arXiv:2611.28814v1 [math.QA] 21 Nov 2026

顶点算子代数的内导子与自同构群

JIANZHI HAN

ABSTRACT. 设 V 是一个单、有理、 C_2-余有限且为共形场论型的顶点算子代数。我们证明，零模映射 $V_1 \to \mathrm{Der}(V)$, $h \mapsto h_0$ 是李代数之间的同构。我们利用有限个权空间之和上的迹以及 Li 的模构造证明满射性，并利用 Zhu 代数的真空特征证明单射性。由此可知，$\mathrm{Inn}(V)$ 是 $\mathrm{Aut}(V)$ 的单位连通分支，并且在 $\mathrm{Aut}(V)$ 中有有限指数。此外，$\dim \mathrm{Aut}(V) = \dim V_1$，因此 $\mathrm{Aut}(V)$ 有限当且仅当 $V_1 = 0$。

1. INTRODUCTION

设 $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的顶点算子代数，真空向量为 $\mathbf{1}$，共形向量为ω。记 $Y(a,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n x^{-n-1}$。 V 的一个导子 是一个线性映射 $D\colon V \to V$，满足$D\mathbf{1} = 0$, $D\omega = 0$，并且

$$D(a_n b) = (Da)_n b + a_n(Db) \qquad (a, b \in V,\ n \in \mathbb{Z}).$$

所显示的恒等式等价于对任意 $a \in V$ 都有 $[D, Y(a,x)] = Y(Da,x)$。我们将导子李代数记为 $\mathrm{Der}(V)$，其括号为 $[D,E] = DE - ED$。取 $a = \omega$ gives$[D, L(n)] = 0$，则对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 都有该等式。特别地， D 保持每个权空间 V_n。

对于齐次的 $h \in V_j$，令 $o(h) = h_{j-1}$，并将 o 线性延拓至 V。如果顶点算子代数 V 的导子 D 满足 内导子 条件，即对某个 $h \in V$ 有 $D = o(h)$，则称其为内导子。若 V 是共形场论型，则内导子恰好是 u_0 且满足 $u \in V_1$ [2, 第 3] 节的算子。每个这样的 u_0 都定义了 V 的一个自同构 $\exp(u_0)$。我们将内自同构群记为

$$\mathrm{Inn}(V) = \langle \exp(u_0) \mid u \in V_1 \rangle.$$

Dong 和 Griess 证明，有限生成顶点算子代数的自同构群是一个复代数群。令 $\mathrm{Aut}(V)_e$ 表示 $\mathrm{Aut}(V)$ 的单位连通分支。在 [2], 中，人们注意到，对于一个有限生成的有理顶点算子代数 V （其为共形场论型），等式 $\mathrm{Inn}(V) = \mathrm{Aut}(V)_e$ 成立，当且仅当 V 的每个导子都是内导子。作者猜想，对于每个共形场论型的有理顶点算子代数，该等式都成立。由此可推出 $\mathrm{Inn}(V)$ 在 $\mathrm{Aut}(V)$ 中具有有限指数，尽管 $\mathrm{Inn}(V)$ 本身可能是无限的，正如本文末尾的秩一格示例所说明的那样。

定理 1.1。 设 V 是一个单的、有理的、 C_2-余有限且为共形场论型的顶点算子代数。则 (1) $V_1 \longrightarrow \mathrm{Der}(V)$, $h \longmapsto h_0$, 是李代数的一个同构。(2) $\mathrm{Aut}(V)_e = \mathrm{Inn}(V)$ 和 $\mathrm{Aut}(V)/\mathrm{Inn}(V)$ 是有限的。(3) $\dim \mathrm{Aut}(V) = \dim V_1$。特别地，$\mathrm{Aut}(V)$ 是有限的，当且仅当 $V_1 = 0$。

令 $T = L(-1)$。在 V_1 上赋予李括号 $[h,k] = h_0 k$ 后，由模交换子公式和 [2, 第 3] 节可知，映射 $h \mapsto h_0$ 是到 $\mathrm{Der}(V)$ 的李代数同态。

第 2 节利用定理 1.1 第 (1) 部分的满射性，推导出其第 (2) 部分。第3节和第 4 节证明，在定理 1.1 的假设下满射性成立。第一步是构造一个

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 17B69, 17B40。*Key words and phrases.* 顶点算子代数、导子、自同构群。本研究得到国家自然科学基金委员会（项目编号：12271406）的资助。

定义在圆积上的泛函。这些积之间存在一些关系，关键是要验证所规定的取值与所有这些关系相容。我们在第3节通过对权空间的有限和取迹来完成这一工作。在第 4 节，Li 的模构造给出了一个实现该泛函的权一向量。第5节证明单射性，并给出整个群有限的判据。

2. The identity component

定理 *1.1* 的（*2*）部分的证明。有理性意味着 V 是有限生成的 [8]。因此， $G=\mathrm{Aut}(V)$ 是一个复代数群 [2, 定理 2.4]。其李代数通过导子作用于 V，并且每个 $D\in\mathrm{Der}(V)$ 都是 $t\mapsto\exp(tD)$ 在单位元处的切向量，所以 $\mathrm{Lie}(G)=\mathrm{Der}(V)$ [2,第 3] 节。根据 [2, 引言]中的等价关系，若每个导子都具有h_0 的形式（其中 $h\in V_1$），则 $G_e=\mathrm{Inn}(V)$。第 4 节恰好证明了这一满射性。商群 $G/\mathrm{Inn}(V)=G/G_e$是有限的，因为复代数群只有有限多个连通分支。□

