服务数学中的问题、解释与综合

基于教学单元与混合式教学的课程设计

Siniša Miličić

2026年11月21日

arXiv:2611.28899v1 [math.HO] 21 Nov 2026

摘要

学生可能能够接触到令人信服的数学解释，却无法重构或调整这种解释。课程必须为学生提供发展这种理解的机会，同时确保学生和教师的工作量可持续。本文提出一种服务数学的方法，其中问题清单既指导课程编写，也指导课堂决策。课程相关教学单元围绕解释目的、先决条件和联系进行组织，最初由五至七分钟专家讲解加以校准。教学结合准备、学生讲解、支持性修正，以及大量教师讲授与综合。各环节的分配会随着主题、受众和教学条件而变化。压缩与恢复说明，已充分展开的构造如何转化为可重复使用的内容，同时其依据仍然易于获取。来自计算数学的三项分析——完整的数独编码、灰度投影和软件故障契约——展示了对比案例如何引导解释与修订。这项基于实践的研究贡献，将连贯的课程设计与灵活的教学和可控的准备工作联系起来，并提出了评估学习、参与和教师持续投入的问题。

1 引言

H人的理解是优质数学教学的首要关注点。学生需要表述
s数学情境，解释某种构造为何有效，并认识到当其
a假设发生变化时会有什么改变。课程必须在有限的时间内使这项工作成为可能。实际
q问题彼此相关：为何要设置这些内容，学生应当能够解释什么，以及哪些
c条件、资源和活动能帮助他们完成这项工作?

目标是培养人类数学流畅性：在具体案例、表征之间灵活转换，
c 紧凑的对象和一般论证。在服务数学中，来自其他学科的问题提供了多个切入点。随后，数学必须成为连贯的论述，供学生使用并重新探究。仅仅在原封不动的教学大纲中附加一份应用清单，并不足以实现这一目标。

该方法源自作者在服务数学与计算课程中的教学实践，其方法——
论协调课程编写，并为学生创造准备、讲解和修复数学论述的机会。教师讲授与综合确立标准，并将各项工作联系起来。教学单元明确解释目的和先决条件；工作量记录则将其与可行的活动相联系。

核心论点是，明确的解释义务能够协调课程、单元和课时尺度上的决策。实例分析通过考察以下方面的变化来检视这种协调：

表1：课程、单元和课时规划，以及不同尺度之间的反馈。

尺度	设计决策	修订依据
课程	现实主义视角、统领性问题，学习成果和范围界限。	缺乏依据的内容，缺少联系或范围界限不清晰。
Unit	解释目的，先决条件，对比案例和 5–7 分钟的专家校准。参数校准。	隐藏的依赖关系、仓促的计数，或几个独立的目的。
课时	预先准备；适当时进行小组准备；讲解和修复；为教师综合总结留出专门时间 sis.	解释、同伴贡献、反复出现的困难和所用时间。

假设、表征和依赖关系；教育效果的评估仍有待未来开展。

随时可以获取解释（包括由大语言模型生成的解释），使得拥有某种论述与理解这种论述之间的区别尤为明显。实时对话提供了重构论证、解读符号以及回应案例变化的机会。因此，对话既发挥形成性作用，也具有证据作用。

表1 展示了该方法的三个规划尺度。问题清单将它们联系起来：课堂困难可能促使人们调整先决条件、单元边界或课程问题。这些决策相互依存，教学过程中获得的反馈也会影响内容编写。

2 准备、解释与教师总结

2.1 混合式教学安排

核心学生任务是一道讲解型问题：准备一份论述，供他人提问。任务可以涉及定理、构造、例子、实验、动机说明或代码片段。材料、先决条件、预期深度和统领性问题都会提前提供。学生可根据任务，借助文本、图表、例子、代码和录音进行准备。

在作者通常采用的全日制模式中，教学安排在两个连续的45分钟课时内进行。学生课前复习材料，并在课堂上分组准备。随后，各组学生进行展示，同学和教师参与讨论；通常一节课能安排约五场展示。非全日制线上学生可以先独自准备，再参加实时交流。

听取他人的展示是每位学生学习任务的一部分。同伴可以根据自己的准备检验某项论断，指出遗漏的情况，要求给出论证，或将不同论述联系起来。他们的补充和讨论有助于依据相关学习成果进行评估。数学内容的实质性很重要；仅凭发言频率或速度，无法判定学习达成度。

部分开放式展示任务让学生可以在明确的主题或深度限制下，自主选择并深入探讨一个主题。这类任务尤其适用于在线非全日制模式。学生的创造力可以带来生动的应用案例或意想不到的联系，从而丰富课程。此类展示可能持续更长时间，并涵盖多个单元；其评估仍以相关学习成果为依据。

这种安排是混合式的，因为它结合了学生讲解、对话和教师直接讲解。它是参数化的，因为这些方式的分配，以及准备、分组、深度和支持，都可以根据课程进行调整。Otten 等人关于翻转式数学教学中结构变异的论述，为明确这些选择提供了先例（Otten 等人2023年）。

分配方式也因主题而异。在作者面向信息学和计算机科学学生的导论课教学中，数独的完整推导采用面授方式，所有例子均由教师提供。连贯的专家讲解保留了问题易于识别的特点，同时使其形式化构造变得易于理解。Kurnik 的问题式教学以学生探究为核心，启发式教学则借助教师提问提供支持；这两种教学方式都为调整指导提供了相关思路（Kurnik2002；Kurnik 2006）。直接讲授同样有其经过审慎安排的位置。

自我解释和以教促学研究强调构造并表达解释（Chi 等人，1994；Fiorella 和 Mayer，2013）。提取、推理和回应问题可能各自发挥不同作用；实验指出了提取能够解释以教促学益处的条件（Koh、Lee 和 Lim，2018）。在此，学生重构关系，并将其呈现出来供讨论；在有帮助时，他们会使用笔记和各种表示。

2.2 反馈、修复与评估

演示过程中的提问应当帮助确定下一步有益的教学行动。询问某个变量代表什么、要求举例，以及询问某个论证为何涵盖所有情况，分别针对不同的困难。对比案例可以揭示缺失的条件；不熟悉的表示可能需要先直接解释。教师可以补充某项先决条件，或邀请同伴参与，然后再将解释交还给演示者。学生必须阐明修复后的联系和论证：教师完成的解答不能替代这项工作。

