arXiv:2611.28898v1 [physics.plasm-ph] 21 Nov 2026

无碰撞Vlasov-Poisson等离子体时间渐近态中多个BGK型结构的形成

Hugo A. Carril, * Jorge A. Gidi, † Roberto E. Navarro, ‡ 和 Jaime A. Araneda§*Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Concepción, Concepción Chile*

无碰撞麦克斯韦分布等离子体中有限振幅扰动的时间渐近态，通常被描述为两个非线性叠加、反向传播的 Bernstein-Greene-Kruskal（BGK）模所形成的稳态。通过高分辨率 Vlasov-Poisson模拟，我们表明，等离子体会自洽地演化为一种时间渐近态，其中多个涡旋状结构逐渐填充相空间并减弱丝化。这一过程无需外部驱动，也不需要存在高能等离子体组分。这一发现表明，等离子体的时间渐近态更类似于多个与近乎恒定相速度波相关联的类 BGK 模的非线性叠加。电场和空间平均粒子分布函数呈现幂律宽频谱，这与位置空间和速度空间中向更小尺度发展的能量级联相一致。

引言

无碰撞等离子体中的有限振幅空间扰动或外部驱动，可能导致无阻尼、孤立的非线性状态，在这些状态下，共振粒子会被俘获于势阱中。这表现为粒子相空间中的局域涡旋或空穴，并且可以持续很长时间 [1–5]。尤其是在朗缪尔波的非线性朗道阻尼过程中，会出现这种情况：无磁化电子等离子体上的初始静电扰动会使系统进入饱和状态，此时电子被俘获在扰动波模相速度附近的静电势中 [1, 6–8]。类似现象也见于观测研究，例如近地环境中电子沿磁力线被俘获 [9–15]；见于针对朗道阻尼和粒子俘获的实验研究 [16–18]；见于向低密度β 等离子体柱中注入电子束 [19]；也见于对具有麦克斯韦分布 [1, 20–22]和非麦克斯韦分布函数的无碰撞电子等离子体进行的模拟 [3, 4, 23, 24]。

静电等离子体中的相空间涡旋是一维 Vlasov-Poisson 方程组的精确解，称为 Bernstein-Greene-Kruskal（BGK）态 [25–28]。BGK 态要保持稳定，俘获粒子的分布函数就不能单调递减 [29], ，而支持粒子俘获的背景分布必须少于三个极大值 [30]。这些条件使具有单峰分布的等离子体（例如麦克斯韦分布）中的稳定相空间空穴能够长时间传播 [30]。

一维BGK结构的长期稳定性会受到位置和速度网格有限分辨率所导致的数值扩散效应影响，从而改变Vlasov-Poisson模拟中观测到的相空间结构 [31–33]。此外，多个一维相空间空穴对侧带的增长不稳定；当扰动的波长小于空间区域的长度时，侧带会通过合并空穴而破坏该状态-带，而当扰动的波长小于空间区域的长度时，侧带会通过合并空穴扰乱该状态 [34–36]。事实上，已有研究观察到，在长期Vlasov-Poisson模拟中，多个相邻的BGK结构会演化为由单个稳定空穴组成的时间渐近态 [37]。

分布函数中多个粒子俘获区域的形成，可以近似表示为各个 BGK 模态的非线性叠加：静电势线性叠加，而分布函数则以分段方式构建 [38, 39]。Vlasov模拟 [35, 40–42] 和理论研究 [2, 7, 43, 44]均支持这一近似。然而，这种非线性叠加无法捕捉分布函数中形成的所有结构 [40, 41]。

本研究探讨了一个关于非线性朗道阻尼问题长期演化的长期学术疑问。迄今为止，已有两种已知范式用于描述经历非线性朗道阻尼的一维麦克斯韦电子等离子体的时间渐近态。其中一种认为，时间渐近态对应于两个独立的反向传播的BGK态的非线性叠加 [1]。在这种情况下，朗道阻尼停止后，相空间会形成稳定的涡旋结构 [20]，，而空间平均分布函数则会在BGK态的相速度附近、对应的速度处呈现出具有特征性的平台 [1, 3, 32, 35]。第二种范式认为，时间渐近态类似于多个BGK态的非线性叠加 [2, 43]。

我们的结果表明，无碰撞Vlasov-Poisson等离子体时间渐近态的物理图景远比仅存在两个稳定BGK模态的传统观点丰富，因此更接近多种类BGK态的理论框架 [2]。事实上，研究表明，在低于Langmuir相速度的广大速度范围内，会出现多个小型相空间空穴$|v| < v_L$。每个空穴都与电子等离子体

波（电子等离子体波）相关，其相速度与相应空穴的传播速度相近。电场达到一种具有幂律能谱的时间渐近态，表明存在能量级联过程。此外，空间平均的分布函数呈现分段幂律速度谱，显示出相空间丝状结构的减少，说明小尺度电子空穴的发展具有自相似性和间歇性。

Vlasov–Poisson 数值模拟

本文基于一维 Vlasov-Poisson 系统方程，研究无碰撞、无磁化等离子体中高频振荡的传播：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{e}{m}\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v} = 0\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 4\pi e\left(\int_{-\infty}^{\infty} dv\, f - n_0\right)\,, \tag{2}$$

其中，$f = f(x,\ v,\ t)$ 为电子相空间分布函数；$\phi = \phi(x,\ t)$ 为静电势；$-e$、m 和 n_0 分别为电子的电荷、质量和密度。离子被视为密度为 $n_i = n_0$ 的静止中和背景，并假设在 x 上满足周期性边界条件。

为求解方程（1）和（2，我们使用 Julia 编程语言编写了 FFT 伪谱代码 [45]。采用半拉格朗日分裂格式 [46], ，并在经过傅里叶变换的相空间中进行谱插值。时间推进采用优化的二阶辛积分器 [47]。谱插值会引入一种指数误差，该误差随节点数 [48, 49], 的增加而减小；因此，与例如多项式样条插值相比，在节点数相同的情况下可获得更小的误差。采用形式为 $e^{-36(\nu/\nu_{\max})^{36}}$ [50] 的类高斯滤波器，以平滑速度分布函数在小速度尺度上的突变，其中 ν 是 v 的共轭变量，而 $\nu_{\max}$ 是 ν 的最大允许值。尽管此处未展示，Vlasov 代码已在多个问题上成功通过测试，例如 Manfredi [1],、Raghunathan 和 Ganesh [3], Rupp等 [20], 、Galeotti 和 Califano [32], 以及 Califano 等[33],研究的问题。

初始为单模扰动的电子相空间分布为

$$f(x, v, 0) = f_0(v)\left[1 + \varepsilon\cos(k_1 x)\right]\,, \tag{3}$$

其中，ε 和 k_1 分别是扰动的振幅和波数，$f_0(v)$是未扰动的麦克斯韦分布函数，

$$f_0(v) = \frac{n_0}{\sqrt{2\pi}v_{\rm th}}\exp\left(-\frac{v^2}{2v_{\rm th}^2}\right)\,, \tag{4}$$

其中，$v_{\rm th} = \sqrt{k_B T/m}$是电子热速度，$k_B$是玻尔兹曼常数，$T$是电子温度。

模拟采用盒长 L =$2\pi/k_1$和速度域 $|v|/v_{\rm th} < 7.7$；相空间在空间和速度分量上分别离散为 $N_x = 2^{11} = 2048$ 和 $N_v = 2^{17} = 131072$个网格点；时间步长为 $\omega_p\,\Delta t = 0.05$，最长模拟时间为 $\omega_p t_{\max} = 14000$，其中$\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n_0/m}$ 为电子等离子体频率；扰动参数为 $\varepsilon = 0.04$ 和 $k_1 v_{\rm th}/\omega_p$ =0。4。改变速度网格分辨率 $2^{11} \le N_v \le 2^{17}$ 对相空间空穴形成的影响将在后续章节中展示。

