arXiv:2611.28868v1 [econ.TH] 21 Nov 2026

Risk 状态依赖效用下对两种风险的厌恶

Jiehua Xie[a]、*Biyao Wu*[b]、*Wei Zou*[c *a]江西水利电力大学工商管理学院，江西 *330099*，中国[b]武汉大学信息管理学院，湖北 *430072*，中国[c]江西水利电力大学理学院，江西 *330099*，中国

2026年8月

摘要

本文在状态依赖双属性效用框架下引入 Arrow-Pratt 风险厌恶的概念，其中主要风险伴随着背景风险。在这一框架下，我们研究了存在另一种风险时对某一风险的风险厌恶、状态依赖双属性效用函数的结构以及两种风险之间相关程度的相互关系。具体而言，我们针对不同的两类风险相关结构，建立了在涉及背景风险时仍能保持对主要风险的风险厌恶的状态依赖双属性效用函数条件。此外，我们还引入了一个新概念：存在背景风险时的均匀风险厌恶。我们证明，上述关于状态依赖双属性效用函数的条件，等价于存在背景风险时对主要风险的均匀风险厌恶。这些发现为相关风险的状态依赖偏好提供了新的见解。通过公平保险合同和两期模型下最优预防这两个应用，本文阐明了所提出的状态依赖效用下两种风险风险厌恶概念的实际用途。

关键词：状态依赖双变量效用函数；双变量风险厌恶；一致双变量风险厌恶；背景风险；风险分摊；效用独立性。

1 引言

风险厌恶长期以来一直是风险与不确定性下决策中的基本概念之一。在其开创性著作中，Arrow (1971年) 和 Pratt (1964) 在期望效用框架下，将风险厌恶正式定义为：相较于风险本身，更偏好确定地获得该风险的期望值。根据这一表述，可以通过比较不同决策者（DM）的效用函数，系统地衡量其风险厌恶程度。后续研究极大地拓展并深化了

风险厌恶的理论框架（Yaari，1969；Diamond and Stiglitz，1974年；Ross，1981）。

在经典的风险厌恶理论中，通常假设结果的效用是状态无关的，这意味着决策者的效用不会随自然状态的变化而变化。这一假设大大简化了在异质决策环境中对效用函数的识别与比较。然而，正如

*通讯作者。电子邮箱：zouwei@juwp.edu.cn (Wei Zou)。

所指出的，Karni 等人（1983年），存在这样的情形：“对后果的评价并不独立于当时的自然状态”。例如，一名遭受永久性伤害的人，在身体健康时与受伤后，可能会对100万美元的货币禀赋赋予不同的效用。这类情形表明，决策者可能表现出状态依赖效用。关于状态依赖效用的风险厌恶文献十分丰富（Karni，1983年；Karni 等人，1983年；Kelsey，1992；Kelsey 和 Nordquist，1991；Nau，2003；Jarrow 和 Li，2021；Tsakas，2025年）。为强调这一主题的重要性及其广泛适用性，我们首先列举几个现有文献中的例子。

在保险领域，状态无关效用的假设往往与某些实际情境不一致，例如人寿保险、健康保险或残疾保险。该不一致的一个重要含义是，即使全额保险保障是按照精算公平条件提供的，风险厌恶个体也可能拒绝该保障（CookandGraham，1977年）。因此，有观点认为，在这些类型的保险情境中，状态依赖效用框架能够更现实、更准确地描述决策行为（Karni，1983年；Chiu，1996年）。

在行为经济学领域，大量实例也表明，决策者的风险态度往往取决于决策所处的情境。来自KelseyandNordquist （1991）、Nau （2003）以及Baillon and Bleichrodt（2015）等人的实证和实验性证据表明，相同的决策结果可能会因其所处的环境状态不同而受到不同评价。因此，状态独立风险态度的假设可能导致对风险的不准确评估，并造成次优的决策结果。

在金融经济学中，正如Jarrow 和 Li（2021）所强调的，使用状态依赖效用函数之所以重要，原因如下：（i）这使消费与投资组合选择理论能够与一些已观察到的、在状态无关偏好下违背最优且理性的投资者行为的现象相一致（Žitkovi´c，2005年；Chau 等人，2017年；Mostovyi，2017年）；（ii）在不完全市场中，状态依赖效用函数对于刻画经济均衡至关重要（Basak，2000年；Hugonnier，2012年；Jarrow，2017年）。

值得注意的是，上述研究以及现有关于状态依赖效用下风险厌恶的大多数研究，主要是在单属性效用函数框架内开展的。然而在实践中，决策者往往同时面临多个风险来源。其中，主要风险或内生风险（如金融风险或可保风险）通常与外生不确定性来源并存，包括宏观经济、健康或环境风险。这些外生因素经常被合并起来，作为背景风险（Pratt，1988；Franke 等人，2006年，2011年）。在许多现实情境中，两种风险源自不同维度，因此有必要采用双属性效用函数，分析背景风险如何影响对主要风险的风险厌恶保持性（Finkelshtain 等人，1999年；Denuit 等人，2011年；Guo 等人，2016年；Denuit 和 Mesfioui，2017年；Li 等人，2016年；Wong，2021）。尽管已有这些显著成果，相关研究尚未系统地将状态依赖双变量（或双属性）效用函数（SDBUF）纳入分析，以考察存在背景风险时决策者对主要风险的态度。本文旨在通过构建并应用状态依赖双属性效用函数框架，拓展联合风险暴露下Arrow-Pratt 风险厌恶的理论分析，从而填补这一空白。

为阐明本研究的核心主题，我们考虑一位健康状况良好的决策者，他通过采取当前预防活动，如储蓄、定期体检或生活方式改善，来提升未来财富和

健康状况。在这一情境中，财富和健康状况代表福祉的两个不同维度，且这两个变量通常具有相关性。在作出这一决策时，个人了解自己当前的财富、健康状况和效用水平。然而，这三个变量未来会如何实现仍存在不确定性。在此背景下，我们希望探究这两种属性（财富和健康状况）未来取值之间的相关性，以及状态依赖效用如何影响决策者对相关风险的偏好，并进而影响其预防活动。

基于这些洞见，我们在 SDBUF 框架下，研究存在背景风险时对一种主要风险（如金融风险或可保风险）的风险厌恶。在这里，决策者的偏好由其期望状态依赖双属性效用函数刻画；如果决策者偏好X在存在背景风险 Y时的 $(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y)$ 而非 (X,Y)，则称其对主要风险存在背景风险时风险厌恶。本文讨论了两种风险的风险厌恶、SDBUF 的结构以及两种风险之间的相关程度之间的关系。通过这些研究，我们对针对两种相关风险的状态依赖偏好提出了一些新的理论洞见。本文的研究拓展了现有文献；以往研究聚焦于单一风险，且主要使用状态依赖单属性效用函数（例如，见Jarrow 和 Li，2021）。本文的主要工作有两方面。

首先，我们讨论所考察的主要风险和背景风险与 SDBUF 的状态空间统计独立[1]的情形。当不对两种风险之间的相关性施加任何约束时，我们证明，SDBUF 的加性形式（对应于逐状态的相互效用独立性 (KeeneyandRaiffa，1976）意味着存在另一种风险时对一种风险的风险厌恶。当两种风险统计独立时，我们验证，SDBUF 关于主要风险的逐状态凹性本身，就足以保证存在背景风险时对同一风险的风险厌恶。若主要风险与背景风险之间呈现正期望依赖 (Wright，1987；Li，2011年），我们将建立 SDBUF 上的风险分摊序关系 (Eeckhoudt 等人，2007年；Jokung，2011年），以确保两种风险下的风险厌恶。主要风险与背景风险呈现正回归依赖 (Tsetlin 和 Win- kler，2005年）时，我们也给出了类似结果。为深入分析，我们引入了一个新的双变量风险厌恶概念，称为存在背景风险时的一致风险厌恶。我们验证，在两种风险具有相应相关结构的情况下，上述关于 SDBUF 的条件等价于存在背景风险时的一致风险厌恶。这种等价关系为这些关于 SDBUF 的既有条件提供了额外的经济解释和行为洞见。

其次，我们讨论状态依赖双变量效用函数的状态空间与风险的状态空间重合的情形。我们证明，在上述情形下确立的关于状态依赖双变量效用函数的条件并不适用于这一状态依赖设定。在这一状态依赖效用框架下，我们确立了一个充分条件，以保证存在背景风险时对主要风险的风险厌恶得以保持。同时，我们也阐明了该条件的经济解释。此外，当状态依赖双变量效用函数具有效用主导属性（Abbasand Howard，2005年）时，针对这一状态依赖情形下两种风险之间不同形式的相关性，我们给出了存在背景风险时一致风险厌恶的等价条件。

总而言之，本研究结合了四个概念：（i）在另一风险存在时对单一风险的厌恶，（ii）Eeckhoudt and Schlesinger （2006年）提出的风险分摊，（iii）效用独立性（Keeney andRaiffa，

[1]为避免与多属性效用理论中的效用独立性概念混淆，本文将随机变量之间的独立性称为统计独立性。

1976）和属性优势效用（Abbasand Howard，2005年），以及（*iv*）状态依赖双变量效用函数。因此，本文的主要贡献不仅在于扩展现有分析，还在于为各种概念建立统一理论框架。

本文其余部分安排如下。在第 2 节，我们介绍基本符号和预备知识，包括两种风险之间各种形式的相关性、风险分摊的符号以及效用函数的关键性质。在第 3 节，我们讨论风险与 SDBUF 状态空间统计独立的情形。我们针对两种风险之间不同的相关结构，建立了 SDBUF 满足的条件，以确保在存在背景风险时对一种风险具有风险厌恶。我们还验证了这些针对 SDBUF 建立的条件等价于一致双变量风险厌恶的概念。第 4 节讨论 SDBUF 的状态空间与风险的状态空间重合的情形。我们提出了一个充分条件，以确保在这一状态依赖情形下，存在背景风险时对主要风险的风险厌恶得以保持，随后探讨了该条件的经济解释。此外，我们还确定了这一状态依赖框架下，一致双变量风险厌恶的等价条件。第 5 节通过两期模型中的公平保险合同和最优预防这两项应用，展示所提出的、针对状态依赖效用的双变量风险厌恶概念和条件的实际用途。结论见第 6 节。所有证明均置于附录中。

2 符号与预备知识

2.1 两种风险之间的相关性

由于个体可能同时面临多个风险来源，因此考虑两种不同类型的风险，即主要风险和背景风险。令 X 为主要风险，例如可保风险或金融风险，令 Y 为背景风险。我们考虑概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$，其表示定义风险的随机环境，其中 $\mathbb{P}$ 表示决策者对风险的主观概率测度。

对于风险 X 和 Y，随机向量 (X,Y) 在支撑集 $[\underline{x}, \bar{x}] \times [\underline{y}, \bar{y}]$ 上的累积分布函数（CDF）记为 $F_{XY}^{\mathbb{P}}(x, y)$，其中 $\underline{x} < \bar{x}$ 且 $\underline{y} < \bar{y}$。此处，$\underline{x}$（或 $\underline{y}$）可以是有限常数或 $-\infty$，而 $\bar{x}$（或 $\bar{y}$）可以是有限常数或 $+\infty$。X 和 Y 在各自支撑集 $[\underline{x}, \bar{x}]$ 和 $[\underline{y}, \bar{y}]$ 上的边缘分布分别记为 $F_X^{\mathbb{P}}(x)$ 和 $F_Y^{\mathbb{P}}(y)$。对于任意概率测度 Q，令 $\mathbb{E}_Q[\cdot]$ 表示在 Q 下的期望，令 $\mathbb{E}_Q[\cdot|A]$ 表示给定事件 A 发生时的条件期望。

风险 X 与 Y 之间的相关性对于在存在另一种风险时维持对某一风险的风险厌恶起着重要作用（Finkelshtain 等人，1999年）。下文将针对风险 X 和 Y 介绍几种不同形式的相关性。

定义 2.1。（Tsetlin 和 Winkler，2005年，定义 1）如果风险 X 对 Y 呈正回归依赖，记作 $(X,Y) \in R^{\mathbb{P}}(X|Y)$，若 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X|Y=y]$ 关于 y 在 $[\underline{y}, \bar{y}]$ 上是非递减的。

定义中引入的正回归依赖（简称 PRD）2.1 是两种风险之间一种广泛存在的相关性（Tsetlin 和 Winkler，2005年）。例如，当 X 和 Y 是统计独立风险或共单调风险时，$(X,Y) \in R^{\mathbb{P}}(X|Y)$。

记作

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} D_1(X|y) := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X] - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[X|Y \le y\right] \quad \text{for all} \quad y \in [\underline{y}, \bar{y}].$$

Wright （1987）提出了两种风险之间以下形式的相关性，这种形式在文献中也被广泛使用。

定义 2.2. 若风险 X 对 Y 具有正的一阶期望依赖性（简称一阶PED），记为（X,Y）$\in \mathbb{E}_{\mathbb{P}}D_1$（$X|Y$），则 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}D_1$（$X|y$）$\geq 0$ 对所有 $y \in [\underline{y},\overline{y}]$ 均成立。

Wright （1987）证明，一阶PED是比PRD更弱的相关性。因此，

$$(X,Y) \in R^{\mathbb{P}}(X|Y) \Rightarrow (X,Y) \in \mathbb{E}_{\mathbb{P}}D_1(X|Y). \tag{1}$$

Li（2011年）通过以下函数将 Wright （1987）提出的一阶PED概念扩展到了二阶：

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}D_2(X|y) = \int_{\underline{y}}^{y} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}D_1(X|t)F_Y^{\mathbb{P}}(t)\mathrm{d}t.$$

当 $N \geq 3$ 时，Li （2011年）还将重复积分定义为

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}D_N(X|y) = \int_{\underline{y}}^{y} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}D_{N-1}(X|t)\mathrm{d}t,\ N \geq 3,$$