3. A functional on circle products

在第 3 节和第 4 节中， V 始终满足定理 1.1 的假设。因此， $V=\bigoplus_{n\ge0}V_n$、$V_0=\mathbb{C}\mathbf{1}$，每个可容许的 V-模都是完全可约的，并且 $V/C_2(V)$ 是有限维的。取定 $D\in\mathrm{Der}(V)$，并令 $H_t=L(0)+tD$，其中 $t\in\mathbb{C}$。对于满足 $v^{(n)}\in V_n$ 的 $v=\sum_{n\ge0}v^{(n)}$，定义$\chi:\ V\to\mathbb{C}$，使得 $v^{(0)}=\chi(v)\mathbf{1}$。定义

$$a\circ_t b=\mathrm{Res}_x\,x^{-2}Y((1+x)^{H_t}a,x)b,$$
$$a\diamond_t b=\mathrm{Res}_x(1+x)x^{-2}Y((1+x)^{H_t}a,x)b.$$

对于 $t=0$，我们分别将 $\circ$ 和 $\diamond$ 记为 $\circ_0$ 和 $\diamond_0$。特别地， $O(V)=$张成 $\{a\circ b\}$ [13]。对于 $a\in V_m$，$(1+x)^{H_t}a=(1+x)^m\exp(t\log(1+x)D)a$。 t^j 的系数可被 x^j 整除。若 $b\in V_n$，那么截断后，每个留数都是关于 t 的多项式，其次数至多为 $m+n+1$。定义

$$C_D(a,b)=\frac{d}{dt}(a\circ_t b)\Big|_{t=0},\qquad \beta_D(a,b)=\chi(C_D(a,b)).$$

根据 [13, 定理 2.1。2]， $A(V)$ 通过零模作用于 $V_0=\mathbb{C}\mathbf{1}$。创造公式给出 $o(a)\mathbf{1}=\chi(a)\mathbf{1}$，因此 χ 是相应的特征，并消去 $O(V)$。对于 $a\in V_m$ 和 $b\in V$，Zhu 乘积为

$$a*b=\mathrm{Res}_x\,x^{-1}(1+x)^mY(a,x)b.$$

因此 $a\diamond b=a\circ b+a*b$，且 $\chi(a\diamond b)=\chi(a)\chi(b)$。此外， $\chi H_t=0$，因为 H_t 保持权并消去 $\mathbf{1}$。

命题 3.1。存在一个线性泛函 $\lambda\colon V\to\mathbb{C}$，使得

$$\lambda(a\circ b)=-\beta_D(a,b)\qquad(a,b\in V).\tag{3.1}$$

为构造 λ，我们使用 Zhu 的记号 $Y[a,z]=Y(e^{zL(0)}a,e^z-1)=\sum_j a[j]z^{-j-1}$。令 E_{2j} 表示常数项为 1 的归一化艾森斯坦级数。对于 $j\ge2$、 $E_{2j}\in\mathbb{C}[E_4,E_6]$ 和 E_2,E_4,E_6，它们是代数独立的 [9, 12]。特别地，若 $A,B\in\mathbb{C}(X,Y)$ 和$A(E_4,E_6)=E_2B(E_4,E_6)$，则 $A=B=0$。

令 q 为艾森斯坦级数傅里叶展开中的形式变量。记 $w=e^z$ 并设

$$k(z)=\frac12+\frac{w}{1-w}+\sum_{d\ge1}\left(\frac{q^dw}{1-q^dw}-\frac{q^d/w}{1-q^d/w}\right),$$
$$P(z)=k'(z)+E_2/12,\qquad K(z)=k(z)+E_2z/12.$$

撇号表示 d/dz。展开几何级数并使用伯努利数 B_{2j}，得到

$$k(z) = -z^{-1} - \sum_{j\geq 1} \frac{B_{2j}}{(2j)!} E_{2j} z^{2j-1}.$$

因此， P, K的首项分别为 $z^{-2}, -z^{-1}$。它们的其他系数都是 E_4, E_6的多项式。将 q^d 的每个系数在 k 处和 $w=0$ 处按 $w=\infty$ 展开，分别得到以下级数k^{in} 和 k^{out}。

$$k^{\mathrm{in}}(w) = \frac{1}{2} + \sum_{j\geq 1} \frac{w^j - q^j w^{-j}}{1-q^j}, \qquad k^{\mathrm{out}}(w) = -\frac{1}{2} + \sum_{j\geq 1} \frac{q^j w^j - w^{-j}}{1-q^j}.$$

特别地， $k^{\mathrm{in}}(qw) = k^{\mathrm{out}}(w) + 1$ 以及 $P^{\mathrm{in}}(qw) = P_{\mathrm{out}}(w)$。

对于 $f=1$ 或 P以及 $a, b \in V$，记 $\alpha = (f, a, b)$，并令

$$r_\alpha = \mathrm{Res}_z\, f(z) Y[a, z]b, \qquad s_{p,\alpha} = \mathrm{Res}_z\, f(z) p(z) Y[Da, z]b \quad (p = k, K, z).$$

所有这些留数都属于某个有限维的 $U[[q]]$，该空间依赖于 $U \subset V$和 a, b。事实上， $f(z)$和 $f(z)p(z)$在 $z=0$处的极点阶数至多为三。因此，只有含有$j \geq -3$ 的项 $a[j]b$ 和$(Da)[j]b$ 才能对留数有贡献，而当 j充分大时，两者都为零。对于 r_α,$s_{K,\alpha}$,$s_{z,\alpha}$，我们也可以通过对 E_4, E_6写作 X, Y，将这些留数视为 $V \otimes \mathbb{C}[X, Y]$ 中的元素。

