arXiv:2611.28921v1 [math.GN] 21 Nov 2026

滤子作为网的局部化

Germán I. GomeroFerrer Renan M. Mezabarba

摘要

基于文献中不同的子网概念，我们定义了网范畴，并研究它们之间的范畴关系。我们证明，真滤子及滤子保持函数构成的范畴，在等价意义下，是其中四个范畴的局部化。

关键词。 网；滤子；子网；范畴的局部化。
2020年数学主题分类。 主要分类 54A20；次要分类 18E35。

引言

本文源于作者对收敛空间的兴趣，这种兴趣既体现在研究中，也体现在教学中，同时还源于他们对范畴论的热爱。在研究拓扑背景下所谓网与滤子之间的“等价性”时，我们思考了这种关系如何以范畴论的方式表达，以及它取决于所考察的子网和态射的概念到何种程度。

网和滤子是描述超越序列的收敛性的经典工具。Bruns 和 Schmidt 研究了它们之间的关系 [3]„ 给出了滤子的网实现；Aarnes 和 Andenæs [1], 则通过由尾集生成的滤子比较了子网的不同概念。标准论述见于 Gähler [7], 、Willard [18],和 Schechter [14, 的第 7]章。

拓扑空间中网的收敛由其最终性滤子决定，该滤子记录了包含网中所有充分晚项的子集。转而考察这个滤子会“遗忘”网所选取的有向指标。这种对应关系使得收敛陈述可以在两种语言之间相互转换，但它本身并未说明这两种语言在何种意义上、以及在多大程度上是等价的。我们希望了解，从网转向滤子的过程中哪些信息得以保留，以及这一过程在何种范畴意义下具有泛性质。我们将经典的子网关系推广到可能具有不同底集的函数上，并研究由此得到的网范畴。

我们证明，这种关系可以通过局部化从范畴论的角度加以理解。更确切地说，真滤子范畴及其滤子保持函数，在等价意义下，是四种网范畴各自的局部化。这一点陈述于定理 4.5 和推论 4.6中。在每种情形下，都可以通过形式地反演这样的态射得到局部化：其值函数是恒等映射，且其源与目标具有相同的最终性滤子。这些术语将在第

1.

本文安排如下。第 1 节回顾网、滤子和子网的概念，并定义待比较的范畴。第 2 节讨论滤子的网实现。第 3 节表示网的态射，并比较它们的表示与复合。第 4 节证明局部化结果，并考察右分式。在第5节，我们回到固定集合上的网与滤子，并讨论它们关系的其他方面。

AI 协助说明。 本文研究的网范畴由作者提出。自 2024 年起，作者使用 GPT-6 Astra (OpenAI) 和 Claude (Anthropic) 协助整理和讨论作者手写的计算与草稿。与这些系统的互动帮助作者认识到本文所述的局部化。与往常一样，作者对数学内容和最终呈现形式负责。

1 网、滤子与态射

我们回顾全文所采用的约定，主要沿用 Schechter 的术语；其著作 [14, 第 7] 章 仍是理解网、滤子以及子网不同概念之间关系的一般性参考。一个 有向集 是一个非空预序集，其中任意两个元素都有一个共同的上界。因此，其序是自反且传递的，但不一定是反对称的。对于一个有向集 $\mathbb{D}$ 和 $d \in \mathbb{D}$，记作

$$\mathbb{D}_{\geq d} = \{d' \in \mathbb{D} : d \leq d'\}.$$

子集 $C \subseteq \mathbb{D}$ 是共尾的，当且仅当 $\mathbb{D}$ 中的每个元素都小于某个 C 中的元素。预序集之间的映射若保持其序，则称为单调。若一个映射既单调又具有共尾值域，则称其为单调共尾。集合 X 上的网由一个有向集 $(\mathbb{D}, \leq)$ 和一个函数 $x : \mathbb{D} \to X$ 构成。有向定义域和集合 X 都是该网数据的一部分。集合 $x[\mathbb{D}_{\geq d}]$ 是它在 d 处的尾集。我们将所有这类集合组成的族记作

$$\mathcal{L}(x) = \{x[\mathbb{D}_{\geq d}] : d \in \mathbb{D}\}.$$

集合 X 上的滤子是 X 的一个非空子集族，且对向上包含封闭，并对有限交封闭。若它不包含空集，则称为真滤子。本文中的所有滤子都是真滤子。滤子基是由 X 的非空子集构成的非空族 $\mathcal{B}$，满足：对于任意 $A, B \in \mathcal{B}$，存在某个 $C \in \mathcal{B}$ 使得 $C \subseteq A \cap B$。由$\mathcal{B}$生成的滤子是

$$\langle \mathcal{B} \rangle = \{A \subseteq X : \text{some } B \in \mathcal{B} \text{ satisfies } B \subseteq A\}.$$

