{for } \mathrm{St}_n \geq \mathrm{St}_a, \end{cases} \tag{27}$$

其中 $A_1 = 110$ 和 $A_2 = 0.38$，且

$$\mathrm{St}_a = \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{1/4} \mathrm{Re}_\lambda^{1/4}. \tag{28}$$

在St_a 处应用基于双曲正切函数的平滑（详见OS16）。基于该参数化方法，双分散径向分布函数 g_{12} 由Zhou等人（2001年）的模型得到

$$g_{12} = 1 + \rho_{12}\,(g_{11} - 1)^{1/2}\,(g_{22} - 1)^{1/2}, \tag{29}$$

with

$$\rho_{12} = a_1 \exp(-\mathrm{St}_{\max}) + a_2 \exp(-a_3\,\mathrm{St}_{\max})\,\left[1 + \tanh(\mathrm{St}_{\max} - 3)\right], \tag{30}$$

其中$\mathrm{St}_{\max} = \max(\mathrm{St}_1, \mathrm{St}_2)$，且 $a_1 = 2.6$、 $a_2 = 0.1025$和 $a_3 = 0.0206$。

对于 $\langle|w_r|\rangle$，我们遵循Onishi等人（2015年）和Wang等人（2000年）的做法，采用

$$\langle|w_r|\rangle = \left[\frac{2}{\pi}\left(w_{\mathrm{shear}}^2 + w_{\mathrm{accel}}^2\right)\right]^{1/2}, \tag{31}$$

and

$$w_{\mathrm{shear}}^2 = \frac{(r_1 + r_2)^2\,\varepsilon}{15\,\nu}, \qquad w_{\mathrm{accel}}^2 = \frac{1}{3}\left[1 + 0.6\exp\left(-(\mathrm{St}_{\max} - 1)^{1.5}\right)\right] f_{\mathrm{KK}}, \tag{32}$$

其中，ν 为运动黏度，ε 为湍动能耗散率。 f_{KK} 的公式化遵循Kruis和Kusters（1997年），如OS16所述。

对于湍流增强因子 η_e，我们使用Wang等人（2008年）以及Wang和Grabowski（2009年）的列表值，具体说明见OS16。这些列表值收录于OS16的在线补充材料中。

尽管Onishi等人（2015年）和OS16的基础直接数值模拟中存在重力沉降，但 g_{12} 和 $\langle|w_r|\rangle$ 的参数化方案假设各向同性，且未明确考虑重力效应。具体而言，径向速度不包含沉降的贡献，因此在斯托克斯数较大的极限下无法还原差分终端下落速度。为此，我们将重力贡献与湍流贡献结合起来，得到总收集核，

$$K_{\mathrm{coll}} = \sqrt{K_{\mathrm{grav}}^2 + K_{\mathrm{dyn}}^2}. \tag{33}$$

目前尚无成熟程度相当的非球形冰颗粒湍流碰撞核。因此，我们将质量等效直径用于插值，并将Onishi 核应用于冰粒子，以查询

碰撞效率查找表。对于 g_{12} 和 $\langle|w_r|\rangle$，斯托克斯数采用实际末端下落速度计算，这与 McSnow 一致。虽然这种动力学核公式化对于近球形粒子而言是合理的近似，但 Onishi 模型不适用于强非球形形状，因为在这种情况下，粒子倾斜及其相关加速度会变得至关重要。预计这会降低优先浓集，同时可能增强 $\langle|w_r|\rangle$（参见 Gustavsson 等（2017年）及其中的参考文献）。遗憾的是，目前尚无针对这些效应的定量参数化方案。本文将 Onishi 核应用于所有冰粒子，但应将其视为一项敏感性研究，而非基于物理的模型。尽管存在这些局限，我们仍确信，该公式化能够捕捉湍流诱导增强的预期量级，并有助于评估其对本次模拟可能产生的影响。

在本研究中，湍流效应仅作用于超级粒子相互作用。因此，在当前的 ICON/McSnow 实现中，淞附和碰并增长不受湍流效应影响。这是一个任意的选择，但有助于简化敏感性研究结果的解读。若将湍流效应纳入淞附过程，将会显著改变潜热释放，进而显著影响动力学，并使微物理效应与动力学效应难以区分。