我们通过在不可约普通 V-模上取迹，研究留数 r_α 之间的关系。固定这样一个模 W，记 $W(n)$ 为其第 n 层，其中 $W(0)$ 表示最低权空间。令 $E = W \oplus W$，并定义

$$Y_E(a, x) = \begin{pmatrix} Y_W(a, x) & Y_W(Da, x) \\ 0 & Y_W(a, x) \end{pmatrix} \qquad (a \in V).$$

由于 $D\mathbf{1} = 0$，真空在 E 上作用为单位元。对角项在 W 上满足雅可比恒等式。对于右上项，将 W 上对应于数对 $(Da,\ b)$ 和 $(a,\ Db)$ 的雅可比恒等式相加，并利用 $Y(Da,\ x)b + Y(a,\ x)Db = D(Y(a,\ x)b)$。由于 D 保持权不变， $E(n) = W(n) \oplus W(n)$ 给出一个容许分级。因此我们得到一个 V-模的短正合列

$$0 \longrightarrow W \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} W \longrightarrow 0, \qquad \iota(v) = (v, 0), \quad \pi(u, v) = v.$$

由有理性， π 有一个 V-模截面 $s\colon\ W \to E$。由于 $\pi s = \mathrm{id}_W$，我们可以将 $s(v) = (\mathcal{B}v,\ v)$ 写成作用于 W 上的线性算子 $\mathcal{B}$。 $s(Y_W(a,\ x)v) = Y_E(a,\ x)s(v)$ 的第一分量给出

$$\mathcal{B}Y_W(a, x)v = Y_W(a, x)\mathcal{B}v + Y_W(Da, x)v.$$

Thus

$$[\mathcal{B}, Y_W(a, x)] = Y_W(Da, x). \tag{3.2}$$

取 $a = \omega$并利用 $D\omega = 0$，得到 $[\mathcal{B}, L(0)] = 0$。因此， $\mathcal{B}$保持每个 $W(n)$不变。

对于齐次的 a，令 $A_j(a) = a^W_{\mathrm{wt}\, a-1+j}$，并将其线性延拓。因此， $A_j(a)$ 的次数为 $-j$，且 $o(a) = A_0(a)$。对于级数 $v(q) = \sum_{d\geq 0} v_d q^d$，定义

$$\mathcal{T}_{W,N}(v) = \sum_{n=0}^{N} \mathrm{Tr}_{W(n)}\, o(v_{N-n}).$$

引理 3.2. 设 W 是一个不可约普通 V-模，且 $N \geq 0$ 是一个整数。对于每个$\alpha = (f, a, b)$，若 $f \in \{1, P\}$ 且 $a, b \in V$，则有

$$\mathcal{T}_{W,N}(r_\alpha) = 0. \tag{3.3}$$

此外，对于任意这样的三元组及其系数的有限族 $c_\alpha(q) \in \mathbb{C}[[q]]$，我们有

$$\sum_\alpha c_\alpha(q) r_\alpha = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{T}_{W,N}\left(\sum_\alpha c_\alpha(q) s_{k,\alpha}\right) = 0. \tag{3.4}$$

证明。公式（3.3）同样可由 [13, （4.3.14）和（4.3.16）]推出。我们从同一个分次迹计算中推导出这两个恒等式。

对于 $h \in \mathbb{C}[w, w^{-1}, (w-1)^{-1}]$，设 h_j^{out}和 h_j^{in}分别为 h 在 $w=\infty$ 和 $w=0$处的洛朗展开中 w^j 的系数。则

$$o(\mathrm{Res}_z\, h(e^z)Y[a,z]b) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(h_j^{\mathrm{out}} A_j(a)A_{-j}(b) - h_j^{\mathrm{in}} A_{-j}(b)A_j(a)\right). \tag{3.5}$$

事实上，对于 $a \in V_p$、$b \in V_r$和 $h(w) = w^{\ell}(w-1)^s$，这就是 [13, (1.2.9)]，其中 $(m,\ l,\ n) = (p+\ell-1,\ s,\ r-\ell-s-1)$。由于这些函数张成 $\mathbb{C}[w, w^{-1}, (w-1)^{-1}]$，由线性性可得该恒等式。在每个 $W(n)$ 上，只有有限项有贡献。

对于一个保持每个 $W(n)$ 的算子 X，令

$$\tau(X) = \sum_{n\geq 0} q^n \,\mathrm{Tr}_{W(n)} X,$$

并按 $\mathbb{C}[[q]]$-线性将 τ 延拓到这类算子的级数，逐个处理每个系数。特别地，

$$[q^N]\tau(o(v(q))) = \mathcal{T}_{W,N}(v(q)) \qquad (v(q) \in V[[q]]).$$

我们使用以下形式的循环性。若 U 的次数为 $-j$，且 V' 的次数为 j，则

$$\tau(V'U) = q^j \tau(UV').$$

事实上，U将 $W(n)$映射为 $W(n-j)$，因此 $\mathrm{Tr}^{W(n)}(V'U) = \mathrm{Tr}^{W(n-j)}(UV')$，其中 $W(m) = 0$对 $m<0$成立。乘以 q^n 并对 n 求和，即得该公式。

固定 $\alpha = (f,\ a,\ b)$，并令

$$U_j = A_j(a), \qquad V_j = A_{-j}(b), \qquad g = fk.$$

对 f 和 g的 Laurent 系数也采用相同记号，这里在 q中逐系数取值。由于$f^{\mathrm{in}}(qw) = f^{\mathrm{出}}(w)$，且 $k^{\mathrm{in}}(qw) = k^{\mathrm{out}}(w) + 1$，比较 w^j 的系数可得

$$q^j f_j^{\mathrm{in}} = f_j^{\mathrm{out}}, \qquad q^j g_j^{\mathrm{in}} = g_j^{\mathrm{out}} + f_j^{\mathrm{out}}.$$

