arXiv:2611.28903v1 [math.OA] 21 Nov 2026

# 左–右算子分裂中的不变子空间与巢代数

Mark Spivack

英国剑桥大学应用数学与理论物理系，ms100@cam.ac.uk

2026年11月24日

**摘要**

粗糙表面散射边界积分方程的左右分裂法，将积分算子写成其下三角部分与严格上三角部分之和。本文考察由下三角（$L$型）部分构成的算子代数。它们的弱闭包是一个巢代数；具有希尔伯特–施密特核的第二类 $L$型算子具有 $L$型逆算子；Arveson 距离公式则用跨越单个切口的后向耦合来表示最佳仅前向近似可能达到的误差。针对二维双层核的界限与数值结果表明，截断近似接近最优；最坏情况下的输入场主要是左行掠射波，而非右行入射场的后向散射。对于硬表面，逆 $L$算子等于镜像表面的 $L$ 算子的四倍，误差仅相差一个二阶修正项。本文还提出了若干尚待解决的问题。

## 1 引言

本文探讨与表面散射算子分裂中出现的积分算子和不变子空间相关的一些算子代数概念，将由此得到的分析工具应用于该方法，并提出若干尚待解决的问题。

**动机：** 设 $A$ 是希尔伯特空间 $H$ 上的一个积分算子，其中的函数定义在 $\mathbb{R}^n$上或某个紧子集上；我们希望求解 $A\mathbf{u} = \mathbf{v}$，以求得$\mathbf{u} = A^{-1}\mathbf{v}$。其中，$\mathbf{v}$ 是已知函数（“入射波”），而$\mathbf{u}$ 是未知函数（“表面场”）。在解存在的情况下，它可以形式化地表示为如下级数：

$$A^{-1}\mathbf{v} = L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} B^n\mathbf{v} \tag{1}$$

该级数可以截断，其中 $B = -RL^{-1}$。这就是左右分裂法[1,2]。级数（1）类似于分层介质中的 Bremmer 耦合级数 [3,4], ，并且与粗糙表面的有序多重相互作用法和前向–后向法 [5–7]密切相关。算子 $L$和 $R$ 分别是（借用有限维情形的术语） $A$的下三角部分和严格上三角部分；它们在第2节中有精确定义。我们将这种下三角形式的算子称为 $L$-型：积分算子，可能还带有一个乘法项，其核在 $x' > x$处为零，因此（$L\psi$）（$x$）只取决于 $\psi$ 左侧的取值，而与 $x$无关。将任意点 $a$ 视为一个切口很方便，它将表面分为 $x \le a$ 部分和 $x > a$部分。于是， $L$-型算子会将信息向前传过每个切口，但不会向后传递。第2节还引入了表示此类算子集合的记号 $\mathcal{L}$ 。

我们的动机部分源于将 $L$-算子视为表面上的方向流，并利用这一点刻画逆算子 $L^{-1}$ ，以及为仅前向近似中的误差设定界。

**结果总结**。 我们的主要观察如下。

- 所有 $L$型算子都保持一个由子空间组成的连续巢 $\mathcal{N}$ 不变；这些子空间由在每个点左侧均为零的函数构成，而它们的弱闭包是巢代数 Alg$\mathcal{N}$，即所有保持 $\mathcal{N}$ 不变的有界算子组成的代数；此外， $\mathcal{L}$ 按照 Kadison 和 Singer 的意义是三角的，而 Alg$\mathcal{N}$ 是极大三角的（第3节）。

- 可逆的 $L$型算子的逆一般不一定仍是 $L$型。不过，对于第二类 $L$算子，若其乘法项在 $L^\infty$中可逆（与零保持正距离），且其核为希尔伯特–施密特核（例如定义在有界区间上），那么其逆仍为 $L$型；这为前向推进提供了支持（第3节）。

- Arveson距离公式给出了对 $A$进行最佳仅前向近似时的误差；该公式适用于任意分裂，而不仅仅是截断，并以单个切口处的后向耦合来表示误差。对于粗糙表面的双层核，我们为这一量给出了界并进行了数值计算。在我们的例子中，简单截断已接近最优；而在所有 $L^2$ 上的最坏情形，是以左行波为主，而不是入射场的后向散射（第 4 节）。

- 对于硬表面 $h$，逆 $L$算子与镜像表面 $z = -h(x)$的前向 $L$算子密切相关。具体而言， $L_h^{-1}$ 恰好等于 $4L_{-h}$乘以一个修正因子；该因子与恒等算子的差仅在核的二阶项上体现。对于缓坡表面，仅镜像表面算子便可在一阶近似下给出逆算子（第5节）。

本文使用的算子代数定理大多是经典结果。这篇短文旨在阐明这些定理对于边界积分散射方程左右分裂的意义。具体而言，我们运用Arveson距离公式评估仅采用前向近似的局限性，考察在切口处产生最强后向耦合的场的方向性，并推导出Neumann前向算子的镜像表面恒等式。数值观察结果为进一步发展和开放问题指出了可能的方向，相关内容将在第6节中介绍。

## 2 设定与记号

我们的问题中的波函数取自希尔伯特空间 $H$，通常为 $L^2(\Omega)$，其中 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{R}^2$，或是它们的一个紧子集。对于弱奇异算子或第一类算子，索博列夫空间 $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ 通常更为自然（参见下文关于有界性的备注）。用 $B(H)$ 表示作用在 $H$ 上的有界线性算子集合。我们考虑定义在表面上的波场，这些表面可表示为水平坐标 $x$ 或 $(x,\ y)$ 的函数。目前，我们将讨论范围限制在 $x$，即二维问题。

**第一类与第二类积分方程。**第一类积分方程的形式为 $Ku = f$，其中 $K$ 是一个积分算子。第二类方程的形式为 $(M_c + K)u = f$，其中 $M_c$ 表示乘以一个系数 $c$，该系数有正的下界，即在 $L^\infty$ 中可逆（通常为常数，例如边界积分方程中的 $\tfrac{1}{2}$）。第一类算子可能具有平滑作用；当 $K$ 紧时（对数核等弱奇异核便属于这种情况），其逆算子不可能在 $L^2$ 上有界，即使该方程在适当的索博列夫空间之间是适定的也是如此。存在乘法项本身并不能保证第二类情形下的可逆性。对于下文所考虑的 $L$-算子，沃尔泰拉结构由支撑条件 $x' < x$ 自动保证；命题 3.2 中的正则性假设才是确保可逆性的关键。