然后引入了正 N 阶期望依赖性（简称 N 阶PED）。

定义 2.3. 对于 $N > 1$，若 X 对 Y 具有 N 阶PED，记为（X,Y）$\in \mathbb{E}_{\mathbb{P}}D_N$（$X|Y$），则 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}D_{k+1}$（$X|y$）$\geq 0$ 对每个 $k = 1,\ldots,N-1$ 均成立，并且 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}D_N$（$X|y$）$\geq 0$ 对所有 $y \in [\underline{y},\overline{y}]$ 均成立。

Li(2011年)指出

$$(X,Y) \in \mathbb{E}_{\mathbb{P}}D_1(X|Y) \Rightarrow (X,Y) \in \mathbb{E}_{\mathbb{P}}D_2(X|Y) \Rightarrow \cdots \Rightarrow (X,Y) \in \mathbb{E}_{\mathbb{P}}D_N(X|Y),\ N > 1. \tag{2}$$

因此，对于上述两种风险之间的相关形式，N 次 PED 最弱，PRD 最强。

2.2 效用函数

由于同时考虑主要风险 X 和背景风险 Y，假设决策者 U 的效用函数为双属性形式，即 $U(x,y)$，$(x,y) \in [\underline{x},\overline{x}] \times [\underline{y},\overline{y}]$ 是一个双属性（或双变量）效用函数。

在多属性决策中，效用独立性是将多属性效用函数分解为单属性效用函数的一项基本概念（Keeney and Raiffa，1976）。具体而言，对于双属性效用函数 $U(x,y)$，若每个属性都与其补集效用独立（即相互效用独立性），则 $U(x,y)$ 可以表示为加性形式

$$U(x,y) = k_1U_1(x) + k_2U_2(y) \tag{3}$$

或乘法形式 $1+\mathrm{kU(x,y)} = \left(1+\mathrm{kk_1U_1(x)}\right)\left(1+\mathrm{kk_2U_2(y)}\right)$，其中 $\mathrm{k_1},\mathrm{k_2}$ 为缩放常数，$\mathrm{U_i}$、$\mathrm{i} = 1$、2 为单属性效用函数。由于具有良好的解析处理性和实用简洁性，这些双属性效用函数形式在理论和应用分析中均得到广泛使用（Basak 和 Makarov，2014年；Xie 和 Zhou，2022）。

接下来介绍另一类双属性效用函数。

定义 2.4.（Abbas and Howard，2005年）如果对于所有 (x, y) ∈ [x, x] × [y, y]，双属性效用函数 U(x, y) 满足 U(x, y) =U(x, y) =U(x, y)，则称其为属性支配效用函数。如果对于所有 y ∈ [y, y]，U (x, y) = U(x, y)，则称属性 x 为效用主导属性。

属性支配效用函数常见于决策应用中，尤其是在涉及生死情境的场合，其中这些属性可能代表消费水平和健康状态（Howard，1980年）。

本文中，我们使用记号 $U^{(n,m)}(x, y) := \frac{\partial^{n+m} U(x,y)}{\partial x^n \partial y^m}$ 表示 U(x, y) 关于 x 和 y 的（m +n）阶偏导数，其中 n 和 m 均为非负整数。根据 Eeckhoudt and Schlesinger（2006）、Eeckhoudt 等人（2007）和 Jokung（2011）提出的定义，我们简要回顾一下（n, m）阶风险分摊的概念，该概念用于解释 $U^{(n,m)}$ 的符号。设 $\tilde{\varepsilon}_i$、i = 1、2、.....为统计独立的随机变量，且它们也与决策者的财富统计独立。定义基本情形 $A_1 = [-k]$ 和 $B_1 = B_2 = [0]$，并令 $A_2 = [\tilde{\varepsilon}_1]$。Eeckhoudt and Schlesinger（2006）通过以下五五彩票的递归构造，将这些定义推广到更高阶：

$$A_n = [0 + B_{n-2}; \tilde{\varepsilon}_{\mathrm{Int}(n/2)} + A_{n-2}] \quad \text{and} \quad B_n = [0 + A_{n-2}; \tilde{\varepsilon}_{\mathrm{Int}(n/2)} + B_{n-2}]$$

对于每个 $n \geq 3$。此外，Jokung (2011年) 提出了双变量风险分摊的定义，从而扩展了这一框架。

定义 2.5. 若对于所有 x、y，决策者都更偏好彩票$[(x + B_N, y + A_M); (x + A_N, y + B_M)]$而非 $[(x + B_N, y + B_M); (x + A_N, y + A_M)]$，则称偏好表现出阶数为 (M,N) 的风险分摊。

直观而言，当个体倾向于分解风险时，其偏好表现出风险分摊。Jokung (2011) 证实，双变量风险分摊可以通过决策者效用函数的交叉偏导数来刻画 U。

定理 2.1. *(Jokung，2011年)* 双属性效用函数 U 满足阶数为 (M, N) 的风险分摊，当且仅当对于所有 (x, y)，$(-1)^{M+N} U^{(M,N)}(x, y) \leq 0$。

现在，我们考虑一个概率空间 $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$，并假设决策者的效用函数 U 显式依赖于状态空间 $\tilde{\Omega}$。也就是说，决策者对状态依赖双变量效用函数 U(x, y $\tilde{\omega}$) 持有主观信念 $\tilde{\mathbb{P}}$。关于状态依赖效用函数及其应用的更详细介绍，请参阅 Žitkovi´c (2005年)、Chau 等人 (2017年)、Mostovyi (2017年) 以及 Jarrow 和 Li (2021)。本文始终考虑满足以下条件的风险 X、Y 和状态依赖双变量效用函数 U：$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X] < \infty$且 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}[|U(X、Y\ \tilde{\omega})|] < \infty$。为清楚起见，我们将效用函数 U(x, y $\tilde{\Omega}$) 在给定状态 $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ 下的性质称为逐状态特征。因此，“逐状态”一词˜强调的是以固定状态 $\tilde{\omega} \in \Omega$为条件进行的分析。接下来的分析将聚焦于状态依赖双变量效用函数框架中的以下两种情形。

˜情形I。状态空间 Ω 与 Ω 在统计上相互独立。在这种设定下，风险X 和Y 的实现值˜不受效用函数对 Ω 的状态依赖性的影响。此类 SDBUF 的构造及其相关风险选择集，源于金融经济学的应用，尤其是资产定价理论。在这一背景下，$\omega \in \Omega$ 通常代表与消费或终值˜财富相关的不确定性，而 $\tilde{\omega} \in \Omega$ 则代表另一种额外且统计独立的随机性来源。纳入

这种统计独立的随机性来源，有助于研究 SDBUF U的逐状态特征。在关于状态依赖偏好的文献中，这一状态依赖框架主要用于单属性效用函数（例如，见 Chau 等人，2017年；Mostovyi，2017年；Lu，2019年；Jarrow 和 Li，2021）。

情形 II。$(\tilde{\Omega},\tilde{\mathscr{F}},\tilde{\mathbb{P}})=(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$，即概率空间 Ω和 $\tilde{\Omega}$重合。在这种情况下，随机变量 X 和 Y 以及效用函数 U 都依赖于同一个状态空间 Ω。因此，风险 X 和 Y 的实现值会受到效用函数 U 对 Ω的状态依赖性的影响。这一框架也广泛应用于单属性情形下的状态依赖偏好文献中（例如，Karni，1983年；Karni 等人，1983年；Hill，2019年；Jarrow 和 Li，2021；Tsakas，2025年）。

3 独立彩票的双变量风险厌恶

˜本节聚焦于情形 I，其中假设状态空间 Ω 和 Ω 在统计上相互独立。在此框架下，我们将确立以下条件：当偏好由状态依赖双变量效用函数 $U(x,\ y\ \tilde{\omega})$刻画时，面对背景风险 Y，对主要风险 X 的风险厌恶仍能得到保留。

3.1 状态依赖效用 $U(x,\ y\ \tilde{\omega})$

我们从一个定义开始。状态依赖双变量效用函数 $U(x,\ y$下存在背景风险时的单一风险厌恶 ˜ $\omega)$.

定义 3.1。 如果不等式成立，则称 SDBUF $U(x,\ y\ \tilde{\omega})$ 在存在背景风险 X的情况下对背景风险 Y具有风险厌恶性，即ણ

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[U\left(X,Y,\tilde{\omega}\right)\right]\leq\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[U\left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y,\tilde{\omega}\right)\right] \tag{4}$$

成立。

不等式 (4) 意味着，当彩票 X 和 Y 与状态依赖双变量效用函数 U (x, y $\tilde{\omega}$) 统计独立时，效用为 U 的决策者偏好 ($\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$[X],Y) 而非风险 (X ,Y)。在状态依赖效用下，这种偏好反映了存在背景风险 Y 时对主要风险 X 的风险厌恶。为简洁起见，只要不等式 (4) 成立，也称状态依赖双变量效用函数 U (x, y $\tilde{\omega}$) 对 (X ,Y) 具有双变量风险厌恶。

下文将考察状态依赖双变量效用函数 $U(x,\ y\ \tilde{\omega})$满足不等式（4）的条件，其中考虑 X 与 Y 之间不同的相关结构。我们首先分析不对 X 与 Y 之间的相关性施加任何约束的情形。

命题 3.1。 对于任意一对风险 $(X,\ Y)$，如果对每个状态 $\tilde{\omega}\in\tilde{\Omega}$以及所有 $(x,\ y)\in[x,\ x]\times[y,\ \bar{y}]$,$U(x,\ y\ \tilde{\omega})=f(x\ \tilde{\omega})+g(y\ \tilde{\omega})$，其中 $f(x\ \tilde{\omega})$关于 x 是逐状态凹的，则 U 在 Y 存在时对 X 风险厌恶。

如第2.2小节所述，加性形式 U(x, y $\tilde{\omega}$) $=$f (x $\tilde{\omega}$) $+$g(y $\tilde{\omega}$) 意味着属性 x 和 y 之间具有逐状态效用独立性。因此，命题 3.1 指出，为了保证对任意一对风险 (X ,Y) 的双变量风险厌恶，状态依赖双变量效用函数 U(x, y $\tilde{\omega}$) 必须具有逐状态˜效用独立性，即对每个状态 $\tilde{\omega}\in\Omega$，效用独立性都成立。

命题 3.1 对状态依赖双变量效用函数提出的条件相对严格，因为这些条件适用于所有风险对 (X ,Y), 因而不对 X 和 Y 之间的相关性施加任何限制。请注意，在存在背景风险时，PRD 和 N阶PED 是风险分析与比较中广泛使用的相关形式（Wright，1987；Tsetlin 和 Winkler，2005年；Li，2011年；Guo 等，2016年；Denuit 和 Mesfioui，2017年；Wong，2021；Zhu 等，2023）。下文将针对这些特定的相关结构，建立状态依赖双变量效用函数 U(x, y $\tilde{\omega}$) 满足不等式 (4) 的有效性所需的条件。

命题 3.2。*(i).* 对于任意风险$(X,Y)\in R^{\mathbb{P}}(X\,|Y)$，若对于每个状态 $\tilde{\omega}\in\tilde{\Omega}$，$U(x,y\ \tilde{\omega})$关于其第一个自变量 x 为凹，且 $U(x,y\ \tilde{\omega})$满足阶数为$(1,1)$的风险分摊条件，则 U 在 Y 存在时对 X 风险厌恶。

(ii). 对于任意风险$(X,Y)\in R^{\mathbb{P}}(X\,|Y)$，若对于每个状态 $\tilde{\omega}\in\tilde{\Omega}$，$U(x,y\ \tilde{\omega})$关于其第一个自变量 x 为凹，且 $U(x,y\ \tilde{\omega})$ 满足阶数为$(1,k)$ 的风险分摊条件，其中 $k\in\{1,\ldots,N\}$，则 U 在 Y 存在时对 X 风险厌恶。

由命题 3.2(ii) 和定理 2.1 可知，当风险 X 在背景风险 Y 下满足 N阶PED 时，对于每个状态 $\tilde{\omega}\in\Omega$, 风险厌恶对 X 的保持程度取决于 $U^{(1,0)}$(x, y $\tilde{\omega}$) 关于 y 的前 N 阶偏导数的符号。这些偏导数刻画了 X 与 Y 之间能够保证对 (X,Y) 具有双变量风险厌恶的可容许相关结构。

值得注意的是，在命题 3.2(ii) 中，当 N $=1$ 时，(X ,Y) $\in\mathbb{E}_{\mathbb{P}}D_1(X|Y)$ 的双变量风险厌恶条件与 (X,Y) $\in R^{\mathbb{P}}(X|Y)$ 的条件一致。然而，命题 3.2(ii) 是命题 3.2(i) 的推广，因为它对两种风险之间的相关性要求较为宽松（即，(X,Y) $\in R^{\mathbb{P}}(X|Y)\Rightarrow$(X,Y) $\in\mathbb{E}_{\mathbb{P}}D_1(X|Y)$）。

此外，由于二元伯努利分布对和二元正态分布对属于$R^{\mathbb{P}}(X|Y)$这一类，命题3.2(*i*) 直接给出了状态依赖双变量效用函数$U(x,y\ \tilde{\omega})$满足何种条件时，不等式（4）对这两类分布成立。

推论 3.1。 如果对每个状态 $\tilde{\omega}\in\tilde{\Omega}$，$U(x,y\ \tilde{\omega})$关于其第一个自变量 x 是凹的，且 $U(x,y\ \tilde{\omega})$满足 $(1,1)$ 阶风险分摊性质，那么只要随机变量对(X,Y)服从以下联合分布之一，U 就会在存在背景风险 Y 时对 X 风险厌恶：*(i)* 相关系数非负的二元伯努利分布；*(ii)* 相关系数非负的二元正态分布。