设 C 是一个保持每个 $W(n)$不变的算子。取 $h=f$ 应用 (3.5)，并在左乘 C后取迹。由于 $\tau(CV_jU_j) = q^j\tau(U_jCV_j)$，我们得到

$$\begin{aligned}\tau(C\, o(r_\alpha)) &= \sum_j \left(f_j^{\mathrm{out}}\tau(CU_jV_j) - q^j f_j^{\mathrm{in}}\tau(U_jCV_j)\right)\\ &= \sum_j f_j^{\mathrm{out}}\tau([C,U_j]V_j).\end{aligned}$$

取 $C=1$ 即得 (3.3)。对于 $C=\mathcal{B}$，比较 (3.2) 中的模得到 $[\mathcal{B}, U_j] = A_j(Da)$。将 (3.5) 应用于 $g=fk$ 以及 $Da,\ b$这一对。由循环性可得

$$\tau(o(s_{k,\alpha})) = \sum_j (g_j^{\mathrm{out}} - q^j g_j^{\mathrm{in}})\tau(A_j(Da)V_j) = -\tau(\mathcal{B}\, o(r_\alpha)).$$

这些和在 q 的每个幂次处都是有限的。对于 $j>0$，外层系数可被 q^j 整除。对于$j<0$，当 $n<-j$ 时，V_j 在 $W(n)$ 上消失。将最后一个恒等式乘以 $c_\alpha(q)$，并对 α 求和，当 $\sum_\alpha c_\alpha(q) r_\alpha = 0$ 时，右端为零。取 q^N 的系数，得到 (3.4)。□

现在，我们通过令 $q=0$，将留数 r_α 与 Zhu圆乘积联系起来。设 $A = \mathbb{C}[X,Y]$，并令 $\mathcal{R}_A$ 为 $V\otimes A$ 中 r_α 的 A- 张成空间。下标 $*$ 表示在 $(X,\ Y) = (1,\ 1)$ 处取值，等价地，也就是在 $q=0$ 处取值。特别地，

$$k_*'(z) = \frac{e^z}{(e^z-1)^2}, \qquad P_* = k_*' + 1/12.$$

在 $q=0$ 处，两种选择 $f=1$ 和 $f=P$ 给出

$$(r_{(1,a,b)})_* = a[0]b, \qquad (r_{(P,a,b)})_* = a\circ b + \frac{1}{12}a[0]b.$$

事实上， $P_* = k'_* + 1/12$，并且代入 $x = e^z - 1$ gives $\mathrm{Res}_z\, k'_*(z)Y[a,z]b = a\circ b$。因此

$$\mathcal{R}_* := \mathrm{span}\{(r_\alpha)_*\} = O(V) + \mathrm{span}\{a[0]b \mid a,b\in V\}.$$

根据 [13, (2.1.4)], , $a[0]b$ 在 $A(V)$ 中的像为 $\bar{a}*b - b*\bar{a}$。因此

$$V/\mathcal{R}_* \simeq A(V)/[A(V),A(V)] \tag{3.6}$$

作为向量空间。有理性与普通 Zhu 理论给出 $A(V) \simeq \bigoplus_{i=1}^r \mathrm{End}W_i(0)$，其中$W_1 = V$， $W_2,\dots,W_r$ 是互不同构的不可约模 [5, 13]。选取 $b_i\in V$，使得 $o(b_i)$ 在 $W_i(0)$ 上作用为单位元，在 $j\neq i$ 所对应的 $W_j(0)$ 上作用为零。它们模去 $\mathcal{R}_*$ 后构成一组基，并且

$$\mathrm{Tr}_{W_i(0)}\, o(b_j) = \delta_{ij}\dim W_i(0). \tag{3.7}$$

记 $B_0 = \mathrm{span}\{b_1,\dots,b_r\}$。

令 $A = \mathbb{C}[X,Y]$ with $\mathbb{C}[E_4,E_6]$，并设 $Q_A = (V\otimes A)/\mathcal{R}_A$。对于 $g=h=1$， $O(g,\ h)$ 在 [6, (5.1)–(5.2)] 中的定义关系，恰好是核为 1 和 P 的留数。因此，根据 Q_A， A 上的 Q_A 由 [6, 引理 5.2] 有限生成。令 $\mathfrak{m} = (X-1,\ Y-1)$、 $S = A_{\mathfrak{m}}$ 和 $Q_S = Q_A\otimes_A S$。由于 $Q_S/\mathfrak{m}Q_S \simeq V/\mathcal{R}_*$，中山引理和 (3.6) 表明， b_1、.....、b_r 的类生成Q_S。

对于每个不可约模 W_i，令 τ_i 表示 W_i 上的分次迹。对于 $v(q) = \sum_{d\geq 0} v_d q^d \in V[[q]]$，我们有

$$\tau_i(o(v(q))) = \sum_{n,d\geq 0} q^{n+d}\,\mathrm{Tr}_{W_i(n)}\, o(v_d).$$

我们断言，若对每个 i 都有 $v(q)\in B_0[[q]]$ and $\tau_i(o(v(q))) = 0$，则 $v(q) = 0$。事实上，设 v_N 是 $v(q)$ 的第一个非零系数。记 $v_N = \sum_j c_j b_j$，并选取满足 $c_i\neq 0$ 的 i。由于对 $d<N$ 有 $v_d = 0$，因此只有 $W_i(0)$ 上的迹会对 q^N 的系数有贡献。于是由 (3.7) 得

