arXiv:2611.28910v1 [math.AC] 21 Nov 2026

Golod 局部环的一致支配性

TOSHINORI KOBAYASHI 和 YUKI MIFUNE

Abstract. 我们证明，每个 Golod 局部环 R 都是一致支配的。更确切地说，我们证明其支配指标不超过 R的嵌入维数。证明基于一个关于有界复形形式性的数值判据，这些复形的同调被极大理想湮灭。

1. Introduction

交换诺特局部环的支配指标，衡量从其奇点范畴中的任意非零对象构造其剩余域所需的扩张次数，其中允许使用移位、有限直和和直和项。Takahashi 引入了一致支配的概念，并证明若干类局部环具有这一性质 [9]。他此前曾提出，每个 Golod 局部环是否都是支配的 [8, 问题 9。4], 随后，Kobayashi 和 Takahashi 提出了更强的问题：每个此类环是否都是一致支配的 [7, 问题 1.1(3)]。下面的定理回答了这两个问题。

定理1.1 (推论2.4)。 每个*Golod*局部环 R 都是一致支配的，其 $\operatorname{dx}(R) \leqslant \operatorname{edim} R$。

定理1.1的证明基于一个关于有界复形形式性的数值判据。设 $(R, \mathfrak{m}, k)$ 为一个局部环。记 $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(R)$ 为有限生成 R-模的有界导出范畴。对于 $C \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(R)$ 和 $n \in \mathbb{Z}$，令 $\beta_n(C) = \dim_k \operatorname{Ext}^n_R(C, k)$，且 $P_C(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \beta_n(C)t^n$。若对所有 $i \in \mathbb{Z}$ 都有 $\mathfrak{m}H_i(C) = 0$，则我们还对每个 $i \in \mathbb{Z}$ 令 $h_i(C) = \dim_k H_i(C)$，并令 $h_C(t) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} h_i(C)t^i$。以下定理用它们的 Poincar´e 级数刻画这类复形的形式性。

定理1.2 (定理 2.1)。 设$(R, \mathfrak{m}, k)$ 是一个局部环，且 $C \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(R)$ 是一个复形，满足 $\mathfrak{m}H_i(C) = 0$对所有 $i \in \mathbb{Z}$均成立。则以下条件等价。
(1) 有 $P_C(t) = h_C(t)P_k(t)$。(2) 复形 C 是形式的，即 $C \cong \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} H_i(C)[i]$ 在$\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(R)$中。

定理1.2的关键应用是 Golod局部环上 Golod 模的 Koszul 复形具有形式性；见推论2.3。结合 Lescot 定理，我们证明定理1.1。定理1.1还通过给出更精确的支配指标界，并在更一般的情形下建立一致支配，改进了若干已知结果；见备注2.5。

2. Formality and uniform dominance

约定。 本文中，$(R, \mathfrak{m}, k)$ 表示一个交换诺特局部环。所有子范畴均假定为严格满的。所有复形均为链复形。对于复形 C 和整数 n，移位 $C[n]$定义为$(C[n])_i = C_{i-n}$ 和 $d_{C[n]} = (-1)^n d_C$。特别地，有 $H_i(C[n]) = H_{i-n}(C)$。

对于复形 C 和整数 n，记 $\tau_{\geqslant n}C$ 为 C 在次数不小于 n 处的软截断（见[3, 1.2]）。对于复形 $C \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(R)$，令 $\inf C = \inf\{i \in \mathbb{Z} \mid H_i(C) \neq 0\}$ 且 $\sup C = \sup\{i \in \mathbb{Z} \mid H_i(C) \neq 0\}$。对于非零复形 $C \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(R)$，$C$ 的振幅 定义为 $\operatorname{amp} C = \sup C - \inf C$。符号 $\preccurlyeq$表示 Laurent 级数的逐系数不等式。

