arXiv:2611.28900v1 [math.AC] 21 Nov 2026

$\mathcal{PGF}=\mathcal{GP}$ 上的交换诺特环

YUHUI HUA*、SHUN-JIE LI 和 CHENCHENG ZHANG

摘要。我们证明了在每个交换诺特环上，$\mathcal{PGF}=\mathcal{GP}$ 。

1. 引言

设 R 为一个环。若模 ${}_RM$ 是正合投射复形 $\mathbf{P}$ 的一个圈，并且对于每个投射模 ${}_RQ$，$\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}\ Q)$ 都是正合的，则称其为*Gorenstein* 投射 模；若它是正合平坦复形 $\mathbf{F}$ 的一个圈，并且对于每个内射模 ${}_RJ$，$J\otimes_R\mathbf{F}$ 都是正合的，则称其为*Gorenstein* 平坦 模；若它是正合投射复形 $\mathbf{P}$ 的一个圈，并且对于每个内射模 J_R，$J\otimes_R\mathbf{P}$ 都是正合的，则称其为投射余解 *Gorenstein* 平坦 模。我们分别用$\mathcal{GP}(R)$、$\mathcal{GF}(R)$和$\mathcal{PGF}(R)$表示 Gorenstein 投射模、Gorenstein 平坦模和投射余解 Gorenstein 平坦模的类。

Gorenstein 投射模扩展了 Auslander–Bridger 的 G-维数为零的模[2], 现代定义见 [10] 。Enochs、Jenda 和 Torrecillas 在 1993 [9]中引入了 Gorenstein 平坦模。已知 (GP(R), GP(R)$^{\perp_1}$) 是遗传余挠对[6, 推论 3.4(1)]；一般而言，(GP(R), GP(R)$^{\perp_1}$) 是否完备，或 GP(R) 是否存在预覆盖，仍未解决 [7, 问题 7。2]2020 年，Šaroch 和 Šťovíček 引入了投射余解 Gorenstein 平坦模，并证明 (PGF (R), PGF (R)$^{\perp_1}$) 是完备遗传余挠对 [18, 定理 4。9], 因此 PGF (R) 存在特殊预覆盖。由于 PGF (R) $\subseteq$GP(R)，且 PGF(R) 具有良好的同调性质，自然会问 PGF (R) 是否 $=$ GP(R)。根据 [13, 18], ，这等价于 Holm 先前提出的问题：GP(R) 是否 $\subseteq$ GF(R)；参见 [11] （另见 [8, 备注 4.5(4)]）。最近，有人在一个 Krull 维数零的交换凝聚环上发现了一个非 Gorenstein 平坦的 Gorenstein 投射模 [19]„ 从而回答了 Holm 的问题。

已有若干关于交换诺特环满足$\mathcal{GP}(R)\ \subseteq\mathcal{GF}(R)$的充分条件。2004 年，Holm 证明了对于大有限投射维数 FPD(R) 有限的右凝聚环，$\mathcal{GP}(R)\ \subseteq\mathcal{GF}(R)$；见 [12, 命题 3.1]。2011 年，Murfet 和 Salarian 证明，对于 Krull 维数有限的交换诺特环上的投射模复形，全正合性与 F-全正合性等价；见 [17, 引理 4.20]。2018 年，Christensen 和 Kato 证明，对于满足 $\sup\{\mathrm{pd}_R F\ |$的交换凝聚环，完全无圈的投射模复形是 F-完全无圈的。

F 是平坦的$\}\ <\infty$；见 [5, 推论 2.5]。他们还证明，对于每个 $\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}\,R$，若 $\mathrm{pd}_R R_{\mathfrak{p}}<\infty$，则该结论对交换诺特环成立；见 [5, 推论 2.8]。2020 年，Iacob 证明，在任意环 R 上，若对任意内射右 R-模 J 都有 $\mathrm{fd}_R J<\infty$，则 $\mathcal{PGF}(R)=\mathcal{GP}(R)$；见 [13, 命题 9]。同样在 2020 年，Šaroch 和 Šťovíček 对右$\aleph_0$-凝聚环，证明了$\mathcal{PGF}(R)$与由可数表示的 Gorenstein 投射模过滤而成的 Gorenstein 投射模子类相同；见 [18,定理 4.9]。

I本文证明，对于每个交换诺特环，$\mathcal{PGF}(R)=\mathcal{GP}(R)$ g.