代码可用性：McSnow 是 ICON 模式框架的一部分，采用 BSD-3C 许可证，可从 https://gitlab.dkrz.de/mcsnow/msnow 获取。由于耦合所需的额外基础设施与当前 ICON 开源发行版版本不兼容，McSnow 在 ICON 中的实现尚未向公众发布。本研究所用的 McRadar 版本可从 GitHub 获取：https://github.com/lterzi/McRadar/tree/ICON_McSnow。本研究所用雪花聚合体的散射数据库已存档于 Zenodo，编号为 10.5281/zenodo.23240257。

作者贡献： C.S. 开发了 McSnow 的原始 ICON 实现，该实现由 F.J. 针对当前研究进行了更新和扩展。C.S.、F.J. 和 A.S. 实现了碎裂方案。A.S. 与 C.S. 共同完成了理想化飑线模拟，并对其进行了分析。M.S. 参与了冰-冰碎裂的实现。L.v.T. 开发了 McRadar，并与 S.K. 共同完成了 DDA模拟。A.S. 撰写了手稿的初始版本。所有作者均讨论了研究结果，并参与了手稿的撰写。

经费声明： 本研究参与了 SPP 2115 项目 FRAGILE，并获得了该项目的部分资助。该项目全名为“雷达偏振测量与数值大气模拟的融合：增进对云和降水过程的理解”，由德国研究基金会（DFG 492234709）资助。

参考文献

Ayala, O., Rosa, B. 和 Wang, L.-P.（2008年）。湍流对沉降液滴几何碰撞率的影响。第2部分：理论和参数化。《新物理学杂志》，10(7):075016。Barklie, R. 和 Gokhale, N.（1959年）。过冷水滴的冻结。麦吉尔大学暴风雨天气研究组科学报告 *MW-30*，第3卷：43–64。Bayley, C. J., Naumann, A. K., Poydenot, F., Vogel, R., Stevens, B. 和 Shima, S.-I.（2025年）。Cleo：包含液滴破碎算法的新型超级液滴模型的数值方法。*EGUsphere*，2025：1–26。Beheng, K.（1987年）。冰化积云的微物理特性：观测结果与数值模拟的比较。《英国皇家气象学会季刊》，113(478):1377–1382。Blyth, A. M. 和 Latham, J.（1993年）。新墨西哥夏季积云中冰和降水的发展。《英国皇家气象学会季刊》，119(509):91–120。