非线性朗道阻尼

图 1（a）显示了长时间模拟中静电势的第一个傅里叶模随时间的演化。最初，激发了两个反向传播的朗缪尔波，其频率为 $\omega_L/\omega_p \simeq \pm 1.285$ ，相速度为 $|v_L/v_{\rm th}| \simeq 3.213$。能量以阻尼率 $\gamma_L/\omega_p \simeq -0.06608$ 单调下降，这与线性朗道理论一致，直到时间 $\omega_p t < 30$。随后，朗道阻尼在$\omega_p t_1 \simeq 50$ 时停止，受扰模的振幅不断增长，直到时间 $\omega_p t_2 \simeq 125$达到饱和。在$t > t_2$ 之后直至模拟结束，静电势围绕有限振幅 $e\phi^*/k_B T \simeq 0.01$不规则振荡，这表明等离子体已经达到时间渐近态 [2, 6]。

饱和后经过若干个时间步，观察到电子俘获现象 $t_{\rm trap} > t_2$。事实上，图 1(b–e) 显示，中心位于 $v = v_L$ 的涡旋逐渐形成，并在 $\omega_p t_{\rm trap} = 150$完全闭合。由于分布函数具有对称性，在 $v = -v_L$处也形成了另一个涡旋。这些结构（下文称为朗缪尔涡旋）对应于电子相空间密度中高度局域化的亏损或空穴，它们因与自洽电场势的共振相互作用而发生旋转 [5]。

在涡旋内部，由于俘获区中心的静电势近似呈抛物线形，形成了向内盘旋的螺旋臂。这使俘获电子具有近乎恒定的弹跳频率 [51–54], ，靠近中心的电子因而趋于表现出相干运动。再结合具有不同速度的粒子运动，便形成了一个聚束电子区域，并在静电势中引入短波长涨落。靠近俘获区边界时，电子的弹跳频率随其位置而变化，运动的相干性也较弱 [53]。这些结构代表了发生朗缪尔波共振的强俘获电子。

图1(b–g) 中观察到的动力学也与聚束不稳定性的发展相一致

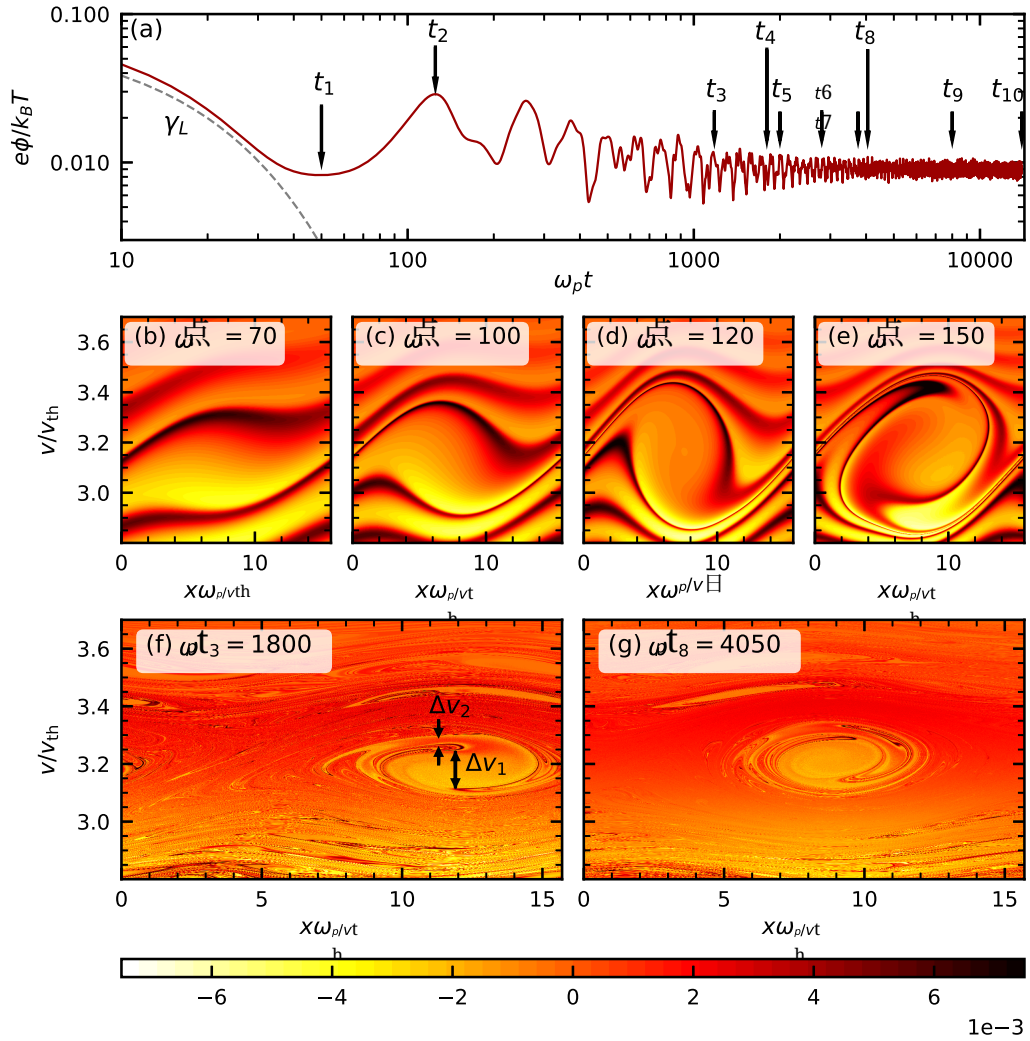

图1. (a) 静电势第一傅里叶模包络的对数—对数时间演化。灰色虚线表示线性朗道阻尼的预测。图中标出了若干值得关注的时刻。(b–e) 在 $v = v_L$ 附近、 $t = t_2$前后朗缪尔电子空穴形成期间的电子相空间快照，以及(f–g) 准稳态 $t \geq t_3$期间的快照。色标表示分布函数相对于未受扰麦克斯韦分布 f_0的涨落 δf （单位为 $n_0/v_{\rm th}$）。

Hara 等人*et al.* [52]所展示的结果一致。不稳定性饱和后，丝化使粒子在空穴内扩散。该过程在模拟过程中重复发生数次，并从 $\omega_p t \simeq 1300$起变为准稳态。图 1(f–g) 显示，朗缪尔涡旋和螺旋臂一直持续到模拟结束。

在表现出不稳定性的电子束-等离子体构型中、与俘获波相互作用的电子束中 [55–58],以及外部啁啾驱动所产生的粒子俘获中，也观察到了类似结构，它们被称为鲨鱼状俘获区域结构 [4, 21]。对俘获势中束电子轨迹的研究表明，粒子可分为均匀分布、具有混沌轨迹的粒子海洋，以及成群聚集、相干振荡的电子，其轨迹稳定地围绕这些结构运动 [57, 59, 60] [61]。

小尺度相空间涡旋的形成

图 2（a）显示了经过低频滤波的静电势 $\phi = \phi(x, t)$ $|\omega/\omega_p| < 0.6$。相同振幅和相速度、沿相反方向传播的朗缪尔波叠加后形成驻波，并在 $x = L/2$处产生正电势，且振幅在 $\omega_p t > 1000$ 之后有所增强，似乎一直持续到模拟结束。随后，在 $\omega_p t_3 = 1180$之后，两对孤立的局域静电波开始以以下速度传播

$|v_1/v_{\rm th}| \simeq 0.06$ 和 $|v_2/v_{\rm th}| \simeq 0.014$。在 $t > t_5$之后，各种模态开始增长，并以不同但恒定的相速度传播。