2020 数学主题分类。主要分类 13D05；次要分类 13D02，13D45。关键词和短语。Gorenstein 投射模、投射余解 Gorenstein 平坦模、全正合复形、Čech 复形。*通讯作者。作者受到国家自然科学基金（编号：12131015）的资助。

定理。 设$\mathbf{P}$ 是交换诺特环 R 上的投射模无圈复形。那么以下条件等价。

(1) $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}\ Q)$ 对每个 $Q \in$ 投射模范畴(R)均无圈。
(2) $J \otimes_R \mathbf{P}$ 对每个 $J \in$ 内射模范畴(R)均无圈。

已知 (2) 蕴含 (1) [17, 引理 4.20(ii)]。现在我们证明其逆命题。

2. 主定理的证明

固定 $\mathbf{P}$ ，使得对每个 $Q \in \mathrm{Proj}(R)$，$\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}\ Q)$ 均无圈。

引理 2.1. 对于 $a \in R$，记 $R_a = \{1, a, a^2, \ldots\}^{-1}R$。则 $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}\ R_a)$ 无圈。

证明。 将 $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}\ -)$ 作用于正合列 $0 \to R^{(\aleph_0)} \xrightarrow{e_i - ae_{i+1}} R^{(\aleph_0)} \to R_a \to 0$并应用同调代数基本定理。 □

任取一个极大理想 R 及其一组生成元，记作$\mathfrak{m} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$。将 Čech 复形写作 $\check{C}_{\mathfrak{m}} = \bigotimes_{i=1}^{n} [R \xrightarrow{\text{典范}} R_{a_i}]$。

引理 2.2. $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}, \check{C}_{\mathfrak{m}})$是无圈的。

证明。 注意 $R_a \otimes_R R_b \cong R_{ab}$。由引理 2.1，$\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}, (\check{C}_{\mathfrak{m}})^i)$ 对每个$i \in \mathbb{Z}$都是无圈的。由于 $\check{C}_{\mathfrak{m}}$ 是有界的，归纳可得，$\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}, \check{C}_{\mathfrak{m}})$ 是无圈的。 □

现在我们转向 $R_{\mathfrak{m}}$，即局部环 $R_{\mathfrak{m}}$ 在其极大理想处的完备化。记

$$(-)_{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}} : \mathrm{Mod}_R \longrightarrow \mathrm{Mod}_{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}}, \qquad X \longmapsto \widehat{R_{\mathfrak{m}}} \otimes_R X.$$

事实 2.3。 如果 $X \in$模范畴$_R$ 中的每个元素都被 $\mathfrak{m}$ 的某个幂所湮灭，那么典范映射 $X \to X_{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}}$是一个同构 [3, 引理 1]。函子 $(-)_{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}}$是正合的，也就是说， $R_{\mathfrak{m}}$是一个平坦的 R-模 [1, 命题 10.14]。

引理 2.4。 $\mathrm{Hom}_{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}}(\mathbf{P}_{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}}, (\check{C}_{\mathfrak{m}})_{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}})$ 是无圈的。

证明。根据 [4, 定理 5.1.20], , $\check{C}_{\mathfrak{m}}$ 的同调群中的每个元素都被 $\mathfrak{m}$ 的某个幂所湮灭；由事实 2.3，典范映射 $\check{C}_{\mathfrak{m}} \to (\check{C}_{\mathfrak{m}})_{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}}$ 是一个拟同构。由于 P 是一个投射复形，函子 $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{P}\ -)$ 保持有界复形之间的拟同构。于是由引理 2.2，$\mathrm{Hom}_R(\mathrm{P}, (\check{C}_{\mathfrak{m}})_{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}})$ 是无圈的。最后，我们有

$$\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}, (\check{C}_{\mathfrak{m}})_{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}}) \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}}(\widehat{R_{\mathfrak{m}}} \otimes_R \mathbf{P}, (\check{C}_{\mathfrak{m}})_{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}}) \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}}(\mathbf{P}_{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}}, (\check{C}_{\mathfrak{m}})_{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}}). \qquad \square$$