**积分算子：**我们固定 $\Omega \times \Omega$ 上的一个核类 $\mathcal{K}$，其元素定义了 $H$ 上的有界积分算子，并且在核复合和伴随算子运算下封闭；例如，希尔伯特–施密特核（$K \in L^2(\Omega \times \Omega)$）或舒尔类核（下文定义）。考虑由以下形式的积分算子组成的集合 $\mathcal{J} \subset B(H)$

$$\mathcal{J} = \{A_K : A_K\psi(x) \equiv \int \psi(x')K(x,x')dx' + \alpha(x)\psi(x), \qquad \psi \in H\}, \tag{2}$$

对于某个核 $K \in \mathcal{K}$ 和 $\alpha \in L^\infty(\Omega)$。术语 $\alpha$ 等价于允许核中含有狄拉克$\delta$函数，即核可以包含 $\alpha(x)\delta(x - x')$，因此 $\mathcal{J}$包含恒等算子和所有乘法算子。这在物理上也很自然，因为它允许出现可变对角项。采用这种 $\mathcal{K}$后，$\mathcal{J}$ 是一个含幺赋范算子代数，

其乘法定义为映射的复合（尽管它通常在 $B(H)$ 中不是范数闭的）。明确地说，若 $J$, $K \in \mathcal{K}$ 是两个核，则它们的复合 $L$ 是一个核，其中

$$L(x,x'') = \int K(x,x')J(x',x'')\,dx' \tag{3}$$

so

$$\begin{aligned} A_K A_J \psi(x) &= \int \left\{ \int \psi(x'')J(x',x'')\,dx'' \right\} K(x,x')\,dx' \\ &= \int \psi(x'') \left\{ \int J(x',x'')K(x,x')\,dx' \right\} dx'' \;=\; A_L\psi(x). \end{aligned} \tag{4}$$

**左型算子：** 现在考虑映射 $A \to L$ 其中，对于积分算子$A\psi(x) = \int \psi(x')K(x,\ x')\ dx'$ 且 $K \in \mathcal{K}$,

$$L\psi(x) = \int_{x'<x} \psi(x')K(x,x')\,dx' \;=\; \int \psi(x')\Theta(x-x')K(x,x')\,dx', \tag{5}$$

其中 $\Theta$是赫维赛德阶跃函数（对于条件收敛积分或柯西主值积分，该积分解释为 $\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{x'<x-\epsilon} \psi(x')K(x,\ x')\ dx'$）。 $A$ 的任意对角线项 $\alpha(x)\psi(x)$均保留在 $L$中。我们将此映射记为 $\mathcal{P}(A) = L$，因此 $\mathcal{P} : \mathcal{J} \to \mathcal{J}$。我们将形如 $L = \mathcal{P}(A)$, $A \in \mathcal{J}$, $L$-型 （或左型）的算子称为左型算子，并将这类算子的集合记为 $\mathcal{L} = \mathcal{P}(\mathcal{J})$。它们的核支撑在 $x' \le x$中，因此 $L\psi$ 在 $x$ 处的值仅取决于其左侧的 $\psi$ $x$。集合 $\mathcal{L}$本身是一个代数： $L$-型算子的和与积仍然是 $L$-型的，因为如果两个核在$x' > x$ 处均为零，那么它们的复合（4）也如此，而乘法项只需相乘即可。

映射 $\mathcal{P}$ 是一个投影，因为 $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^2(A)\psi \;=\; \mathcal{P}(L)\psi &= \int \psi(x')\Theta^2(x-x')K(x,x')\,dx' \\ &= \int \psi(x')\Theta(x-x')K(x,x')\,dx' \;=\; \mathcal{P}(A)\psi. \end{aligned} \tag{6}$$

此外，算子 $\mathcal{Q} = 1 - \mathcal{P}$ 是一个投影，因为 $\mathcal{Q}^2 = \mathcal{Q}$ （显然），且$\mathcal{Q}$（$A$） $= R$。我们称 $\mathcal{Q}$ 为 $\mathcal{P}$ 的补空间，稍微滥用一下记号，也可以将其记为 $\mathcal{P}^\perp$。形如 $R = \mathcal{Q}$（$A$）的算子是-型的，我们记作 $\mathcal{R} = \mathcal{Q}$（$\mathcal{J}$）。

**范数 $\mathcal{P}$和 $\mathcal{Q}$。** 由于 $\mathcal{P}$通过将算子的核乘以 $\Theta(x-x')$来作用于该算子，我们对作用于核的诱导映射也使用相同的符号 $\mathcal{P}$和 $\mathcal{Q}$，即 $K \mapsto \Theta(x-x')K$和$K \mapsto \big(1-\Theta(x-x')\big)K$。在两种有用的范数下， $\mathcal{P}$和 $\mathcal{Q}$ 的范数均为 1:

- 在希尔伯特–施密特核上，$\mathcal{P}$ 是将 $L^2(\Omega\times\Omega)$ 投影到支撑集包含于 $x' < x$ 的核上的正交投影，而 $\mathcal{Q}$ 是其互补正交投影。
- 在舒尔类中（$\max\{\sup_x \int |K|\,dx', \sup_{x'} \int |K|\,dx\} < \infty$），$\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 是压缩映射，因为 $|\mathcal{P}(K)| \le |K|$ 和 $|\mathcal{Q}(K)| \le |K|$ 逐点成立。舒尔类是一个巴拿赫代数，作用于每个 $L^p$，并且包含有界区间上的弱奇异格林函数核。

在上述任一种范数下

$$||\mathcal{P}(A)|| \le ||A||, \qquad ||\mathcal{Q}(A)|| \le ||A||. \tag{7}$$

在希尔伯特–施密特范数下，除非分别有 $\mathcal{P}(A) = A$ 或 $\mathcal{Q}(A) = A$，否则这些不等式实际上都是严格的，因为 $\|A\|_{HS}^2 = \|\mathcal{P}(A)\|_{HS}^2 + \|\mathcal{Q}(A)\|_{HS}^2$。在舒尔范数下，由于它是上确界范数，不等式不一定严格。界（7）在 $B(H)$ 上的算子范数中不成立：三角截断在算子范数下无界（对于 $n \times n$ 矩阵，其范数按 $\log n$ [8]的量级增长；对于卷积核，它在符号上起到类似希尔伯特变换的作用）。