反馈只有在促使学习者改进学习成果时才有意义。学生修改解释，同伴重新审视构造，教师则调整提示或教学顺序。反复出现的困难之后可能促使人们调整材料、先决条件或单元边界。这将即时对话与形成性评价支持学习和指导教学的功能联系起来（Nicol 和 Macfarlane-Dick，2006；Black 和 Wiliam，2009）。反馈并非总能带来益处：正如 Kluger 和 DeNisi 的综述所示，其关注重点和使用方式至关重要（Kluger 和 DeNisi，1996年）。因此，纠正应指出数学问题，并创造采取行动解决问题的机会。

演示的评分依据是所呈现的解释经过支持性修正后，并参照课程明确规定的学习成果和支持条件。两名学生达到相同的要求层级时，应对其学习达成度作出相同评价，即使他们所需的协助不同。提示次数不是隐含的评分标准。不过，学生仍必须清楚阐述修正后的论述。动态评估提供了一种相关方法，将协助与评估结合起来（Lantolf 和 Poehner2011）。

更高的学习达成度可以体现为更深入的论证、迁移、集成，或在课程范围内完成的创意项目。这些机会能够培养学生超越规定门槛的能力。通用标准应区分此类成就与所获协助的多少。经过支持的演示为指定学习成果提供证据；任何考试或综合项目则评估其各自明示的学习成果和条件。在表达某项学习成果时，演示风格也应计入评分，例如通过代码传达一种软件模式。

2.3 教师总结的作用

教师总结需要得到充分的时间保障。它能明确论述应依据哪些假设、符号表示和论证，纠正会造成重大影响的错误，并将各方观点联系起来。学生应听到专家示范所需的细节程度、哪些区别至关重要，以及如何在不失依据的前提下使解释更加简洁。

综合也为数学压缩做好准备。多个案例可以通过一个关系加以组织；一个已发展的过程可以转化为可供进一步推理的对象。教师会确定保留哪些内容，

这些内容适用于何处，以及如何还原其内部结构。联系和综合本身也可以规划为教学单元或单元组合。

综合可以贯穿教师主导的讲解，也可以在学生发言之后进行。教师可以预先规划其中的关键联系，并根据遇到的困难加以调整。综合的范围和时机仍由教师规划。必要的讲解可能需要较少的课堂展示，或使课时主要由教师主导；保障综合会限制其他活动。

Brousseau 关于制度化 的论述提供了一个直接先例：教师赋予选定的课堂知识共同认可的数学地位，并组织学生应当保留的内容（Brousseau 2023年）。这种公开组织与个人的封装彼此相关，但并不相同。连贯的综合能提供可重复使用的结构；听过讲解，并不意味着每个学生都已能够运用或重构这一结构。

教师讲授在翻转数学教学中有其既定位置。Feudel 和 Fehlinger 的讲授型翻转分析课程采用课前阅读，并在课堂上由专家示范定义、证明和联系（Feudel 和 Fehlinger 2023年）。Maciejewski 将课前准备、同伴讨论和教师讲解结合起来，用于微积分教学（Maciejewski 2016）。本文提出的方案将这些功能与学生解释、修复、问题引导式创作以及基于单元的资源规划联系起来。

3 课程的依据与组织问题

3.1 三种现实主义视角

组织性问题应说明为何某些内容属于课程的一部分。在计算导论数学中，兼容的日程安排与计划为命题逻辑提供了依据。通过编程解决数独问题，则为相关构造提供了经验性的切入点。课程必须明确哪些内容可以转移，以及哪些假设有所不同。

三种现实主义视角有助于构造和审视这类问题。职业现实主义 关注实际或预期工作中的目的、任务和限制。学科现实主义 关注一个领域如何教学，以及同行之间如何交流：该领域的表征、解释惯例和提出问题的方式。即使从业者并不将这些做法称为数学，它们在一定程度上也可能具有数学性质。经验实在论 关注学生能够根据自身经验进行想象、解读和采取行动的内容。

这些视角既具有结构性，也具有分析性：它们有助于构造和审视任务。教师会检查问题的目的、其学科论述，以及这类受众对问题的可及性。一个在职业上合理的问题可能对学生来说并不熟悉；一个熟悉的谜题则可能需要进一步联系职业工作。这些相互交叠的视角有助于确定课程必须培养的内容，但并不构成一套穷尽性的分类法。

随着学生逐渐熟悉任务的目的和表征，一个任务便能同时满足这三方面的要求。学科交流类似于学科读写能力研究中探讨的差异化实践（T. Shanahan 和 C. Shanahan 2008）；经验实在论则可以包含学生熟悉的数学对象。在这一发展过程中，专业问题是作为数学问题来处理的：其假设、构造和结论都需要数学解释和论证。

现实数学教育（RME）阐释了有意义的活动如何发展为数学表征和更一般的推理（Freudenthal 1991；Gravemeijer 和 Doorman1999）。教学人类学理论（ATD）有助于梳理机构内部问题、技术及其论证之间的关系（Chevallard 2019）。这些视角能避免组织性问题沦为装饰性的引言。它应当影响数学工作、所需的解释以及探究的深度。关于探究、RME 和 ATD 的既有综合研究，为这一取向奠定了坚实基础（Artigue 和 Blomhøj 2013；Artigue、Bosch 等 2020）。

表 2：教师主导的命题逻辑发展及其更广泛课程目标的拟议问题台账摘录。

层级	问题	对比案例或检验	目标单元或联-系
课程	该论述是否支持构建 and 证明一个 用于另一个对象的模型相容选择问题?	允许空闲的工作流程；识别 改变了 假设-条件和给定的依赖关系-依赖关系。	转移，课程课程综合与范围。
集成	为什么组合后的 re-制约条件是否准确描述了有效数独的填法?	A 填入 有效的 by rows 行和列，但因.....而无效宫；两端对齐 两个方向。	局部 约束和全局正确性性。
集成	为什么导出的合取范式保留了预期的含义ing?	一个区分错误转换的赋值原始公式。	公式 结构 and 等价性变换。
局部	哪种限制要求至少一个 ，至多一个或恰好一个选择?	选中零个、一个或两个选项。	基数 con-构造。
局部	变量和它们的真值说明了什么，关于一种配置?	保持公式不变，并更改其赋值。	命题、 for-公式和解释—说明。