Blyth, A. M. 和 Latham, J.（1997年）。通过 Hallett-Mossop过程实现积云冰化的多热力学模型。《英国皇家气象学会季刊》，123(541):1185–1198。Blyth, A. M. 和 Latham, J.（1998年）。关于 PV Hobbs 和 AL Rangno 撰写的积云冰化论文的评论。《英国皇家气象学会季刊》，124:1007–1008。Brdar, S. 和 Seifert, A.（2018年）。McSnow：用于在多维微物理相空间中模拟冰粒子淞附和聚合的蒙特卡罗粒子模型。《地球系统建模进展》，10(1):187–206。Bryan, G. H., Wyngaard, J. C. 和 Fritsch, J. M.（2003年）。深湿对流模拟的分辨率要求。《月刊天气评论》，131(10):2394–2416。B¨ohm, J. P.（1992a年）。混合相微物理的一般流体动力学理论。第I部分：水凝物的阻力和下落速度。《大气研究》，27(4):253–274。B¨ohm, J. P.（1992b年）。混合相微物理的一般流体动力学理论。第II部分：聚并的碰撞核。《大气研究》，27(4):275–290。B¨ohm, J. P.（1992c年）。混合相微物理的一般流体动力学理论。第III部分：淞附和聚合。《大气研究》，28(2):103–123。Chen, J.-P. 和 Lamb, D.（1994年）。冰晶习性参数化的理论基础：通过水汽沉积生长。《大气科学杂志》，51(9):1206–1222。Cholette, M., Milbrandt, J. A., Morrison, H., Kirk, S. 和 Lalonde, L.-´E.（2024年）。次生冰生成改善了冻雨模拟。《地球物理研究快报》，51(8):e2024GL108490。Cober, S. G. 和 List, R.（1993年）。表征锥形霰生长的热量和质量传递参数测量。《大气科学杂志》，50(11):1591–1609。de Jong, E., Mackay, J. B., Bulenok, O., Jaruga, A. 和 Arabas, S.（2023年）。破碎过程很复杂：超级液滴方法中碰撞破碎的高效表征。《地球科学模型开发》，16(14):4193–4211。Dedekind, Z., Lauber, A., Ferrachat, S. 和 Lohmann, U.（2021年）。冬季地形混合相云中次生冰生成对降水形成的敏感性。《大气化学与物理》，21(19):15115–15134。Field, P. R., Lawson, R. P., Brown, P. R., Lloyd, G., Westbrook, C., Moisseev, D., Miltenberger, A., Nenes, A., Blyth, A., Choularton, T. 等（2017年）。次生冰生成：当前科学认识及未来建议。《气象学专论》，58:7–1。Gao, J., Han, X., Chen, Y., Li, S. 和 Xue, H.（2023年）。飑线个例中次生冰生成的数值模拟研究。《大气》，14(12):1752。Gautam, M., Waman, D., Patade, S., Deshmukh, A., Phillips, V., Jackowicz-Korczynski, M., Paul, F. P., Smith, P. 和 Bansemer, A.（2024年）。雪与霰/冰雹碰撞中的碎裂：基于野外观测的新公式。《大气科学杂志》，81(12):2149–2164。Gavze, E. 和 Khain, A.（2022年）。小型非球形粒子的重力碰撞：静风环境中长旋转椭球状和扁球体的扫掠体积。《大气科学杂志》，79(6):1493–1514。Grabowski, W. W. 和 Wang, L.-P.（2013年）。湍流环境中云滴的增长。《流体力学年度评论》，45(1):293–324。Grzegorczyk, P., Wobrock, W., Canzi, A., Niquet, L., Tridon, F. 和 Planche, C.（2025a年）。利用三维分档微物理模式研究深对流云中的次生冰生成：第I部分——微物理过程表征的敏感性研究。《大气研究》，313:107774。Grzegorczyk, P., Wobrock, W., Canzi, A., Niquet, L., Tridon, F. 和 Planche, C.（2025b年）。利用三维分档微物理模式研究深对流云中的次生冰生成：第II部分——对云形成和发展的影响。《大气研究》，314:107797。Grzegorczyk, P., Wobrock, W., Dziduch, A. 和 Planche, C.（2025c年）。次生冰生成对云和降雨特性的影响：HyMeX IOP7A强降水事件分析。《大气化学与物理》，25(17):10403–10420。Grzegorczyk, P., Yadav, S., Zanger, F., Theis, A., Mitra, S. K., Borrmann, S. 和 Szak´all, M.（2023年）。冰粒子碎裂：霰—霰和霰—雪花碰撞的实验室实验。《大气化学与物理》，23(20):13505–13521。Gustavsson, K., Jucha, J., Naso, A., L´evˆeque, E., Pumir, A. 和 Mehlig, B.（2017年）。用于