定理 2.1. 设 $C \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(R)$ 满足 $\mathfrak{m}H_i(C) = 0$ 对所有 $i \in \mathbb{Z}$均成立。则以下断言成立。
(1) 不等式 $P_C(t) \preccurlyeq h_C(t)P_k(t)$ 成立。(2) 等式 $P_C(t) = h_C(t)P_k(t)$ 成立，当且仅当 C 在 $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(R)$中是形式的。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 13D09, 13D02, 13H10.*Key words and phrases.* Golod环，Golod 模，Koszul 复形，导出范畴，奇点范畴，一致支配。

证明。 不妨设 $C \neq 0$。我们对 $\operatorname{amp} C \geqslant 0$ 使用归纳法证明这些断言。令 $a = \inf C$。若 $\operatorname{amp} C = 0$，则 $C \cong H_a(C)[a] \cong k[a]^{\oplus h_a(C)}$，两个断言均成立。设 $\operatorname{amp} C > 0$。考虑典范三角

$$\tau_{\geqslant a+1}C \to C \to H_a(C)[a] \xrightarrow{\delta} (\tau_{\geqslant a+1}C)[1].$$

对每个 $n \in \mathbb{Z}$，令 $\delta_n^* \colon \operatorname{Ext}_R^{n-1}(\tau_{\geqslant a+1}C,\ k) \to \operatorname{Ext}_R^n(H_a(C)[a],\ k)$ 为由 δ 诱导的映射。注意，δ_n^* 可自然地视为 $\operatorname{Hom}_{\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(R)}(\delta,\ k[n])$。将上同调函子 $\operatorname{Hom}_{\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(R)}(-,\ k)$ 应用于上述三角，我们得到正合列

$$\operatorname{Ext}_R^{n-1}(\tau_{\geqslant a+1}C, k) \xrightarrow{\delta_n^*} \operatorname{Ext}_R^n(H_a(C)[a], k) \to \operatorname{Ext}_R^n(C, k) \to \operatorname{Ext}_R^n(\tau_{\geqslant a+1}C, k) \xrightarrow{\delta_{n+1}^*} \operatorname{Ext}_R^{n+1}(H_a(C)[a], k)$$

对每个 $n \in \mathbb{Z}$。由于 $\operatorname{Ext}_R^n(H_a(C)[a],\ k) \cong \operatorname{Ext}_R^{n-a}(k,\ k)^{\oplus h_a(C)}$，由正合性可得

$$\beta_n(C) = \beta_n(\tau_{\geqslant a+1}C) + h_a(C)\beta_{n-a}(k) - \dim_k \operatorname{Im}\delta_n^* - \dim_k \operatorname{Im}\delta_{n+1}^*.$$

由于 $\operatorname{amp}(\tau_{\geqslant a+1}C) < \operatorname{amp} C$，归纳假设给出 $\beta_n(\tau_{\geqslant a+1}C) \leqslant \sum_{i\neq a} h_i(C)\beta_{n-i}(k)$。因此

$$\beta_n(C) \leqslant \beta_n(\tau_{\geqslant a+1}C) + h_a(C)\beta_{n-a}(k) \leqslant \sum_{i\in\mathbb{Z}} h_i(C)\beta_{n-i}(k).$$

这就证明了（1）。

假设 $P_C(t) = h_C(t)P_k(t)$。那么，对每个 $n \in \mathbb{Z}$，上述不等式均为等式。因此，对所有 $n \in \mathbb{Z}$，都有 $\delta_n^* = 0$，且 $P_{\tau_{\geqslant a+1}C}(t) = h_{\tau_{\geqslant a+1}C}(t)P_k(t)$。由归纳假设，$\tau_{\geqslant a+1}C$ 是形式的，因此

$$\tau_{\geqslant a+1}C \cong \bigoplus_{i\neq a} H_i(C)[i] \cong \bigoplus_{i\neq a} k[i]^{\oplus h_i(C)}$$