注意，当风险 X 和 Y 统计独立时，条件期望 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$[X|Y $=$y] 随 y 非递减，这意味着 (X ,Y) $\in R^{\mathbb{P}}(X|Y)$。因此，根据命题 3.2(i)，如果对于每个状态$\tilde{\omega}\in\tilde{\Omega}$，U(x, y $\tilde{\omega}$) 关于其第一个自变量 x 是凹的，且 U (x, y $\tilde{\omega}$) 满足 (1, 1) 阶风险分摊，那么 U 对 (X ,Y) 表现出双变量风险厌恶。事实上，当风险 X 和 Y 统计独立时，无需额外要求 U (x, y $\tilde{\omega}$) 满足 (1, 1) 阶风险分摊。

命题 3.3。 对于统计独立的风险 X 和 Y，如果对每个状态 $\tilde{\omega}\in\tilde{\Omega}$，$U(x,y\ \tilde{\omega})$关于其第一个自变量 x 是凹的，那么 U 在 Y 存在时对 X 风险厌恶。

命题3.1-3.3 突显了X 与Y 之间的相关性在存在X时维持对其的风险厌恶方面所发挥的作用，其中Y。这些结果表明，确保对(X,Y)具有双变量风险厌恶的条件，会因状态依赖双变量效用函数$U(x,y\ \tilde{\omega})$中X与Y之间相关性的形式而有很大差异。特别是，随着X 与Y 之间相关结构的类别不断扩大，满足不等式的相应 SDBUF 类

（4）变得更加严格。这反映了风险的相关结构与 SDBUF U的特征之间存在某种对偶性。具体而言，当 SDBUF 实现逐状态效用独立性时，风险(X,Y)可以具有任意相关性。反之，若假设X与Y统计独立，则 SDBUF U 的函数形式可以灵活设定，但其第一个自变量必须满足逐状态凹性。命题 3.2给出了一个中间情形，其中既不假设风险相互独立，也不假设 SDBUF 具有独立性。然而，在这一框架下，风险的相关结构和 SDBUF 的性质都受到特定约束。

还需注意，命题3.1-3.3 的逆命题未必成立。为阐明这一点，我们以命题 3.1 为例进行说明。

例 3.1。 设 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\},\tilde{\Omega}=\{\tilde{\omega}_1,\tilde{\omega}_2\}$， 以及一个状态依赖双变量效用函数 $U(x,\ y\ \tilde{\omega})$ 满足

$$U(x,y,\tilde{\omega})=(x^{1/2}+y)\mathbb{I}_{\{\tilde{\omega}=\tilde{\omega}_1\}}(\tilde{\omega})+(x^2+y)\mathbb{I}_{\{\tilde{\omega}=\tilde{\omega}_2\}}(\tilde{\omega}), \tag{5}$$

其中， $\mathbb{I}_A$ 是集合 A 的示性函数，即当A 成立时， $\mathbb{I}_A$ 等于 1，否则等于 0。显然，对于状态 $\tilde{\omega}=\tilde{\omega}_2$, $U(x,\ y\ \tilde{\omega})$ 关于 x不是凹函数。

现在，假设 $\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}(\omega=\omega_1,\ \tilde{\omega}=\tilde{\omega}_1)=\lambda$，且 $\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}(\omega=\omega_2,\ \tilde{\omega}=\tilde{\omega}_1)=1-\lambda$，其中 $0<\lambda<1$ 为常数。那么，对于任意满足 $X(\omega_i)=x_i\geq 0$ 和 $Y(\omega_i)=y_i$ 的风险对 $(X,\ Y)$，$=1,\ 2$，均有

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[U\left(X,Y,\tilde{\omega}\right)\right]=(x_1^{1/2}+y_1)\lambda+(x_2^{1/2}+y_2)(1-\lambda)$$

and

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[U\left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y,\tilde{\omega}\right)\right]=\left(\left(x_1\lambda+x_2(1-\lambda)\right)^{1/2}+y_1\right)\lambda+\left(\left(x_1\lambda+x_2(1-\lambda)\right)^{1/2}+y_2\right)(1-\lambda),$$

因此 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[U\left(X,Y\ \tilde{\omega}\right)\right]\leq\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[U\left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y\ \tilde{\omega}\right)\right]$。

综上所述，我们给出一个反例：在存在背景风险 Y 时，状态依赖双变量效用函数U 对 X 是风险厌恶的，但状态依赖双变量效用函数 U 在其第一个自变量上并非逐状态凹。

3.2 状态依赖效用$U(x,\ y\ \tilde{\omega})$的一致双变量风险厌恶

在本小节中，我们考察状态依赖双变量效用函数 $U(x,\ y\ \tilde{\omega})$表现出对 $(X,\ Y)$的双变量风险厌恶时，逐状态条件的经济和数学特征。为此，我们引入一个称为「存在背景风险时的均匀风险厌恶」的新概念，并给出其等价条件。

考虑乘积概率空间 $(\Omega\times\tilde{\Omega},\mathscr{F}\times\tilde{\mathscr{F}},\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}})$。令 $\mathscr{Q}$为所有非平凡概率测度的集合，即所有满足存在集合 $A\in\mathscr{F}\times\mathscr{F}$ 使得 $(\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}})(A)>0$且 $(\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}})(A^c)>0$的概率测度 $\mathbb{P}\times\mathbb{P}$，其中 A^c为 A 的补集。我们首先正式定义存在背景风险时，SDBUF U(x, y $\tilde{\omega}$) 的一致风险厌恶。这一概念的灵感来自 Jarrow 和 Li（2021）提出的单一风险一致风险厌恶记法，以及金融经济学中对风险厌恶的刻画（Ingersoll，1987）。

定义 3.2。 若不等式 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[U(X,Y\ \tilde{\omega})\right]\leq\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[U(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y\ \tilde{\omega})\right]$ 对所有 $\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}\in\mathscr{Q}$ 均成立，则称状态依赖双变量效用函数 $U(x,y\ \tilde{\omega})$ 在存在背景风险Y时对X具有一致风险厌恶。

存在背景风险时的一致风险厌恶，是比定义 3.1 中引入的状态依赖效用下双变量风险厌恶概念更强的定义。具体而言，对于任意风险 X 和 Y，它要求不等式 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[\mathrm{U}(\mathrm{X},\mathrm{Y}\ \tilde{\omega})\right] \leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[\mathrm{U}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathrm{X}\ ],\mathrm{Y}\ \tilde{\omega})\right]$ 对所有非平凡概率测度 $\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}$ 均成立。为简洁起见，当状态依赖双变量效用函数 U(x, y $\tilde{\omega}$) 在存在背景风险 Y 时对 X 具有一致风险厌恶，也称其对 (X ,Y) 具有一致双变量风险厌恶。

命题 3.1-3.3 已确立了状态依赖双变量效用函数 $U(x,y\ \tilde{\omega})$ 在两种风险之间存在各种相关结构时，保证在背景风险 X 存在时对其风险厌恶的逐状态条件 Y。下述定理表明，这些逐状态条件等价于对 (X,Y) 的一致双变量风险厌恶。

定理 3.1. 假设 $U(x,y\ \tilde{\omega})$ 是相对于状态空间 $\tilde{\Omega}$ 的状态依赖双变量效用函数。

(i) 对任意统计独立风险 (X,Y)，在 Y 存在时，$U(x,y\ \tilde{\omega})$ 对 X 一致风险厌恶，当且仅当 $U(x,y\ \tilde{\omega})$ 关于其第一个自变量 x 逐状态凹。*(ii)* 对任意满足 $(X,Y) \in \mathbb{E}_{\mathbb{P}}D_N(X\,|Y)$ 的风险，在 Y 存在时，$U(x,y\ \tilde{\omega})$ 对 X 一致风险厌恶，当且仅当对于每个状态 $\tilde{\omega}\in\tilde{\Omega}$，$U(x,y\ \tilde{\omega})$ 关于 x 凹，且满足阶数为 $(1,k)$ 的风险分摊，其中 $k \in \{1,\ldots,N\}$。*(iii)* 对任意满足 $(X,Y) \in R^{\mathbb{P}}(X\,|Y)$ 的风险，在 Y 存在时，$U(x,y\ \tilde{\omega})$ 对 X 一致风险厌恶，当且仅当对于每个 $\tilde{\omega}\in\tilde{\Omega}$，$U(x,y\ \tilde{\omega})$ 关于 x 凹，且满足阶数为 $(1,1)$ 的风险分摊。*(iv)* 对任意一对风险 (X,Y)，在 Y 存在时，U 对 X 一致风险厌恶，当且仅当对于每个 $\tilde{\omega}\in\tilde{\Omega}$，$U(x,y\ \tilde{\omega}) = f(x\ \tilde{\omega}) + g(y\ \tilde{\omega})$，其中 $f(x\ \tilde{\omega})$ 关于 x 逐状态凹。

对于具有不同相关形式的风险对 (X ,Y)，定理 3.1 确立了 SDBUF U(x, y $\tilde{\omega}$) 对 (X ,Y) 表现出一致双变量风险厌恶的等价逐状态条件。重要的是，定理 3.1 将风险偏好理论中的三个概念结合起来：(i) 状态依赖效用 U(x, y $\tilde{\omega}$) 的一致双变量风险厌恶，(ii) Eeckhoudt和Schlesinger（2006）提出的风险分摊，以及 (iii) 效用独立性（Keeney and Raiffa，1976）。因此，这一结果不仅拓展了现有分析，还为这些基本概念建立了统一理论框架。由此，它对不同逐状态条件的经济解释和数学刻画都提供了更深入的见解。例如，定理表明，对于给定的 SDBUF U(x, y $\tilde{\omega}$)，逐状态相互效用独立等价于对所有可能风险对的一致双变量风险厌恶。

此外，定理3.1 揭示了风险的相关结构 $(X,\ Y)$ 与状态依赖双变量效用函数 $U(x,\ y\ \tilde{\omega})$ 的函数形式之间存在对偶关系，从而确保一致双变量风险厌恶。具体而言，对于每个状态 $\tilde{\omega}\in\tilde{\Omega}$，对状态依赖双变量效用函数 $U(x,\ y\ \tilde{\omega})$ 施加的约束越严格，能够使决策者在存在 X 的情况下对 Y 保持一致风险厌恶的 X 与 Y 之间可接受的相关性范围就越广。

4 相关彩票的双变量风险厌恶

在本节中，我们考察情形 *II*，其中 $(\tilde{\Omega},\ \tilde{\mathscr{F}},\ \tilde{\mathbb{P}}) = (\Omega,\ \mathscr{F},\ \mathbb{P})$，即状态空间 Ω 与 $\tilde{\Omega}$ 重合。在此设定下，风险 X、Y 以及 SDBUF $U(x,\ y\ \omega)$ 均定义在共同概率空间上

（Ω，$\mathscr{F}$，$\mathbb{P}$），这意味着它们共享相同的不确定性来源。在这一框架下，我们确定了以下条件：对于 SDBUF U（x，y ω），在存在背景风险Y 的情况下，对主要风险 X 的风险厌恶得以保持。

4.1 状态依赖效用的双变量风险厌恶 $U(x,y\ \omega)$

我们首先介绍在存在背景风险时，状态依赖效用$U(x,y\ \omega)$的风险厌恶的正式定义。

定义 4.1。 如果状态依赖双变量效用函数 $U(x,y\ \omega)$ 在背景风险 Y存在时对 X风险厌恶，则称其为对 X风险厌恶，当不等式

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[U(X,Y,\omega)\big] \le \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[U(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y,\omega)\big] \tag{6}$$

成立。

不等式 (6) 表明，当具有状态依赖双变量效用函数 U(x, y ω) 的决策者在背景风险 Y 存在时对 X 风险厌恶，他/她更偏好 ($\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$[X],Y)，而非风险 (X ,Y)。为简洁起见，当不等式 (6) 成立时，也称状态依赖双变量效用函数 U(x, y ω) 对风险 (X ,Y) 具有双变量风险厌恶。

对于与 (X ,Y) 的状态空间统计独立的状态依赖双变量效用函数 U(x, y $\tilde{\omega}$)，命题 3.1–3.3 给出了 U(x, y $\tilde{\omega}$) 满足的逐状态条件，以确保在两种风险具有不同相关结构时，决策者在 Y 存在的情况下对 X 风险厌恶。例如，当 (X ,Y) 呈现任意相关结构时，逐状态相互效用独立（对应于加性形式 U(x, y $\tilde{\omega}$) = f (x $\tilde{\omega}$) +g(y $\tilde{\omega}$)，其中 f (x $\tilde{\omega}$) 关于 x 逐状态凹）足以保证对风险 (X ,Y) 具有双变量风险厌恶。然而，这些结果不一定适用于状态依赖双变量效用函数 U(x, y ω)。下文将以状态依赖双变量效用函数 U (x, y ω) 的加性形式为例，阐明这一点。

例 4.1. 令 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$和 $\mathbb{P}(\omega=\omega_1)=\mathbb{P}(\omega=\omega_2)=1/2$。此外，令状态依赖双变量效用函数 $U(x,\ y\ \omega)$ 为

$$U(x,y,\omega)=\big(\ln x+y\big)\mathbb{I}_{\{\omega=\omega_1\}}(\omega)+\big(2\ln x+y\big)\mathbb{I}_{\{\omega=\omega_2\}}(\omega). \tag{7}$$

注意，对每个 $\omega\in\Omega$，$U(x,\ y\ \omega)$ 关于其第一个变量x是凹的。取$X(\omega_1)=6$，$X(\omega_2)=10$和$Y(\omega_i)=y_i$，$i=1,\ 2$。

我们先计算 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[U(X,\ Y\ \omega)\big]$。根据状态依赖双变量效用函数 U的表达式（7），可得