非球形粒子在湍流中沉降时的取向。《Physical Review Letters》，119:254501。Hallett, J. 和 Mossop, S.（1974）。淞附过程中次生冰粒子的生成。《Nature》，249(5452):26–28。Han, C.、Hoose, C. 和 D¨urlich, V.（2024）。模拟深对流云中的次生冰生成：敏感性研究。《大气科学杂志》，81(5):903–921。Harris-Hobbs, R. L. 和 Cooper, W. A.（1987）。支持定量预测次生冰生成率的野外证据。《大气科学杂志》，44(7):1071–1082。Heymsfield, A. J.（1982）。高平原风暴中潜在霰和雹胚发展速率的比较研究。《大气科学杂志》，39(12):2867–2897。Jaruga, A. 和 Pawlowska, H.（2018）。libcloudph++ 2.0：基于粒子的云微物理方案的水相化学扩展。《地球科学模型开发》，11(9):3623–3645。Jensen, A. A. 和 Harrington, J. Y.（2015）。淞附过程中冰晶长宽比演化的建模：单粒子生长模型。《大气科学杂志》，72(7):2569–2590。Keinert, A.、Spannagel, D.、Leisner, T. 和 Kiselev, A.（2020）。自由下落毛毛雨滴冻结时的次生冰生成。《大气科学杂志》，77(8):2959–2967。Kleinheins, J.、Kiselev, A.、Keinert, A.、Kind, M. 和 Leisner, T.（2021）。冻结毛毛雨滴的热成像：作为次生冰粒子来源的压力释放事件。《大气科学杂志》，78(5):1703–1713。Kneifel, S.、Kollias, P.、Battaglia, A.、Leinonen, J.、Maahn, M.、Kalesse, H. 和 Tridon, F.（2016）。降雪中三频雷达多普勒谱的首次观测：解释与应用。《地球物理研究快报》，43(5):2225–2233。Korolev, A.、DeMott, P. J.、Heckman, I.、Wolde, M.、Williams, E.、S malley, D. J. 和 Donovan, M. F.（2022）。低温云中次生冰生成的观测。《大气化学与物理》，22(19):13103–13113。Korolev, A.、Heckman, I.、Wolde, M.、Ackerman, A. S.、Fridlind, A. M.、Ladino, L. A.、Lawson, R. P.、Milbrandt, J. 和 Williams, E.（2020）。重新审视有利于次生冰生成的环境条件。《大气化学与物理》，20(3):1391–1429。Korolev, A. 和 Leisner, T.（2020）。次生冰生成实验研究综述。《大气化学与物理》，20(20):11767–11797。Kruis, F. 和 Kusters, K.（1997）。湍流流动中粒子的碰撞率。《化学工程通讯》，158(1):201–230。Lachapelle, M.、Cholette, M. 和 Th´eriault, J. M.（2024）。次生冰生成过程对使用预测粒子属性微物理方案模拟冰粒的影响。《大气化学与物理》，24(19):11285–11304。Lauber, A.、Kiselev, A.、Pander, T.、Handmann, P. 和 Leisner, T.（2018）。悬浮液滴冻结过程中的次生冰形成。《大气科学杂志》，75(8):2815–2826。Luo, H.、Huang, J. 和 Zhao, L.（2026）。湍流中细长粒子的理论碰撞模型。《流体力学杂志》，1030:A38。Morrison, H.、van Lier-Walqui, M.、Fridlind, A. M.、Grabowski, W. W.、Harrington, J. Y.、Hoose, C.、Korolev, A.、Kumjian, M. R.、Milbrandt, J. A.、Pawlowska, H. 等（2020）。应对云和降水微物理建模的挑战。《地球系统建模进展》，12(8):e2019MS001689。Mossop, S.（1985）。发生冰粒增殖过程的过冷积云的微物理特性。《英国皇家气象学会季刊》，111(467):183–198。Onishi, R.、Matsuda, K. 和 Takahashi, K.（2015）。湍流中液滴生长的拉格朗日跟踪模拟——湍流对自动转化率的增强。《大气科学杂志》，72(7):2591–2607。Onishi, R. 和 Seifert, A.（2016）。湍流增强对碰撞增长的雷诺数依赖性。《大气化学与物理》，16(19):12441–12455。Pasquier, J. T.、Henneberger, J.、Ramelli, F.、Lauber, A.、David, R. O.、Wieder, J.、Carlsen, T.、Gierens, R.、Maturilli, M. 和 Lohmann, U.（2022）。有利于北极混合相云中次生冰生成的条件。《大气化学与物理》，22(23):15579–15601。Pfeifer, N.、Mom, B.、Moisseev, D.、Hartmann, S.、Meusel, J.、Hoose, C. 和 Maahn, M.（2025）。冻结雨滴碎裂产生的高效冰增殖。《地球与环境通讯》，6(1):942。