图 2(b) 显示，在 $t = t_3$ 处形成了一个完全闭合、中心位于 $x = L/2$ 和 $v = 0$处的涡旋，这符合速度空间中的对称性以及反向传播波的拍频所预期的结果。随后，速度分布在 $\pm v_1$ 和 $\pm v_2$ 附近丝状结构中的扰动，在 $\omega_p t_4 = 1800$处演变为完全闭合的涡旋，如图 2(c) 所示。位置平均分布函数$\delta f = \langle f \rangle_x - f_0$以白线形式显示在图 2(b–g) 中。特别是在 $t = t_4$ 处，该量偏离了在 $t = t_3$ 处观察到的规则振荡，尤其是在$v = 0$、 v_1以及 v_2处。这表明这些位置发生了俘获，而且这些涡旋也可以归类为 BGK型结构 [20, 59, 62]。

注意，图2(c) 中涡旋的速度近似等于 $|v_1| \simeq \Delta v_1/2$ 和 $|v_2| \simeq \Delta v_2/2$，其中 $\Delta v_1/v_{\rm th} \simeq 0.12$ 和 $\Delta v_2/v_{\rm th} \simeq 0.03$ 分别是图1(f) 所示朗缪尔涡旋内部旋转的螺旋臂之间的速度差。虽然此处未展示，但据我们检查，这种模式在扰动幅度 ε取不同值时也会出现。这表明，速度为 v_1 和 v_2 的涡旋源于朗缪尔空穴内部螺旋臂之间的非线性耦合。

在 $\omega_p t_6 = 2800$和 $\omega_p t_7 = 3750$之间的时刻，图 2(d–e) 显示，不同尺度的涡旋开始充满电子相空间。这与静电等离子体中相空间湍流的描述 [63–66]相似。在更晚的时刻 $t > t_7$，图2(f–g) 显示，一些涡旋已经消失，可能是与其他空穴聚并所致。在模拟运行结束时， $v = 0$ 处的空穴仍然存在，而 v_1 和 v_2 处的空穴看起来与其余空穴没有区别。

电子密度 ω-k 谱

图3（左）展示了截至 $\omega_p t = 3750$ 的多个时刻的完整相空间电子密度快照。除了此前在图 1 和 2 中讨论过的涡旋外，在$v = \pm 1.07 v_{\rm th} \simeq \pm v_L/3$ 和 $v = \pm 1.61 v_{\rm th} \simeq \pm v_L/2$ 处还可见另一对反向传播空穴，如图 3（e）在 $\omega_p t_5 = 2000$ 所示。在t_5 与 t_6之间的时刻，分布函数中不同尺度的涡旋和局域扰动出现在范围 $0.2 \le |v/v_{\rm th}| \le 2.1$内的若干特定速度处，其中一些满足 $|v| \simeq v_L/n$ ，且 $2 \le n \le 9$。随后，在 $\omega_p t > 2800$ 时，图 2（g）和（i）显示，局域扰动最终演化为小尺度空穴，出现在高于热速度的速度处，并最终充满整个相空间。虽然此处未展示，但这些涡旋中的大多数最终会因聚并而消散或被数值耗散。不过，在模拟运行结束时 $\omega_p t = 14000$，我们仍能观察到散布于相空间中的小尺度涡旋，这与图 2（g）所述情况相同。

图3（右）展示了与图 ω-k 中相同时间的电子密度谱快照。时间傅里叶谱采用移动窗口计算，因此 $t_i - 600/\omega_p < t < t_i$。在 $t = t_3$ 时，频率为 $\omega = 0$ 、谱介于 $0 < v_{\rm th} k/\omega_p < 4$ 之间的信号见图 3（b），这与驻波的形成以及前文所述相空间中静止空穴的形成相一致。随后，图 3（d）显示，在时刻 $t = t_4$ 激发了两支电子等离子体波。它们的相速度 $|v/v_{\rm th}| \simeq 0.015$ 和 $|v/v_{\rm th}| \simeq 0.06$ 大致等于图 v_1 和 v_2 中 $v = 0$ 附近出现的四个相空间涡旋的速度，见图 2（b）。

在 $t = t_5$时，图3(f) 显示了相速度为 $|v/v_{\rm th}| \simeq 1.07 \simeq v_L/3$和$|v/v_{\rm th}| \simeq 1.59 \simeq v_L/2$的电子等离子体波模的激发，这与图3(e) 所示的空穴一致。在更长时间后，图3(h) 显示，密度谱中出现了若干离散的电子等离子体波分支，其相速度从$v/v_{\rm th} \simeq 1$ 延伸至 $v = 0$。这与相空间中若干空穴的速度 $0.23 \le |v/v_{\rm th}| \le 1.2$ 以及图3(g) 面板中所示其他结构的速度 $1.2 \le |v/v_{\rm th}| \le 2.8$ 相对应。在 $t = t_7$时，图 3(j) 中的密度谱包含大量电子等离子体波分支，类似于静电波自发热涨落的谱 [67]。

准稳态

图 4（a）展示了三个不同时间的电场能量谱快照，它们均呈现出幂律波数谱 $|E_k|^2 \propto k^{\alpha}$。图 4（b）展示了 α 指数的演化。该指数在 $-6 < \alpha < -3$ 相空间被小尺度电子空穴填充的时间段内变化$400 \lesssim \omega_p t \lesssim 3000$。特别是，在中心空穴形成时，在 $\alpha_{\rm peak} \simeq -4$ 附近出现了峰值$\omega_p t \sim 1200$。随后， α 在 $|v| \le v_L$范围内进一步形成结构时会降低。在 $\omega_p t \sim 4000$，α 进入准稳态，达到平均值 $\alpha_{\rm asymp} = -4.8074$。在该状态下，相空间主要由小尺度电子空穴填充。这种幂律谱的发展表明，电场涨落呈现自相似性，即不同尺度上的涨落仅相差一个缩放因子。该过程涉及电场相邻模态之间的非线性相互作用。尽管此处未展示，电场自相关同样呈现幂律波数谱，表明存在能量级联过程。由于