注（有界性）。我们希望允许核中包含格林函数，而这类函数通常不本质有界，也未必会在 $L^2$ 上导出有界算子。具有弱奇异性的积分算子可有界地将 $W^{k,\,p}$ 映射到 $W^{k+1,\,p}$，这对我们而言或许已经足够。若推广到无界算子和／或非闭内积空间，我们仍可能以广义意义讨论巢代数及其性质；对于第一类方程，这种推广不可避免（第3节）。

## 3 嵌套代数、逆算子与三角性

**子空间嵌套**。考虑由以下闭子空间组成的集合 $\mathcal{N}$：$a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}\}$ 中的 $H = L^2(\mathbb{R})$，这些函数在 $x \le a$ 上为零，即 $M_a = \{\psi\colon \psi(x) = 0$ 对 $x \le a\}$ 成立，再加上 $M_{-\infty} = H$ 和 $M_{+\infty} = \{0\}$（在有界区间 $[0,\ell]$ 上，$a$ 在满足 $M_0 = H$ 和 $M_\ell = \{0\}$ 的条件下取遍 $[0,\ell]$）。每个 $M_a$ 都是一个子空间，并且对于 $a \le b$，$M_b \subseteq M_a$，因此这些子空间构成嵌套关系（按包含关系全序排列）。事实上，$\mathcal{N} = \{M_a\}$ 是一个完备格（其每个子集在 $\mathcal{N}$ 中都有上确界和下确界），所以 $\mathcal{N}$ 是一个子空间嵌套。类似地，我们可以考虑正交补 $M_a^\perp$，它们的形式为 $M_a^\perp = \{\psi\colon \psi(x) = 0$ 对 $x > a\}$ 成立，并将集合 $\{M_a^\perp\}$ 记为 $\mathcal{N}^\perp$。

令 $P_a$ 为到 $M_a$ 上的正交投影，因此 $P_a^\perp = I - P_a$ 投影到支撑在 $x \le a$ 中的函数上。对于任意 $\psi \in M_a$ 以及下三角部分为 $L = \mathcal{P}(A)$ 的积分算子 $A$，显然 $L\psi$ 也属于 $M_a$。因此，$M_a$ 在任意此类 $L$ 下都不变；换言之，对于所有 $a$ 和所有 $L \in \mathcal{L}$，$LP_a = P_aLP_a$。类似的

结果也适用于相对于 $\mathcal{N}^{\perp}$ 的上三角部分 $R = \mathcal{Q}(A)$；也就是说，对于所有 $a$ 和所有 $R \in \mathcal{R}$， $RP_a^{\perp} = P_a^{\perp} RP_a^{\perp}$。

**伴随算子**。若 $A$ 由 $A\psi = \int \psi(x')K(x, x')dx'$定义，则其伴随算子 $A^*$ 为

$$A^*\psi(x) = \int \psi(x')\overline{K(x', x)}dx'. \tag{8}$$

将 $L$写成 Heaviside 函数的形式，

$$(L\psi)(x) = \int \psi(x')\ \Theta(x - x')\ K(x, x')\ dx', \tag{9}$$

其伴随算子为

$$(L^*\psi)(x) = \int \psi(x')\ \Theta(x' - x)\ \overline{K(x', x)}\ dx' \ = \ \int_x^{\infty} \psi(x')\ \overline{K(x', x)}\ dx', \tag{10}$$

因此， $\mathcal{N}^{\perp}$（而非 $\mathcal{N}$）在 $L^*$下是不变的。

总而言之： $\mathcal{N}$ 在 $\mathcal{L}$的每个元素下都不变，而 $\mathcal{N}^{\perp}$ 在 $\mathcal{R}$的每个元素以及伴随算子集合 $\mathcal{L}^*$ 下都不变。

**巢代数**。投影集合 $P_a$ 是一个套，也就是说，它是线性有序的，包含 0 和 1，且序完备（等价地说，在强算子拓扑下闭合）。对于这个集合，我们使用与底层子空间相同的记号 $\mathcal{N}$，因为这样不会引起混淆。巢代数Alg $\mathcal{N}$ 是使 $\mathcal{N}$中的元素保持不变的有界算子集合。因此，Alg $\mathcal{N}$包含类型为 $L$的有界算子。

格 lat $\mathcal{L}$ 是所有被 $\mathcal{L}$中的每个算子保持不变的 $\mathcal{L}$ 的子空间所组成的集合。比如，巢代数 $\mathcal{E}$具有形式 $\mathcal{E} = \text{Alg}(\text{lat}\,\mathcal{E})$。这种性质称为自反性，冯·诺伊曼代数（强闭的 $*$算子代数）也具有这一性质。类似地，如果一个投影格等于其代数的 lat，那么它就是自反的；套是自反的。

**命题 3.1**。 **</style}有界型算子的弱闭包是巢代数Alg** $\mathcal{N}$，也就是所有使 $\mathcal{N}$保持不变的算子组成的集合。因此$\text{lat}\ \mathcal{L} = \mathcal{N}$。

全文中，横线表示弱算子拓扑下的闭包（其中 $T_\alpha \to T$ 若$\langle T_\alpha f,\ g\rangle \to \langle Tf,\ g\rangle$ 对所有 $f$, $g \in H$均成立），而非范数闭包。

证明。 Alg $\mathcal{N}$中的秩一元素具有核 $f(x)g(x')$，其中 $f$支撑在 $x > a$上，而$g$ 支撑在 $x' < a$ 上，其中 $a$为某个值，因此它们是 $L$型。根据 Erd˝os 定理 [10], ，巢代数中的每个有限秩算子都是该代数中秩一算子的和，而且有限秩算子在其中弱稠密。因此，$\mathcal{L} \supseteq$ Alg $\mathcal{N}$，反向包含关系也成立，因为 Alg $\mathcal{N}$是弱闭的且包含 $\mathcal{L}$。最后，lat $\mathcal{L}$ = lat $\mathcal{L}$ = lat(Alg $\mathcal{N}$) $= \mathcal{N}$，因为巢是自反的。

□

集合 $\mathcal{L}$ 本身并非弱闭。例如，$\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 包含一些算子，例如平移算子 $\psi(x) \mapsto \psi(x-1)$，其核是在对角线之外的狄拉克δ函数。这些既不是核为 $L^2$ 的积分算子，也不是乘法算子，因此不属于 $\mathcal{L}$。