3.2 问题清单与内容编写方向

测试驱动开发（TDD）启发了一种课程编写流程：提出一个论述尚未回答的问题，构造恰当的答案，然后在保留其应尽义务的同时重构论述（Beck2003）。重构可以统一符号表示、去除重复内容、调整材料顺序，或引入中间构造。重新检查受影响的问题，可以发现缺乏依据的推导以及容易误导的示例。

这些问题检验课程目标、集成和局部构造。表 2按从课程目标向下的顺序呈现这些层级。内容编写可以从教学大纲开始，从演示性构造逐步扩展，也可以在这些层级之间推进。问题清单用于检验编写的讲解：有些数学检查可以执行，而解释充分性则需要判断。

问题清单 既用于提前编写内容，也用于现场教学。它记录讲解必须阐明的内容，并帮助教师找到当前问题、重新审视某个假设，或暂缓处理某项扩展。课程目标可以体现在教学大纲层面；教师会选择要分享给学生用于准备的问题、对比项和预期要求。同一记录的精简视图可以支持课时教学，而无需重复呈现完整的课程计划。

课堂困难为后续修订提供参考。例如，将恰好一个约束转移到调度中，在允许非活动状态时无法通过账本空闲测试。重构会将必需选择与互斥分开，然后再次检查这两种应用。

这一流程与建构性对齐以及早期的评估驱动设计有关（Biggs 1996；Schwieger 和 Surendran 2013）。还必须检查问题本身是否存在遗漏、范围不当和薄弱联系。重构应当形成连贯的数学叙事，其中的联系和综合由各个单元体现，且其目的和依赖关系都明确无误。

中间向外设计 是其中一种路径：从可行的构造出发，选择要深入探究其依赖关系和扩展到何种程度。在逻辑导论课程中，学生可以解释公式与规划问题之间的对应关系，同时使用提供的布尔

可满足性（SAT）。高年级课程则可以探究其算法、复杂性、实现和测试。ATD 对黑宫和透明宫的处理，提供了有关选择性探究的相关论述（Bosch 等人 2020）。学习成果、先决条件和数学上的连贯性决定了边界：本课程无需探究所有可行的方向。

4 Mat数学对象、压缩与教学单元 s

4.1 可使用和重新开启的对象

Davis 和 Hersh 通过具有可重复属性的心理对象来刻画数学（Davis 和 Hersh 1981）。这为教学提供了有益的指导：学生需要接触这样的对象，以便考察、交流并重建其行为。Borovik 阐述了压缩与恢复在数学实践中的重要性（Borovik 2010）。一个紧凑的对象可以承载大量先前的工作，只要适当的表征和论证能够使这些工作再次变得易于理解。

Freudenthal 从教学角度探讨了相关问题。有意义的使用以及心理对象的形成，可以先于明确的概念习得；数学结构组织着活动中遇到的现象（Freudenthal 1983）。Davis 和 Hersh 提供了对数学的刻画，Borovik 考察数学实践，而 Freudenthal 则追问对象如何对学习者产生意义。三者的结合将注意力同时引向可复用的结构，以及学生借以发展这些结构的情境。

封装在这里居于核心地位：通过多个步骤发展起来的过程，会在后续思考中作为一个对象发挥作用。过程—对象理论，包括 Sfard 对实体化的讨论，使这一转变变得明确（Sfard 1991；Gray 和 D. O. Tall 1994）。Borovik 还提醒我们，不应将数学压缩仅仅归结为实体化。新的表示、语言以及组织论证的方式，都可以在不契合某一种从过程到对象的转变的情况下压缩工作。

恰好一个构造说明了为什么必须分别关注简洁的符号表示、通过学习获得的理解以及课程范围。为这一构造命名，可以将一个公式缩写为简洁的表达式。学习者通过构造并论证该公式，进而在要求发生变化时对其进行调整，从而形成一个可复用的组件——例如，当允许不选择任何选项时。相同的学习者可能会使用一个现成的 SAT 求解器，却不去学习其搜索算法。第一个问题涉及表示，第二个涉及学习者能够重构的内容，第三个则涉及课程有意不展开的范围。仅凭一个简短的表达式，教师无法判断还有哪些工作需要学习。

4.2 数学思维的方向

Kurnik 对科学方法和启发式方法的论述提供了一套规划词汇：分析与综合、抽象与具体化、一般化与特殊化、归纳与演绎，以及类比（Kurnik 2008；Kurnik 2006）。在更悠久的启发式传统中（Pólya1954），这些方向提示了发展和重新审视数学对象的方法。本文以指南针作为运用这些方法进行规划的隐喻。

另一个重点是分类编目：识别、收集并区分具体事例。这为分类账提供案例和区分依据。类比通过共性和结构对应建立联系，帮助综合找出可重复使用的构造。二者侧重点相反，却相互作用：识别出共同结构，便能凸显差异（Gentner 和 Gunn 2001）。以下示例将运用这一区分来考察选择配置、变换和失败轨迹。

封装、类比、归纳、抽象和一般化常常能压缩数学工作，尽管归纳提示的模式仍需论证，而类比也有其局限。分类编目、特殊化和具体化有助于审视一项论述保留了什么，又忽略了什么。

指南针可用于识别有用的教学策略；它既不对学习达成度进行排序，也不要求每个例子都遍历所有方向。

4.3 单元与学习成本

一个教学单元是编写的讲解中相对于课程的构件，具有局部完整的解释目的、问题、结果、先决条件和表征。定理、证明片段、示例、动机说明、代码解释或联系都可以构成一个单元。综合同样属于单元模型。该定义涉及一种适用于数学以外领域的规划粒度。

初始范围以面向目标受众进行一次可行的五至七分钟专家讲解为基准。教师说明假定的背景知识，并演练必要的表征和论证，必要时使用笔记或其他准备好的表征。仓促讲解、隐藏的依赖关系或多个相互独立的目的都表明存在设计异味：应重新审视先决条件，或进行有意义的细分，同时保留一个连接各部分的单元。这考察的是解释范围，而不是评价讲师自发讲解的速度。随后，学生解释有助于检验这些选择。多个单元可以组成更长的教师引导式讲解，包括完整的数独讲解。