$$[q^N]\tau_i(o(v(q))) = \mathrm{Tr}_{W_i(0)}\, o(v_N) = c_i\dim W_i(0)\neq 0,$$

这就证明了该断言。

将 $X = E_4$ 和 $Y = E_6$ 代入后， S 嵌入 $\mathbb{C}[[q]]$，因为 E_4，E_6 代数独立，并且代入后 S 中每个分母的常数项都非零。因此，我们可以将 $B_0\otimes S$ 视为 $B_0[[q]]$ 的子空间。设 $\mathcal{R}_S$ 为 r_α 的 S- 张成空间。由 (3.3) 及 $\mathbb{C}[[q]]$- 线性性，对每个 $r\in\mathcal{R}_S$ 和每个 i，都有 $\tau_i(o(r)) = 0$。现在由该断言可得 $(B_0\otimes S)\cap\mathcal{R}_S = 0$。由于 b_1、.....、b_r 的类生成 Q_S，我们得到

$$V\otimes S = (B_0\otimes S)\oplus\mathcal{R}_S.$$

令 $\pi\colon V\otimes S\to B_0\otimes S$ 为到第一个直和项的投影。

命题 *3.1* 的证明。 将其按 χ S-线性延拓。在 $V\otimes S$ 的张成向量上规定

$$\ell(b_i) = 0, \qquad \ell(r_\alpha) = -\chi\pi(s_{z,\alpha}). \tag{3.8}$$

由于 $V\otimes S = (B_0\otimes S)\oplus\mathcal{R}_S$，只需检验 r_α之间的关系。给定一个关于 S的关系$\sum_\alpha f_\alpha r_\alpha = 0$，令 $x_p = \sum_\alpha f_\alpha s_{p,\alpha}$，其中 $p = k,K,z$。于是 $x_k = x_K - E_2 x_z/12$，并且由 (3.4) 得到，对每个 i，都有 $\tau_i(o(x_k)) = 0$。由 (3.3)，将 x_K 和 x_z 替换为它们的投影不会改变其迹。因此，每个 τ_i 在 $\pi(x_K) - E_2\pi(x_z)/12$的零模上都为零。迹可以区分$B_0[[q]]$，因此

$$\pi(x_K) = \tfrac{1}{12}E_2\pi(x_z).$$

两个投影在基 $b_1,\dots,b_r$ 下的坐标都属于 S。由于 $E_2\notin\mathrm{Frac}(S)$， $\pi(x_z)$ 的每个坐标都为零。因此，(3.8) 定义了一个 S-线性泛函。

令 $\lambda(v) = \ell(v)_*$，其中 $v \in V$。由 (3.6)， χ 消去 $\mathcal{R}_*$，因此 $\chi\pi_* = \chi_\circ$ 将 $f = P$ 和 $f = 1$ 的两个定义关系代入，并从第一个关系中减去第二个关系的 $1/12$ 倍，得到

$$\lambda(a \circ b) = -\chi\big(\mathrm{Res}_z\, zk'_*(z)Y[Da, z]b\big)\,.$$

由于 $z = \log(1+x)$，留数为 $C_D(a,b)$。这就证明了 (3.1)。 □

4. Realizing the functional by a weight one vector

令 $S_t = T + H_t$, $S_0 = T + L(0)$，并定义

$$Y_t(a,z) = Y[e^{ztD}a, z], \qquad \phi(z) = \frac{e^z}{e^z - 1}, \qquad \gamma(z) = \phi(z)^2 - \phi(z) = -\phi'(z).$$

将 t 视为不定元，并通过 $\mathbb{C}[t]$-双线性将 Y_t 扩展到 $V[t] = V \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t]$。对于 $a \in V_p$和 $b \in V_r$，对每个 $k \geq 0$都有 $z^{p+r}Y[D^k a, z]b \in V[[z]]$，因为 $D^k a \in V_{p\circ}$ 因此，每个系数的

$$Y_t(a,z)b = \sum_{k\geq 0} \frac{t^k z^k}{k!} Y[D^k a, z]b$$

都是关于 t的多项式，并且 $Y_t(a,z)b \in V[t]((z))$。 a 和 b 的 D-轨道张成有限维子空间，因此它们的基上的局部性蕴含了 Y_t的局部性。由于 D 是括号顶点代数的导子，且与 S_0可交换，因此有 $Y_t(a,z)\mathbf{1} = e^{zS_t}a$，以及 $[S_t, Y_t(a,z)] = \partial_z Y_t(a,z) = Y_t(S_t a, z)$。结合 $Y_t(\mathbf{1}, z) = 1$，这些恒等式在 $V[t]$上给出了一个顶点代数。作变量代换可得

$$a \circ_t b = \mathrm{Res}_z\, \gamma(z)Y_t(a,z)b, \qquad a \diamond_t b = \mathrm{Res}_z\, \phi(z)^2 Y_t(a,z)b, \qquad S_t a = a \circ_t \mathbf{1}.$$

令 $O_t = \mathrm{span}_{\mathbb{C}[t]}\{a \circ_t b \mid a, b \in V[t]\}$。由双线性可知，任意多项式系数都可以吸收到第一个项中，因此 O_t 由 $V[t]$中的圆积有限和组成。

引理 4.1。 对于每个 $a \in V[t]$，都有 $a \diamond_t O_t \subseteq O_t$。此外，对于所有 $a, b \in V[t]$,

$$(S_t a) \diamond_t b = ((S_t + 1)a) \circ_t b, \tag{4.1}$$

$$H_t(a \diamond_t b) = ((H_t + 1)a) \circ_t b + a \diamond_t H_t b. \tag{4.2}$$

证明。 令

$$a *_t b = \mathrm{Res}_z\, \phi(z)Y_t(a,z)b.$$

对于 $f = \phi$ 和 $g = \phi' = -\gamma$， $V[t]$ 中 g积的张成空间为 O_t。根据第 3] 节中 [11, 的结合商构造， $*_t$ 在 $V[t]/O_t$上诱导出一个乘积。因此 $a *_t O_t \subseteq O_t$。由于 $a \diamond_t b = a *_t b + a \circ_t b$，同一包含关系对 $\diamond_t$也成立。