在 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(R)$ 中。固定这样一个同构，并令 $\pi_{i,j} \colon (\tau_{\geqslant a+1}C)[1] \to k[i+1]^{\oplus h_i(C)} \to k[i+1]$ 为关于 $i \neq a$ 和 $1 \leqslant j \leqslant h_i(C)$ 的投影之复合。由于 $\pi_{i,j} \in \operatorname{Hom}_{\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(R)}((\tau_{\geqslant a+1}C)[1], k[i+1]) \cong \operatorname{Ext}_R^i(\tau_{\geqslant a+1}C, k)$，对所有 i, j，都有 $\pi_{i,j} \circ \delta = \delta_{i+1}^*(\pi_{i,j}) = 0$。因此 $\delta = 0$，且典范三角分裂。因此，$C \cong \tau_{\geqslant a+1}C \oplus H_a(C)[a] \cong \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} H_i(C)[i]$，所以 C 是形式的。

反过来，假设 C 是形式的。那么 $C \cong \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} k[i]^{\oplus h_i(C)}$ 属于 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(R)$，因此 $\operatorname{Ext}_R^n(C,k) \cong \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \operatorname{Ext}_R^{n-i}(k,k)^{\oplus h_i(C)}$。于是，对所有 $n \in \mathbb{Z}$，都有 $\beta_n(C) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} h_i(C)\beta_{n-i}(k)$，从而得到 $P_C(t) = h_C(t)P_k(t)$。

■

注 2.2. 当 $C = K \otimes_R M$ 时，其中 K 是由 $\mathfrak{m}$ 的极小生成集上的 Koszul 复形，且 M是非零有限生成 R-模，定理 2.1(1) 中的不等式可由 [2, 定理 6.1.1]应用于 R的恒等映射得到。

令 $e = \operatorname{edim} R$，并设 K 是由 $\mathfrak{m}$的极小生成集上的 Koszul 复形。设 $D_R(t) = 1 - \sum_{i=1}^{e} \dim_k H_i(K)t^{i+1}$。回忆一下，若 R 满足 $P_k(t) = (1+t)^e/D_R(t)$，则称其为 ***Golod*环** 。若非零有限生成 R-模 M满足 $P_M(t) = (\sum_{i=0}^{e} \dim_k H_i(K\otimes_R M)t^i)/D_R(t)$，则称其为 ***Golod*** 模； 见 [1,第 5 节.3]。我们应用定理 2.1，得到 Golod 模的如下刻画。

推论2.3. 设 R 是一个 ***Golod*局部环**，K 是由 $\mathfrak{m}$的极小生成集上的 ***Koszul*** 复形。则非零有限生成的 R-模 M 是 ***Golod*** 的充分必要条件是 $K \otimes_R M$ 在 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(R)$中是形式的。

证明. 设 P是 M的极小自由分解。由于 K是有限自由模的有界复形，$P \otimes_R K$是 $K \otimes_R M$的极小自由模型。由于 $K_i \cong R^{\oplus \binom{e}{i}}$ 对于 $0 \leqslant i \leqslant e$，我们有 $\beta_n(K \otimes_R M) = \operatorname{rank}(P \otimes_R K)_n = \sum_{i=0}^{e} \binom{e}{i}\beta_{n-i}(M)$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}$均成立。因此 $P_{K\otimes_R M}(t) = (1+t)^e P_M(t)$。此外，根据 [2, (1.5.3)]，$\mathfrak{m}H_i(K \otimes_R M) = 0$对所有 $i \in \mathbb{Z}$均成立。由定理 2.1及 R的 Golod 性，复形 $K \otimes_R M$ 是形式的当且仅当

$$(1+t)^e P_M(t) = P_k(t)h_{K\otimes_R M}(t) = \frac{(1+t)^e}{D_R(t)} \sum_{i=0}^{e} \dim_k H_i(K \otimes_R M)t^i.$$