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[U(X,Y,\omega)\big]=\big(\ln 6+y_1\big)\mathbb{P}(\omega=\omega_1)+\big(2\ln 10+y_2\big)\mathbb{P}(\omega=\omega_2)=\frac{\ln 6}{2}+\ln 10+\frac{y_1+y_2}{2}.$$

接下来，我们计算 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[U(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y\ \omega)\big]$。注意到 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[X\big]=8$，可得

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[U(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y,\omega)\big]=\big(\ln 8+y_1\big)\mathbb{P}(\omega=\omega_1)+\big(2\ln 8+y_2\big)\mathbb{P}(\omega=\omega_2)=\frac{3\ln 8}{2}+\frac{y_1+y_2}{2}.$$

于是，$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[U(X,\ Y\ \omega)\big]>\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[U(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y\ \omega)\big]$。因此，对于状态依赖双变量效用函数$U(x,\ y\ \omega)$，逐状态加性形式结合关于第一个变量的逐状态凹性，并不足以确保U 对（X，Y）表现出双变量风险厌恶。

下面，我们建立一个充分条件：对于一般的状态依赖双变量效用函数 $U(x,\ y\ \omega)$ 以及任意一对风险（X，Y），状态依赖双变量效用函数 U在存在Y的情况下仍保持对X的风险厌恶。

定理 4.1。 对于任意一对风险（X，Y），如果对于每个状态 $\omega \in \Omega$，U（x, y ω）关于其第一个自变量 x 是凹函数，且协方差

$$\mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}(X, U^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X], Y, \omega)) \leq 0$$

若成立，则 U 在 Y 存在时对 X 风险厌恶。

定理 4.1 为状态依赖双变量效用函数 U (x, y ω) 对 (X ,Y) 具有双变量风险厌恶给出了一个充分条件。由于状态依赖双变量效用函数 U (x, y ω) 和风险 (X ,Y) 都定义在共同的状态空间 Ω 上，这一充分条件本质上取决于 U 、X 和 Y 之间的联合函数关系。即使风险 X 和 Y 统计独立，或 U (x, y ω) 满足逐状态相互效用独立，条件 $\mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}(X, U^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X], Y\ \omega)) \leq 0$ 通常也无法拆分为仅取决于 U(x, y ω) 形式的条件，或仅取决于 (X ,Y) 相关结构的条件。

注 4.1。在仅考虑 X 的单风险情形下，Jarrow 和 Li (2021) 推导出了一个类似的充分条件，即 $\mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}(X, U'(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X], \omega)) \leq 0$，使状态依赖的单属性效用函数 U(x ω) 对 X 表现出风险厌恶。此外，他们在资产定价的背景下，对协方差 $\mathrm{Cov}^{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}(X, U'(\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}[X], \omega))$ 的非正性作出了经济解释。他们指出，当资产收益率与消费的边际效用负相关时，该资产会被视为具有风险，因此需要支付风险溢价。这一经济解释可以自然地推广到双变量情形。具体而言，在资产定价框架下，可以类似地理解协方差 $\mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}(X, U^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X], Y\ \omega))$ 的非正性：决策者的效用同时取决于财富 X 和背景风险 Y。关于这一协方差非正性的经济解释，详见 Jarrow 和 Li (2021)。

注4.2. 定理4.1 的结论也自然地与状态无关效用框架相关联。更具体地说，若U是状态无关的，即对于所有 $\omega \in \Omega$，$U(x, y\ \omega) = U(x, y)$，则$U^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X], Y\ \omega) = U^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X], Y)$，因此该定理归结为相应的状态无关情形。

- 当 X 和 Y 统计独立时，可知 X 与 U (1,0)($\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$[X],Y) 也统计独立，这意味着 $\mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}(X, U^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X], Y)) = 0$。因此，根据定理 4.1，我们知道 U(x, y) 关于 x 的凹性意味着在 Y 存在时对 X 的风险厌恶。

  相反，当 X 和 Y 是共单调风险时，$U^{(1,0)}$(x, y) 关于 y 非递增这一条件意味着 X 与 $U^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X], Y)$ 是负相关随机变量，因此 $\mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}(X, U^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X], Y)) \leq 0$ 成立。根据 U(x, y) 满足 (1, 1) 阶风险分摊这一假设，我们知道 U (1,0)(x, y) 关于 y 非递增。因此，由定理 4.1 可知，U(x, y) 关于 x 的凹性与 U(x, y) 满足 (1, 1) 阶风险分摊这一条件共同意味着在 Y 存在时对 X 的风险厌恶。

  上述结果与Finkelshtain 等人（1999年）的定理 1 和定理 2 一致；这两条定理给出了在状态无关效用框架下存在背景风险时，厌恶单一风险的充分必要条件。

- 当 $(X, Y) \in \mathbb{E}_{\mathbb{P}} D_N(X|Y)$，$N \geq 1$，按照命题 3.2的证明并进行简单推导可知，如果 $U(x, y)$关于其第一个自变量 x是凹函数，且满足阶数为 $(1, k)$的风险分摊

k ∈{1,…,N}，则协方差条件 $\mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}(X,\ U^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X\ ],Y\ ))\le 0$成立。因此，当存在 Y 时，U 对 X 表现出风险厌恶。这一结果与 Li 等人（2016）的命题 3.2 一致；该命题在状态无关效用下，给出了对 $(X,Y\ )\in \mathbb{E}_{\mathbb{P}}D_N(X|Y\ )$ 存在风险厌恶的条件。

在下面的例子中，我们将说明定理 4.1 的逆命题并不成立。

例 4.2。令 $\Omega=[0,1]$ 和 $\mathbb{P}$ 为单位区间上的勒贝格测度，即 $\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)=\mathrm{d}\omega$。在此情形下，$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\omega]=1/2$ 和 $\mathbb{P}(\omega\le\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\omega])=\mathbb{P}(\omega>\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\omega])=1/2$。令关于 Ω 的状态依赖双变量效用函数 $U(x,\ y\ \omega)$ 为

$$U(x,y,\omega)=2\varepsilon x^{\lambda}y^{-1/2}\mathbb{I}_{[0,\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\omega]]}(\omega)+2x^{\lambda}y^{-1/2}\mathbb{I}_{(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\omega],1]}(\omega),\tag{8}$$

其中 $0\le\varepsilon<1-1/\sqrt{2}$ 和 $1>\lambda>1/2$。容易注意到，对于每个 $\omega\in\Omega$，$U(x,\ y\ \omega)$ 关于 x 是凹的。

取 $X(\omega)=Y(\omega)=\omega$。为构造一个反例，下面我们首先证明，对于风险 X 和 Y，$U(X,\ Y\ \omega)]\le\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y\ \omega)]$，也就是说，在 Y 存在的情况下，U 对 X 风险厌恶；然后验证，对于风险 X 和 Y，协方差 $\mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}\big(X,\ U^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y\ \omega)\big)>0$。

(i) 证明存在 $\varepsilon\in[0,1-1/\sqrt{2})$，使得 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(X,\ Y\ \omega)]\le\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y\ \omega)]$

将等式 $X(\omega)=Y(\omega)=\omega$以及 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X]=1/2$代入状态依赖双变量效用函数 (8)，然后分别取 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y\ \omega)]$和 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(X,\ Y\ \omega)]$的期望，可得

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[U(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y,\omega)\big]=2^{1-\lambda}\big(\varepsilon\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\omega^{-1/2}\mathbb{I}_{[0,1/2]}(\omega)]+\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\omega^{-1/2}\mathbb{I}_{(1/2,1]}(\omega)]\big)=2^{1-\lambda}\big(\varepsilon\sqrt{2}+2-\sqrt{2}\big)$$

and

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[U(X,Y,\omega)\big]&=2\varepsilon\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\omega^{\lambda-1/2}\mathbb{I}_{[0,1/2]}(\omega)]+2\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\omega^{\lambda-1/2}\mathbb{I}_{(1/2,1]}(\omega)]\\&=\frac{2\varepsilon}{1+\lambda-1/2}2^{-(1+\lambda-1/2)}+\frac{2}{1+\lambda-1/2}(1-2^{-(1+\lambda-1/2)}).\end{aligned}$$

Then

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[U(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y,\omega)\big]-\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[U(X,Y,\omega)\big]=\frac{2^{5/2-\lambda}\lambda}{1+2\lambda}\varepsilon-\frac{2^{2-\lambda}(2^{\lambda}-1+(\sqrt{2}-2)\lambda)}{1+2\lambda}.$$

由于 $\lambda>0$，因此 $\varepsilon>\varepsilon_0(\lambda):=\frac{2^{\lambda}-1+(\sqrt{2}-2)\lambda}{\sqrt{2}\lambda}$意味着 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(X,\ Y\ \omega)]\le\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y\ \omega)]$。

回忆一下，$1/2<\lambda<1$。因此，只需验证对于所有 $1/2<\lambda<1$，$\varepsilon_0(\lambda)\in(0,1-1/\sqrt{2})$。注意，$\varepsilon_0'(\lambda)=\frac{1-2^{\lambda}+2^{\lambda}\lambda\ln 2}{\sqrt{2}\lambda^2}$。记 $f(\lambda):=1-2^{\lambda}+2^{\lambda}\lambda\ln 2$。容易看出，对于所有$1/2<\lambda<1$，$f'(\lambda)=2^{\lambda}\lambda(\ln 2)^2>0$。于是 $f(\lambda)$ 在 $(1/2,1)$ 上严格递增，且对于所有 $1/2<\lambda<1$，$f(\lambda)>f(1/2)=(4-\sqrt{2}+2\sqrt{2}\ln 2)/\sqrt{2}>0$。回忆一下，$\varepsilon_0'(\lambda)=f(\lambda)/\sqrt{2}\lambda^2$。因此，对于所有 $1/2<\lambda<1$，$\varepsilon_0'(\lambda)>0$。那么 $\varepsilon_0(\lambda)$ 在 $(1/2,1)$ 上严格递增，因此对于所有 $1/2<\lambda<1$,

$$0<\frac{3\sqrt{2}-4}{\sqrt{2}}=\varepsilon_0(\frac{1}{2})<\varepsilon_0(\lambda)<\varepsilon_0(1)=1-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

（ii）证明协方差 $\mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}\big(X,\ U^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y\ \omega)\ \big)>0$对于风险 X和 Y，当 $\varepsilon\in[0,1-1/\sqrt{2})$。

根据 SDBUF 的表达式（8），我们知道

$$U^{(1,0)}(x,y,\omega)=2\lambda\varepsilon x^{\lambda-1}y^{-1/2}\mathbb{I}_{[0,1/2]}(\omega)+2\lambda x^{\lambda-1}y^{-1/2}\mathbb{I}_{(1/2,1]}(\omega).$$

将风险 X、Y 和 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X]$ 的表达式代入上述等式，并对等式两边取期望，可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y,\omega)\right] &= 2^{2-\lambda}\lambda\left(\varepsilon\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\omega^{-1/2}\mathbb{I}_{[0,1/2]}(\omega)]+\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\omega^{-1/2}\mathbb{I}_{(1/2,1]}(\omega)]\right)\\ &= 2^{2-\lambda}\lambda\left(\varepsilon\int_0^{1/2}\omega^{-1/2}\mathrm{d}\omega+\int_{1/2}^{1}\omega^{-1/2}\mathrm{d}\omega\right)\\ &= 2^{2-\lambda}\lambda\left(\varepsilon\sqrt{2}+2-\sqrt{2}\right).\end{aligned}$$

此外，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[XU^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y,\omega)\right] &= 2^{2-\lambda}\lambda\left(\varepsilon\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\omega^{1/2}\mathbb{I}_{[0,1/2]}(\omega)]+\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\omega^{1/2}\mathbb{I}_{(1/2,1]}(\omega)]\right)\\ &= 2^{2-\lambda}\lambda\left(\frac{\varepsilon}{3\sqrt{2}}+\frac{4-\sqrt{2}}{6}\right).\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}\left(X,U^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y,\omega)\right) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[XU^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y,\omega)\right]-\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[X\right]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y,\omega)\right]\\ &= 2^{2-\lambda}\lambda\left(-\frac{\varepsilon\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{2}-1}{3}\right)>0\end{aligned}$$

对所有 $\varepsilon\in[0,1-1/\sqrt{2})$ 。

综上所述，我们给出一个反例：状态依赖双变量效用函数 $U(x,y\ \omega)$ 在存在背景风险 Y 时，对 X 是风险厌恶的；并且对于每个 $\omega\in\Omega$，$U(x,y\ \omega)$ 关于其第一个自变量 x 是凹的，但协方差 $\mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}(X,U^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y\ \omega))>0$。

4.2 状态依赖效用 $U(x,y\ \omega)$ 的一致双变量风险厌恶

给定概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$，令 $\mathscr{P}$ 为所有非平凡概率测度的集合，即所有满足以下条件的概率测度 $\mathbb{P}$：存在集合 $A\in\mathscr{F}$，使得 $\mathbb{P}(A)>0$ 且 $\mathbb{P}(A^c)>0$。下文将介绍状态依赖效用函数 $U(x,y\ \omega)$ 存在背景风险时的均匀风险厌恶的定义。

定义 4.2。如果对于一个风险 X，在存在背景风险 Y 的情况下，不等式 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U(X,Y\ \omega)\right]\le\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y\ \omega)\right]$ 对所有 $\mathbb{P}\in\mathscr{P}$ 均成立，则称 SDBUF $U(x,y\ \omega)$ 对该风险具有一致风险厌恶性。

为简化术语，当 SDBUF U 在存在背景风险 Y 的情况下对 X 具有一致风险厌恶性时，也称其对风险 (X ,Y) 具有一致双变量风险厌恶性。对于 U(x, y ω)，一致双变量风险厌恶性的定义比定义 4.1 中引入的双变量风险厌恶性更强。具体而言，它要求对于任意一对风险 (X ,Y)，不等式 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathrm{U(X,Y}\ \omega)\right]\le\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathrm{U}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathrm{X}],\mathrm{Y}\ \omega)\right]$ 对所有非平凡概率测度 $\mathbb{P}\in\mathscr{P}$ 均成立。