有限维类比。 $\mathcal{L}$ 中的积分算子的离散化类比是下三角矩阵，它们构成一个巢代数。相对于标准基 $\{e_i\}$，令 $q_i$ 为投影到 $e_i$上的投影。一个矩阵元$a_{ij}$ 对应于秩一算子 $c_{ij} = e_j \otimes e_i$ 的一个倍数，该算子由 $(e_j \otimes e_i)b = \langle b, e_j\rangle e_i$定义，并具有性质 $c_{ij} = c_{ij}q_j = q_i c_{ij}$。因此，下三角矩阵的集合由所有满足 $i \geq j$的此类算子的线性组合构成，而每个矩阵元 $a_{ij}$ 都对应于一个核为 $K(x, x') = a_{ij}\ \delta(x - x_i)\ \delta(x' - x_j)$ 的积分算子的离散类比。命题 3.1 是其连续对应物，其中秩一算子再次发挥核心作用。

**型算子的逆算子**。 $\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 中的一个元素即使在 $B(H)$ 中可逆，其逆算子也不一定属于 $\mathrm{Alg}\ \mathcal{N}$。例如，在 $L^2(\mathbb{R})$ 上，平移 $\psi(x) \mapsto \psi(x-1)$ 是 $\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 中的一个酉元，但其逆算子不是。对于具有希尔伯特–施密特核的第二类 $L$算子（有界区间上的标准散射核即属此类），其逆算子则仍为 $L$型。

**命题 3.2**。 设 $L = f(I + V)$ 作用于 $H = L^2(\Omega)$上，其中 $f$ 在 $L^\infty(\Omega)$ 中可逆，且$V$ 是一个 *Volterra* 算子，其核为希尔伯特–施密特核，并且支撑在 $x' < x$ 内（例如，在有界区间 $\Omega = [0, \ell]$上）。那么 $L$ 可逆，

$$L^{-1} \;=\; (I+V)^{-1} f^{-1} \;=\; \sum_{n\geq 0} (-V)^n f^{-1}, \tag{11}$$

该级数在算子范数下收敛，且 $L^{-1} \in \mathcal{L}$，其对角部分为 $f^{-}$ $^{1}$.

证明。 由于 $V$是紧算子，并保持连续巢 $\mathcal{N}$不变，因此它是拟幂零的（Ringrose定理；见 [11, 12]），故 $(I+V)^{-1}$ 的 Neumann级数在算子范数下收敛。对于每个 $V^n$，若 $n \geq 1$，则其希尔伯特–施密特核支撑在$x' < x$内；而当 $\|V^{n-1}\|^{1/n} \to 0$时，$\|V^n\|_{HS} \leq \|V^{n-1}\|\,\|V\|_{HS}$，因此 $n \geq 1$ 对应的项也在希尔伯特–施密特范数下收敛。它们的和是一个核（即 $V$的预解核）支撑在 $x' < x$内的算子，因此 $L^{-1}$ 是乘法算子 $f^{-1}$ 与一个$L$型积分算子之和。

□

这正是前向推进能够发挥作用的原因： $Lu = f$ （L-R 级数的每次前向扫描）都会从左到右依次确定 $u$（$x$），只使用 $x$ 左侧的值。（非零对角线的下三角矩阵的逆仍为下三角矩阵，原因相同。）

对于典型的带平滑核的第一类方程，例如对数单层核，逆算子在 $L^2$ 上无界，因为该算子是紧的（具有阿贝尔型行为）；而在适当的索博列夫空间之间建立的形式则可能是适定的 [11]。

**三角性**。按照 Kadison 和 Singer 的定义，[13]，子代数 $\mathcal{A} \subset B(H)$ 若满足 $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}^*$ 是 $B(H)$ 中的极大阿贝尔代数，则称为**三角的**；若它不被任何更大的三角代数真包含，则称为**极大三角的**。根据 (10)，$\mathcal{L} \cap \mathcal{L}^*$ 恰由乘法算子 $L^\infty(\Omega)$ 构成，它们在 $L^2(\Omega)$ 上形成一个极大阿贝尔代数；因此 $\mathcal{L}$ 是三角的。下面的结果基本上是经典结论 [12–14]；我们给出简短的论证：

**命题3.3**。弱闭包 $\mathcal{L} = \mathrm{Alg}\,\mathcal{N}$ 是极大三角的。

证明。一个算子属于 $\mathrm{Alg}\,\mathcal{N} \cap (\mathrm{Alg}\,\mathcal{N})^*$，当且仅当它与每个 $P_a$ 交换，因此这个交集就是交换子 $\mathcal{N}' = (L^\infty)' = L^\infty$，而 $\mathrm{Alg}\,\mathcal{N}$ 是三角的。现在设 $\mathcal{B} \supseteq \mathrm{Alg}\,\mathcal{N}$ 是三角的，取 $T \in \mathcal{B}$，并令 $X = P_a^\perp T P_a$。那么 $X \in \mathcal{B}$，且 $X^* = P_a T^* P_a^\perp$ 将支撑于 $x \le a$ 的函数映入 $M_a$，所以它保持每个 $M_b$ 不变（当 $b \ge a$ 时，它在 $M_b$ 上为零；当 $b < a$ 时，其值域包含于 $M_a \subseteq M_b$）。因此 $X^* \in \mathrm{Alg}\,\mathcal{N} \subseteq \mathcal{B}$，且 $X \in \mathcal{B} \cap \mathcal{B}^*$。这个代数是阿贝尔的，并且包含 $P_a$，所以 $X = P_a^\perp P_a X = 0$。由于 $a$ 是任意的，$T \in \mathrm{Alg}\,\mathcal{N}$。

□

巢代数和极大三角代数还具有其他共同的结构性质：例如，巢代数的有界导子由有界算子[15,16]，实现；在适当条件下，极大三角代数也有类似结果[17]。然而，对于两个耦合曲面（例如在粗糙二维波导中），位置巢的重数为2，其交换子 $L^\infty \otimes M_2$ 是非阿贝尔的，因此所得代数不再是三角代数（第6节）。

## 4 Arveson距离公式和切块

回忆一下，$P_a$ 是到 $M_a$上的正交投影，即在 $x \le a$处消失的函数，因此 $P_a^\perp = I - P_a$ 投影到支集包含于 $x \le a$中的函数。对于任意套，Arveson距离公式 [18] 指出，对于每个 $T \in B(H)$，

$$\mathrm{dist}(T, \mathrm{Alg}\,\mathcal{N}) \;=\; \sup_{a} \|P_a^\perp T P_a\|. \tag{12}$$

这里的距离按算子范数度量，$\mathrm{dist}(T, \mathrm{Alg}\,\mathcal{N}) = \inf\{\|T - L'\| : L' \in \mathrm{Alg}\,\mathcal{N}\}$，因此它表示用一个使套中的每个子空间都保持不变的算子来逼近 $T$时的最佳逼近误差。