I在下面的讨论中，我们通过以下同构将 $(\check{C}_{\mathfrak{m}})_{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}}$与 $\check{C}_{\mathfrak{m}\widehat{R_{\mathfrak{m}}}}$等同起来 s

$$(\check{C}_{\mathfrak{m}})_{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}} = \widehat{R_{\mathfrak{m}}} \otimes_R \check{C}_{\mathfrak{m}} \cong \bigotimes_{i=1}^{n} [\widehat{R_{\mathfrak{m}}} \xrightarrow{\text{canonical}} (\widehat{R_{\mathfrak{m}}})_{a_i}] = \check{C}_{\mathfrak{m}\widehat{R_{\mathfrak{m}}}}.$$

这里， $\widehat{R_{\mathfrak{m}}}$ 是一个带有极大理想 $\mathfrak{m}\widehat{R_{\mathfrak{m}}}$的局部环，而 $\check{C}_{\mathfrak{m}\widehat{R_{\mathfrak{m}}}}$ 是由 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 诱导的 Čech 复形。令 κ 为 $R_{\mathfrak{m}}$的剩余域。记 $E = E_{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}}(\kappa)$ 及对偶

$$(-)^\vee : (\mathrm{Mod}_{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Mod}_{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}}, \quad X \mapsto \mathrm{Hom}_{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}}(X, E).$$

这里， E 是一个内射余生成元 [15, p. 528]，因此 $(-)^\vee$ 保持并反映正合性。

引理 2.5. $(\check{C}_{\mathfrak{m}\widehat{R_{\mathfrak{m}}}})^\vee \otimes_{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}} \mathbf{P}_{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}}$是无圈的。

证明。首先证明典范映射 $\check{}\,C_{\mathfrak{m}\widehat{R_{\mathfrak{m}}}} \to (\check{}\,C_{\mathfrak{m}\widehat{R_{\mathfrak{m}}}})^{\vee\vee}$ 是拟同构。根据 [4, 定理 7.1.3], , $\check{}\,C_{\mathfrak{m}\widehat{R_{\mathfrak{m}}}}$ 的上同调群都是阿廷 $\widehat{R_{\mathfrak{m}}}$ 模。此外, $\widehat{R_{\mathfrak{m}}}$ 是完备诺特的, 由 [15, 推论 4.3(3)], 可得, 对于每个 $i \in \mathbb{Z}$, 都有 $H^i(\check{}\,C_{\mathfrak{m}\widehat{R_{\mathfrak{m}}}}) \cong (H^i(\check{}\,C_{\mathfrak{m}\widehat{R_{\mathfrak{m}}}}))^{\vee\vee}$。由于 $(-)^\vee$ 是正合的, 对于每个 $i \in \mathbb{Z}$, 都有 $(H^i(\check{}\,C_{\mathfrak{m}\widehat{R_{\mathfrak{m}}}}))^{\vee\vee} \cong H^i((\check{}\,C_{\mathfrak{m}\widehat{R_{\mathfrak{m}}}})^{\vee\vee})$。因此

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}}(\mathbf{P}_{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}}, \check{C}_{\mathfrak{m}\widehat{R_{\mathfrak{m}}}}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}}(\mathbf{P}_{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}}, (\check{C}_{\mathfrak{m}\widehat{R_{\mathfrak{m}}}})^{\vee\vee}) \cong ((\check{C}_{\mathfrak{m}\widehat{R_{\mathfrak{m}}}})^{\vee} \otimes_{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}} \mathbf{P}_{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}})^{\vee}$$

是拟同构。根据引理 2.4, $((\check{}\,C_{\mathfrak{m}\widehat{R_{\mathfrak{m}}}})^{\vee} \otimes_{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}} \mathbf{P}^{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}})^{\vee}$ 是无圈的。由于 $(-)^\vee$ 反映正合性, $(\check{}\,C_{\mathfrak{m}\widehat{R_{\mathfrak{m}}}})^{\vee} \otimes_{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}} \mathbf{P}^{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}}$ 是无圈的。 □