由于 $\phi^2 - \gamma = \phi$ 且形式导数的留数为零，我们有

$$(S_t a) \diamond_t b - (S_t a) \circ_t b = \mathrm{Res}_z\, \phi(z)\partial_z Y_t(a,z)b = -\mathrm{Res}_z\, \phi'(z)Y_t(a,z)b = a \circ_t b.$$

这就证明了 (4.1)。对于 (4.2)，注意到 $[T, H_t] = -T$给出 $Te^{zH_t} = e^{-z}e^{zH_t}T$，因此

$$[T, Y_t(a,z)] = e^{-z}Y_t(Ta, z).$$

由于 $e^{-z}\phi^2 = \gamma$，可得 $T(a \diamond_t b) - a \diamond_t Tb = (Ta) \circ_t b$。平移算子 S_t satisfies$S_t(a \diamond_t b) - a \diamond_t S_t b = (S_t a) \diamond_t b$。相减并利用 (4.1) 得到

$$H_t(a \diamond_t b) - a \diamond_t H_t b = (S_t a) \diamond_t b - (Ta) \circ_t b = ((H_t + 1)a) \circ_t b.$$

□

Let

$$N = \bigoplus_{n\geq 0} N(n), \qquad N(n) = A^{\diamond}_{n,1}(V),$$

是 V-模，满足 [10, 定理 4.8]。根据 [10, 定义 2.10 和 2.12，(2.23)], 我们有$N(0) = V/J$，其中 $J = O'_{0,\ 1}(V)$ 由 $(S_0 + 1)a$ 以及留数 $\mathrm{Res}_z\, \phi(z)\gamma(z)Y_0(a,\ z)b$ 张成。由于 $(\phi^2)' = -2\phi\gamma$，且形式导数的留数为零，

$$2\,\mathrm{Res}_z\, \phi(z)\gamma(z)Y_0(a,z)b = \mathrm{Res}_z\, \phi(z)^2\partial_z Y_0(a,z)b = (S_0a)\diamond b.$$

Thus

$$J = \mathrm{span}\{(S_0 + 1)a,\ (S_0a)\diamond b \mid a, b \in V\}.$$

写作 $[a] = a + J \in N(0)$，并令 $w = \mathbf{1} + O'_{1,\ 1}(V) \in N(1)$。对于齐次 a，在引理 4.10] 的证明中取 $m = 1$和 $n = 0$，得到

$$a^N_{\mathrm{wt}(a)}\big(\mathbf{1} + O'_{1,1}(V)\big) = a + O'_{0,1}(V).$$

在 $N(0)$ 上，[10, 定义 3.12] 中的左作用由乘积 $\diamond$诱导。因此

$$a^N_m w = [a] \quad (a \in V_m), \qquad o_N(b)[a] = [b \diamond a] \quad (a, b \in V). \tag{4.3}$$

Lemma 4.2. 令 λ 为命题 *3.1* 中的泛函。存在 $u \in V_1$ 使得 t

$$\lambda(v) = \chi(u[1]v) \qquad (v \in O(V)).$$

证明。对于 $y = y(t) \in V[t]$，置

$$\rho(y) = \lambda(y(0)) + \chi(y'(0)).$$

此泛函满足

$$\rho(O_t) = 0, \qquad \rho(H_t y) = \lambda(L(0)y(0)). \tag{4.4}$$

首先，在 $t = 0$ 处对 $a(t) \circ_t b(t)$ 求导。来自 $a'(0)$ 和 $b'(0)$ 的项属于 $O(V)$，因此被 χ 消去。剩余项的真空系数根据 (3.1) 为 $\beta_D(a(0)\ b(0)) = -\lambda(a(0) \circ b(0))$。第二个性质由 $\chi H_t = 0$ 得出。

若 $y(0) \in O(V)$，则写作 $y = r + tv$，其中 $r \in O_t$ 且 $v \in V[t]$。这种 r 可通过将 $y(0)$ 写成圆积之和，并将 $\circ$ 替换为 $\circ_t$ 得到。对于 $a \in V$，引理 4.1 给出 $a \diamond_t r \in O_t$。因此 $(a \diamond_t y)(0) \in O(V)$，并且

$$\rho(a \diamond_t y) = \chi(a \diamond v(0)) = \chi(a)\chi(v(0)) = \chi(a)\rho(y).$$

设 $U = \{[b] \in N(0) \mid L(0)b \in O(V)\}$。为说明此条件与代表元的选取无关，将 J 的生成元提升为 $j(t) = (S_t + 1)a$ 和 $j(t) = (S_ta) \diamond_t b$。在两种情况下，$H_tj(t) \in O_t$。对于第一种情况，$[H_t, S_t] = T$ 给出 $H_t(S_t + 1)a = S_t(H_t + 1)a \in O_t$。对于第二种情况，由 (4.2) 得到 $H_tj(t) \equiv (S_ta) \diamond_t H_tb \equiv 0$ (模 O_t)，根据 (4.1)。在零处取值，得到 $L(0)J \subseteq O(V)$，再应用 (4.4) 得到 $\lambda(L(0)J) = 0$。因此，$\eta_U([b]) = \lambda(L(0)b)\mathbf{1}$ 在 U 上是良定义的。