这一启发式方法在有意义的分段以及处理所呈现内容的机会方面具有认知层面的依据。在概率动画中，Spanjers及其同事发现，暂停能够改善后测表现，而标示边界的提示则降低了报告的心理努力（Spanjers等，2012）。这些发现促使我们同时关注结构和处理机会；但它们并不能确定所提出的分钟范围。Tabbers和de Koeijer发现，在学习者控制下，转移效果有所改善，同时任务投入时间也有所增加（Tabbers和Koeijer，2010）。因此，紧凑的讲解与从中学习所需的活动应分别进行估算。

数学熟悉度也会改变恰当的边界。Barnard 和 Tall 关于认知单元及其联系的论述描述了早期工作如何成为一个组成部分，同时仍可恢复其内部关系（Barnard and D. Tall1997）。教学单元是一种教学规范，但其先决条件取决于此类学习。多个单元之后可能会被视为一个组成部分，而一段简短的专家论述对学生而言，起初可能包含若干不熟悉的元素。工作记忆和认知负荷研究进一步促使我们检查这些同时存在的要求，以及它们对先备知识的依赖（Cowan 2001；Chen、Paas 和 Sweller 2023年；Jong2010）。

学习对象文献强调重用，同时考虑教学情境（Wiley 2000；Merrill 2001）。可移植性并不是教学单元的定义性属性：重用需要重新考虑接收课程的问题、受众和依赖关系。一页内容、制作完成的幻灯片或简短的代码片段可以帮助检查范围，但不能定义不同表征之间的转换。

专家校准、学生活动和总工作量是不同的规划量。一个学生环节必须允许讲解、对话和支持性修正。预先准备、参与其他展示以及后续学习都会计入总体工作量。应根据学生和教师实际需要完成的工作来修订分配方案。

5 三个设计分析实例

这三项分析涉及面向计算的服务数学：逻辑规范、代数与几何表征，以及状态变化。每项分析都明确阐述其现实主义视角、账本问题、对比与综合。数独的论述反映了作者教师主导的配置；下文简短且有缺陷的解释和修复提示，是对可能对话的构造性示例，并非课堂实录。

表3：接受性　　三种限制下对比真值赋值；1表示真，0表示假　　e.

限制	(1,0,0)	(0,0,0)	(1,1,0)
A：至少一个	1	0	1
M：至多一个	1	1	0
E：恰好一个	1	0	0

5.1 通过兼容选择理解命题逻辑

公式如何描述相容的选择？调度与规划提供专业目的；变量、公式和正确性论证构成学科论述。经验实在论促使人们保留普通的九宫格数独及其三乘三方格，使之成为一个易于识别的问题。作者教师主导的开发受到 Raymond Hettinger 在 PyCon US 2019 的演讲及配套 SAT 笔记的启发（Hettinger 2019a；Hettinger 2019b）。更早的 SAT 编码和计算逻辑教学提供了学术先例（Lynce 和 Ouaknine 2006；Cerna 等2020）。求解器已提供，而讲解则展开了这种表示及其论证。

设 p, q, r 代表三个选择。否定 $\neg$、析取 $\vee$ 和合取 $\wedge$ 分别表示非、或 和 且。考虑

$$A = p \vee q \vee r, \tag{1}$$
$$M = (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r), \tag{2}$$
$$E = A \wedge M. \tag{3}$$

第一个要求至少选择一个；第二个禁止任意两项同时被选中。两者的合取要求恰好选择一个，而每个恰好选择一项的赋值都满足它。将选择数量分类为零个、一个和多个，可以揭示一个成功示例尚未确定的内容（表 3）。

一个说明性解释——“析取表示恰好选择一个”——可以用两个为真的变量来检验。再询问是否可以什么都不选，就会引出一种经过修正的论述，将存在性与唯一性区分开来。教师可以在讲解中展开这些对比项；随后，学生的解释可以检验他们是否能够运用这一区分。综合使“恰好一个”成为可重复使用的构造，而分类账中关于空闲的问题则揭示了它与调度类比的局限：M 允许非活动状态，而 E 则排除这种状态。

文字是变量或其否定；子句是文字的析取。子句的合取构成合取范式（CNF），这是可满足性（SAT）的标准输入形式。教学内容既包括从一般公式推导出合取范式，也包括直接组合子句。Hettinger 的笔记中也使用了一个例子：$p \Rightarrow (q \wedge r)$，它等价于 $(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$ (Hettinger 2019b)。赋值$(p,\ q,\ r) = (1,\ 1,\ 0)$ 将其与错误的单个子句区分开来：$\neg p \vee q \vee r$。因此，分类账检验了限制的含义，以及这种含义在转换过程中是否得以保留。更一般的基数构造可以扩展这一论述（Sinz 2005）。

对于完整数独，p_{rcd} 表示单元格（r，c）中填有数字 d，三个索引的取值范围均为 1 到 9。每个单元格以及每个数字在每一行、每一列和每个三乘三宫中的出现次数，都须满足恰好一次的限制；题目给定的数字则添加单文字子句。一个满足赋值决定了一个有效填完的数独，而每个有效填完的数独也决定了一个满足赋值。若某个网格满足行和列的限制，却违反宫的限制，就可以用来检验整体论述是否完整。数独是否有解以及解是否唯一，仍是两个不同的问题。

教师总结将局部构造、其重复使用以及正确性的两个方向联系起来。类比定位出共同模式；演绎确立其适切性。多个单元共同构成这一完整讲解，而不是将整个发展过程限制在一个经过校准的区间内。补充材料给出了一个拟议的八单元图、一般基数公式和验证细节。

学生之后可以重构或调整论述的部分内容，而不必研究所提供的求解器算法。

5.2 灰度作为投影

为什么将图像转换为灰度后，再次应用转换会得到不变的结果？哪些差异会消失？其专业用途涉及图像处理；学科现实主义关注该操作在相关领域中如何表示和解释；经验实在论则从颜色转变为 Gray 的可见变化出发。数学任务通过明确给出的模型将这些视角联系起来。

用归一化通道 $(r,\ g,\ b) \in [0,1]^3$表示一个像素，其中各通道相等时表示 Gray。考虑

$$T(r,g,b) = (s,s,s), \qquad s = 0.3r + 0.6g + 0.1b.$$

该模型不考虑舍入和非线性颜色编码。它在线性扩展到 $\mathbb{R}^3$ 时有三个完全相同的矩阵行。学生可以根据标准基向量的输出重构这些行。记 $u = (1,\ 1,\ 1)^{\mathsf{T}}$ 和 $w = (0.3,\ 0.6,\ 0.1)^{\mathsf{T}}$，得到 $T(x) = u(w^{\mathsf{T}}x)$。由于 $w^{\mathsf{T}}u = 1$，该变换固定灰度直线上的每个点，并满足 $T^2 = T$：它是一个线性投影。