消去 $(1+t)^e$ 后，我们恰好得到 M 为 Golod 模的定义等式。 ■

为证明定理1.1，我们回顾三角范畴中生成的概念。设 $\mathcal{T}$是一个三角范畴。对于 $\mathcal{T}$的子范畴 $\mathcal{X}$，记 $\langle\mathcal{X}\rangle_1^{\mathcal{T}}$ 为它在有限直和、直和项和移位下的闭包。对于 $\mathcal{T}$的子范畴 $\mathcal{X}$、$\mathcal{Y}$，记 $\mathcal{X} * \mathcal{Y}$为由满足以下条件的对象组成的子范畴：对象 Z存在一个正合三角 $X \to Z \to Y \to X[1]$，其中 $X \in \mathcal{X}$和 $Y \in \mathcal{Y}$。对于一个对象 $X \in \mathcal{T}$，令 $\langle X\rangle_0^{\mathcal{T}} = \{0\}$ 和$\langle X\rangle_{n+1}^{\mathcal{T}} = \langle\langle X\rangle_n^{\mathcal{T}} * \langle X\rangle_1^{\mathcal{T}}\rangle_1^{\mathcal{T}}$表示 $n \geqslant 1$。

R 的奇点范畴定义为 Verdier 商 $\mathsf{D_{sg}}(R) = \mathsf{D^b}(R)/\mathsf{perf}(R)$，其中 $\mathsf{perf}(R)$表示完美复形构成的子范畴。按照 [7, 定义3.4], , R 的支配指标定义为

$$\mathrm{dx}(R) = \inf\{n \in \mathbb{Z}_{\geqslant -1} \mid k \in \langle X\rangle_{n+1}^{\mathsf{D_{sg}}(R)} \text{ for every } 0 \neq X \in \mathsf{D_{sg}}(R)\}.$$

局部环 R 称为一致支配，如果 $\mathrm{dx}(R) < \infty$。

推论2.4。每个 *Golod*局部环 R 都是一致支配的，且$\mathrm{dx}(R) \leqslant \operatorname{edim} R$。特别地，[8] 中的问题*9.4*以及 [7] 中的问题*1.1(3)*均有肯定答案。

证明。令 $e = \operatorname{edim} R$，并令 $0 \neq X \in \mathsf{D_{sg}}(R)$。由 [4, 引理2.4(2)], , 存在一个有限生成的R-模 M 和一个整数 m，使得 $X \cong \Omega^e M[m]$ 在 $\mathsf{D_{sg}}(R)$ 中。Lescot 定理 [1, 定理5.3.2(2)]表明，$\Omega^e M$ 是一个非零的 Golod 模。由推论2.3，复形 $K \otimes_R \Omega^e M$ 在 $\mathsf{D^b}(R)$ 中是形式的。由中山引理，$H_0(K \otimes_R \Omega^e M) \cong \Omega^e M/\mathfrak{m}\Omega^e M \neq 0$，剩余域 k 是 $\mathsf{D^b}(R)$ 中 $K \otimes_R \Omega^e M$ 的直和项。另一方面，硬截断给出 $K \otimes_R \Omega^e M \in \langle \Omega^e M\rangle^{\mathsf{D^b}(R)}_{e+1}$。转到奇点范畴，我们得到

$$k \in \langle \Omega^e M\rangle_{e+1}^{\mathsf{D_{sg}}(R)} = \langle M\rangle_{e+1}^{\mathsf{D_{sg}}(R)} = \langle X\rangle_{e+1}^{\mathsf{D_{sg}}(R)}.$$

因此 $\mathrm{dx}(R) \leqslant e$，断言得证。 ■

注记 2.5。我们记录推论 2.4 的一些推论，并将其与已知结果进行比较。令$d = \dim R$。

(1) 假设 $\mathfrak{m}$-进完备化 R 是一个超曲面。则 R 是 Golod 的，从而 $\mathrm{dx}(R) \leqslant d + 1$。这通过去除完备性假设，推广了 [7, 推论 6.4] ，同时保留了相同的上界。(2) 假设 $\operatorname{edim} R - \operatorname{depth} R \leqslant 2$，且 R不是完全交。根据 [1,命题 5.2.5 和 5.3.4], , 则 R是 Golod 的，因此

$$\mathrm{dx}(R) \leqslant \operatorname{edim} R \leqslant \operatorname{depth} R + 2 \leqslant d + 2.$$

在 Cohen–Macaulay情形下，这将 [7, 定理 6.14(2)] 中的界 $6d+5$改进为 $d+2$。此外，既不需要 Cohen–Macaulay假设，也不需要剩余域的无限性。