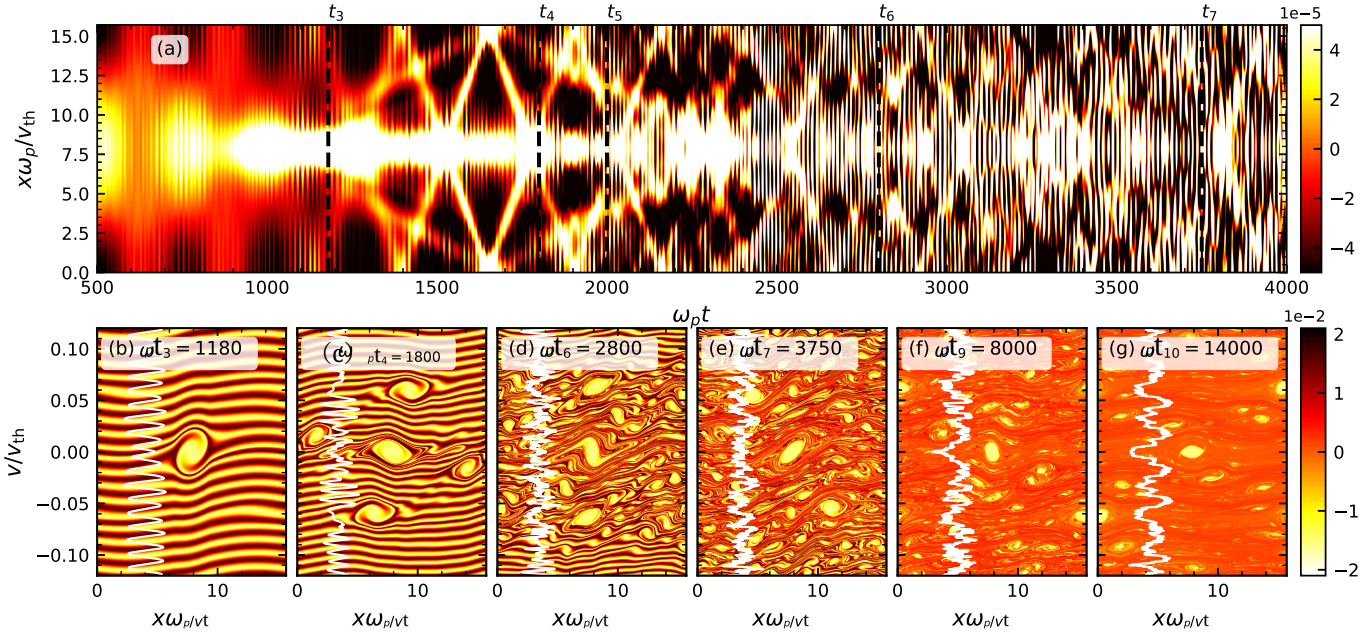

图 2。（a）经低频 $|\omega/\omega_p| < 0.6$ 滤波的静电势 $\phi = \phi(x,\ t)$。（b–g）速度接近 $v = 0$ 且满足 $0 < x < L$ 时，电子相空间分布的涨落 $\delta f = \langle f - f_0$，单位为 $n_0/v_{\rm th}$。实白线表示分布函数的空间平均涨落 $\delta f(v) = \int dx \delta f(x,\ v)$。

高斯定律，电荷密度也呈现幂律谱，因此空间电子密度涨落同样表现出自相似性。

图 5 展示了空间平均相空间分布涨落的速度谱快照 $\delta f = \langle f \rangle_x - f_0$。在 $\nu = \nu_0$处可见一个尖锐峰值，它对应于分布函数丝化的速度尺度，如图5（a–c）所示。由于ν_0 随时间推移而增大，丝化在速度空间中逐渐演变至更小的尺度。此外，ν_0 中的峰值幅度随时间减小，这意味着丝化正在耗散。

在 $\omega_p t = 3750$之后，图5（d–f）显示，谱峰振幅减小，并变得与其他涨落相当，这意味着在相空间分布函数中，丝化现象已无法与其他涨落区分开来。随后，$|\delta f_\nu|^2$ <style id='11}>形成了分段幂律谱，并在 $\nu = \nu_0$ 处出现断点，将近乎平坦的谱$|\delta f_\nu|^2 \propto \nu^{-\alpha}$（其 $\alpha \approx 0$ 为 $\nu < \nu_0$）与在更小尺度下 $|\delta f_\nu|^2 \propto \nu^{-\beta}$ 为 $\beta > \alpha$ 的更陡谱$\nu > \nu_0$分隔开来。在此阶段，分布函数中充满了小尺度电子空穴，这表明丝化所包含的能量转移到了小尺度电子空穴的发展过程中。

这一发现补充了通常用于解释丝化的物理图景；在这种图景中，该过程被描述为持续发展至无界的小尺度[68–72]。也就是说，丝化向小尺度演化，但小尺度涡旋会在整个分布中形成，从而自洽地抑制这一演化。如果涨落不是通过丝化传输的，小尺度空穴或许就无法形成。因此，采用激进速度滤波器 [68, 69, 72]的积分方案会因在模拟早期消除丝化过程，而掩盖本文所展示的部分物理现象。

图6(a)绘出了 ν_0的时间演化。在 $\omega_p t$ <3750之前，丝化的速度尺度 ν_0 随时间以近乎恒定的速率 $\nu_0 \approx 0.4\omega_p t/v_{\rm th}$增长。随后，在 $\omega_p t = 3750$处，丝化变得无法与其他涨落区分开来。此时，ν_0 可被确定为 $|\delta f_\nu|^2$速度谱中的断点。可以看出，ν_0 单调减小，并在 $\omega_p t > 3750$时渐近趋近于 $\nu_0 v_{th} \simeq 300$ 。图6(b)显示了 $\nu < \nu_0$时速度谱的幂律指数 α 和β 的演化，以及 $\nu > \nu_0$时的$|\delta f_\nu|^2 \propto \nu^{-\beta}$ 。在所有时刻，$\alpha \approx 0$ ，这意味着在 $\nu < \nu_0$的速度尺度上，每个模态中储存的动能几乎相等。另一方面，β 在 $3750 < \omega_p t < 6000$之间快速减小，随后在 $\beta \simeq 1$附近达到准稳态。

图 3–6 的结果表明，相空间分布会变得自相似，也就是说，分布中形成的小尺度电子空穴在空间域和速度域都遵循标度律。随着时间推移，速度域中的大尺度结构也具有这一特征，这表明存在非线性相互作用过程，使结构在速度空间中不断变宽。这种自相似性可能具有局部特征，也就是说，间歇性