我们可以把每个 $a$ 看作一个切口，将表面分成 $x \le a$ 部分和$x > a$部分。块 $P_a^{\perp} T P_a$ 将支集位于 $x > a$中的函数映射为支集位于 $x \le a$中的函数。对于积分算子，其核为 $K(x, x')$ 在 $x < a < x'$上的限制，因此它描述了切口另一侧的场如何反馈到其前方的表面：跨切口的后向耦合。

（12）的一半是初等的：对于任意 $L' \in \mathrm{Alg}\,\mathcal{N}$，我们有 $P_a^{\perp} L' P_a = 0$，因此 $P_a^{\perp} T P_a = P_a^{\perp}(T - L')P_a$，从而 $\|P_a^{\perp} T P_a\| \le \|T - L'\|$。Arveson 定理的核心内容是反向不等式：存在某个 $L' \in \mathrm{Alg}\,\mathcal{N}$，其误差恰好等于最大的单个切口范数（下确界能够取到，因为 $\mathrm{Alg}\,\mathcal{N}$ 是弱闭的，且有界集是弱紧的），因此不同切口所需的修正项不会累积。在有限维情形下，这归结为 Parrott 矩阵补全引理 [19]（另见 Power [20]），而 Nehari 定理 [21]则是平移不变特例。

这个公式在此处很有用，因为它并不局限于截断。L-R 方法采用一种特定的前向近似，$L = \mathcal{P}(A)$，其余项为 $R = \mathcal{Q}(A)$；由于$\mathcal{P}(A) \in \mathrm{Alg}\,\mathcal{N}$，我们有 $\mathrm{dist}(A, \mathrm{Alg}\,\mathcal{N}) \le \|R\|$。然而，也可以用任意 $L' \in \mathrm{Alg}\,\mathcal{N}$来分解 $A = L' + (A - L')$：例如，采用由单向（抛物型）近似导出的前向算子、带有修正对角线的截断，或采用一个 $L'$，使余项尽可能小。Arveson 公式给出了到由仅前向算子构成的完整巢代数的精确距离，该距离通常大于本文所考虑的较窄一类$L$型积分算子。因而，对于限制在这一较窄类别中的每一种仅前向近似，该公式都给出了一个下界：对 $A$的任何此类近似，其余项都不可能小于最大的截断块。因此，它为评估截断或任何其他 $L'$选择提供了基准，并展示了通过不同地选择 $L'$ 原则上能够获得多大改进。它本身并不能判定由此产生的迭代是否收敛；这取决于 $(A - L')L'^{-1}$的谱半径；一个充分条件是 $\|A - L'\|\,\|L'^{-1}\| < 1$。

**核**。考虑二维中的硬（诺伊曼）表面 $z = h(x)$：$G = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$，其未归一化法向量为 $(-h'(x'), 1)$，因此 $A = \frac{1}{2} I - K_D$，其中 $K_D$ 是双层算子（由双层势$\int_\Gamma \partial_{n'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\, \phi(\mathbf{r}')\, dS'$得到的边界算子，其中 $\partial_{n'}$ 是源点法向导数）。该势的边界极限包含一个大小为 $\frac{1}{2} I$的跳跃项，其符号取决于法向量以及取极限的一侧。这里的未归一化法向量包含了曲面雅可比。算子 $K_D$ 的核为

$$K(x, x') = \frac{ik}{4} H_1^{(1)}(kR)\, \frac{D(x, x')}{R}, \qquad D(x, x') = h(x) - h(x') - h'(x')(x - x'), \tag{13}$$

and $R = \sqrt{(x - x')^2 + (h(x) - h(x'))^2}$.（1 2 和法线的符号约定有所不同

但它们在此处无关，因为 $I \in \mathrm{Alg}\ \mathcal{N}$。）

- 对角线附近：$D \approx \tfrac{1}{2}h''(x)(x-x')^2$ 和 $H_{(1)\,1}(t) \approx -2i/(\pi t)$，因此 $K(x,\ x') \to h''(x)/\big(4\pi(1+h'(x)^2)\big)$。对于 $C^2$ 表面，核有界，因此截断块在角点 $x = x' = a$ 处没有奇异性。

- 远离对角线 ($s = |x-x'|$, $ks \gg 1$)，使用 $|H_{(1)\,1}(t)| \approx (2/\pi t)^{1/2}$，

$$|K(x,x')| \ \lesssim\ \Big(\frac{k}{8\pi}\Big)^{1/2}\Big(2\|h\|_\infty\, s^{-3/2} + \|h'\|_\infty\, s^{-1/2}\Big). \tag{14}$$

  高度项是可积的；斜率项则不可积。

**命题 4.1**。令 $h \in C^2([0,\ell])$，并令 $A = \tfrac{1}{2}I - K_D$ 为核为 *(13)* 的二维诺伊曼边界积分算子。则

$$\mathrm{dist}(A, \mathrm{Alg}\,\mathcal{N}) \ \le\ \|R\| \ \le\ C\,\frac{\|h''\|_\infty}{k} + k\|h\|_\infty + \|h'\|_\infty\bigg(\Big(\frac{k\ell}{2\pi}\Big)^{1/2} + \frac{1}{20}\bigg), \tag{15}$$

其中 $C$ 仅取决于 $\|h'\|_\infty$。

证明。令 $s = |x-x'|$。根据中值定理，$R = s(1+h'(\xi)^2)^{1/2}$ 对某个 $\xi$ 成立，因此 $s \le R \le \tau s$，其中 $\tau = (1+\|h'\|_\infty^2)^{1/2}$。由于余项算子 $R = \mathcal{Q}(A)$ 是严格上三角的，舒尔检验给出，$\|R\|$ 以及每个切口块 $\|P_a^{\perp} A P_a\|$ 均被 $\int_0^\ell \kappa(s)\ ds$ 所界定，其中 $\kappa(s)$ 是 $|K(x,\ x')|$ 在 $|x-x'| = s$ 上的上确界；并且 $\mathrm{dist}(A,\ \mathrm{Alg}\ \mathcal{N}) \le \|R\|$ 由 (12) 给出。

近区，$ks \le 1$：</style>此处，且 ()在 (0，$\tau$] 上。结合 $|D| \le \tfrac{1}{2}\|h''\|_\infty s^2 \le \tfrac{1}{2}\|h''\|_\infty R^2$，可得 $|K| \le \tfrac{1}{8}C_\tau\|h''\|_\infty$，因此该区域的贡献至多为$C\|h''\|_\infty/k$。