(3) 假设 R 是 Cohen–Macaulay 环，且具有最小重数，即 $\mathrm{e}(R) = \operatorname{edim} R - d + 1$。那么 R 是 Golod 环，因此 $\mathrm{dx}(R) \leqslant \operatorname{edim} R$。对于无限剩余域，更精确的界 $\mathrm{dx}(R) \leqslant d$ 已在 [7, 命题 6.7(1b)] 中得出。本结果在不对剩余域作任何限制的情况下建立了一致支配，不过其数值界较弱。

(4) 设

$$R = k[\![x_1, \ldots, x_h]\!]/I_2 \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1u} \\ f_{21} & \cdots & f_{2u} \end{pmatrix},$$

其中 k 是一个域，且 $f_{ij} \in (x_1、\ldots\ldots、x_h)$。假设 $\dim R = h - u + 1$。那么 R 是 Golod 环，因此 $\mathrm{dx}(R) \leqslant h$。事实上，由一个 $2 \times u$ 矩阵的二阶子式定义的一般行列式环具有最小重数，因而是 Golod 环。环 R 是通过一个正则序列对该环作形式幂级数扩张得到的，其中的元素模极大理想的平方后线性无关。因此，根据 [1, 命题 5.2.4(3)], R 是 Golod 环。这大幅改进了[9,推论 6.8]中的界。

(5) 设 S 是正则环，$f_1, \ldots, f_n$ 是一个 S-正则序列，并令 $s \geqslant 2$。设 $R = S/(f_1, \ldots, f_n)^s$。由于正则局部环中完全交理想的幂定义了 Golod 环，根据 [5, 推论 3，3],每个局部化 $R_{\mathfrak{p}}$ 都是 Golod。因此，对每个 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$，都有 $\mathrm{dx}(R_{\mathfrak{p}}) \leqslant \operatorname{edim} R_{\mathfrak{p}}$。这将[6, 命题 5.1] 从局部支配加强为每个局部化处的一致支配。

致谢。Kobayashi 的部分研究经费由 JSPS青年科学家科研资助（25K17240）提供。Mifune 的部分研究经费由 JSPS研究员科研资助（25KJ1386）提供。本文准备期间，OpenAI 的 ChatGPT 被用于数学讨论。

References

[1] L. L. Avramov, 无限自由分解, *Six lectures on commutative algebra (Bellaterra, 1996)*, 1–118, 数学进展丛书**166**, *Birkhäuser Basel* 1998 ,, .

[2] L. L. Avramov; S. B. Iyengar; C. Miller, 局部同态上的同调, *Amer. J. Math.* **128** (2006 1, 23 90), no. – .

[3] L. W. Christensen; H. Holm, 满足 Auslander 条件的代数上的上同调消失, *Math. Z.* **265** (2010), no. 1, 21–40.

[4] H. Dao; R. Takahashi, 奇异性范畴维数的上界, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **353** (2015), no. 4, 297–301.

[5] E. Gover; P. Salmon, 关于一类 Golod 同态. *Math. Scand.* **46**(1980), no. 1, 5–14.

[6] K. Kimura; Y. Mifune; Y. Otake; R. Takahashi, 关于强 G-正则环, 预印本 (2026), `arXiv:2608.08228v1`.

[7] T. Kobayashi; R. Takahashi, 关于一致支配局部环的普遍性, 预印本 (2026), `arXiv:2603.10810v1`. [8] R. Takahashi, 支配局部环与子范畴分类, *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2023), no. 9, 7259–7318. [9] R. Takahashi, 一致支配局部环与奇异性范畴的 Orlov 谱, *Math. Z.* **312** (2026), no. 4, 论文编号 117, 27 页。

(Kobayashi) School of Science and Technology、 Meiji University、 1-1-1 Higashimita、 Tamaku、 Kawasaki 214-8571、Japan*Email address*: `tkobayashi@meiji.ac.jp`

(Mifune) Graduate School of Mathematics、 Nagoya University、 Furocho、 Chikusaku、 Nagoya 464-8602、 Japan*Email address*: `yuki.mifune.c9@math.nagoya-u.ac.jp`