分类账区分了到达灰度直线与将其固定的不同，并追问哪些输入会变得无法区分。一种说明性的解释是：“每个输出都是灰色的，所以这是一个投影。”但当 w 被替换为 $0.9w$时，这种解释便失效了：输出仍然是灰度的，但再次应用会改变每个非零灰度输入。修复提示要求学生将映射应用两次，并找出缺失的条件。修复后的论述区分了属于值域与幂等性。另一方面，$(0.5,\ 0.5,0.5)$ 和 $(0.7,0.4,\ 0.5)$ 具有相同的输出；它们的差异位于核中，即映射到零的集合。

基向量作用、核与幂等性构成三个单元。对相异映射和输入进行分类编目，可以揭示不同的解释义务；抽象与综合将坐标步骤同其代数性质和几何性质联系起来。由此得到的变换成为可供复合的对象，其表征和论证均可用于恢复。这种对数学工作的封装，有别于变换对颜色区别的丧失。

5.3 软件故障的契约

如果操作失败，如何在集合之间移动一个项目而不丢失或重复？职业现实主义关注可靠的状态变化；学科现实主义关注契约、执行轨迹及其论证；移动项目并察觉其丢失或重复，则提供了一个经验切入点。令可见状态由互不相交的集合 $(S,\ D)$ 构成，其中包含 $x \in S$。操作成功后必须得到 $(S \setminus \{x\},\ D \cup \{x\})$；若报告失败，则必须保留原来的集合对。

一种说明性的解释是：“先从源集合中移除，再添加到目标集合。”这涵盖了成功的情况。询问如果第二步失败会发生什么，就会暴露出丢失问题；调换顺序则会暴露出重复问题。对这些执行轨迹进行分类编目，便能让分类账呈现出各项对比：每个失败点上哪些内容可见，原来的并集是否得以保留，以及在开始时和报告成功或失败时，集合是否互不相交?

支持性修正可以从询问哪些工作能够在改变可见状态之前完成开始。构造过程先在临时副本中准备好新的集合对，再通过约定的原子替换将其安装；该替换要么完全成功，要么保持状态不变。之后不再有可能失败的步骤。修正后的解释必须涵盖所有允许发生的失败情况以及成功完成的情况。这个顺序抽象模型排除了并发和外部效应；高年级课程可以进一步探究替换原语。

契约、失败轨迹和修复构成三个可能的单元。综合提炼出一种准备与承诺模式，同时保留使其成立的假设。其数学内

T表 4：恰好一个构造的教学单元规范记录。

字段	规范
问题与学习成果	要求恰好一个选择，并论证两个方向。
先决条件	变量、赋值、析取和两两排斥。
对比项	没有选择、一个选择、两个选择；必须使用与允许使用空闲。
学生任务	跟随并重构论述；准备一份解释，当已分配任务后，回答问题并阐明修复方案。
综合	将存在性与唯一性分开；保留可复用的构造并说明假设。
专家校准	在已说明的先决条件下，练习作出充分的论述。
学生环节	允许对修复后的论述进行解释、对话和表述，计数。

容包括状态关系以及关于执行的量化断言。这个例子还展示了单元如何在计算课程中组织数学推理。

6 规划学生与教师投入

问题清单记录了解释义务；单元规范将这些义务与先决条件、活动和时间联系起来。表 4 恰好以一个示例说明了这一区别。该单元可以出现在教师主导的数独论述中，也可以为后续的学生解释提供支持。

课时规划为准备、讲解、对话、修复和综合预留时间。较长的交流需要减少讲解次数或调整时间分配。综合可以贯穿整个课时进行，每项贡献只计一次。教师主导的教学展开则会以不同方式分配同样的可用时间。

学生工作量包括参与完整课程时段、预先准备和后续学习。欧洲学分转换与累积系统（ECTS）将学分与学习成果及学习活动的工作量联系起来（欧盟委员会 2015）。应按照明确的核算约定，区分主动教学时间、排定的学习时段和独立学习。休息和过渡也会占用时间，不能简单地将其重新划作额外学习时间。单元数量用于组织内容，而活动则决定工作量。

学生群体规模和可用课时限制了个人展示的机会。重复尝试和教师主导课程也必须与课程安排相契合。学生群体规模较大时，可能需要安排平行课程时段，并配备教学资源，采用共同的问题和评价标准。选取部分全体会议发言，则能以不同方式分配展示机会。

教师投入包括内容编写、准备示例、开展对话、评估解释以及维护材料。准备工作可以从现有说明和一个未解决的台账问题着手。初始记录应指出预期解释、其先决条件、一个有用的对比，以及需要保留的联系。满足这些要求后，其他示例和扩展可以留待以后处理。这样既为准备工作提供了起点和范围边界，也不要求预先设想所有可能遇到的困难。

同一份记录可以通过简洁呈现当前问题、关键区分和预期综合，为实时导引提供支持。重复使用时应避免重复文档。简短的备注可以保留一个未解决问题，留待日后修订；教师无须立即跟进每一项联系。这些都是支持持续投入的建议做法，其实用性必须结合维护它们所需的工作来评估。如果准备或后续跟进变得过于繁重，

该设计需要简化，或需要额外资源。

7 讨论

7.1 设计选择与权衡

整合性问题检验各单元能否构成连贯的论述；若内容支离破碎，则可增设一个联系各部分的单元或进行重构。准备工作可以促进对话，但也会增加课外工作量。小组排练会占用课堂接触时间，而直接讲授既能确立先决条件和标准，也会压缩展示时间。学生选择允许学生在既定学习成果范围内拓展学习。规划能使这些调整明确呈现。

这些示例确立了计算方面的重点，同时并未穷尽所有可能的应用。工程课程可以围绕微分方程模型组织各单元，将稳态解与满足初始条件的瞬态解进行对比。其分类账将用于检验假设、解释以及各解之间的关系。这是对设计流程的一种可能扩展，需要进行课程专属开发与评估。