远区，$ks > 1$：</style>此处。对于，()()()（比值 ()()在 处等于 1。124，并以 $1 + 3/(16t^2)$ 的速度趋于 1；该界可通过数值计算轻松验证）。结合 $|D|/R \le (2\|h\|_\infty + \|h'\|_\infty s)/s$，可得

$$|K| \ \le\ \Big(\frac{k}{8\pi}\Big)^{1/2}\Big(1 + \frac{1}{5k^2s^2}\Big)\Big(2\|h\|_\infty s^{-3/2} + \|h'\|_\infty s^{-1/2}\Big).$$

对 $1/k < s < \ell$ 积分，并使用 $\int s^{-1/2} < 2\ell^{1/2}$、$\int s^{-3/2} < 2k^{1/2}$、$\int s^{-5/2} < \tfrac{2}{3}k^{3/2}$ 和 $\int s^{-7/2} < \tfrac{2}{5}k^{5/2}$，斜率项的贡献小于 $\|h'\|_\infty\big((k\ell/2\pi)^{1/2} + 0.03\big)$，高度项的贡献小于 $0.84\,k\|h\|_\infty$。将两个区域相加，得到式 (15)。

□

这些界有两个推论。首先，舒尔检验对截断块给出的上界与对 $R$ 给出的相同，因此无法区分 Arveson 距离和截断余项。仅属于舒尔类并不能保证在 $L^2$ 算子范数下存在一致的比较$\|R\| \le C\,\mathrm{dist}(A, \text{Alg }\mathcal{N})$：$[0,\ell]$ 上的分段常数核属于舒尔类，并表示 $n \times n$ 矩阵；对于这些矩阵，$\|R\|$ 可以超过 $\|A\|$——进而超过 $\mathrm{dist}(A, \text{Alg }\mathcal{N})$——其倍数可达 $\log n$ [8] 的量级。对于物理格林函数核，若比较常数依赖于额外限制条件，这一问题仍未解决（第6节）。其次，$(k\ell)^{1/2}$ 的增长源于斜率项的 $s^{-1/2}$ 尾部。这与已知的自由空间格林函数在无限粗糙表面上所面临的困难相符。

**数值检验**。算子采用 Nystr¨om 方法，在网格间距为 $\Delta x = \lambda/10 (\lambda = 1)$ 的均匀网格上离散。算子范数为矩阵 2-范数，所报告的距离是在 25 个采样切口位置上的最大值；因此，它们是通过对所有切口取最大值而得到的离散Arveson距离的下界。随机表面通过谱合成生成，并使用固定的随机种子；长度和斜率实验采用高斯谱，下面的对比则采用幂律谱。每项结果均来自单次实现，而非系综平均。在长度依赖实验中，每种长度都会生成新的实现，而不是延长同一个固定表面。在提取所需片段之前，先在更长的周期生成表面上设定标称均方根高度。对于下表，标称均方根高度为 $0.25\lambda$，高斯相关长度为 $2\lambda$，测得的均方根斜率约为 0.16–0.23：

| | dist | $\|R\|$ | $\|B\|$ | $\rho(B)$ |
|---|---|---|---|---|
| $\ell = 10\lambda$ | 0.32 | 0.35 | 0.70 | 0.04 |
| $\ell = 40\lambda$ | 0.43 | 0.58 | 1.15 | 0.17 |
| $\ell = 160\lambda$ | 1.11 | 1.49 | 2.98 | 0.34 |

- 对于这三种表面实现，距离与 $\ell^{1/2}$ 阶增长相符，且为 $\|R\|$的 0。7–0。9；在这些示例中，截断结果与最佳前向近似相当接近。

- 在 $\ell = 40\lambda$ 固定时，所测试的各个振幅下，距离与均方根斜率之比约为 2。7。这与在所用的特定表面实现中，该范围内斜率相关项占主导地位的情况相符。

- 谱半径 $\rho(B)$远小于 $\|B\|$，因此范数估计严重夸大了收敛问题。

**极值输入**。对于 $\ell = 80\lambda$ （均方根高度 $0.25\lambda$，相关长度 $2\lambda$）的高斯表面，中点处的截断块几乎是秩一的（最大奇异值为 0.69，

次大奇异值为 0.08），因此其范数近似由单个输入函数达到：即其右奇异向量。这是一个主要向左传播的掠射波（$k_x \approx -k$），从切口向外延展数十个波长。对于范数为 1 的加窗右行波$\psi$（$x$）$\propto e^{ikx\cos\theta}$，在高斯表面上，$0^\circ \le \theta \le 30^\circ$的输出范数 $\|P_a^{\perp} A P_a \psi\|$ 为 $\sim 10^{-4}$（在布拉格波数 $2k$处的频谱含量可忽略），而左行波对应的数值为 0.02–0.2。在含有布拉格成分的幂律表面上（均方根高度 $0.1\lambda$），相应的范数对于右行波为 $\sim 0.01$，对于左行波则为 0.01–0.06。因此，在所有这些表面上，Arveson 距离主要度量的是一个横越切口传播的左行波；对该波而言，这属于前向散射。因此，与不受限制的 Arveson 距离所暗示的相比，主要向右传播的入射场所涉及的耦合可能小得多。这促使我们考虑将截断块限制在右行场上，以度量布拉格后向散射，并寻求距离公式的方向性类比。

## 5 镜像表面

根据命题 3.2，对于给定的表面 $L^{-1}$，在第二类情形下，它本身就是一个 $L$ 型积分算子。自然会有人想知道，它是否是某个等价“虚拟表面”的 $L$ 算子（第6节中的问题 1）。这个问题的确切形式可能无法得到肯定答案：边界积分核 $K_h(x,\ x')$ 仅通过两点 $x,\ x'$ 处的 $h$ 和 $h'$ 依赖于表面，而 $L^{-1}$ 中的预解核则依赖于它们之间整个区间上的 $h$。然而，对于硬表面，存在一个与自然虚拟表面相对应的精确恒等式，即其镜像 $z = -h(x)$。

**命题 5.1** (镜像表面)。设 $L_h = \mathcal{P}(A_h) = \frac{1}{2} I - K_h^L$ 是有界区间上硬表面 $z = h(x)$ 的 $L$ 算子，其中 $K_h^L$ 是核为 *(13)* 的双层算子的下半部分。那么

$$K_{-h}^L \ = \ -K_h^L, \qquad L_h L_{-h} \ = \ L_{-h} L_h \ = \ \tfrac{1}{4} I - (K_h^L)^2, \tag{16}$$