定理 3.1 关注的是以下情形：SDBUF U(x, y $\tilde{\omega}$) 与风险 X 和 Y 统计独立，并针对风险 X 和 Y 之间不同形式的相关性，给出了 U(x, y $\tilde{\omega}$) 在 Y 存在时对 X 一致风险厌恶的等价条件。下文将把这一分析扩展至 SDBUF U(x, y ω)，并给出 U(x, y ω) 一致双变量风险厌恶的等价条件。

首先，对于任意一对风险（X，Y）$\in\mathbb{E}_{\mathbb{P}}D_N$（$X|Y$），我们利用效用主导属性的记号，建立了在 Y 存在时 $U(x,\ y\ \omega)$ 对 X 一致风险厌恶的等价条件。

定理 4.2. 设 $U(x, y\ \omega)$ 是一个状态依赖双变量效用函数（*SDBUF*），且对每个 $\omega \in \Omega$，x都是效用主导属性。假设对每个 $\omega \in \Omega$，$U(x, y\ \omega)$ 关于其第一个变量x是凹函数，并满足阶数为$(1, k)$ 的风险分摊，其中$k \in \{1, \ldots, N\}$。那么，对于任意一对风险$(X,Y) \in \mathbb{E}_{\mathbb{P}} D_N(X|Y)$，以下陈述等价：

(E1) $U(x, y\ \omega)$ 在 Y 存在时对 X 一致风险厌恶。
(E2) 对所有 $\mathbb{P} \in \mathscr{P}$，满足$\mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}\left(X, U^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X], Y\ \omega)\right) \leq 0$的协方差条件。

(E3) 双变量效用函数 $U(x, y\ \omega)$ 是状态无关的。

对于任意一对风险$(X, Y) \in \mathbb{E}_{\mathbb{P}} D_N(X|Y)$，定理 4.2不仅建立了定理 4.1的逆命题，还给出了双变量一致风险厌恶与对风险 (X, Y)的状态无关偏好之间的等价关系，从而为具有N阶 PED 的两种风险的状态无关偏好提供了一种新的刻画。

与定理 4.2类似，以下定理给出了在不同相关结构下，$U(x, y\ \omega)$ 在 Y 存在时对 X表现出一致风险厌恶的等价条件：(i) 具有任意相关结构的一对风险 (X, Y)；(ii) 统计独立风险；以及 (iii) 满足 $(X, Y) \in R^{\mathbb{P}}(X|Y)$的风险对。由于证明与定理 4.2的证明类似，故略去。

定理 4.3. 设 $U(x, y\ \omega)$ 是一个状态依赖双变量效用函数，并且对每个 $\omega \in \Omega$，x 都是效用主导属性.

(i) 对任意一对风险(X, Y)，若对每个 $\omega \in \Omega$，$U(x, y\ \omega) = f(x\ \omega) + g(y\ \omega)$，其中 $f(x\ \omega)$ 关于 x 逐状态凹，则可保证命题 *(E1)*、*(E2)* 和 *(E3)* 等价。*(ii)* 对所有统计独立风险 X 和 Y，$U(x, y\ \omega)$ 关于 x 的逐状态凹性可保证命题 *(E1)*、*(E2)* 和 *(E3)* 等价。*(iii)* 对所有满足$(X, Y) \in R^{\mathbb{P}}(X|Y)$的风险对，若对每个 $\omega \in \Omega$，$U(x, y\ \omega)$ 关于其第一个自变量 x 凹，且满足 *(1,1)* 阶风险分摊，则可保证命题 *(E1)*、*(E2)* 和 *(E3)* 等价。

定理 4.3 确立了一致双变量风险厌恶与对统计独立风险 (X,Y) 的状态无关偏好之间的等价关系(X,Y)。此外，该定理将这一等价关系推广到任意风险对 (X,Y)，从而将一致双变量风险厌恶与对具有任意相关结构的风险的状态无关偏好联系起来。因此，该定理为不同相关结构下涉及两种风险的状态无关偏好刻画提供了新的见解。

5 应用

5.1 状态依赖设定下的公平保险合同需求

我们考虑一位决策者，其具有关于˜自然状态空间 Ω定义的状态依赖的单属性效用函数$V(., \tilde{\omega})$，并面临两种潜在的货币损失来源：L，代表建筑损失；以及H，代表建筑物利润损失。假设只有损失L 投保。令 $\alpha \in [0, 1]$

表示决策者选择投保的建筑损失L比例。向决策者提供针对损失L的公平保险合同，保险费为$\alpha\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L]$。决策者的收益为

$$P(\alpha)=w-(1-\alpha)L-\alpha\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L]-H,$$

其中w是决策者的初始财富。如果决策者选择购买全额保险，即$\alpha=1$，其最终收益为$P(1)=w-\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L]-H$。另请注意，$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L]=\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[(1-\alpha)L+\alpha\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L]\big]$。因此，当且仅当对所有$\alpha\in[0,1]$，$\alpha=1$是最优选择。

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\big[V\big(w-(1-\alpha)L-\alpha\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L]-H,\tilde{\omega}\big)\big] &\leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\big[V\big(P(1),\tilde{\omega}\big)\big]=\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\big[V\big(w-\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L]-H,\tilde{\omega}\big)\big]\\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\big[V\big(w-\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(1-\alpha)L-\alpha\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L]]-H,\tilde{\omega}\big)\big].\end{aligned}$$

报告的实证发现 Li 等人(2016年) 表明，建筑物的损失与这些建筑物所产生的利润损失之间呈现一阶PED。根据命题 3.2，令$U(x,\ y\ \tilde{\omega})=V(x+y\ \tilde{\omega})$，即可得到以下关于呈现一阶PED的损失$L$和$H$的结果。值得注意的是，对于呈现其他类型相关结构的损失L和H，也可以得到类似结果。

命题5.1。对于所有损失$(-L\ -H)\in\mathbb{E}_{\mathbb{P}}D_1(-L|-H)$，如果决策者在状态依赖效用下风险厌恶，即其效用函数$V(.,\tilde{\omega})$逐状态凹，那么全额保险（$\alpha=1$）就是最优选择。

根据命题5.1，当决策者的效用具有状态依赖性，且损失L在H上呈现一阶PED时，仅状态层面的风险厌恶就足以促使决策者购买全额保险。

5.2 Opt状态依赖效用下两期模型中的最优预防

在本小节中，我们将状态依赖分析拓展至两期框架下的最优预防。考虑一位生活两个时期的决策者，分别记为时期0和时期1。决策者在时期0具有双属性效用函数$U_0(w,h)$，在时期1具有状态依赖双变量效用函数（SDBUF）$U_1(w,h\ \tilde{\omega})$，其定义在健康状况h和财富水平w上。假设$U_0(w,h)$关于其第一个自变量w非递减，且$U_1(w,h\ \tilde{\omega})$关于财富自变量w在各状态下均非递减。在时期0开始时，决策者知道其初始财富和健康状况，分别记为w_0和h_0,。然而，决策者面临着关于时期1效用、财富和健康状况的不确定性，分别由状态依赖双变量效用函数$U_1(w,h\ \tilde{\omega})$、不确定财富水平W和随机健康变量H表示。具体而言，在时期1，决策者的效用$U_1(w,h\ \tilde{\omega})$相对于自然状态空间$\tilde{\Omega}$具有状态依赖性，而决策者的财富水平在无损失状态下为w_1，在损失状态下则为$w_1+\alpha W\ +(1-\alpha)\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[W]$。这里，$\alpha\in(0,1]$衡量对不确定损失的暴露程度，该损失由负随机变量$W$表示。随机变量$W$和$H$的联合分布由已知的累积分布函数$F^{\mathbb{P}}(w,h)$指定，该函数定义在支撑集$[w,\bar{w}]\times[h,\bar{h}]$上，其中$-w_1<w\ <\bar{w}\ <0$且$0<h\ <\bar{h}$。

决策者可在时期0分配金额e用于预防活动，以影响时期1遭受损失的概率。对于所有$e\in[0,w_0]$,，该概率记为$p(e)\in(0,1)$。假设预防是有效的，即对于所有$e\in[0,w_0]$，都有$p'(e)\leq 0$。为简便起见，将决策者的主观贴现因子标准化为1。因此，决策者的两期预期效用函数可表示为

$$V(e)=U_0(w_0-e,h_0)+p(e)\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\big[U_1\big(w_1+\alpha W+(1-\alpha)\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[W],H,\tilde{\omega}\big)\big]+\big(1-p(e)\big)\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\big[U_1(w_1,H,\tilde{\omega})\big]. \quad (9)$$

假设存在一个内部最优解。决策者的最优预防水平记为e_V，满足一阶条件$V'(e_V)=0$，可表示如下：

$$-p'(e_V)\Big(\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\big[U_1(w_1,H,\tilde{\omega})\big]-\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\big[U_1\big(w_1+\alpha W+(1-\alpha)\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[W],H,\tilde{\omega}\big)\big]\Big)=U_0^{(1,0)}(w_0-e_V,h_0) \tag{10}$$

方程（10）的右侧表示预防的边际成本，即时期0中因支出e_V用于预防活动而产生的边际效用。左侧则是预防的边际收益，其衡量标准是：时期1发生损失状态的概率降低后，期望效用所获得的增益。

在最优预防水平e_V下，决策者使这两种效应达到均衡，确保预防的边际成本等于其边际收益。

作为基准，令 $\tilde{e}_V$ 表示不存在风险暴露时的最优预防水平，即情形 $\alpha=0$。在这种情况下，损失状态中的损失是固定的，等于 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[W]<0$。因此， $\tilde{e}_V$ 由以下方程的唯一解确定：

$$-p'(\tilde{e}_V)\Big(\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\big[U_1(w_1,H,\tilde{\omega})\big]-\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\big[U_1\big(w_1+\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[W],H,\tilde{\omega}\big)\big]\Big)=U_0^{(1,0)}(w_0-\tilde{e}_V,h_0). \tag{11}$$

对（9）中的 $V(e)$关于预防水平e 求一阶导数，然后在$e=\tilde{e}_V$ 处代入，得到

$$\begin{aligned}V'(\tilde{e}_V)&=p'(\tilde{e}_V)\Big(\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\big[U_1\big(w_1+\alpha W+(1-\alpha)\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[W],H,\tilde{\omega}\big)\big]-\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\big[U_1(w_1,H,\tilde{\omega})\big]\Big)-U_0^{(1,0)}(w_0-\tilde{e}_V,h_0)\\&=p'(\tilde{e}_V)\Big(\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\big[U_1\big(w_1+\alpha W+(1-\alpha)\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[W],H,\tilde{\omega}\big)\big]-\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\big[U_1(w_1+\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[W],H,\tilde{\omega})\big]\Big),\end{aligned} \tag{12}$$

其中第二个等式由式（11）可得。由于 $p'(e)\le 0$ 对所有 $e\in[0,w_0]$, 均成立，由式（10）和（12）可知 $e_V\ge\tilde{e}_V$ 对所有 $\alpha\in(0,1]$ 当且仅当不等式成立

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\big[U_1\big(w_1+\alpha W+(1-\alpha)\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[W],H,\tilde{\omega}\big)\big]\le\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\big[U_1(w_1+\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[W],H,\tilde{\omega})\big]$$

对所有 $\alpha\in(0,1]$均成立。注意到 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\alpha W+(1-\alpha)\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[W]\big]=\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[W]$，并利用命题 3.2，我们得到以下命题。

命题5.2。当面临任意一对不确定结果 $(W,H)\in\mathbb{E}_{\mathbb{P}}D_N(W|H)$ 时，如果对于每个状态 $\tilde{\omega}\in\tilde{\Omega}$，决策者的效用 $U_1(w,h,\tilde{\omega})$ 关于 w 是凹的，并且对于 $k\in\{1,\dots,N\}$满足一阶风险分摊 $(1,k)$，那么决策者将最优地在预防活动上投入更多，即对于所有 $\alpha\in(0,1]$，$e_V\ge\tilde{e}_V$。

值得注意的是，对于呈现其他类型相关性结构的W 和H，也可以得到类似的结果。

6 结论

状态依赖效用下的风险厌恶在保险理论、金融经济学和行为经济学等多个经济领域发挥着重要作用。迄今为止，这些领域的大多数研究都是在单属性效用函数框架下进行的，隐含地假设决策者具有一个

单变量目标。这一假设将分析限制在单一风险，或以同一维度表示的多种风险。

本文旨在将讨论扩展至多维情形，探讨在状态依赖效用下存在背景风险时，主要风险的风险厌恶是否得以保持。本文考察了两种情形：(*I*) 两种风险独立于状态依赖双变量效用函数 $U(x,y\ \tilde{\omega})$ 的状态空间；(*II*) 状态依赖双变量效用函数 $U(x,y\ \omega)$ 的状态空间与所考察风险的状态空间一致。我们研究了双风险厌恶、状态依赖双变量效用函数的函数形式，以及这两种风险之间相关程度三者的关系。

在情形 I 中，我们证明，$U(x, y\ \tilde{\omega})$ 呈现双变量风险厌恶的条件会因风险 X 和 Y 之间的相关性不同而有显著差异。具体而言，(i) 对于任意一对风险 (X,Y)，逐状态相互效用独立以及 $U(x, y\ \tilde{\omega})$ 关于第一自变量 x 的凹性，足以保证双变量风险厌恶；(ii) 对于正象限依赖风险 (X,Y)，包括双变量伯努利分布和双变量正态分布，需要第一自变量上的逐状态凹性与 (1,1) 阶风险分摊同时成立；(iii) 对于 N 阶正象限依赖风险 (X,Y)，需要第一自变量上的逐状态凹性与 (1, k) 阶风险分摊同时成立，其中 $k \in \{1,\ldots,N\}$；(iv) 对于统计独立风险，仅要求 $U(x, y\ \tilde{\omega})$ 关于第一自变量的逐状态凹性即可。这些发现揭示了随机向量 (X,Y) 的相关性与状态依赖双变量效用函数 $U(x, y\ \tilde{\omega})$ 的函数形式之间存在对偶性。