7.2 学生与教师的参与条件

学生和教师的参与条件都应纳入设计之中。预先提供材料可以让预期更加明确，同时将启动、阅读和时间管理安排在课堂之外。小组准备会增加协调与社交方面的要求；口头解释则意味着，自发语言表达和公开表现与数学理解同样重要。

对患有注意缺陷多动障碍和/或特定学习障碍的 STEM学生进行的访谈，描述了主动学习带来的益处与障碍（Pfeifer、Cordero 和 Stanton2023年）。一项针对报告自闭症诊断的大学生开展的调查，指出了他们的学业优势，以及社交和学习环境方面的困难（Gurbuz、Hanley 和 Riby 2019）。对多个神经多样性群体中的学生进行的访谈也表明，小组合作的情况会因组织方式和人际条件而异（Salvatore、White 和 Podowitz-Thomas2024年）。这些发现促使我们关注可及性，但并不能证明所提出的方法对某一诊断群体有效。

可调整条件包括提前提供提示、安排准备步骤、个人排练、提供笔记或图表、设置停顿、提出可预期的问题，以及安排较安静或规模较小的听众群体。如果小组合作并非预期成果，也可以继续提供个人准备的机会。口头交流仍是核心，评估时应关注数学贡献，而非是否能迅速在众人面前参与。相关决定应根据学习者的需求和适用安排作出，不应根据诊断来指定教学风格或数学学习方向。

教师注意缺陷多动障碍使准备与教学的可持续性成为关注焦点。Clark 和 Jones 报告了语言教师在启动和组织工作方面遇到的困难，以及模板和重复使用材料等策略；一些参与者还描述了代价高昂的过度备课（Clark 和 Jones 2026）。Hamilton 及其同事对职业生涯早期的学者进行访谈，显示备受重视的多样性和自主性如何与过度承诺和精疲力竭并存（Hamilton 等人2026）。这些论述指出了相关的要求与权衡，但并未证实这种方法论对患有注意缺陷多动障碍的教师是否有效。

应用于此处时，这些发现促使我们关注如何着手准备、控制准备范围，并在各项教学职责之间持续投入精力。明确界定的问题能够让下一步准备工作清晰具体，而可重复使用的单元和简明的分类账则有助于保留先前的决策。预先准备好的综合要点便于灵活调整，无须在课堂上临时组织完整论述。这些支持必须保持可调整性：详尽的记录本身也可能成为维护负担。评估应同时考察教学成效及其给教师带来的持续成本。

7.3 范围与评估

本文从教学实践中发展出一种方法论，并通过设计分析实例加以考察；对其教育效果进行系统评估仍有待未来开展。数学论证和有限检验确立了这些示例的性质，而学习、参与和工作量则需要各自进行评估。

翻转数学文献指出，有必要考察活动及其条件，而不应只关注教学形式。Maciejewski 在一项大规模微积分比较研究中报告了学习达成度方面的差异；Hardebolle 及其同事开展的一项为期多年的线性代数研究则发现，平均学习达成度没有显著优势，并考察了不同先备知识水平和性别学生的不同表现模式（Maciejewski2016；Hardebolle 等人 2022）。Feudel 和 Fehlinger 为在翻转教学安排中进行专家建模提供了一个贴近的先例（Feudel 和 Fehlinger2023年）。本文将这一功能与学生解释、支持性修正和课程编写结合起来。

评估可以记录专家论述达到充分程度所需的时间，并记录学生作业揭示了哪些先决条件或边界。评估应将这种校准与学生活动和总工作量区分开来，同时考察准备工作量、重复使用和维护，以及支持、综合和参与情况。修正后的解释、后续重构和适应涉及不同的学习成果；比较时需要关注先备知识和评估条件。

可以通过现实主义视角和指南针所支持的问题、对比项与修订来考察它们。压缩涉及构造的用途及其可还原的依据，单凭简洁无法确立这些内容。台账修订可以追踪反馈如何改变课程设计；学生参与内容编写仍是一个有待进一步研究的问题。该方法的核心承诺是，让理解具体到足以进行规划、解释和考察，同时使学生的数学学习逐渐形成更紧密、更可复用的关联。

8 致谢

本研究的部分工作是在意大利的里雅斯特阿卜杜斯·萨拉姆国际理论物理中心（ICTP）完成的。本研究获得了普拉尤拉伊·多布里拉大学信息学学院的内部项目经费支持。

8.1 AI 辅助

2026年11月，OpenAI ChatGPT 和 Codex 协助开展文献检索、手稿起草与修订，并开发补充验证脚本。作者从草稿入手，随后通过书面指示和口头意见指导工作，并审阅各版草稿；内容仍由作者负责。

9 伦理与材料获取

本文介绍了一种以实践为依据的概念性方法论，并构建了数学分析。本文未收集或分析任何人类参与者数据。文中作为例证的学生讲解和修复均为构造示例，并非可识别学生的访谈记录或评估。对教学安排的描述并未报告个别学生记录，也未证实任何教育效果。补充材料提供了数学细节、拟议的单元图、验证代码及其输出。