现在令 $[b] \in U$。由 (4.2)，$H_t(a \diamond_t b) \equiv a \diamond_t H_tb$ (模 O_t)。由于 $(H_tb)(0) = L(0)b \in O(V)$，前面的乘积计算给出 $L(0)(a \diamond b) \in O(V)$，并且

$$\lambda(L(0)(a \diamond b)) = \rho(a \diamond_t H_tb) = \chi(a)\rho(H_tb) = \chi(a)\lambda(L(0)b).$$

由 (4.3)，U 是一个 $A(V)$-子模，并且 η_U 是 $A(V)$-线性的。

令 $\Omega(N)$ 为被所有负次数模湮灭的子空间。我们有 $U \subseteq N(0) \subseteq \Omega(N)$。零模保持次数不变，因此由 $A(V)$ 的半单性可知，$\Omega(N)$ 中存在 U 的分次 $A(V)$-模补空间。将 η_U 在此补空间上定义为零。由此得到的 $A(V)$-模映射 $\eta : \Omega(N) \to V_0$ 满足

$$\eta([b]) = \lambda(L(0)b)\mathbf{1} \qquad \text{whenever } L(0)b \in O(V). \tag{4.5}$$

由于 V 是单的，由 [5, 命题 3.4(i)] 可得 $\Omega(V) = V_0$。由有理性及 [5,定理 4.10(b) 中的等价关系，$n = 0$] 将 η 提升为一个 V- 模同态 $p\colon N \to V$。

设 u 为 $p(w)$ 的权一分量。对于 $a \in V_m$，(4.3) 给出 $a_mp(w) = p([a]) = \eta([a]) \in V_0$。由于 a_m 使权降低一，取权零分量可得 $a_mu = \eta([a])$。

在一个对于 CFT 型顶点算子代数 y，若 $h \in V_1$ 和 $a \in V_m$ 满足 $m > 0$，则

$$\chi(h[1]a)\mathbf{1} = \frac{(-1)^{m-1}}{m}\chi(h_m a)\mathbf{1} = \frac{1}{m}a_m h. \tag{4.6}$$

第一个等式由 $h[1] = \mathrm{Res}_x \log(1+x)Y(h,\ x)$ 得出，因为只有 $h_m a$ 的权为零。第二个等式由斜对称性和 $\chi T = 0$ 得出。

现在令 $v \in O(V)$。由于 $\chi(v) = 0$，我们可以写成 $b = L(0)^{-1}v = \sum_{m>0} b^{(m)}$，其中 $b^{(m)} \in V_m$。对每个 $b^{(m)}$ 应用 (4.6)，得到

$$\chi(u[1]v)\mathbf{1} = \sum_{m>0}(b^{(m)})_m u = \eta([b]) = \lambda(v)\mathbf{1},$$

其中最后一个等式是令 $L(0)b = v$ 后的 (4.5)。 □

我们还将使用单性的以下推论。对于一个共形场论型的单顶点算子代数，且 $v \in V$，

$$\chi(Y(b,x)v) = 0 \text{ for all } b \in V \quad \Longrightarrow \quad v = 0. \tag{4.7}$$

事实上，如果 $v \neq 0$，则由 [7, 推论 4.2]，向量 $b_j v$ 张成 V。它们的真空系数不可能全部为零，因为 $\chi(\mathbf{1}) = 1$。

定理 *1.1* 中满射性的证明。固定 $D \in \mathrm{Der}(V)$，并令 λ 为命题 3.1 给出的泛函。按引理 4.2 取 $u \in V_1$。我们比较 $\lambda(a \circ b)$ 的两个表达式。

由于 $u[0] = u_0$，括号交换子公式给出

$$[u[1], Y[a,z]] = Y[u[1]a, z] + zY[u_0 a, z].$$

利用 $a \circ b = \mathrm{Res}_z\, \gamma(z)Y[a,z]b$，我们得到

$$u[1](a \circ b) = (u[1]a) \circ b + a \circ (u[1]b) + \mathrm{Res}_z\, z\gamma(z)Y[u_0 a, z]b.$$

前两项属于 $O(V)$，并且被 χ 消去。因此，由引理 4.2 和 (3.1) 得到

$$\beta_{u_0}(a,b) = \chi(u[1](a \circ b)) = \lambda(a \circ b) = -\beta_D(a,b).$$

由此可得 $F = D + u_0$ 对所有 $a, b \in V$ 都满足 $\beta_F(a,b) = 0$。接下来只需证明 $F = 0$.

设 $a \in V_m$ 和 $b \in V_n$。只有 $(Fa)_{m+n-1}b$ 的权可能为零。因此，在 β_F 的定义中取真空系数，得到

$$0 = \frac{d}{ds}\binom{s}{m+n+1}\Big|_{s=m} \chi((Fa)_{m+n-1}b).$$

多项式 $\binom{s}{m+n+1}$ 在 $s = m$ 处有一个单零点，因此 $\chi((Fa)_{m+n-1}b) = 0$。于是，对每个 $b \in V$，$\chi(Y(Fa,x)b) = 0$。由斜对称性和 $\chi T = 0$ 得 $\chi(Y(b,x)Fa) = \chi(Y(Fa,-x)b) = 0$。由 (4.7)，$Fa = 0$。因此 $F = 0$，且 $D = (-u)_0$,，从而证明了满射性。□

5. Faithfulness and finite automorphism groups

有限性判据的逆向要求 V_1 中的一个非零向量对 V有非平凡作用。我们给出一种只用到有理性和共形场论分次的论证。

引理 5.1. 设 V是一个共形场论型的有理顶点算子代数。若 $h \in V_1$ 和 $h_0 = 0$ 作用于V，则 $h = 0$。

证明。 由于 $h[0] = h_0 = 0$，括号交换子公式给出

$$[h[1], Y[a,z]] = Y[h[1]a, z].$$

将 $\phi(z)$或 $\gamma(z)$乘上 $h[1]$ 并取留数可知， $*$ 和 $\circ$都满足导子法则。特别地， $h[1]$ 保 $O(V)$不变，并在 $A(V)$上诱导出导子 δ，其定义为$\delta(\bar{a}) = h[1]a$，其中 $\bar{a} = a + O(V)$。