Phillips, V. T.、DeMott, P. J. 和 Andronache, C.（2008）。针对多种气溶胶化学物种的非均质冰成核经验参数化。《大气科学杂志》，65(9):2757–2783。Phillips, V. T.、Patade, S.、Gutierrez, J. 和 Bansemer, A.（2018）。冻结液滴碎裂产生的次生冰：公式化与理论。《大气科学杂志》，75(9):3031–3070。Phillips, V. T.、Yano, J.-I.、Deshmukh, A. 和 Waman, D.（2021）。对 Korolev 和 Leisner（2020）《次生冰生成实验研究综述》的评论。《大气化学与物理》，21(15):11941–11953。Phillips, V. T.、Yano, J.-I.、Formenton, M.、Ilotoviz, E.、Kanawade, V.、Kudzotsa, I.、Sun, J.、Bansemer, A.、Detwiler, A. G.、Khain, A. 等（2017）。冰–冰碰撞中的破碎冰增殖。第二部分：数值模拟。《大气科学杂志》，74(9):2789–2811。Pruppacher, H. R. 和 Klett, J. D.（1998）。云和降水微物理。Qu, Z.、Korolev, A.、Milbrandt, J. A.、Heckman, I.、Cholette, M.、Nguyen, C. 和 Wolde, M.（2025）。次生冰生成对中纬度寒季对流微物理和动力学的影响。《大气化学与物理》，25(23):17845–17868。Rasmussen, R. M. 和 Heymsfield, A. J.（1987a）。霰和冰雹的融化与脱落。第一部分：模型物理。《大气科学杂志》，44(19):2754–2763。Rasmussen, R. M. 和 Heymsfield, A. J.（1987b）。霰和冰雹的融化与脱落。第二部分：敏感性研究。《大气科学杂志》，44(19):2764–2782。Rasmussen, R. M.、Levizzani, V. 和 Pruppacher, H.（1984a）。大气冰粒子融化行为的风洞与理论研究。第二部分：半径为 < 500 μm 的冻结液滴的理论研究。《大气科学杂志》，41(3):374–380。Rasmussen, R. M.、Levizzani, V. 和 Pruppacher, H.（1984b）。大气冰粒子融化行为的风洞与理论研究：第三部分。半径为> 500 μm 的球形冰粒子的实验与理论。《大气科学杂志》，41(3):381–388。Rotunno, R.、Klemp, J. B. 和 Weisman, M. L.（1988）。强而持久飑线的理论。《大气科学杂志》，45(3):463–485。Segal, Y. 和 Khain, A.（2006）。不同云类型中液滴浓度对气溶胶条件的依赖性：应用于气溶胶条件的液滴浓度参数化。《地球物理研究杂志》，111(D15)。Seidel, J. S.、Kiselev, A. A.、Keinert, A.、Stratmann, F.、Leisner, T. 和 Hartmann, S.（2024）。次生冰生成——没有高效霜晶碎裂机制的证据。《大气化学与物理》，24(9):5247–5263。Seifert, A. 和 Beheng, K. D.（2001）。用于模拟自转换、碰并和自收集的双矩参数化。《大气研究》，59-60:265–281。Seifert, A. 和 Beheng, K. D.（2006）。混合相云的双矩云微物理参数化。第一部分：模型描述。《气象与大气物理》，92(1):45–66。Seifert, A.、K¨ohler, C. 和 Beheng, K. D.（2012）。对流尺度数值天气预报模型模拟的德国上空气溶胶–云–降水效应。《大气化学与物理》，12(2):709–725。Seifert, A.、Leinonen, J.、Siewert, C. 和 Kneifel, S.（2019）。结霜聚合雪花的几何形态：一项建模研究。《地球系统建模进展》，11(3):712–731。Seifert, A. 和 Siewert, C.（2023）。恒定超级液滴数量下的碰撞破碎。《超级液滴方法中碰撞破碎的高效表示：破碎过程很复杂》的互动评论，《地球科学模型开发》。Seifert, A.、Siewert, C.、Jakub, F.、von Terzi, L. 和 Kneifel, S.（2026）。关于聚合雪花几何形态的研究。《Tellus》，79:87–110。Shaw, R. A.（2003）。大气云中的粒子–湍流相互作用。《流体力学年度评论》，35(1):183–227。Sheikh, M.、Gustavsson, K.、L´evˆeque, E.、Mehlig, B.、Pumir, A. 和 Naso, A.（2024）。湍流对沉降冰晶与液滴之间碰撞率的影响。《大气科学杂志》，81(5):887–901。Shima, S.-i.、Kusano, K.、Kawano, A.、Sugiyama, T. 和 Kawahara, S.（2009）。云和降水数值模拟的超级液滴方法：与非静力模型耦合的基于粒子和概率的微物理模型。《英国皇家气象学会季刊》，135(642):1307–1320。Shima, S.-i.、Sato, Y.、Hashimoto, A. 和 Misumi, R.（2020）。预测冰粒子的形态