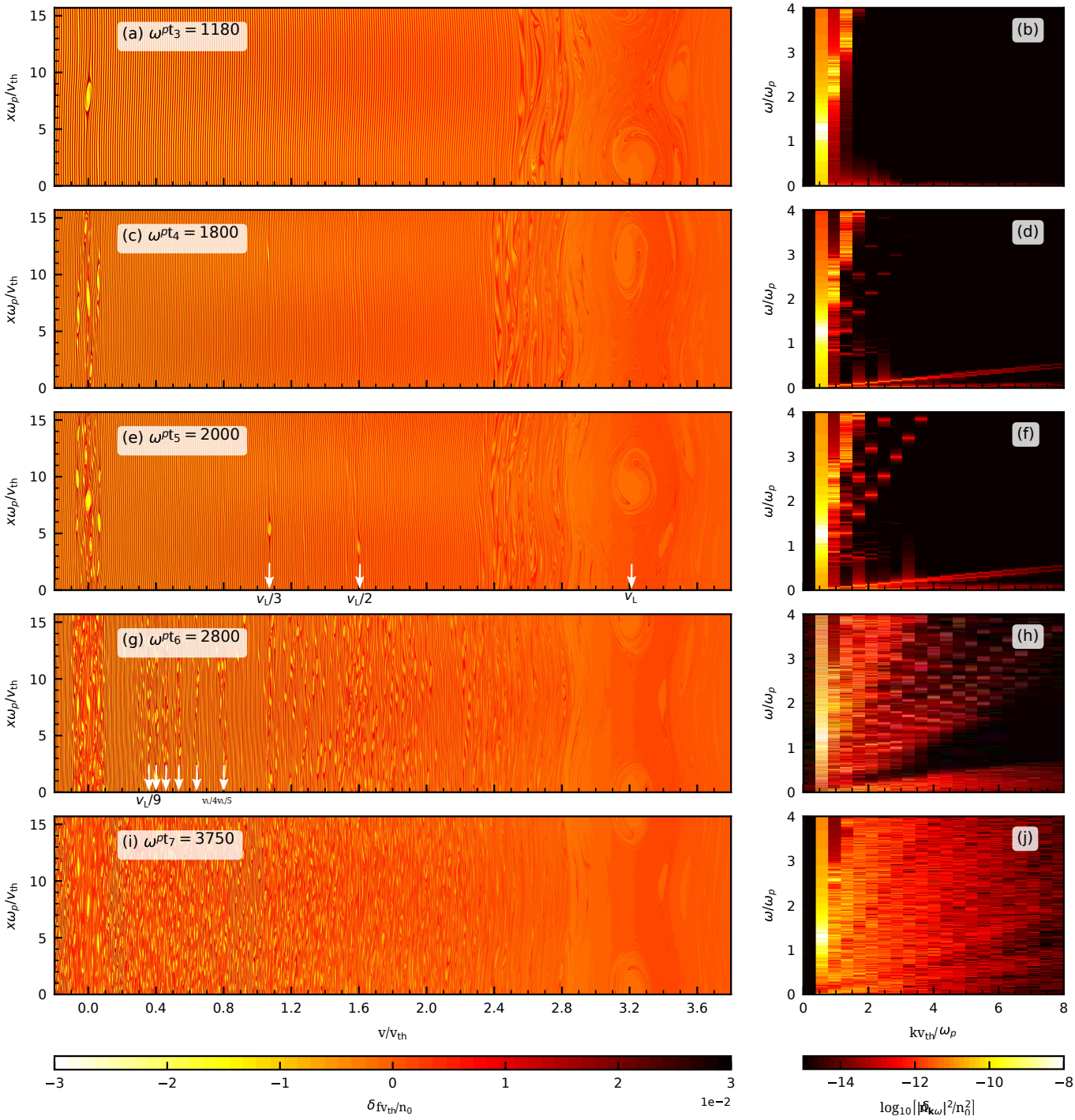

图 3。（左）电子相空间涨落 $\delta f = f - f_0$，归一化为 n_0/v_{th}；以及（右） ω-k 归一化电子密度的谱 $\delta n_{k\omega}/n_0$，在由 $t_i - 600/\omega_p < t < t_i$定义的时间窗口内计算，时间范围为 t_3 至 t_7，如图1所示。面板（e）和（g）中的箭头表示 v_L/n 一些涡旋形成时的速度，其中 $n = \{1, ..., 9\}$。

发生在小尺度电子空穴的发展过程中。

网格分辨率的影响

在相空间中观察到的涡旋，其形态很大程度上取决于用于数值解析等离子体演化的网格分辨率，尤其是节点数 N_v 和速度空间中的节点数。图 7 展示了以下区域的快照

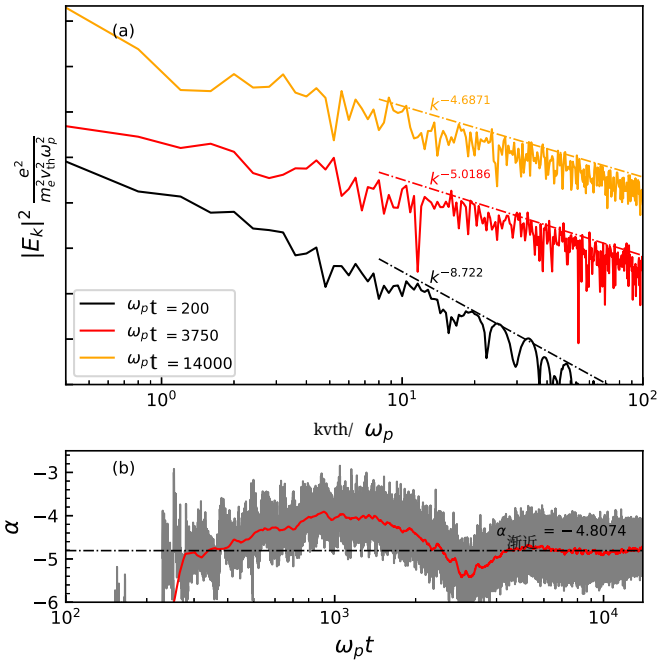

图 4. (a) $\omega_p t = 200$、3750 和 14000 时电场能谱的快照。为便于说明，各曲线在竖直方向上错开。这些谱遵循形式为 $|E_k|^2 \propto k^{\alpha}$ 的幂律。(b) 指数 α 的时间演化。灰线表示 α 的瞬时值，红线表示其平滑后的变化曲线。

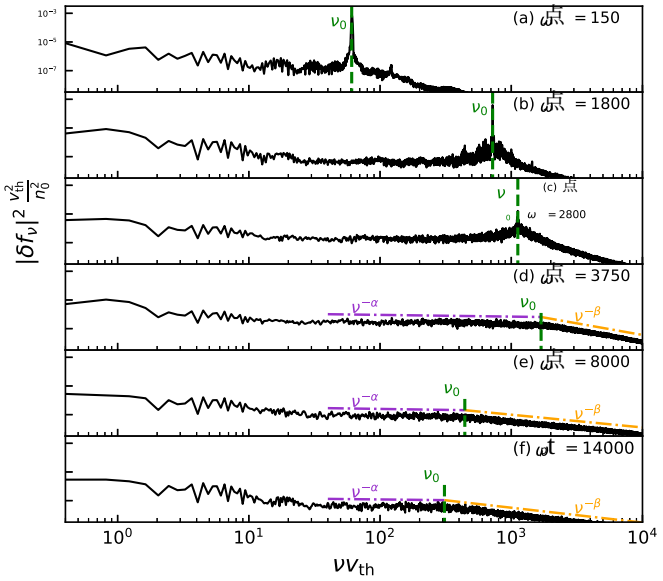

图 5. 空间平均分布函数的傅里叶变换随速度的共轭变量 ν 的变化。图中展示了六个不同时刻的快照。在 (a–c) 图中，丝化表现为 $\nu = \nu_0$ 处 $|\delta f_\nu|^2$ 谱中的一个峰。经过 $\omega_p t \geq 3750$ 后，在 (d–f) 图中，丝化已被平滑，且 $|\delta f_\nu|^2$ 在 $\nu = \nu_0$ 处出现一个断点，将近乎平坦的谱 $|\delta f_\nu|^2 \propto \nu^{-\alpha}$（$\nu < \nu_0$ 时为 $\alpha \simeq 0$）与更陡的谱 $|\delta f_\nu|^2 \propto \nu^{-\beta}$（$\nu < \nu_0$ 时为 $\beta > \alpha$）分隔开来。

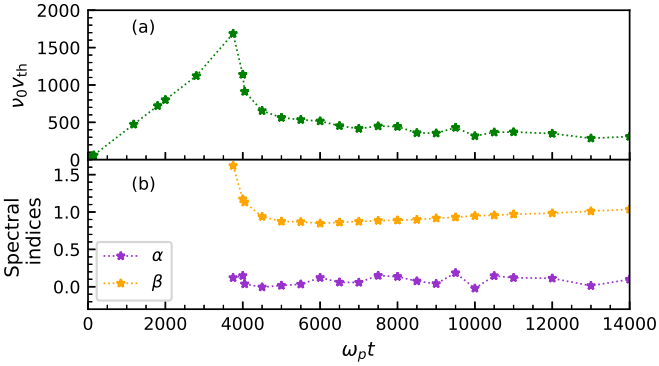

图 6. (a) ν_0（见图 5）的时间演化。对于 $\omega_p t < 3750$，ν_0 表示相空间中丝化的速度尺度。对于 $\omega_p t > 3750$，ν_0 表示 ν 中的转折点；高于该点时，$|\delta f_\nu|^2$ 中的速度谱会变陡。(b) $|\delta f_\nu|^2 \propto \nu^{-\alpha}$ 的幂律谱指数随时间的演化（$\nu < \nu_0$），以及 $|\delta f_\nu|^2 \propto \nu^{-\beta}$ 的幂律谱指数随时间的演化（$\nu > \nu_0$）。

相空间，位于 $v = 0$ 在 $\omega_p t = 3750$下，针对五次采用不同速度网格分辨率的模拟运行 N_v。尽管所有情况下都形成了中心空穴，但图 7(a–c) 表明，当 $N_v < 8192$ 取值较小时，缺少小尺度结构，例如螺旋臂，甚至不会形成较小的空穴；而在 N_v 取值较高的情况下则不同，如图 7(d–e) 所示。采用较小 N_v 值的模拟无法解析相空间中的精细结构，因为在模拟早期，结构的尺寸就已达到网格尺寸。在这种情况下，有些结构不会形成，或者其演化会受到数值扩散的影响。