*and*

$$L_h^{-1} \ = \ 4\, L_{-h} \big( I - 4 (K_h^L)^2 \big)^{-1} \ = \ 4\, L_{-h} \sum_{n \ge 0} \big( 4 (K_h^L)^2 \big)^n. \tag{17}$$

证明。在核中，$D(x,\ x') = h(x) - h(x') - h'(x')(x - x')$ 关于 $h$ 是线性的，而 $R$，因而 $H_1^{(1)}(kR)/R$，仅通过 $(h(x) - h(x'))^2$ 依赖于 $h$。对角线值$h''/\big(4\pi(1 + h'^2)\big)$ 关于 $h$ 也是奇函数。因此，核逐点关于 $h$ 为奇函数，并且由于 $\mathcal{P}$ 是线性的，$K_{-h}^L = -K_h^L$。于是 $L_{-h} = \frac{1}{2} I + K_h^L$，它与 $L_h = \frac{1}{2} I - K_h^L$ 对易，展开相乘得到（16）。算子 $K_h^L$ 是 Volterra 算子，因而是拟幂零的，所以 $4(K_h^L)^2$ 也同样是拟幂零的。因此 $I - 4(K_h^L)^2$ 总是可逆的，并且（17）中的级数在算子范数下收敛，即使当 $\|K_h^L\| \ge \frac{1}{2}$ 时也是如此。

– □

**备注**。

- 修正项恰好是 $L_h^{-1} - 4L_{-h} = 16\,L_{-h}(K_h^L)^2\big(I - 4(K_h^L)^2\big)^{-1}$，它在 $K_h^L$ 中从二阶开始（因子 $L_{-h} = \frac{1}{2}I + K_h^L$ 也会贡献奇次幂）。由于对于平缓斜率，核很小，因此关于斜率取一阶近似时，前向算子的逆是反射表面的前向算子的（四倍）。

- 该恒等式等价于将 $L_h^{-1}$ 的 Neumann级数拆分为偶数项和奇数项:

$$\begin{aligned}\big(\tfrac{1}{2}I - K_h^L\big)^{-1} = 2\sum_{n\geq 0}\big(2K_h^L\big)^n \;&=\; 2\big(I + 2K_h^L\big)\sum_{n\geq 0}\big(4(K_h^L)^2\big)^n \\ &= 4\,L_{-h}\sum_{n\geq 0}\big(4(K_h^L)^2\big)^n.\end{aligned} \tag{18}$$

  因此，奇数阶项由镜像表面的前向算子生成，而将 $L_h^{-1}$ 替换为 $4L_{-h}$，相当于只保留级数的前两项，即前向解的一阶玻恩近似。因此，该命题的意义在于其物理解释，这一解释得益于奇偶性$K_{-h} = -K_h$，而非提供了新的计算工具。

- 在计算上，$L_{-h} = \frac{1}{2}I + K_h^L$由与 $L_h$相同的矩阵 $K_h^L$构造，因此无需进行新的表面计算。在二维中，将 $L_h^{-1}$ 作用于一个向量相当于进行前向代入（L-R 方法的前向扫描），其成本与矩阵向量乘积相同，为 $O(N^2)$；谱加速还能进一步降低两者的成本。因此，在级数中将$L_h^{-1}$ 替换为 $4L_{-h}$，在二维中渐近意义上毫无收益，且会引入二阶斜率误差。下文将讨论这种方法在三维中可能带来的收益。

- 采用第 4 节的离散化（高斯谱表面，$\ell = 40\lambda$，相关长度 $2\lambda$）进行数值检验，得到

| 均方根斜率 | $\|K_h^L\|$ | $\|L_h^{-1} - 4L_{-h}\|/\|L_h^{-1}\|$ |
|---|---|---|
| 0.03 | 0.13 | 0.013 |
| 0.06 | 0.26 | 0.045 |
| 0.16 | 0.64 | 0.22 |

  其中（16）以机器精度成立。相对误差大致随斜率的平方增长。

- 奇偶性论证在三维情形下同样适用，此时 $D = h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}') - \nabla h(\mathbf{x}')\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ 仍然关于 $h$ 线性，因此 $K_{-h} = -K_h$ 和 (16) 依然成立；该论证也不依赖于

符号约定 $A = \frac{1}{2}I \pm K$。然而，若按 $x$ 对表面进行排序，将其离散化为有限宽度的 $x$ 切片后，会得到一个分块下三角矩阵，其对角块非平凡，并在每个切片内耦合横向自由度。这本身并不意味着连续的 $x$ 排序积分算子会失去其 Volterra 或拟幂零性质。一个充分条件是，核范数可由仅依赖于 $x-x'$ 的可积函数界定：若对 $x' < x$，有 $\|K(x,x')\| \le k(x-x')$，其中范数是针对横向变量上的算子所取，且 $k \in L^1(0,\ell)$，那么根据杨氏不等式，$\|V^n\| \le \|k^{*n}\|_{L^1(0,\ell)}$，并且对每个 $\sigma > 0$，都有 $\|k^{*n}\|_{L^1(0,\ell)} \le e^{\sigma\ell}\big(\int_0^\ell e^{-\sigma t}|k(t)|\,dt\big)^n$。令 $\sigma \to \infty$ 趋于无穷，可知 $V$ 是拟幂零的。对于弱奇异三维双层，预期有 $k(s) \sim \log(1/s)$，但这一点以及所涉及的确切函数空间仍有待验证。特别是，仅仅证明算子值核可积，并不足以推出某些初等 Volterra 估计中所述的阶乘界 $\|V^n\| \le C^n/n!$。若拟幂零性成立，则 (17) 在连续情形下同样适用。有限宽度切片离散化中非平凡的对角块必须单独分析。对于离散化算子，对角块可能影响谱，因此必须检查 (17) 中级数的收敛性，例如通过 $\rho(2K_h^L) < 1$。在满足该条件时，以 $4L_{-h}$ 加上若干修正项来替换 $L_h^{-1}$，或许可以避免代价高昂的对角块求解。这样做是否有利取决于离散化方式，且需要通过数值测试加以验证。