利用超级液滴方法模拟深对流：scale-sdm 0.2. 5-2.2. 0,-2.2. 1, and-2.2. 2 的开发与评估。《地球科学模型开发》, 13(9):4107–4157. Siewert, C., Kunnen, R., Meinke, M., and Schr¨oder, W. (2014a). 衰减湍流中椭球体的取向统计和沉降速度。《大气研究》, 142:45–56. Siewert, C., Kunnen, R., and Schr¨oder, W. (2014b). 湍流中沉降的小椭球体的碰撞率。*J. of Fluid Mech.*, 758:686–701. Sullivan, S. C., Barthlott, C., Crosier, J., Zhukov, I., Nenes, A., and Hoose, C. (2018). 次生冰生成参数化对冷锋雨带模拟的影响。《大气化学与物理》, 18(22):16461–16480. Sun, J., Ariya, P. A., Leighton, H. G., and Yau, M. (2010). 暖基底降水浅积云中冰增殖之谜。*Geophys. Res. Lett.*, 37(10). Sun, M., Connolly, P. J., Field, P. R., Finney, D. L., and Blyth, A. M. (2025). 统一模式模拟的热带深对流云中次生冰形成的影响。《大气化学与物理》, 25(24):18549–18569. Tijhuis, M., Seifert, A., de Lozar, A., van Stratum, B. J., and van Heerwaarden, C. C. (2025). 比较数值天气预报与大涡模拟模式中理想化飑线的动力学。已提交至《月刊天气评论》，预印本可在 *arXiv* 获取，。von Terzi, L., Dias Neto, J., Ori, D., Myagkov, A., and Kneifel, S. (2022). 枝晶生长层中的冰微物理过程：结合多频偏振多普勒云雷达观测的统计分析。《大气化学与物理》, 22:11795–11821. von Terzi, L., Ori, D., and Kneifel, S. (2026). 定向冰雪粒子的微波散射数据库：支持依赖晶习的生长模式和雷达应用（mcradar 1.0.0）。《地球科学模型开发》, 19(2):887–910. Voth, G. A. and Soldati, A. (2017). 湍流中的各向异性粒子。《流体力学年度评论》, 49(1):249–276. Waman, D., Meusel, J., Keshtgar, B., Wallentin, G., Barthlott, C., Patade, S., Shete, S., Prabhakaran, T., Fievet, R., Finney, D., et al. (2026). 不同环境下次生冰生成对深对流云微物理和动力学的影响。*EGUsphere*, 2026:1–55. Waman, D., Patade, S., Jadav, A., Deshmukh, A., Gupta, A. K., Phillips, V. T., Bansemer, A., and DeMott, P. J. (2022). 大陆对流风暴中次生冰生成四种机制对云顶温度的依赖关系。《大气科学杂志》, 79(12):3375–3404. Wang, L.-P., Ayala, O., Rosa, B., and Grabowski, W. W. (2008). 与云滴相关的重粒子湍流碰撞效率。《新物理学杂志》, 10(7):075013. Wang, L.-P. and Grabowski, W. W. (2009). 空气湍流在暖雨启动中的作用。*Atmos. Sci. Lett.*, 10(1):1–8. Wang, L.-P., Wexler, A. S., and Zhou, Y. (2000). 惯性粒子湍流碰撞的统计力学描述与建模。《流体力学杂志》, 415:117–153. Weisman, M. L. and Klemp, J. B. (1982). 数值模拟的对流风暴对垂直风切变和浮力的依赖性。《月刊天气评论》, 110(6):504–520. Weisman, M. L., Skamarock, W. C., and Klemp, J. B. (1997). 显式模拟的对流系统对分辨率的依赖性。《月刊天气评论》, 125(4):527–548. Welss, J.-N., Siewert, C., and Seifert, A. (2024). 拉格朗日超级粒子冰微物理模式 mcsnow 中的显式晶习预测。《地球系统建模进展》, 16(4):e2023MS003805. Wurman, J., Straka, J., Rasmussen, E., Randall, M., and Zahrai, A. (1997). 便携式铅笔波束脉冲式 3 厘米多普勒雷达的设计与部署。*J. Atmos. Ocean. Tech.*, 14(6):1502–1512. Xue, L., Fan, J., Lebo, Z. J., Wu, W., Morrison, H., Grabowski, W. W., Chu, X., Geresdi, I., North, K., Stenz, R., Gao, Y., Lou, X., Bansemer, A., Heymsfield, A. J., McFarquhar, G. M., and Rasmussen, R. M. (2017). 应用三种分档微物理方案对 MC3E 外场观测飑线进行理想化模拟：动力和热力结构。《月刊天气评论》, 145(12):4789–4812. Yadav, S., Metten, L., Grzegorczyk, P., Theis, A., Mitra, S. K., and Szak´all, M. (2025). 测量报告：粒子密度对霰和冻滴碰撞所致次生冰生成的影响。《大气化学与物理》, 25(15):8671–8682.

Zaichik, L. I., Fede, P., Simonin, O., and Alipchenkov, V. M. (2009). 均匀各向异性湍流中双分散颗粒碰撞对粒子速度和应力影响的统计模型。《多相流国际期刊》, 35(9):868–878. Z¨angl, G., Reinert, D., R´ıpodas, P., and Baldauf, M. (2015). DWD 和 MPI-M 的 ICON（二十面体非静力）建模框架：非静力动力核心的描述。《英国皇家气象学会季刊》, 141(687):563–579. Zhou, Y., Wexler, A. S., and Wang, L.-P. (2001). 双分散惯性粒子的湍流碰撞建模。《流体力学杂志》, 433:77–104.