有理性意味着 $A(V)$是有限维半单的 [13, 定理 2.2.3] （另见 [5, 定理 4.10(a)] ，其中 $n=0$）。因此，理想 $I=\ker\chi$ 是矩阵代数的直和，并满足 $I^2=I$。对于 $x,\ y\in I,\ \ \delta(x)y$ 和 $x\delta(y)$都属于 I，所以 $\delta(I)=\delta(I^2)\subseteq I$。由于 $\bar{a}-\chi(\bar{a})\bar{\mathbf{1}}\in I$ 且 $\delta(\bar{\mathbf{1}})=0$，我们得到

$$\chi(h[1]a)=\chi(\delta(\bar{a}))=0\qquad(a\in V).$$

对于 $a\in V_m$，当 $m>0$ 时，我们有 $a_jh\in V_{m-j}$。因此，(4.6) 给出

$$\chi(Y(a,x)h)=x^{-m-1}\chi(a_mh)=mx^{-m-1}\chi(h[1]a)=0.$$

对于 $a\in V_0=\mathbb{C}\mathbf{1}$，同一等式 $\chi(Y(a,\ x)h)=0$ 由 $Y(\mathbf{1},\ x)h=h\in V_1$ 得出。因此，它对每个 $a\in V$ 都成立。

由有理性可知，伴随模 V 是不可约子模的直和。它们的权零空间构成直和，且其和等于 $\mathbb{C}\mathbf{1}$，因此某个子模包含 $\mathbf{1}$。于是它包含每个$a=a_{-1}\mathbf{1}$，从而等于 V。因此 V 是单的，而 (4.7) 给出 $h=0$。□

定理 *1.1* 的证明。 满射性已在第 4 节证明。单射性即引理 5.1。由此证明了第 (1) 部分。

第 (2) 部分已在第 2 节证明。最后，设 $G=\mathrm{Aut}(V)$，并令 $\dim G$ 表示 G 作为复代数群的维数。由第 2 节和第 (1) 部分可得

$$\dim G=\dim\mathrm{Lie}(G)=\dim\mathrm{Der}(V)=\dim V_1.$$

有限型复代数群是有限群，当且仅当其维数为零。因此，$\mathrm{Aut}(V)$ 是有限群，当且仅当 $V_1=0$。这证明了第 (3) 部分。□

例 5.2。 令 $L=\mathbb{Z}\alpha$ with $(\alpha,\alpha)=2$，并取带有其通常共形向量的 $V=V_L$。这个格顶点算子代数是单的，并且属于共形场论型。它是正则的 [4], ，因而是有理的，并且C_2-余有限 [1]。由 [3], $\mathrm{Aut}(V_L)\cong\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$。该群是连通且无限的。因此，定理 1.1(2) 给出 $\mathrm{Inn}(V_L)=\mathrm{Aut}(V_L)$，且外自同构商群是平凡的。

Acknowledgments

作者提出了将两个零次算子 $L(0)$ 和 D 结合起来，以形成算子族 $H_t=L(0)+tD$ 的想法。人工智能系统被用于检索文献、准备手稿并协助推导证明的细节。作者对数学内容负责。

References

[1] T. Abe、G. Buhl 和 C. Dong，有理性、正则性与 C_2-余有限性， *Trans. Amer. Math. Soc.* **356** (2004), 3391–3402。[2] C. Dong 和 R. L. Griess, Jr.，有限生成顶点算子代数的自同构群与导子代数， *Michigan Math. J.* **50** (2002)，227–239。[3] C. Dong、R. L. Griess, Jr. 和 A. Ryba，秩一格型顶点算子代数及其自同构群，II。E-系列， *J. Algebra* **217** (1999)，701–710。[4] C. Dong、H. Li 和 G. Mason，有理顶点算子代数的正则性， *Adv. Math.* **132** (1997)，148–166。[5] C. Dong、H. Li 和 G. Mason，顶点算子代数与结合代数， *J. Algebra* **206** (1998)，67–96。[6] C. Dong、H. Li 和 G. Mason，轨道理论与广义月光中的迹函数的模不变性， *Comm. Math. Phys.* **214** (2000), 1–56。[7] C. Dong 和 G. Mason，关于量子伽罗瓦理论， *Duke Math. J.* **86** (1997)，305–321。[8] C. Dong 和 W. Zhang，有理顶点算子代数是有限生成的， *J. Algebra* **320** (2008)，2610–2614。[9] M. Kaneko 和 D. Zagier，一个广义 Jacobi θ 函数与拟模形式，载于 *The Moduli Space of Curves* **129**, ¨ 1995, 165 172 ,

Progr. Math. Birkhauser，波士顿，–。[10] H. Li，正则表示与 $A_n(V)$-$A_m(V)$ 双模， *J. Pure Appl. Algebra* **227** (2023)，论文编号 107347。[11] J. van Ekeren 和 R. Heluani，Zhu 代数的一个简短构造， *J. Algebra* **528** (2019), 85–95。

[12] D. Zagier，椭圆模形式及其应用，载于 *The 1-2-3 of Modular Forms*，Universitext，施普林格，柏林，2008，1–103。[13] Y. Zhu，顶点算子代数的特征的模不变性， *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996)，237–302。

School of Mathematical Sciences, Key Laboratory of Intelligent Computing and Applications (Ministry of Education), Tongji University, Shanghai 200092 China*Email address*: jzhan@tongji.edu.cn