分辨率变化所导致的差异，可通过 Vlasov方程不变量的数值演化来量化。图 8展示了不变量 I_3 和熵 S随时间的演化，其定义如下：

$$I_3 = \int dx\, dv\, f^3\,, \tag{5}$$

$$S = -\int dx\, dv\, f \ln f\,. \tag{6}$$

虽然未展示，但所有情况下总能量的相对误差均为 10^{-7}量级；改变物理空间中的节点数 N_x也未观察到显著变化。图8 表明，速度空间中的分辨率较低会导致熵突然增加，并使 I_3 不变量在模拟早期突然减小。这是因为分布函数的涨落 f 达到接近速度网格分辨率的尺度。因此会引入数值耗散，无法恰当地解析分布结构。因此，本文结果证实了 Galeotti 和 Califano [32], 的结论：时间渐近态取决于数值

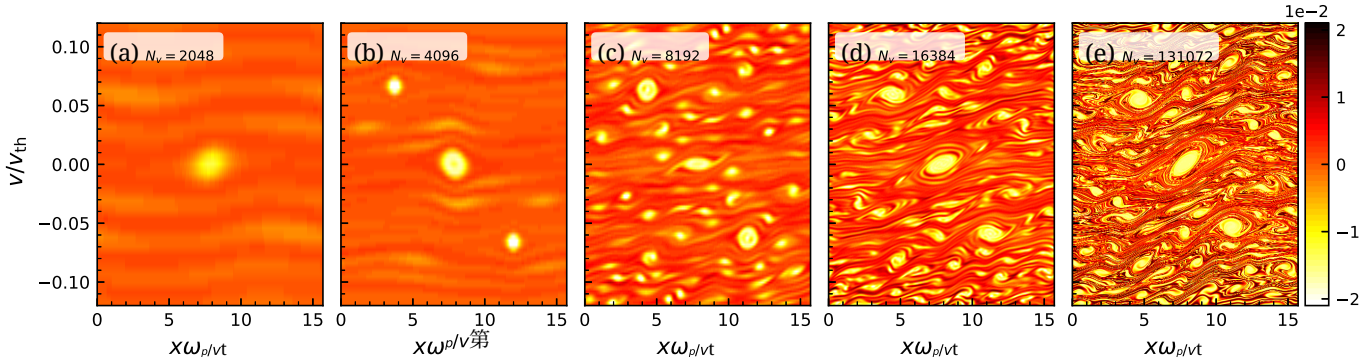

图 7. $\omega_p t_7 = 3750$ 时低速度下、 $v = 0$附近的电子相空间快照。使用了不同数量的节点 N_v： (a) $N_v = 2048$, (b) 4096, (c) 8192, (d) 16384, 和 (e) 131072。

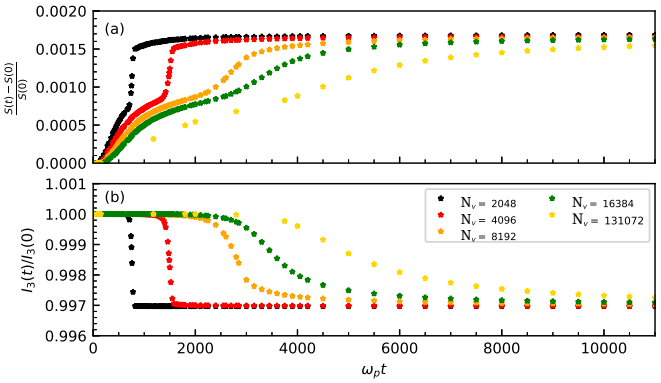

图 8. 在速度域中以不同分辨率运行的模拟中，(a) 熵和 (b) 不变量 I_3 的时间演化。

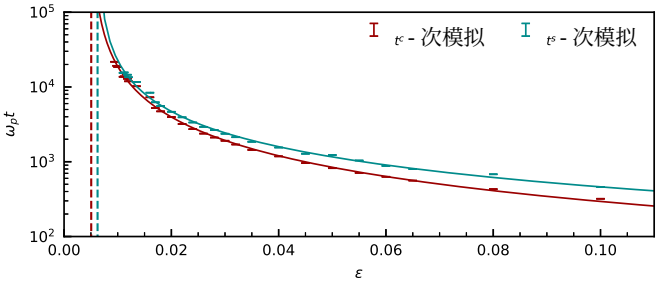

图 9. 中心空穴在 $v = 0$ 处出现的时间 t_c ，以及其周围次级空穴出现的时间 t_s ，分别随扰动幅度 ε 的变化。实线表示相应数据的幂律拟合。虚线表示各曲线对应的临界幅度。

网格分辨率。即使 N_v 的值高得多， S 和 I_3 仍会偏离不变量。对此，图8 表明，偏差无法完全消除，但至少可以通过提高速度网格分辨率 N_v予以延缓。

扰动幅度的影响

最后，研究了扰动幅度 ε对分布函数中心附近第一个空穴形成的影响。图 9 显示了不同 t_c值下中心空穴（$v = 0$）完全形成的时刻（红色），如图 2（b）所示。ε同样，也跟踪了图 2（c）中中心空穴出现后形成的第一个次级空穴。相应的时刻t_s 在图 9中以蓝色误差条表示。当它们的螺旋臂与 $\delta f > 0$ 在位置空间中首次重合时，认为空穴已经完全形成。 t_c 和 t_s 的误差条大小取决于它们形成时分布函数的采样比例。模拟中取 $N_v = 8192$ ，对于 $\varepsilon > 0.04$， $N_v = 16384$取 $0.03 < \varepsilon < 0.04$， $N_v = 32768$取 $0.0166 < \varepsilon < 0.03$， $N_v = 65536$ 取 $0.016 < \varepsilon < 0.0166$， $N_v = 131072$ 取 $0.0135 < \varepsilon < 0.016$，以及 $N_v = 262144$ 取 $0.0094 < \varepsilon < 0.0135$。由于在较低扰动幅度 ε下，所关注的涡旋需要更长时间才能形成，因此增加了速度空间中的节点数。此外，速度空间中会发展出越来越精细的结构，最终达到网格分辨率。因此，增大了 N_v ，以避免这些涡旋过早发生数值耗散。我们确认，不同的 N_v 值不会改变中心电子空穴开始形成的时间。这里，所有模拟均采用 $N_x = 512$，与其他 N_x值相比没有显著差异。

图 9 表明，两个时刻 t_c 和 t_s 均满足关于扰动幅度的幂律依赖关系$t_i \propto (\varepsilon - \varepsilon_i)^{\mu_i}$，其中 ε_i 表示临界幅度，超过该幅度后，具有 $v \approx 0$ 的慢空穴可以出现。对于中心涡旋，发现 $\varepsilon_c = 0.005 \pm 0.002$ 和 $\mu_c = -1.4 \pm 0.1$。对于从中心空穴中生长出来的次级空穴， $\varepsilon_s = 0.007 \pm 0.002$ 和 $\mu_s = -1.3 \pm 0.1$。这表明，分布函数中中心空穴和次级空穴的形成可能被视为一个二级相变过程 [73]。也就是说，

取决于初始振幅扰动 ε，相空间态会从纯丝化阶段转变到另一阶段，在该阶段中丝化减弱，并在相空间中形成小尺度涡旋。

结论

本文重新研究了具有静止离子、初始受到扰动且电子服从麦克斯韦分布的无碰撞电子等离子体的时间渐近态问题。高分辨率 Vlasov-Poisson模拟显示，除已知由朗道共振形成的涡旋外，相空间中还会生成小尺度涡旋。在朗缪尔涡旋内部会形成螺旋臂，对应于在俘获势中强烈俘获并来回运动的电子。随后，相空间涡旋在相空间电子分布函数的速度 $v \approx 0$ 附近形成。