命题 2.6。 $J \otimes_{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}} \mathbf{P}^{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}}$ 对每个内射模 $J \in \mathrm{Inj}(R_{\mathfrak{m}})$ 都是无圈的。

证明。在本证明中, [17, § 6] 作为主要材料。由 [14, (2.4.2)], $(\check{}\,C_{\mathfrak{m}\widehat{R_{\mathfrak{m}}}})^{\vee}$ 是 $\widehat{R_{\mathfrak{m}}}$ 上的对偶化复形。由于 $\check{}\,C_{\mathfrak{m}\widehat{R_{\mathfrak{m}}}}$ 是平坦模的有界复形, $(\check{}\,C_{\mathfrak{m}\widehat{R_{\mathfrak{m}}}})^{\vee}$ 是内射模的有界复形, 因此 $(\check{}\,C_{\mathfrak{m}\widehat{R_{\mathfrak{m}}}})^{\vee}$ 满足 [17,§ 6, Setup] 中的条件。根据引理 2.5, $(\check{}\,C_{\mathfrak{m}\widehat{R_{\mathfrak{m}}}})^{\vee} \otimes_{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}} \mathbf{P}^{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}}$ 是无圈的。于是根据 [17, 命题 6.1], $J \otimes_{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}} \mathbf{P}^{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}}$ 对每个内射 $R_{\mathfrak{m}}$-模 J 都是无圈的。 □

注 2.7. 该命题表明 $PGF(R_{\mathfrak{m}}) = GP(R_{\mathfrak{m}})$。

引理 2.8. $J \otimes_{R_{\mathfrak{m}}} \mathbf{P}^{R_{\mathfrak{m}}}$ 对每个 $J \in$ 内射模范畴$(R_{\mathfrak{m}})$都是无圈的。

证明。典范映射 $J \to R_{\mathfrak{m}} \otimes_{R_{\mathfrak{m}}} J$ 是单射 [16, 定理 56]。取一个 包络 $R_{\mathfrak{m}} \otimes_{R_{\mathfrak{m}}} J \to K$ 在 $R_{\mathfrak{m}}$ 上。则 J 是 K 的直和项（作为一个 $R_{\mathfrak{m}}$-模）。因此 $J \otimes_{R_{\mathfrak{m}}} \mathbf{P}^{R_{\mathfrak{m}}}$ 是 $K \otimes_{R_{\mathfrak{m}}} \mathbf{P}^{R_{\mathfrak{m}}} \cong K \otimes_{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}} \mathbf{P}^{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}}$ 的直和项（作为一个由 $R_{\mathfrak{m}}$-模构成的复形）。由于 $K \otimes_{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}} \mathbf{P}^{\widehat{R_{\mathfrak{m}}}}$ 由命题 2.6 可知是无圈的, $J \otimes_{R_{\mathfrak{m}}} \mathbf{P}^{R_{\mathfrak{m}}}$ 也是无圈的。 □

引理 2.9. $J \otimes_R \mathbf{P}$ 对每个 $J \in$ 内射模范畴(R)都是无圈的。

证明。 由于 R 是诺特的, $J_{\mathfrak{m}}$ 是每个极大理想 $R_{\mathfrak{m}}$ 对应的内射 $\mathfrak{m}$-模, 且 $J \in \mathrm{Inj}(R)$, 由 [16, § 18, 引理 5]。由引理 2.8, $(J \otimes_R \mathbf{P})_{\mathfrak{m}} \cong J_{\mathfrak{m}} \otimes_{R_{\mathfrak{m}}} \mathbf{P}_{\mathfrak{m}}$ 对每个极大理想 $\mathfrak{m}$ 都是无圈的, 因此 $J \otimes_R \mathbf{P}$ 是无圈的。 □

推论 2.10。 设 R 是交换诺特环, 则对于无圈复形 $\mathbf{P}$ （其各项均为投射 R-模）, 以下各条件等价:

(1) $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}, Q)$ 对每个 $Q \in \mathrm{Proj}(R)$ 都是无圈的。(2) $J \otimes_R \mathbf{P}$ 对每个 $J \in \mathrm{Inj}(R)$ 都是无圈的。(3) $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}, R^{(\aleph_0)})$ 是无圈的。(4) $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}, F)$ 对每个 $F \in \mathrm{Flat}(R)$ 都是无圈的。