10 利益冲突

作者声明不存在利益冲突。

11 参考文献

Artigue, Michèle 和 Morten Blomhøj（2013）。“数学中的探究式教育概念化”。载于：ZDM 45.6，第797–810页。doi：10.1007/s11858-013-0506-6。网址：https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-013-0506-6。Artigue, Michèle、Marianna Bosch 等（2020）。“探究式数学教育与学习轨迹的发展”。载于：《数学与计算机科学教学》18.3，第63–89页。doi：10.5485/TMCS.2020.0505。网址：https://ojs.lib.unideb.hu/tmcs/article/download/10989/9748。Barnard, Tony 和 David Tall（1997）。“认知单元、联系与数学证明”。载于：国际数学教育心理学组第21届会议论文集。Erkki Pehkonen 编。第2卷，第41–48页。网址：https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED416083.pdf。Beck, Kent（2003）。《测试驱动开发：实例》。第1版。Addison-Wesley Professional。isbn：9780321146533。网址：https://www.informit.com/store/test-driven-development-by-example-9780321146533。Biggs, John（1996年）。“通过建构性对齐提升教学效果”。载于：《高等教育》32.3，第347–364页。doi：10.1007/BF00138871。Black, Paul 和 Dylan Wiliam（2009）。“形成性评价理论的发展”。载于：教育评估、评价与问责 21.1，第5–31页。doi：10.1007/s11092-008-9068-5。网址：https://kclpure.kcl.ac.uk/ws/portalfiles/portal/9119063/Black2009_Developing_the_theory_of_formative_assessment.pdf。Borovik, Alexandre V.（2010）。《显微镜下的数学：数学实践认知方面札记》。美国罗得岛州普罗维登斯：美国数学学会。isbn：9780821847619。doi：10.1090/mbk/071。网址：https://doi.org/10.1090/mbk/071。Bosch, Marianna 等编（2020）。《数学教育中的教学人类学理论实践：综合案例集》。阿宾登和纽约：Routledge。isbn：9780429198168。doi：10.4324/9780429198168。网址：https://doi.org/10.4324/9780429198168。Brousseau, Guy（2006）。“数学教育研究 / Recherches en éducation mathématique”。载于：《教学研究笔记》16，第11–26页。网址：https://sites.unipa.it/grim/quad16_Brousseau_06.pdf。Cerna, David M. 等（2020）。“计算机科学第一学期的计算逻辑：经验报告”。载于：第12届计算机辅助教育国际会议论文集。第2卷。SciTePress，第374–381页。isbn：978-989-758-417-6。doi：10.5220/0009464403740381。网址：https://www.fmv.jku.at/papers/CernaSeidlSchreinerWindsteiger Biere-CSEDU20.pdf. Chen、Ouhao、Fred Paas 和 John Sweller（2023）。《通过元素交互性定义和测量任务复杂性的认知负荷理论方法》。载于：《教育心理学评论》35，第 63 页。DOI：10.1007/s10648-023-09782-w。Chevallard，Yves（2019）。《引入教学人类学理论：尝试一种有原则的方法》。载于：《广岛数学教育杂志》12，第 71–114 页。DOI：10.24529/hjme.1205。URL：https://www.jstage.jst.go.jp/article/hjme/12/0/12_1205/_文章。Chi，Michelene T. H. 等（1994）。《引发自我解释有助于提升理解》。载于：《认知科学》18.3，第 439–477 页。DOI：10.1207/s15516709cog1803_3。URL：https://education.asu.edu/sites/g/files/litvpz656/files/lcl/chideleeuwchiulavancher_2.pdf。

Clark，Gretchen 和 Marc Jones（2026）。《ADHD语言教师的职场经历》。载于：*European Journal of Education & Language Review* 2.2，第 4 页。DOI：10.20897/ejelr/19337。URL：https://www.lectitopublishing.nl/download/workplace-experiences-of-language-teachers-with-adhd-19337.pdf。Cowan，Nelson（2001）。《短时记忆中的神奇数字 4：重新审视心理存储容量》。载于：*Behavioral and Brain Sciences* 24.1，第 87–114 页。DOI：10.1017/S0140525X01003922.

Davis, Philip J. 和 Reuben Hersh（1981）。《数学体验》。波士顿：Birkhäuser。isbn：376433018X。欧盟委员会（2015）。ECTS用户指南（2015）。卢森堡：欧盟出版局。doi：10.2766/87592。url：https://education.ec.europa.eu/sites/default/files/document-library-docs/ects-users-guide_en.pdf。Feudel, Frank 和 Luise Fehlinger（2023）。“在一门以证明为导向的高等数学课程中采用讲授型翻转课堂”。载于：International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 54.1，第46–73页。doi：10.1080/0020739X.2021.1949057。url：https://edoc.hu-berlin.de/items/db7aa58e-f841-43cb-bc23-a91f694e9075。Fiorella, Logan 和 Richard E. Mayer（2013）。“以教促学与教学预期的相对益处”。载于：Contemporary Educational Psychology 38.4，第281–288页。doi：10.1016/j.cedpsych.2013.06.001。url：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0361476X13000209。Freudenthal, Hans（1983）。《数学结构的教学现象学》。第1卷。数学教育丛书。多德雷赫特：D. Reidel。isbn：9027715351。doi：10.1007/0-306-47235-X。—（1991）。《重访数学教育：中国讲座》。第9卷。数学教育丛书。多德雷赫特：Kluwer Academic Publishers。isbn：9780792312994。doi：10.1007/0-306-47202-3。url：https://link.springer.com/book/10.1007/0-306-47202-3。Gentner, Dedre 和 Virginia Gunn（2001）。“结构对齐有助于注意到差异”。载于：Memory & Cognition 29.4，第565–577页。doi：10.3758/BF03200458。url：https://groups.psych.northwestern.edu/gentner/papers/GentnerGunn01.pdf。Gravemeijer, Koeno 和 Michiel Doorman（1999）。“现实数学教育中的情境问题：以微积分课程为例”。载于：Educational Studies in Mathematics 39.1–3，第111–129页。doi：10.1023/A:1003749919816。url：https://webspace.science.uu.nl/~doorm101/proo/docs/ESM-artikel.pdf。Gray, Eddie M. 和 David O. Tall（1994）。“对偶性、模糊性与灵活性：简单算术的过程概念观”。载于：Journal for Research in Mathematics Education 25.2，第116–140页。doi：10.2307/749505。Gurbuz, Emine、Mary Hanley 和 Deborah M. Riby（2019）。“自闭症大学生：在英国的大学社交与学业经历”。载于：Journal of Autism and De- velopmental Disorders 49，第617–631页。doi：10.1007/s10803-018-3741-4。url：https://link.springer.com/article/10.1007/s10803-018-3741-4。Hamilton, Lorna G. 等（2026）。“‘情境的意义’：患有注意缺陷多动障碍的职业生涯早期学者工作生活中的契合、摩擦与功能”。载于：PLOS ONE 21.10，e0361208。doi：10.1371/journal.pone.0361208。url：https://journals.plos.org/plosone/article?id=10.1371/journal.pone.0361208。Hardebolle, Cécile 等（2022）。“性别、先备知识以及翻转线性代数课程对工程师的多年影响”。载于：Journal of Engineering Education 111.3，第554–574页。doi：10.1002/jee.20467。Hettinger, Raymond（2019a）。《现代求解器：定义明确的问题就是已解决的问题》。PyCon US。url：https://us.pycon.org/2019/schedule/presentation/149/（访问于2026年11月21日）。—（2019b）。SAT求解器。US PyCon文档。url：https://rhettinger.github.io/einstein.html（访问于2026年11月21日）。