随着等离子体的演化，电子相空间中逐渐充满了低于朗缪尔相速度的小尺度空穴，其中一些空穴满足一个简单关系 $v = v_L/n$，其中 v_L 是朗缪尔相速度，而 n 是整数。在这一过程中，丝化所储存的能量向速度空间中越来越小的尺度转移。该过程减弱了丝化，同时在分布函数中形成了小尺度电子空穴。这表明丝化在速度空间中存在尺度边界，而不是无限地向更小尺度延伸 [68–72]。小尺度电子空穴似乎能够长时间存在，我们将其视为小尺度类BGK态。因此，受扰动麦克斯韦分布电子等离子体时间渐近行为的物理图像，比通常所描述的仅由两个速度接近朗缪尔相速度的反向传播电子空穴组成的状态 [1, 3, 35, 36, 40, 41]复杂得多。这与多个小振幅类BGK态的概念 [2, 39, 43]更加一致。

值得注意的是，已有研究报道，在外部静电驱动 [4] 啁啾作用下，麦克斯韦电子等离子体中会形成由多个BGK型结构组成的状态。在该研究中，频率降低使共振区向分布函数中心移动，从而产生持久存在的相空间空穴。然而，本稿报道的多重 BGK型结构状态，是由单一模态的初始扰动自洽地产生的，无需外部驱动 [4]，也不需要存在电子束 [51, 52, 59, 61] 等高能粒子群。

小振幅电子空穴很可能是由于朗缪尔空穴内部螺旋臂之间的非线性波-波耦合而形成的，并满足拍频条件 $\omega_k = \omega_{k-\ell} + \omega_{\ell}$。随后，波耦合级联在电子等离子体波（EPWs）之间开始填充ω-k 功率谱。每当出现一个空穴，就会激发一支相速度等于空穴速度的电子等离子体波分支。当分布函数被小尺度电子空穴填满后，发现电场的能谱及其自相关遵循波数的幂律关系。这表明相邻模态之间发生了非线性相互作用，因此正在进行能量级联过程。

空间平均分布函数的速度谱呈现分段幂律：大速度尺度上谱较平坦，小速度尺度上的谱则更陡峭，且存在一个分界点将两种尺度分隔开。因此，速度分布函数的涨落呈现自相似性。随着时间推移，小尺度电子空穴开始局域化，这表明存在间歇性，并使自相似性转变为局部自相似性。随着丝化变得可以忽略不计，且小尺度电子空穴在整个相空间中形成，可以观察到电场能谱的斜率呈现准稳态行为。

此外，形成最慢相空间电子空穴的时间遵循初始振幅扰动 ε的幂律函数，这表明正在发生类似临界现象的过程。因此，存在一个临界振幅扰动 ε_i：低于该值时，相空间丝化会无限持续地减弱，直至达到数值网格单元的尺寸；高于该值时，丝化则会平滑并形成相空间中的小尺度电子涡旋。

这项研究的发现拓展了对一维情形下非线性朗道阻尼时间渐近态的通常解释；该情形仅包含两个反向传播的电子空穴。一个有趣的问题是，这种时间渐近态能否在二维或三维模拟中实现。例如，在多维磁化等离子体模拟中观察到电子空穴能够稳定传播 [74–76]。

本研究还强调了采用高分辨率模拟和低数值耗散算法的必要性。在研究时间渐近态时，这一点尤为重要，因为系统演化过程中看似相关的小尺度结构可能无法得到充分分辨。降低分辨率，至少降低速度依赖方面的分辨率，会导致理论上不变量（例如熵和三次 I_3 不变量）在模拟过程中更早出现骤增。因此，速度空间分辨率较低的模拟可能会耗散相空间中结构的形成，从而阻止等离子体达到我们模拟中观察到的状态。

这种耗散本质上是由求解 Vlasov-Poisson 系统时所选用的数值格式造成的。例如，二阶 [3] 和三阶

阶 [1, 32] 误差为 $O(N_v^{-n-1})$，其中 n表示插值的阶数 [77–79]。本研究使用的积分格式在速度依赖方向采用谱插值，因此误差以指数级随 N_v [48, 49]递减，从而显著降低了数值插值造成的耗散。

最后，在傅里叶空间处理速度依赖时，必须保留高阶模态。因此，使用形式为 $e^{-2n(\nu/\nu_{\max})^{2n}}$ [50, 80] 的速度滤波器时，建议采用较大的整数 n 。这样可以保持分布函数的 $2n-1$ 阶矩 [68, 72, 81, 82], ，包括密度和粒子通量。 n 接近 1 时会强烈阻尼高速度模态；尽管这可能有助于保持分布函数的低阶矩，却会排除本研究中观察到的小尺度涡旋。关于这一点，Cheng 和 Knorr [80] 建议不要将 n 设得过大，因为他们的数值实验表明，随着 n 增大，分布函数会出现负值。然而，我们采用了较高的速度空间分辨率，因此 Cheng 和 Knorr [80] 发现的问题并未出现。

致谢

本工作获得智利 ANID 的资助，具体包括 FONDECyT 项目第 11180947 号和第 1191351 号（ R.E.N. ），以及第 1161700 号（J.A.A.）；CONICyT-PAI 第 79170095 号（R.E.N.）；以及研究生奖学金第 22182152 号和第 21202472 号（H.A.C.），以及第 22182344 号和第 21202616 号（J.A.G.）。

* hcarril@udec.cl

† jorgegidi@udec.cl ‡ roberto.navarro@udec.cl§ jaraneda@udec.cl

[1] G. Manfredi, 《物理评论E》79，2815（1997）。[2] C. Lancellotti 和 J. J. Dorning, 《物理评论E》81，5137 1998( )。[3] M. Raghunathan 和 R. Ganesh, 《Physics of Plasmas》20，032106 2013( )。[4] P. Trivedi 和 R. Ganesh, 《Physics of Plasmas》24，032107（2017年）。[5] I. Hutchinson, 《Physics of Plasmas》24，055601（2017年）。[6] A. Ivanov、I. H. Cairns 和 P. Robinson, 《Physics of Plasmas》11，4649（2004年）。[7] C. Lancellotti 和 J. J. Dorning, 《物理评论E》68，026406（2003）。[8] H. Xu、Z.-M. Sheng、X.-M. Kong 和 F.-F. Su, 《Physics of Plasmas》24，022101（2017年）。[9] Y. Tong、I. Vasko、F. Mozer、S. D. Bale、I. Roth、A. Arte- myev、R. Ergun、B. Giles、P.-A. Lindqvist、C. Russell, *et al.*, 《Geophysical Research Letters》45，11（2018年）。[10] A. Lotekar、I. Vasko、F. Mozer、I. Hutchinson、A. Arte-