基于这一洞见，我们提出了双变量风险厌恶的新定义，称为存在背景风险时的均匀风险厌恶（或一致双变量风险厌恶）。我们进一步验证，在风险 X 和 Y 之间具有相应相关结构的条件下，关于状态依赖双变量效用函数 $U(x, y\ \tilde{\omega})$ 的上述既定条件 (i)-(iv) 与一致双变量风险厌恶等价。所得结果将以下概念结合起来：(a) 状态依赖效用 $U(x, y\ \tilde{\omega})$ 下的一致双变量风险厌恶；(b) Eeckhoudt和Schlesinger（2006）所表述的风险分摊；以及 (c) 效用独立性（Keeney and Raiffa，1976）。因此，关于状态依赖双变量效用函数 $U(x, y\ \tilde{\omega})$ 的既定条件 (i)-(iv) 的经济解释分别得到了阐明。

在情形 II 中，风险 (X，Y) 与效用函数 $U(x, y\ \omega)$ 共享相同的状态空间，此时已证明情形 I 中确立的条件 (i)-(iv) 不再适用。针对这一情形，我们提出了一个充分条件，以保证在存在 Y 的情况下对 X 的风险厌恶得以保持。此外，我们证明，当状态依赖双变量效用函数 $U(x, y\ \omega)$ 具有效用主导属性 x 时，关于 $U(x, y\ \omega)$ 的上述条件 (i)-(iv) 加上协方差条件 $\mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}\left(X, U^{(1,0)}\left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X], Y\ \omega\right)\right) \leq 0$，与风险 X 和 Y 在相应相关性下关于 (X，Y) 的一致双变量风险厌恶等价。这些发现为具有两个相关风险的状态依赖偏好提供了一些新的理论见解，加深了我们对相关性如何影响状态依赖效用下一个风险在另一个风险存在时风险厌恶保持情况的理解。

最后，我们通过两期模型中的公平保险合同和最优预防两个应用，说明了所提出的、适用于状态依赖效用的双变量风险厌恶概念的实用性。在公平保险合同需求方面，研究表明，当决策者同时面临已保险损失和未保险损失，且这些损失满足一阶PED时，仅凭逐状态风险厌恶就足以确保购买全额保险是最优选择。在两期最优预防模型中，研究表明，如果决策者对一对不确定变量（不确定损失和健康风险）具有双变量风险厌恶，那么他/她会最优地将更多资源分配给预防活动。

附录

A 一些证明

A.1 命题证明3.1

如果 $U(x,\ y\ \tilde{\omega})\ =f(x\ \tilde{\omega})\ +g(y\ \tilde{\omega})$，那么

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[U\left(X,Y,\tilde{\omega}\right)\right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[f\left(X,\tilde{\omega}\right)\right]+\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[g\left(Y,\tilde{\omega}\right)\right]\\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}[f\left(X,\tilde{\omega}\right)|\tilde{\mathscr{F}}]\right]+\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[g\left(Y,\tilde{\omega}\right)\right]\\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f\left(X,\tilde{\omega}\right)]\right]+\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[g\left(Y,\tilde{\omega}\right)\right]\\
&\leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[f\left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],\tilde{\omega}\right)\right]+\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[g\left(Y,\tilde{\omega}\right)\right]\\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[U\left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y,\tilde{\omega}\right)\right], \qquad (13)
\end{aligned}$$

其中，第二个等号是由条件期望的塔式法则得出的，第三个等号是由X与 $\tilde{\mathscr{F}}$的统计独立性得出的，而不等式则是由$f(x\ \omega)$的逐状态凹性和詹森不等式得出的。因此，对于任意一对风险（X，Y），在Y存在的情况下，U对X是风险厌恶的。

A.2 命题3.2的证明

我们只验证陈述（ii），因为陈述（i）可以用类似的论证证明。由于$U(x,\ y\ \tilde{\omega})$关于其第一个自变量x逐状态凹，因此对每个状态 $\tilde{\omega}\in\tilde{\Omega}$，有

$$U(X,Y,\tilde{\omega})-U(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y,\tilde{\omega})\leq U^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y,\tilde{\omega})(X-\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X]).$$

对上述不等式两边取期望，可得

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[U(X,Y,\tilde{\omega})\right]-\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[U(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y,\tilde{\omega})\right]\leq\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[U^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y,\tilde{\omega})(X-\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X])\right]. \qquad (14)$$

简单变换可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[U^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y,\tilde{\omega})(X-\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X])\right]\\
&=\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[XU^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y,\tilde{\omega})\right]-\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[X\right]\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}\times\mathbb{P}}\left[U^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y,\tilde{\omega})\right]\\
&=\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[XU^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y,\tilde{\omega})|\tilde{\mathscr{F}}\right]\right]-\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[X\right]\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}\times\mathbb{P}}\left[\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}\times\mathbb{P}}\left[U^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y,\tilde{\omega})|\tilde{\mathscr{F}}\right]\right]\\
&=\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[XU^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y,\tilde{\omega})\right]\right]-\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[X\right]\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}\times\mathbb{P}}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y,\tilde{\omega})\right]\right]\\
&=\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[XU^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y,\tilde{\omega})\right]-\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[X\right]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y,\tilde{\omega})\right]\right]\\
&=\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[\mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}\left(X,U^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y,\tilde{\omega})\right)\right]\\
&=\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\left[\mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}\left(X,U^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y,\tilde{\omega})\right)\right], \qquad (15)
\end{aligned}$$

其中，第二个等号是由条件期望的塔式法则得出的，第三个等号以及最后一个等号则源于X，Y与 $\tilde{\mathscr{F}}$ 的统计独立性。

˜根据 Cuadras （2002年）中的定理1，我们知道，对于每个状态 $\tilde{\omega} \in \Omega$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}\left(X, U^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X], Y, \tilde{\omega})\right) &= \int_{\underline{y}}^{\bar{y}} \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} U^{(1,1)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X], y, \tilde{\omega}) \left(F^{\mathbb{P}}(x,y) - F_X^{\mathbb{P}}(x) F_Y^{\mathbb{P}}(y)\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{\underline{y}}^{\bar{y}} U^{(1,1)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X], y, \tilde{\omega}) \mathbb{E}_{\mathbb{P}} D_1(X|y) F_Y^{\mathbb{P}}(y) \mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{16}$$

˜反复对（16）进行分部积分，可得对于每个 $\tilde{\omega} \in \Omega$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}\left(X, U^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X], Y, \tilde{\omega})\right) &= \sum_{k=2}^{N} (-1)^k U^{(1,k-1)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X], \bar{y}, \tilde{\omega}) \mathbb{E}_{\mathbb{P}} D_k(X|\bar{y}) \\ &\quad + \int_{\underline{y}}^{\bar{y}} (-1)^{1+N} U^{(1,N)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X], y, \tilde{\omega}) \mathbb{E}_{\mathbb{P}} D_N(X|y) \mathrm{d}y, \text{ for } N \geq 1, \end{aligned} \tag{17}$$

1其中 $\sum(.) = 0$。对于 $(X, Y) \in \mathbb{E}_{\mathbb{P}} D_N(X|Y)$，我们知道对于每个 $k \in \{2, \ldots, N\}$, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}} D_k(X|y) \geq 0$，且对于任意 $k=2y \in [y, y]$, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}} D_N(X|y) \geq 0$。此外，对于每个 $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$，由于 $U(x, y\ \tilde{\omega})$ 对 $k \in \{1, \ldots, N\}$ 满足 $(1, k)$ 阶风险分摊，因此 $(-1)^{1+k} U^{(1,k)}(x, y\ \tilde{\omega}) \leq 0$ 对任意 $k = 1, \ldots, N$ 均成立，故由 (17) 可得，对于每个 $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$，$\mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}(X, U(1,0)(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X], Y\ \tilde{\omega})) \leq 0$。结合这一结果与 (14) 和 (15)，可得 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}[U(X, Y\ \tilde{\omega})] - \mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}[U(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X], Y\ \tilde{\omega})] \leq 0$。因此，对于任意风险 $(X, Y) \in \mathbb{E}_{\mathbb{P}} D_N(X|Y)$，$U$ 在 Y 存在时对 X 风险厌恶。

A.3 命题3.3的证明

由于$U(x, y\ \tilde{\omega})$ 关于第一个自变量x逐状态凹，因此对于统计独立风险X和Y，有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[U\left(X, Y, \tilde{\omega}\right)\right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}[U\left(X, Y, \tilde{\omega}\right)|\tilde{\mathscr{F}}]\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U\left(X, Y, \tilde{\omega}\right)]\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U\left(X, Y, \tilde{\omega}\right)|Y]\right]\right] \\ &\leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U\left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X|Y], Y, \tilde{\omega}\right)\right]\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U\left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X], Y, \tilde{\omega}\right)\right]\right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[U\left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X], Y, \tilde{\omega}\right)\right], \end{aligned} \tag{18}$$

其中，首尾两个等式是由条件期望的塔式法则得出的，第二个˜等式源于X，Y与 $\mathscr{F}$的统计独立性，不等式则源于$U(x, y\ \omega)$ 关于x逐状态凹以及詹森不等式，第四个等式则源于X与Y之间的统计独立性。

A.4 推论 3.1的证明

(*i*) 令 $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = p_{ij}$, $i, j = 0, 1$。由于(X, Y)的相关系数非负，因此$p_{00}p_{11} \geq p_{01}p_{10}$,，这进而意味着

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X|Y = 0] = \frac{p_{10}}{p_{00} + p_{10}} \leq \frac{p_{11}}{p_{01} + p_{11}} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X|Y = 1].$$

因此，$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X|Y = y]$关于 y单调不减，因此 $(X, Y) \in R^{\mathbb{P}}(X|Y)$。由命题 3.2(*i*) 可知，$U$在 X 存在时对其风险厌恶，其中 Y。

(ii) 当 (X ,Y) 服从二元正态分布时， $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X|Y] = \ell Y + \eta$，其中 $\ell = \mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}(X,Y)/\mathrm{Var}_{\mathbb{P}}(Y) \geq 0$，该不等式成立是因为 (X ,Y) 的相关系数非负。因此，由命题 3.2(i) 可知，U 在 Y 存在时对 X 风险厌恶。

A.5 定理3.1的证明

(*i*) 充分性直接由一致双变量风险厌恶的定义 3.2 和命题3.3得出。

现在我们证明必要性。取$Y(\omega) = c$对所有 ω均成立，其中$c \in \mathbb{R}$是某个常数。于是对于任意风险X，随机变量X和Y统计独立。由于对于统计独立的风险X和Y，若存在Y，则U对Y存在时的X一致风险厌恶，因此不等式

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[U(X,c,\tilde{\omega})\right] \leq \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\left[U(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],c,\tilde{\omega})\right]$$

~ ~对所有 $\mathbb{P}\times\mathbb{P} \in \mathscr{D}$均成立。令 ω_i，$i = 1$，2 为 Ω 中任意两个点，$\tilde{\omega}_0$ 为 Ω 中任意状态，并且

$$\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}} = \lambda\delta_{\{\omega_1\times\tilde{\omega}_0\}} + (1-\lambda)\delta_{\{\omega_2\times\tilde{\omega}_0\}},$$

其中 $\lambda \in$ 属于 (0,1)， δ_c 是点c处的狄拉克测度。上述不等式意味着，对于任意$X(\omega_i) = x_i$，$i = 1$，2，

$$\lambda U(x_1,c,\tilde{\omega}_0) + (1-\lambda)U(x_2,c,\tilde{\omega}_0) \leq U(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2,c,\tilde{\omega}_0).$$

由于 $\tilde{\omega}_0$是任意的，则状态依赖双变量效用函数 $U(x,y\ \tilde{\omega})$ 关于第一个自变量 x 逐状态凹。

(*ii*) 充分性可直接由一致双变量风险厌恶的定义和命题3.2得出。必要性可通过以下两个步骤反证得出。

(*ii*-1) 假设存在 $1 \leq M \leq N$、 $\tilde{\omega}_0 \in \tilde{\Omega}$和 $(x_0,y_0) \in [x,x]\times[yy]$，使得 $(-1)^{1+M}U^{(1,M)}(x_0,y0,\tilde{\omega}_0) > 0$。我们只考虑 $x < x_0 < x$ 且 $y < y_0 < y$的情形，因为其他情形可用类似方法证明。

于是，存在 $\varepsilon_0 > 0$，使得对于所有 (x, y) $\in [x_0-\varepsilon_0、x_0+\varepsilon_0]\times[y_0-\varepsilon_0、y_0+\varepsilon_0]$，均有 $(-1)^{1+M}U^{(1,M)}$ (x, y $\tilde{\omega}_0$) >0。考虑 Y、Z，其中 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z] = 0$，满足 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}D_k(Z|y) = 0$对 k $= 2$，…，M -1以及

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}D_M(Z|y)\begin{cases} > 0, & y \in [y_0-\varepsilon_0, y_0+\varepsilon_0], \\ = 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{19}$$

那么$(Z,\ Y) \in \mathbb{E}_{\mathbb{P}}D_M(Z|Y)$。由 (2) 可知 $(Z,\ Y) \in \mathbb{E}_{\mathbb{P}}D_N(Z|Y)$这是由于 $M \leq N$.