证明。显然有 (4) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (3)。在 (3) 的条件下, 引理 2.1 仍然适用, 而主定理证明的其余部分给出 (2)。在 (2) 的条件下, 每个 $Z^i\mathbf{P}$ 都是一个 $\mathcal{PGF}$ 模, 并且根据 [18, 定理 4.4], $\mathrm{Ext}^1_R(Z^i\mathbf{P}, F) = 0$ 对于每个平坦模 F 以及每个 $i \in \mathbb{Z}$ 均成立。对每个 $0 \to Z^i\mathbf{P} \to \mathbf{P}^i \to Z^{i+1}\mathbf{P} \to 0$ 应用 $\mathrm{Hom}_R(-, F)$, 即可得到 (4)。 □

参考文献

[1] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, 《交换代数导论》, Addison-Wesley 数学系列, Addison-Wesley, 马萨诸塞州雷丁, 1969。[2] M. Auslander, M. Bridger, 《稳定模论》, 美国数学会回忆录, 第 94 号, 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, 1969。[3] A. Beauville, Y. Laszlo, 《一个下降引理》, 巴黎科学院报告 数学系列 I, 320(3)(1995), 335–340。

[4] M. P. Brodmann, R. Y. Sharp，《局部上同调：兼具几何应用的代数导论》，第 2 版，剑桥高等数学研究丛书，第 136 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2013。[5] L. W. Christensen, K. Kato，全正合复形与局部 Gorenstein 环，《代数及其应用杂志》17(3)(2018)，1850039。[6] M. Cortés-Izurdiaga, J. Šaroch，由 Gorenstein 投射模及 λ-纯内射模生成的余挠对，《以色列数学杂志》273 (2026)，127–156。[7] S. Cox，逼近理论与初等子模型，《符号逻辑通报》，优先出版（2026），1–45。[8] N. Ding, Y. Li, L. Mao，强 Gorenstein 平坦模，《澳大利亚数学会杂志》86(3)(2009)，323–338。[9] E. E. Enochs, O. M. G. Jenda, B. Torrecillas，Gorenstein 平坦模，《南京大学学报（数学半年刊）》10(1)(1993)，1–9。[10] E. E. Enochs, O. M. G. Jenda，Gorenstein 内射模与投射模，《数学杂志》220(4)(1995)，611–633。[11] H. Holm，Gorenstein 投射模、内射模与平坦模，硕士论文，哥本哈根大学，哥本哈根，2000。[12] H. Holm，Gorenstein 同调维数，《纯粹与应用代数杂志》189(1–3)(2004)，167–193。[13] A. Iacob，投射余解 Gorenstein 平坦模与 Ding 投射模，《通讯代数》48(7)(2020)，2883–2893。[14] J. Lipman，局部上同调与对偶讲义，载于：《局部上同调及其应用》，G. Lyubeznik（编），纯粹与应用数学讲义，第 226 卷，Marcel Dekker，纽约，2001，第 39–89 页。[15] E. Matlis，Noether 环上的内射模，《太平洋数学杂志》8(3)(1958)，511–528。[16] H. Matsumura，《交换代数》，第 2 版，数学讲义丛书，第 56 卷，Benjamin/Cummings，马萨诸塞州雷丁，1980。[17] D. Murfet, S. Salarian，Noether 概形上的全正合复形，《数学进展》226(2)(2011)，1096–1133。[18] J. Šaroch, J. Šťovíček，奇异紧性与 Σ-余挠及 Gorenstein 模的可定义性，《精选数学》（新系列）26(2)(2020)，论文编号 23。[19] C. Zhang，带有$\mathcal{GP} \subsetneq \mathcal{GF}$的交换凝聚环，arXiv:2608.17748v3，2026。

上海交通大学数学科学学院，中国上海 200240电子邮箱：huayuhui@sjtu.edu.cn上海交通大学数学科学学院，中国上海 200240电子邮箱：lishunjie@sjtu.edu.cn上海交通大学数学科学学院，中国上海 200240电子邮箱：zhangchencheng@sjtu.edu.cn