- 该恒等式采用第二类（诺依曼）表述，并包含一个常数对角项；狄利克雷（单层、第一类）情形需要单独处理。

# 6 后续问题

1. 虚拟表面。 在第二类情形下， $L^{-1}$ 仍然是一个 $L$ 型算子（命题 3.2）。在什么条件下，它可以实现为与某个“虚拟表面”相关联的前向算子？更具体地说，命题 5.1 中的修正项 $\big(I - 4(K_h^L)^2\big)^{-1}$ 能否并入经修改的表面、格林函数或边界条件？这可能与相位共轭、时间反演和逆向推进方法有关 [22–24]。

2. 截断最优性。 对于物理受限的粗糙表面格林函数核类，能否将反向三角部分的范数界定为 $\|R\| \le C\,\mathrm{dist}(A,\ \mathrm{Alg}\ \mathcal{N})$，其中 $C$ 由几何或谱参数控制？仅有舒尔类归属并不足够。最差截断块所呈现的近似秩一结构，或许有助于确定合适的限制条件。

3. 方向距离公式。位置巢 $\{M_a\}$ 与

平移 Hardy 空间 $e^{i\lambda x}H^2(\mathbb{R})$ 的波数嵌套构成 Katavolos 和 Power 的傅里叶双巢 [25]„ 与抛物代数 [26,27]相关。它的代数是否存在 Arveson 型距离公式？这样的公式能否量化受限切块范数 $\sup_a \|P_a^{\perp} A P_a Q_0\|$，其中 $Q_0$ 投影到右行波数？并非所有子空间格都满足距离公式。

4. 平坦表面情形。 对于平移不变核，截断块具有 Hankel 算子结构。Nehari 定理 [21] 能否给出显式的距离公式，以及其与布拉格尺度后向散射之间的精确联系？

5. 两个表面。 对于两个耦合曲面，位置巢的重数为二，其代数由 $2 \times 2$ 在 Alg $\mathcal{N}$ 上的算子矩阵组成。左右分裂及其逆的哪些性质仍然成立？在前向推进中应如何纳入曲面之间的逐点耦合？

6. 三维情形。 在三维情况下，即使连续的 $x$有序算子是 Volterra 算子，有限宽度的 $x$切片也会产生非平凡的对角块。在什么条件下，连续巢代数性质和镜像恒等式能够导出稳定且高效的离散推进方案（第5节）？

7. 第一类方程与无界算子。 对于狄利克雷单层公式，逆算子在 $L^2$上未必有界。能否在适当的索博列夫空间上表述这些结果？镜像恒等式是否存在相应的对应形式？

## 参考文献

[1] M Spivack、A Keen、J Ogilvy 和 C Sillence。粗糙表面散射左右方法的验证。《现代光学杂志》，48(6):1021–1033，2001年。[2] M Spivack、J Ogilvy 和 C Sillence。三维电磁散射的左右分裂。《*IEE* 科学、测量与技术学报》，151(6):464–466，2004年。[3] H. Bremmer。W.K.B. 近似作为几何光学级数的首项。《纯粹与应用数学通讯》，4(1):105–115，1951年。[4] Maarten V. de Hoop。Bremmer 耦合级数的推广。《数学物理学杂志》，37(7):3246–3282，1996年。[5] David A Kapp 和 Gary S Brown。粗糙表面散射计算的一种新数值方法。*IEEE*天线与传播汇刊，44(5):711，1996年。

[6] P Tran。采用有序多重相互作用法计算电磁波在二维理想导体表面上的散射。随机介质中的波，7(3):295–302，1997年。[7] M Rodriguez Pino、Luis Landesa、Jose L Rodriguez、Fernando Obelleiro 和 Robert J Burkholder。用于分析目标在类海洋粗糙表面上散射的广义前后向法。*IEEE*天线与传播汇刊，47(6):961–969，1999年。[8] S. Kwapie ´n 和 A. Pe-lczy ´nski。矩阵空间中的主三角投影及其应用。数学研究，34(1):43–67，1970年。[9] J¨org Witte。带边界区域上索博列夫空间中的积分算子。《数学年刊》，200(1):151–163，1999年。[10] J. A. Erdos。巢代数中的有限秩算子。《伦敦数学学会杂志》，43:391–397，1968年。[11] I. C. Gohberg 和 M. G. Krein。希尔伯特空间中 *Volterra* 算子的理论与应用，第24卷，收录于数学专著译丛。美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，1970年。[12] Kenneth R. Davidson。巢代数：希尔伯特空间算子代数的三角形式，第191卷，收录于*Pitman*数学研究札记。Longman Scientific & Technical，哈洛，1988年。[13] Richard V Kadison 和 I.M. Singer。三角算子代数：基础理论与超约化理论。美国数学杂志，82(2):227–259，1960年。[14] John R Ringrose。论某些算子代数。《伦敦数学学会会刊（第三辑）》，15(1):61–83，1965年。[15] Erik Christensen。巢代数的导子。数学年刊，229:155–162，1977年。[16] Mark Spivack。巴拿赫空间上的导子与巢代数。以色列数学杂志，50(3):193–200，1985年。[17] Mark Spivack。关于极大三角算子代数上导子的评述，2025年。arXiv:2508.07347 [math.OA].[18] William Arveson。巢代数中的插值问题。泛函分析杂志，20(3):208–233，1975年。[19] Stephen Parrott。关于商范数与 Sz.-Nagy–Foia.s 提升定理。泛函分析杂志，30(3):311–328，1978年。

[20] S. C. Power。到上三角算子的距离。剑桥哲学学会数学学报，88(2)：327–329，1980。[21] Zeev Nehari。关于有界双线性型。数学年刊（第*2*辑），65：153–162，1957。[22] M Spivack。掠入射于粗糙表面时逆散射问题的求解。美国光学学会期刊 *A*，9(8)：1352–1355，1992。[23] M Spivack。掠入射下粗糙表面散射逆问题的直接求解。物理学杂志 *A*：数学与一般，25(11)：3295，1992。[24] Yuxuan Chen 和 Mark Spivack。利用迭代推进法在掠射角下进行粗糙表面重建。美国光学学会期刊 *A*，35(4)：504–513，2018。[25] A. Katavolos 和 S. C. Power。傅里叶双巢代数。剑桥哲学学会数学学报，122(3)：525–539，1997。[26] A. Katavolos 和 S. C. Power。 $L^2(\mathbb{R})$ 的平移与伸缩不变子空间。*Journal f¨ur die reine und angewandte Mathematik*，552：101–129，2002。[27] E Kastis。作用于 $L^p$ 空间上的抛物代数。数学分析与应用杂志，455(1)：698–713，2017。