令 $\hat{}x \in [x_0-\varepsilon_0,\ x_0+\varepsilon_0]$以及 $\Delta > 0$。对于足够小的 Δ，利用 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(\hat{}x+\Delta\cdot Z,\ Y\ \tilde{\omega}_0)]$在 $\hat{}x$ 附近的泰勒展开，可得

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(\hat{x}+\Delta\cdot Z,Y,\tilde{\omega}_0)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(\hat{x},Y,\tilde{\omega}_0)] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[ZU^{(1,0)}(\hat{x},Y,\tilde{\omega}_0)]\Delta + o(\Delta). \tag{20}$$

注意，

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[ZU^{(1,0)}(\hat{x},Y,\tilde{\omega}_0)\right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U^{(1,0)}(\hat{x},Y,\tilde{\omega}_0)\right] + \mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}\left(Z,U^{(1,0)}(\hat{x},Y,\tilde{\omega}_0)\right) \\ &= \mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}\left(Z,U^{(1,0)}(\hat{x},Y,\tilde{\omega}_0)\right) \\ &= \sum_{k=2}^{M}(-1)^k U^{(1,k-1)}(\hat{x},\bar{y},\tilde{\omega}_0)\mathbb{E}_{\mathbb{P}}D_k(Z|\bar{y}) + \int_{\underline{y}}^{\bar{y}}(-1)^{1+M}U^{(1,M)}(\hat{x},y,\tilde{\omega}_0)\mathbb{E}_{\mathbb{P}}D_M(Z|y)\mathrm{d}y, \end{aligned} \tag{21}$$

其中第二个等式成立是因为 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z]=0$，第三个等式则由（17）得出。由于 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}D_k$（$Z|y$）=对于 $k=2$，……，$M-1$ 以及（19）成立，因此由等式（21）可知

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[ZU^{(1,0)}(\hat{x},Y,\tilde{\omega}_0)\right]=\int_{y_0-\varepsilon_0}^{y_0+\varepsilon_0}(-1)^{1+M}U^{(1,M)}(\hat{x},y,\tilde{\omega}_0)\mathbb{E}_{\mathbb{P}}D_M(Z|y)\mathrm{d}y>0,$$

其中，不等式成立是因为假设 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}D_M(Z|y)>0$ 且 $(-1)^{1+M}U^{(1,M)}(\hat{x},y\ \tilde{\omega}_0)>0$ 对于 $y\in[y_0-\varepsilon_0,y_0+\varepsilon_0]$。因此，将上述不等式与式（20）结合可得

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(\hat{x}+\Delta\cdot Z,Y,\tilde{\omega}_0)]>\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(\hat{x},Y,\tilde{\omega}_0)]. \tag{22}$$

定义 $X=\hat{x}+\Delta\cdot Z$。由于（Z，Y）$\in\mathbb{E}_{\mathbb{P}}D_N$（$Z|Y$），因此（$X$，$Y$）$\in\mathbb{E}_{\mathbb{P}}D_N$（$X|Y$）。令 $\tilde{\mathbb{P}}=\delta_{\{\tilde{\omega}_0\}}$，可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[U(X,Y,\tilde{\omega})\right]&=\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U(\hat{x}+\Delta\cdot Z,Y,\tilde{\omega}_0)\right]\\&>\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(\hat{x},Y,\tilde{\omega}_0)]=\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y,\tilde{\omega}_0)]=\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[U(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y,\tilde{\omega})\right],\end{aligned} \tag{23}$$

其中，不等式由式（22）得出，第二个等式成立是因为 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X]=\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\hat{x}+\delta\cdot Z]=\hat{x}$。这与以下假设相矛盾：对于任意一对风险 $(X,Y)\in\mathbb{E}_{\mathbb{P}}D_N(X|Y)$，$U$ 对 X 在 Y 存在时是一致风险厌恶的

(*ii*-2) 假设存在 $\tilde{\omega}_0\in\tilde{\Omega}$ 和 $(x_0,y_0)\in[x,\ x]\times[y,\ y]$，使得 $U^{(2,0)}(x_0,y0,\ \tilde{\omega}_0)\geq 0$。我们仍然只考虑 $x<x_0<x$ 且 $y<y_0<y$ 的情形，因为其他情形可以通过类似的论证加以证明。

于是，存在 $\varepsilon_0>0$，使得对于所有 $(x,\ y)\in[x_0-\varepsilon_0,\ x_0+\varepsilon_0]\times[y_0-\varepsilon_0,\ y_0+\varepsilon_0]$，有 $U^{(2,0)}(x,\ y\ \tilde{\omega}_0)\geq 0$。

考虑在区间 $[y_0-\varepsilon_0,\ y_0+\varepsilon_0]$ 上具有正支撑的随机变量 Y，以及与 Y 统计独立的随机变量 Z，其中 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z]=0$。于是 $(Z,\ Y)\in\mathbb{E}_{\mathbb{P}}D_N(Z|Y)$。

设 $\hat{x}\in[x_0-\varepsilon_0,x_0+\varepsilon_0]$ 和 $\Delta>0$。对于任意充分小的 Δ，利用 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(\hat{x}+\Delta\cdot Z,Y\ \tilde{\omega}_0)]$ 关于 $\hat{x}$ 的泰勒展开，可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(\hat{x}+\Delta\cdot Z,Y,\tilde{\omega}_0)]&=\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(\hat{x},Y,\tilde{\omega}_0)]+\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[ZU^{(1,0)}(\hat{x},Y,\tilde{\omega}_0)]\Delta+\frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U^{(2,0)}(\hat{x},Y,\tilde{\omega}_0)Z^2]}{2}\Delta^2+o(\Delta^2)\\&=\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(\hat{x},Y,\tilde{\omega}_0)]+\frac{1}{2}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U^{(2,0)}(\hat{x},Y,\tilde{\omega}_0)]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z^2]\Delta^2+o(\Delta^2),\end{aligned} \tag{24}$$

其中第二个等号由假设 Y、Z 统计独立且 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z]=0$ 得出。由于对于任意 $(x,\ y)\in[x_0-\varepsilon_0,\ x_0+\varepsilon_0]\times[y_0-\varepsilon_0,\ y_0+\varepsilon_0]$，均有 $U^{(2,0)}(x,\ y\ \tilde{\omega}_0)\geq 0$，随机变量 Y 在区间 $[y_0-\varepsilon_0,\ y_0+\varepsilon_0]$ 上具有正支撑，且 $\hat{x}\in[x_0-\varepsilon_0,\ x_0+\varepsilon_0]$，因此 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U^{(2,0)}(\hat{x},Y\ \tilde{\omega}_0)]\geq 0$。结合此结果与 (24)，可得 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(\hat{x}+\Delta\cdot Z,Y\ \tilde{\omega}_0)]\geq\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(\hat{x},Y\ \tilde{\omega}_0)]$。

定义 $X=\hat{x}+\Delta\cdot Z$。由于 $(Z,Y)\in\mathbb{E}_{\mathbb{P}}D_N(Z|Y)$，因此 $(X,Y)\in\mathbb{E}_{\mathbb{P}}D_N(X|Y)$。与 (ii-1) 中的论证类似，令 $\tilde{\mathbb{P}}=\delta_{\{\tilde{\omega}_0\}}$，我们得到，对于风险对 (X,Y)，不等式 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}[U(X,Y\ \tilde{\omega})]\geq\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}[U(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y\ \tilde{\omega})]$ 成立，这与如下假设矛盾：对于任意满足 $(X,Y)\in\mathbb{E}_{\mathbb{P}}D_N(X|Y)$ 的风险对，U 在 Y 存在时对 X 一致风险厌恶。

(*iii*) 可通过与陈述 (*ii*) 类似的论证证明，因此我们省略证明。

(*iv*) 只需证明必要性。假设对于所有可能的风险对 (X,Y)，U 在 Y 存在时对 X 一致风险厌恶。

设 X 和 Y 是共单调随机变量，则 $(X,Y)\in\mathbb{E}_{\mathbb{P}}D_1(X|Y)$。由 U 在 Y 存在时对 X 一致风险厌恶这一假设及陈述 (ii)，我们知道，对于每个状态 $\tilde{\omega}\in\Omega$ 以及所有 $(x,y)\in[x,x]\times[y,y]$，$U(x,y\ \tilde{\omega})$ 关于其第一个自变量 x 逐状态凹，且 $U^{(1,1)}(x,y\ \tilde{\omega})\leq 0$。

此外，对于每个状态 $\tilde{\omega}\in\tilde{\Omega}$ 以及所有 $(x,\ y)\in[x,\ \bar{x}]\times[y,\ \bar{y}]$，令 $V(x,\ y\ \tilde{\omega})=U(x,-y,\tilde{\omega})$。那么，我们有：

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[V(X,Y,\tilde{\omega})\right]=\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[U(X,-Y,\tilde{\omega})\right]\le\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[U(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],-Y,\tilde{\omega})\right]=\mathbb{E}_{\mathbb{P}\times\tilde{\mathbb{P}}}\left[V(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y,\tilde{\omega})\right],$$

其中，不等式成立是因为 U 对 (X ,−Y) 一致双变量风险厌恶。于是，对于 (X ,Y) ∈ $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$D$_1$(X|Y)，V 在 Y 存在时对 X 一致风险厌恶，因此根据本定理的陈述 (ii)，我们知道，对于每个状态 $\tilde{\omega}\in\tilde{\Omega}$ 以及所有 $(x,\ y)\in[\underline{x},\ \bar{x}]\times[\underline{y},\ \bar{y}]$，V (x, y $\tilde{\omega}$) 关于 x 是凹的，且 V (1,1)(x, y $\tilde{\omega}$) ≤ 0；这等价于 U(x, −y $\tilde{\omega}$) 关于 x 逐状态凹，且 ∂^2U(x, −y, $\tilde{\omega}$) $\partial x\partial y\le 0$。接着，根据 Finkelshtain 等人（1999）的定理 3，对于每个固定的 $\tilde{\omega}\in\tilde{\Omega}$ 以及任意 $x_1,x_2\in[\underline{x},\bar{x}],y_1,y_2\in[\underline{y},\bar{y}]$，

$$U(x_2,y_1,\tilde{\omega})-U(x_1,y_1,\tilde{\omega})=U(x_2,y_2,\tilde{\omega})-U(x_1,y_2,\tilde{\omega}).$$

令上述方程中的 $x_1=0$、$x_2=x$、$y_1=y$ 和 $y_2=0$，并记 f (x $\tilde{\omega}$) =U(x 0,$\tilde{\omega}$) −U(0, 0,$\tilde{\omega}$) 和 g(y $\tilde{\omega}$) = U(0, y $\tilde{\omega}$)，则有 U(x, y $\tilde{\omega}$) =f (x $\tilde{\omega}$) +g(y $\tilde{\omega}$)。由于 U(x, y $\tilde{\omega}$) 关于其第一个自变量 x 是逐状态凹的，因此 f (x $\tilde{\omega}$) 关于 x 也是逐状态凹的。

A.6 定理的证明4.1

根据以下假设：对于每个状态 $\omega\in\Omega$，以及任意 $(x、\ y)\in[\underline{x}、\bar{x}]\times[\underline{y}、\bar{y}]$，$U(x、\ y\ \omega)$ 关于 x 是逐状态凹的，我们知道对于每个状态 $\omega\in\Omega$,

$$U(X,Y,\omega)-U(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y,\omega)\le U^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y,\omega)(X-\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X]).$$

对上述不等式两边取期望，可得

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U(X,Y,\omega)\right]-\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y,\omega)\right]\le\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y,\omega)(X-\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X])\right].\tag{25}$$

由于 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y\ \omega)\right]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[X-\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X]\right]=0$，因此

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y,\omega)(X-\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X])\right]=\mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}\left(X-\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],U^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y,\omega)\right)=\mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}\left(X,U^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y,\omega)\right).$$

将上述等式代入（25），并根据协方差条件 $\mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}\left(X,U^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y\ \omega)\right)\le 0$，可得 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U(X,Y\ \omega)\right]-\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y\ \omega)\right]\le 0$。因此，在 Y 存在时，U 对 X 风险厌恶。

A.7 定理4.2 的证明

“(1) ⇒(2)” 由于对每个 $\omega\in\Omega$，U(x, y ω) 都是凹函数，且对所有 $\mathbb{P}\in\mathscr{P}$，协方差条件 $\mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}\left(X,U^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y\ \omega)\right)\le 0$ 成立，因此对于任意一对风险 (X ,Y) ∈ $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$D$_N$(X |Y)，根据定理 4.1，我们知道不等式

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U(X,Y,\omega)\right]\le\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X],Y,\omega)\right]$$

对所有 $\mathbb{P}\in\mathscr{P}$均成立。因此，根据定义4.2，我们知道，对于任意一对风险$(X,Y)\in\mathbb{E}_{\mathbb{P}}D_N(X|Y)$，$U$在$Y$存在的情况下对$X$是一致风险厌恶的。

“(2) ⇒(3)” 可以通过反证法证明。假设双变量效用函数 $U(x,y\ \omega)$ 依赖于状态，且状态空间为 Ω。根据效用函数的非唯一性，对于每个 $\omega\in\Omega$，效用函数

U可以规范化为 $U(x,y\ \omega)=0$。于是，根据 x是效用主导属性这一假设，我们有 $U(x,y\ \omega)=U(x,y\ \omega)=0$，对于每个 $\omega\in\Omega$以及所有 $y\in[y,y]$。