Jong, Ton de（2010）。“认知负荷理论、教育研究与教学设计：一些值得思考的问题”。载于：Instructional Science 38.2，第105–134页。doi：10.1007/s11251-009-9110-0。Kluger, Avraham N. 和 Angelo DeNisi（1996）。“反馈干预对绩效的影响：历史回顾、元分析及初步反馈干预理论”。载于：Psychological Bulletin 119.2，第254–284页。doi：10.1037/0033-2909.119.2.254。Koh, Aloysius Wei Lun、Sze Chi Lee 和 Stephen Wee Hun Lim（2018）。“教学的学习益处：提取练习假说”。载于：《应用认知心理学》32.3，第401–410页。doi：10.1002/acp.3410。Kurnik, Zdravko（2002）。“问题教学”。载于：《MiŠ—数学与学校》3.15，第196–202页。url：https://mis.element.hr/wp-content/uploads/protected/15-02.pdf?article=429。—（2006）。“启发式教学”。载于：《MiŠ—数学与学校》7.34，第148–153页。url：https://misbeta.element.hr/fajli/402/34-02.pdf。—（2008）。“数学教学的科学性”。载于：《教学法》9.17，第318–327页。url：https:// hrcak.srce.hr/34802。Lantolf, James P. 和 Matthew E. Poehner（2011）。“课堂中的动态评估：促进第二语言发展的维果茨基实践”。载于：《语言教学研究》15.1，第11–33页。doi：10.1177/1362168810383328。url：https://pure.psu.edu/en/publications/dynamic-assessment-in-the-classroom-vygotskian-praxis-for-second-/。Lynce, Inês 和 Joël Ouaknine（2006）。“数独作为SAT问题”。载于：人工智能与数学第九届国际研讨会论文集。AIMATH 2006；9页。url：https://people.mpi-sws.org/~joel/publications/sudoku05.pdf。Maciejewski, Wes（2016）。“翻转微积分课堂：一项评估性研究”。载于：Teaching Mathematics and its Applications 35.4，第187–201页。doi：10 . 1093 / teamat / hrv019。url：https : // scholarworks.sjsu.edu/faculty_rsca/481/。Merrill, M. David（2001）。“教学要素：迈向教学设计的理论工具”。载于：Instructional Science 29.4–5，第291–310页。doi：10.1023/A:1011943808888。url：https://mdavidmerrill.wordpress.com/wp-content/uploads/2019/04/components_of_instruction-1.pdf。Nicol, David J. 和 Debra Macfarlane-Dick（2006）。“形成性评价与自我调节学习：良好反馈实践的模型与七项原则”。载于：《高等教育研究》31.2，第199–218页。doi：10.1080/03075070600572090。url：https://strathprints.strath.ac.uk/ 3235/1/nicol-2006-Formative-assessment.pdf。Otten, Samuel 等（2023）。“捕捉翻转式数学教学中结构变异的框架”。载于：International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 54.5，第639–670页。doi：10.1080/0020739X.2021.1958945。Pfeifer, Mariel A.、Julio J. Cordero 和 Julie Dangremond Stanton（2023）。“我希望我的教师了解的事：主动学习如何影响患有注意缺陷多动障碍和特定学习障碍的STEM专业学生的课堂体验与自我倡导”。载于：《CBE—生命科学教育》22.1，ar2。doi：10.1187/cbe.21-12-0329。url：https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/ PMC10074275/。Pólya, George（1954）。《数学与似然推理》第一卷：数学中的归纳与类比。普林斯顿，新泽西州：普林斯顿大学出版社。doi：10 . 2307 / j . ctv14164db。url：https://www.jstor.org/stable/j.ctv14164db。Salvatore, Sophia、Claudia White 和 Stephen Podowitz-Thomas（2024）。“‘并非千篇一律的情况’：神经多样性学生如何体验STEM课程中的小组合作”。载于：International Journal of STEM Education 11，47。doi：10 . 1186 / s40594 - 024 - 00508 - 0。url：https://link.springer.com/article/10.1186/s40594-024-00508-0。Schwieger, Dana 和 Ken Surendran（2013年4月）。“信息技术管理：采用评估驱动方法进行课程再设计”。载于：《信息系统教育期刊》11.2，第23–35页。url：https://isedj.org/2013-11/N2/ISEDJv11n2p23.pdf。

Sfard, Anna (1991).《数学观念的二重本质：关于过程与对象是同一枚硬币不同面的思考》。载于：Educational Studies in Mathematics 22.1，第 1–36 页。doi：10.1007/BF00302715。网址：https://www.fisme.science.uu.nl/publicaties/ literatuur/1991_sfard_DualNature.pdf。Shanahan, Timothy 和 Cynthia Shanahan (2008)。“向青少年教授学科读写能力：重新思考学科领域读写能力”。载于：《哈佛教育评论》78.1，第 40–59 页。doi：10 . 17763/haer.78.1.v62444321p602101。网址：https://www.fldoe.org/core/fileparse.php/7539/urlt/Mod4-TDLS.pdf。Sinz, Carsten (2005)。“面向布尔基数约束的最优合取范式编码”。载于：Principles and Practice of Constraint Programming—CP 2005。Peter van Beek 编。第 3709 卷。《计算机科学讲义》。柏林、海德堡：施普林格，第 827–831 页。doi：10.1007/11564751_73。网址：https://www.carstensinz.de/papers/CP-2005.pdf。Spanjers, Ingrid A. E. 等 (2012)。“解释动画学习中的分段效应：暂停和时间提示的作用”。载于：《计算机与教育》59.2，第 274–280 页。doi：10 . 1016 / j . compedu . 2011 . 12 . 024。网址：https : / / cris . maastrichtuniversity . nl / ws / files/72615120/spanjers_2012_explaining_the_segmentations_effect.pdf。Tabbers, Huib K. 和 Bastiaan de Koeijer (2010)。“动画多媒体教学中的学习者控制”。载于：《教学科学》38，第 441–453 页。doi：10 . 1007 / s11251 - 009 - 9119 - 4。网址：https://link.springer.com/article/10.1007/s11251-009-9119-4。Wiley II, David A. (2000)。“将学习对象与教学设计理论相联系：定义、隐喻与分类法”。载于：《学习对象的教学应用：在线版》。David A. Wiley 编。在线版。网址：https://mari.usc.edu/wesrac/wired/bldg-7_file/wiley.pdf。