myev, S. Bale, J. W. Bonnell, R. Ergun, B. Giles, Y. V. Khotyaintsev, *et al.*《地球物理研究杂志：空间物理》125, e2020JA028066 (2020年). [11] K. Steinvall, Y. V. Khotyaintsev, D. B. Graham, A. Vaivads, P.-A. Lindqvist, C. Russell, and J. Burch, 《Geophysical Research Letters》46, 55 (2019年). [12] F. Mozer, O. Agapitov, B. Giles, and I. Vasko, 《Physical Review Letters》121, 135102 (2018年). [13] C. Norgren, M. Andr´e, A. Vaivads, and Y. V. Khotyaint- sev, 《Geophysical Research Letters》42, 1654 (2015年). [14] D. B. Graham, Y. V. Khotyaintsev, A. Vaivads, and M. Andre, 《地球物理研究杂志：空间物理》121, 3069 (2016年). [15] J. Holmes, R. Ergun, D. Newman, N. Ahmadi, L. Ander- ss on, O. Le Contel, R. Torbert, B. Giles, R. Strangeway, and J. Burch, 《地球物理研究杂志：空间物理》123, 9963 (2018年). [16] J. R. Danielson, F. Anderegg, and C. F. Driscoll, 《Physical Revie w Letters》92, 245003 (2004年). [17] R. N. Franklin, S. M. Hamberger, and G. J. Smith, 《Physical Review Letters》29, 914 (1972年). [18] K. Saeki, P. Michelsen, H. P´ecseli, and J. J. Rasmussen, 《Physical Review Letters》42, 501 (1979年). [19] B. Lefebvre, L.-J. Chen, W. Gekelman, P. Kintner, J. Pickett, P. Pribyl, S. Vincena, F. Chiang, and J. Judy, 《Physical Review Letters》105, 115001 (2010年). [20] C. F. Rupp, R. A. L´opez, and J. A. Araneda, 《Physics of Plasmas》22, 102306 (2015年). [21] P. Trivedi and R. Ganesh, 《Physics of Plasmas》23, 062112 (2016年). [22] F. Valentini, V. Carbone, P. Veltri, and A. Mangeney, 《物理评论E》71, 017402 (2005年). [23] F. Valentini, 《Physics of Plasmas》12, 072106 (2005年). [24] R. A. L´opez, R. E. Navarro, S. I. Pons, and J. A. Araneda, 《Physics of Plasmas》24, 102119 (2017年). [25] I. B. Bernstein, J. M. Greene, and M. D. Kruskal, 《物理评论》108, 546 (1957年). [26] H. Schamel, 《物理学评论》20, 336 (1979年). [27] H. Schamel, 《Physics of Plasmas》19, 020501 (2012年). [28] H. Schamel, 《Physics of Plasmas》22, 042301 (2015年). [29] S. Pankavich and R. Allen, 《欧洲物理学杂志D辑》68, 1 (2014年). [30] G. Manfredi and P. Bertrand, 《Physics of Plasmas》7, 2425 (2000年). [31] R. L. Morse and C. Nielson, 《Physical Review Letters》23, 1087 (1969年). [32] L. Galeotti and F. Califano, 《Physical Review Letters》95, 015002 (2005年). [33] F. Califano, L. Galeotti, and A. Mangeney, 《 Physics of Plasmas》13, 082102 (2006年). [34] M. Shoucri, 《激光与粒子束》35, 706 (2017年). [35] M. Brunetti, F. Califano, and F. Pegoraro, 《物理评论E》62, 4109 (2000年). [36] S. K. Pandey and R. Ganesh, 《物理学评论》96, 125616 (2021年). [37] A. Ghizzo, B. Izrar, P. Bertrand, E. Fijalkow, M. Feix, and M. Shoucri, 《流体物理》31, 72 (1988年). [38] M. Buchanan and J. J. Dorning, 《Physical Review Letters》70, 3732 1993( ). [39] M. Buchanan and J. Dorning, 《物理评论E》50, 1465 (1994年). [40] L. Demeio and P. Zweifel, 《Physics of Plasmas》2, 1252 (1990年). [41] L. Demeio, Transport Theory and Statistical Physics 30, 457 (2001年). [42] E. Fijalkow and L. Nocera, 《等离子体物理学杂志》71, 401 (2005年). [43] C. Lancellotti and J. Dorning, 《数学物理学杂志》40, 3895 (1999年).

[44] C. Lancellotti and J. Dorning, Transport Theory and Statistical Physics 38, 1 (2009). [45] J. Bezanson, A. Edelman, S. Karpinski, and V. B. Shah, SIAM评论59, 65 (2017年). [46] E. Sonnendr¨ucker, J. Roche, P. Bertrand, and A. Ghizzo, 《计算物理学杂志》149, 201 (1999年). [47] R. I. McLachlan and P. Atela, 非线性5, 541 (1992). [48] B. Fornberg and D. M. Sloan, 数值数学学报3, 203 (1994). [49] J. P. Boyd, *Chebyshev and Fourier spectral methods* (2001). [50] J. T. Parker and P. J. Dellar, 《等离子体物理学杂志》81, 10 1017 0022377814001287 2015 . /S ( ). [51] T. M. O'Neil, J. Winfrey, and J. Malmberg, 《流体物理》14, 1204 (1971). [52] K. Hara, T. Chapman, J. W. Banks, S. Brunner, I. Joseph, R. L. Berger, and I. D. Boyd, 《Physics of Plasmas》22, 022104 (2015年). [53] S. Brunner, R. Berger, B. Cohen, L. Hausammann, and E. Valeo, 《Physics of Plasmas》21, 102104 (2014年). [54] I. Y. Dodin, P. F. Schmit, J. Rocks, and N. J. Fisch, 《Physical Review Letters》110, 215006 (2013). [55] T. O'neil and J. Winfrey, 《流体物理》15, 1514 (1972年). [56] A. Bouchoule and M. Weinfeld, 《Physical Review Letters》36, 1144 (1976). [57] M.-C. Firpo, F. Doveil, Y. Elskens, P. Bertrand, M. Poleni, and D. Guyomarc'h, 《物理评论E》64, 026407 (2001年). [58] N. Carlevaro, M. V. Falessi, G. Montani, and F. Zonca, 《等离子体物理学杂志》81, 10.1017/S0022377815001002 (2015年). [59] J. Tennyson, J. Meiss, and P. Morrison, 物理学D 71, 1 (1994年). [60] D. Farina and R. Pozzoli, 《物理评论E》70, 036407 (2004年). [61] J. Adam, G. Laval, and I. Mendonca, 《流体物理》24, 260 1981( ). [62] Y. Hou, M. Chen, M. Yu, B. Wu, and Y. Wu, 《等离子体》22, 122101（2015年）。[63] T. H. Dupree, 《流体物理》25, 277（1982年）。[64] T. H. Dupree, 《流体物理》26, 2460（1983年）。[65] R. H. Berman、D. J. Tetreault 和 T. H. Dupree, 《流体物理》28, 155（1985年）。[66] H. Schamel、D. Mandal 和 D. Sharma, 《Physics of Plasmas》24, 032109（2017年）。[67] P. H. Yoon, 《Physics of Plasmas》14, 064504（2007）。[68] A. J. Klimas 和 A. F. Vi˜nas, 《等离子体物理学杂志》。/S（）。[69] A. F. Vi˜nas 和 A. J. Klimas, 《计算物理学杂志》（）。[70] N. Besse 和 E. Sonnendr¨ucker, 《计算物理学杂志》（）。[71] L. Einkemmer 和 C. Lubich, 《SIAM科学计算杂志》40, B1330（2018年）。[72] A. J. Klimas 和 W. M. Farrell, 《计算物理学杂志》110, 150 1994, ()。[73] H. E. Stanley 和 G. Ahlers, *Introduction to phase transitions and critical phenomena* 1973 （）。[74] M. Wu、Q. Lu、C. Huang 和 S. Wang, 《地球物理研究杂志：空间物理》115, 10.1029/2009JA015235（2010年）。[75] I. H. Hutchinson, 《等离子体物理学杂志》84, 10 1017 0022377818000909 2018。/S（）。[76] I. H. Hutchinson, 《物理评论E》99, 053209（2019年）。[77] A. Mangeney、F. Califano、C. Cavazzoni 和 P. Travnicek, 《计算物理学杂志》179, 495（2002年）。[78] P. Colella 和 P. R. Woodward, 《计算物理学杂志》54, 174（1984年）。[79] T. Arber 和 R. Vann, 《计算物理学杂志》180, 339（2002年）。[80] C. Z. Cheng 和 G. Knorr, 《计算物理学杂志》22, 330（1976年）。[81] A. J. Klimas, 《计算物理学杂志》68, 202（1987年）。[82] A. J. Klimas、A. F. Vi˜nas 和 J. A. Araneda, 《等离子体物理学杂志》83, 10.1017/S002237781700054X（2017年）。