由于 U(x, y ω) 是具有 Ω 的状态依赖函数，因此存在 $\omega_1\neq\omega_2\in\Omega$，使得对于某些 $x\le x_1\le x$ 和 $y\le y_1\le y$，有 $U(x_1,y1,\omega_1)\neq U(x_1,y1,\omega_2)$。不失一般性，假设 $U(x_1,y1,\omega_1)<U(x_1,y1,\omega_2)$。于是，存在 $\hat{x}\in(x,x_1)$，使得 $U^{(1,0)}(\hat{x},y1,\omega_1)<U(1,0)(\hat{x},y1,\omega_2)$，因为如果对于所有 $x\in(x,x_1)$，都有 $U(1,0)(x,y1,\omega_1)\ge U(1,0)(x,y1,\omega_2)$，那么我们便会从以下内容得出矛盾

$$U(x_1,y_1,\omega_1)=\int_{\underline{x}}^{x_1}U^{(1,0)}(x,y_1,\omega_1)\mathrm{d}x\ge\int_{\underline{x}}^{x_1}U^{(1,0)}(x,y_1,\omega_2)\mathrm{d}x=U(x_1,y_1,\omega_2),$$

其中等式成立是因为x是效用主导属性，因此$U(x,y1,\omega_1)=U(x,y1,\omega_2)=0$。

因此，我们知道存在一个闭球$A(\hat{x}\ \varepsilon)=\{(a,b)|(a-\hat{x})^2+(b-\hat{x})^2\le\varepsilon\}$，使得对于所有$(a,b)\in A(\hat{x}\ \varepsilon)$，

$$U^{(1,0)}(a,y_1,\omega_1)<U^{(1,0)}(b,y_1,\omega_2).\tag{26}$$

记

$$m(A,y_1)=\min_{(a,b)\in A(\hat{x},\varepsilon)}\{U^{(1,0)}(b,y_1,\omega_2)-U^{(1,0)}(a,y_1,\omega_1)\}.$$

令 $\eta>0$为一个常数，使得 $[\hat{x}-\eta,\hat{x}+\eta]\in A(\hat{x}\ \varepsilon)$。对于每个 $\omega\in\Omega$，由于对所有$(x,y)\in[x,x]\times[y,y]$，$U(2,0)(x,y\ \omega)$和$U^{(1,+)}(x,y\ \omega)$均存在，因此$U^{(1,0)}(x,y\ \omega)$在 $[x,x]\times[y,\bar{y}]$上一致连续。因此，存在$\kappa>0$，使得对于任意$(x,y)\in[\hat{x},\hat{x}+\eta]\times[y_1,y_1+\kappa]$，

$$\left|U^{(1,0)}(x,y,\omega_2)-U^{(1,0)}(x,y_1,\omega_2)\right|<m(A,y_1),\tag{27}$$

其中，κ仅取决于$m(A,\ y_1)$的值，并且独立于（x、y）。

考虑概率空间（Ω，$\mathscr{F}$，$\mathbb{P}$），其中 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$，且 $\mathbb{P}$ 是 $\{\omega_1,\omega_2\}$上的均匀分布。取 $X(\omega_1)=\hat{x}-\eta$、$X(\omega_2)=\hat{x}+\eta$、$Y(\omega_1)=y_1$ 以及 $Y(\omega_2)=y_2$，，其中 $y_1<y_2\le y_1+\kappa$。则 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X]=\hat{x}$，并且 $\mathbb{P}((X,\ Y)=(\hat{x}-\eta,\ y_1))=1/2=\mathbb{P}((X,\ Y)=(\hat{x}+\eta,\ y_2))$，使得 $\mathbb{E}[X|Y=y_1]=\hat{x}-\eta<\hat{x}+\eta=\mathbb{E}[X|Y=y_2]$。因此，$(X,\ Y)\in R^{\mathbb{P}}(X|Y)$。由（1）和（2）可知，$(X,\ Y)\in\mathbb{E}_{\mathbb{P}}D_N(X|Y)$。

在上述条件下，我们有

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U\left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X(\omega)],Y(\omega),\omega\right)\right]=\frac{1}{2}U(\hat{x},y_1,\omega_1)+\frac{1}{2}U(\hat{x},y_2,\omega_2)$$

and

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U\left(X(\omega),Y(\omega),\omega\right)\right]=\frac{1}{2}U(\hat{x}-\eta,y_1,\omega_1)+\frac{1}{2}U(\hat{x}+\eta,y_2,\omega_2).$$

Then

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U\left(X(\omega),Y(\omega),\omega\right)\right]-\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U\left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X(\omega)],Y(\omega),\omega\right)\right]\\
&=\frac{1}{2}\left(U(\hat{x}+\eta,y_2,\omega_2)-U(\hat{x},y_2,\omega_2)\right)+\frac{1}{2}\left(U(\hat{x}-\eta,y_1,\omega_1)-U(\hat{x},y_1,\omega_1)\right)\\
&=\frac{1}{2}\eta\left(U^{(1,0)}(\hat{x}_2,y_2,\omega_2)-U^{(1,0)}(\hat{x}_1,y_1,\omega_1)\right)\\
&=\frac{1}{2}\eta\left(U^{(1,0)}(\hat{x}_2,y_1,\omega_2)-U^{(1,0)}(\hat{x}_1,y_1,\omega_1)\right)+\frac{1}{2}\eta\left(U^{(1,0)}(\hat{x}_2,y_2,\omega_2)-U^{(1,0)}(\hat{x}_2,y_1,\omega_2)\right),
\end{aligned}\tag{28}$$

其中 $\hat{x} - \eta \le \hat{x}_1 \le \hat{x} \le \hat{x}_2 \le \hat{x} + \eta$ 满足 $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in A(\hat{x}\ \varepsilon)$。根据不等式 (26) 以及 $m(A, y_1)$ 的定义，我们知道

$$U^{(1,0)}(\hat{x}_2, y_1, \omega_2) - U^{(1,0)}(\hat{x}_1, y_1, \omega_1) \ge m(A, y_1) > 0. \tag{29}$$

由于 $\hat{x} \le \hat{x}_2 \le \hat{x} + \eta$ 和 $y_1 < y_2 \le y_1 + \kappa$，那么由（27）可知

$$\left| U^{(1,0)}(\hat{x}_2, y_2, \omega_2) - U^{(1,0)}(\hat{x}_2, y_1, \omega_2) \right| < m(A, y_1). \tag{30}$$

结合（28）、（29）和（30），可得

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U\left(X(\omega), Y(\omega), \omega\right)\right] - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U\left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X(\omega)], Y(\omega), \omega\right)\right] > 0.$$

因此，对于所考虑的分布 $\mathbb{P}$和风险（X，Y）$\in \mathbb{E}_{\mathbb{P}} D_N$（$X|Y$），状态依赖双变量效用函数 U在存在 Y 时，对 X 并非一致风险厌恶。这就得到了所需的矛盾。

“（3）$\Rightarrow$（1）”如果双变量 效用函数 U是状态无关的，那么对于所有 $\omega \in \Omega$，$U(x,\ y\ \omega) = U(x,\ y)$。因此

$$\mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}\left(X, U^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X], Y, \omega)\right) = \mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}\left(X, U^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X], Y)\right).$$

对于所有 $\mathbb{P} \in \mathscr{P}$以及任意一对风险 $(X, Y) \in \mathbb{E}_{\mathbb{P}} D_N(X|Y)$，根据以下条件：对于每个 $\omega \in \Omega$，$U(x, y\ \omega)$ 关于 x 是凹的，并满足阶数为 $(1, k)$ 的风险分摊，其中 $k \in \{1, \ldots, N\}$；再结合与（17）类似的论证，可得

$$\mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}\left(X, U^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X], Y, \omega)\right) = \mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}\left(X, U^{(1,0)}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X], Y)\right) \le 0.$$

致谢

作者感谢国家自然科学基金委员会（项目编号：72271113）和江西省自然科学基金（项目编号：20232ACB201003、20232BAB201022）的支撑。所有作者共同享有第一作者署名。

声明

数据可用性 由于本研究未创建或分析任何新数据，因此本文不适用数据共享。

利益冲突 作者声明不存在任何利益冲突或竞争性利益。
伦理审批不适用。**知情同意** 不适
用。

参考文献

Abbas, A. E., Howard, R. A., 2005年。属性优势效用。《决策分析》2，185–206。

Arrow, K. J., 1971年。《风险承担理论论文集》。Markham出版公司，芝加哥。

Baillon, A., Bleichrodt, H., 2015年. 通过测量收益与损失的概率检验模糊性模型。《美国经济学杂志：微观经济学》7, 77–100。

Basak, S., 2000年. 一种具有异质信念和外生风险的动态均衡资产定价模型。《经济动态与控制杂志》24, 63–95。Basak, S., Makarov, D., 2014年. 资金管理中的战略资产配置。《金融学杂志》69 (1), 179–217。Chau, H., Cosso, A., Fontana, C., Mostovyi, O., 2017. 在不存在有界风险下无界利润的条件下，兼顾中间消费的最优投资。《应用概率杂志》54, 710–719。Chiu, W. H., 1996年. 秩依赖期望效用理论中的状态依赖偏好与风险厌恶。《日内瓦风险与保险理论论文集》21, 159–177。Cook, P.J., Graham, D. A., 1977年. 保险与保障需求：不可替代商品的情形。《经济学季刊》91, 143–156。Cuadras, C. M., 2002年. 关于函数之间的协方差。《多元分析杂志》81, 19–27。Denuit, M. M., Eeckhoudt, L., Menegatti, M., 2011年. 相关风险、双变量效用与最优选择。《经济理论》46, 39–54。Denuit, M. M., Mesfioui, M., 2017. 在背景风险下保持 Rothschild-Stiglitz 型风险增加：一种刻画。《保险：数学与经济学》72, 1–5。Diamond, P. A., Stiglitz, J. E., 1974年. 风险增加与风险厌恶增加。《经济理论杂志》8, 337–360。Eeckhoudt, L., Rey, B., Schlesinger, H., 2007. 多元风险承担的好兆头。《管理科学》53, 117–124。Eeckhoudt, L., Schlesinger, H., 2006年. 将风险置于恰当的位置。《美国经济评论》96, 280–289。Finkelshtain, I., Kella, O., Scarsini, M., 1999年. 关于对两种风险的风险厌恶。《数理经济学杂志》31, 239–250。Franke, G., Schlesinger, H., Stapleton, R. C., 2006年. 乘法型背景风险。《管理科学》52, 146–153。Franke, G., Schlesinger, H., Stapleton, R. C., 2011年. 承担加法型和乘法型背景风险。《经济理论杂志》146, 1547–1568。Guo, X., Li, J., Liu, D., Wang, J., 2016年. 在背景风险下保持 Rothschild-Stiglitz 型风险增加。《保险：数学与经济学》70, 144–149。Hill, B., 2019年. 状态依赖效用的非贝叶斯理论。Econometrica 87, 1341–1366。Howard, R. A., 1980年. 关于生死决策。R. A. Howard, J. E. Matheson, 编。《决策分析原理与应用》，第 II 卷。Strategic Decisions Group, 加利福尼亚州门洛帕克。Hugonnier, J., 2012年. 理性资产定价泡沫与投资组合约束。《经济理论杂志》147, 2260–2302。

Ingersoll, J., 1987.《金融决策理论》。Rowman & Littlefield，马里兰州。Jarrow, R., 2017. 关于无摩擦且不完备的随机资产中竞争均衡的存在性。《数学与金融经济学》11，455–477。Jarrow, R., Li, S., 2021. 凹性、随机效用与风险厌恶。金融与随机性 25，311–330。Jokung, O., 2011. 通过二元随机占优进行风险分摊。《数理经济学杂志》47，448–452。Karni, E., 1983. 状态依赖效用函数的风险厌恶：度量与应用。国际经济评论 24，637–647。Karni, E., Schmeidler, D., Vind, K., 1983. 关于状态依赖偏好与主观概率。Econometrica 51，1021–1031。Keeney, R. L., Raiffa, H., 1976. 多重目标决策：偏好与价值权衡。Wiley，纽约。Kelsey, D., 1992. 状态依赖效用下的风险与风险厌恶。《理论与决策》33，71–82。Kelsey, D., Nordquist, G. L., 1991. 效用具有状态依赖性时更一般的风险厌恶度量。牛津经济论文集 43，59–74。Li, J., 2011. 背景风险存在时对风险资产的需求。《经济理论杂志》146，372–391。Li, J., Liu, D., Wang, J., 2016. 两种风险下的风险厌恶：理论扩展。《数理经济学杂志》63，100–105。Lu, J., 2019. 贝叶斯识别：状态依赖效用理论。《美国经济评论》109，3192–3228。Mostovyi, O., 2017. 存在中间消费与随机禀赋时的最优投资。《数学金融》27，96–114。Nau, R., 2003. 将Pratt-Arrow度量推广至非期望效用偏好以及不可分离的概率与效用。《管理科学》49，1089–1104。Pratt, J. W., 1964. 小风险与大风险下的风险厌恶。Econometrica 32，122–136。Pratt, J. W., 1988. 存在其他风险时对单一风险的厌恶。《风险与不确定性杂志》1，395–413。Ross, S., 1981. 小风险与大风险下若干更强的风险厌恶度量及其应用。Econometrica 49，621–638。Tsakas, E., 2025. 通过代理变量进行信念识别。经济研究评论（即将刊出），https://doi.org/10.1093/restud/rdaf025。

Tsetlin, I., Winkler, R. L., 2005. 风险选择与相关背景风险。《管理科学》51，1336–1345。Žitkovi´c, G., 2005. 随机时钟与无界随机禀赋下的效用最大化。《应用概率年刊》15，748–777。Wong, K. P., 2021. 两种风险下的比较风险厌恶。《数理经济学杂志》97，102536。Wright, R., 1987. 随机变量的期望依赖及其在投资组合理论中的应用。《理论与决策》22，111–124。Xie, J. H., Zhou, Z. Y., 2022. 多属性效用函数的拼接构造。《决策分析》19（2），141–169。Yaari, M., 1969. 关于风险厌恶度量及其用途的一些评论。《经济理论杂志》1，315–329。Zhu, W. H., Li, L. J., Yang, J. P., Xie, J. H., Sun, L. L., 2023. 尾部依赖下风险价值的渐近次可加性/超可加性。《数学金融》33，1314–1369。