当$\mathcal{B}$满足$\langle \mathcal{B} \rangle = \mathcal{F}$时，我们称$\mathcal{B}$为 X 上滤子$\mathcal{F}$的一个基。给定函数 $f\colon X \to Y$，$\mathcal{F}$ 的像滤子为

$$f(\mathcal{F}) = \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}.$$

当$\mathcal{F}$ 是真滤子时，它也是如此。为联系网与滤子，注意到一个网的尾集构成滤子基，由此生成最终性滤子

$$\mathrm{Ev}(x) = \{A \subseteq X : \text{there is } d \in \mathbb{D} \text{ with } x[\mathbb{D}_{\geq d}] \subseteq A\}.$$

以下恒等式将最终性滤子与像滤子联系起来，并描述像滤子在复合及恒等态射下的性质（此处 $g : Y \to Z$ 是另一个函数）：

$$\begin{aligned} \mathrm{Ev}(f \circ x) &= f(\mathrm{Ev}(x)), \\ (g \circ f)(\mathcal{F}) &= g(f(\mathcal{F})), \\ \mathrm{id}_X(\mathcal{F}) &= \mathcal{F}. \end{aligned} \tag{1}$$

这些像滤子使我们能够比较不同集合上的滤子。范畴 Fil* 的对象是形如$(X, \mathcal{F})$的有序对，其中$\mathcal{F}$是 X上的真滤子。其态射$(X, \mathcal{F}) \to (Y, \mathcal{G})$是满足$\mathcal{G} \subseteq f(\mathcal{F})$的函数$f\colon X \to Y$。恒等态射和复合均按函数的方式定义。这是 Blass 在第 1], 节中所述范畴$\mathcal{F}$ [2, 的真滤子部分；或者说，是 Koubek–Reiterman 的范畴 F_0 [10, ，见第 19]页，其中仅保留真滤子。

固定集合上的滤子可自然地按包含关系进行比较。对于该集合中的网，比较最终性滤子，相当于询问一个网的每个尾集是否都包含另一个网的某个尾集。这便得到了 Aarnes 和 Andenæs [1, 定义 2.1 和引理 2.2]所考虑的子网概念。序列之间的子序列关系也促使人们通过指标集之间的映射来定义子网关系。我们回顾三种子网概念。

定义 1.1。设 $x\colon \mathbb{D} \to X$ 和 $y\colon \mathbb{E} \to X$ 是同一集合中的网。

(i) 按照 Willard [18, 定义 11.2], ，我们称 x *W*-子网 y，如果 $x = y \circ r$，其中某个单调共尾映射 $r : \mathbb{D} \to \mathbb{E}$ 满足此条件。

（ii）按照 Kelley 的惯例 [9], ，如 Schechter [14, 第 7.15(b) 节], 所述 x ，我们称*K*-子网 y ，如果 $x = y \circ r$ ，存在某个最终共尾映射 $r\colon \mathbb{D} \to \mathbb{E}$。这意味着，对于每个 $e_0 \in \mathbb{E}$，都存在 $d_0 \in \mathbb{D}$ 使得

$$r[\mathbb{D}_{\geq d_0}] \subseteq \mathbb{E}_{\geq e_0}. \tag{2}$$

(iii) 按照 Aarnes–Andenæs [1, 定义 2.1 和引理 2.2], ，我们称 x y 的一个 *AA*-子网 为：若 Ev(y) ⊆Ev(x) ；等价地，若 y 的每个尾集都包含 x 的一个尾集。[1]

对于单调映射，共尾值域等价于最终共尾性：一旦某个指标映射到高于 e_0的位置，所有更大的指标也都如此。若映射不单调，仅有共尾值域并不足够。例如，由 $r(2n) = n$ 和 $r(2n+1) = 0$定义的映射 $r\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，其中 $\mathbb{N}$ 是非负整数集，具有共尾值域，但在 2处不满足 ($e_0 = 1$)。W-子网是 K-子网，而 K-子网是 AA-子网。Aarnes–Andenæs [1, 例 2.4–2。5]给出了区分 AA-子网与 K-子网的反例。另请参阅 Schechter [14, 第 7 节16] ，比较这三种概念。

定义 1.2. 同一集合中的网称为尾等价，记作 $x \sim y$，若 Ev(x) =Ev(y)。

为了将子网关系推广到可能属于不同集合的函数，考虑网$x\colon \mathbb{D} \to X$ 和 $y\colon \mathbb{E} \to Y$，以及满足 $f \circ x = y \circ r$的映射 $r\colon \mathbb{D} \to \mathbb{E}$ 和 $f\colon X \to Y$，由此得到交换方：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \xrightarrow{\ r\ } & \mathbb{E} \\ {\scriptstyle x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle y} \\ X & \xrightarrow[\ f\ ]{} & Y \end{array} \tag{3}$$

我们称 f 为该方形的值函数 ，称 r 为其指标映射。当映射 r 单调共尾时，它是 f 的 *W*-见证；当它最终共尾时，它是*K*-见证 。因此，指标见证 是满足交换方程和指定序条件的指标映射。令 $f = \mathrm{id}_X$ ，即可恢复相应的子网关系。

将这些方形用作态射有两种方式：将有序对（r, f）作为态射，或者只取值函数 f ，并要求存在一个指标映射 r ，使方形交换且满足相应的序条件。将这两种方式与两种序条件相结合，可得四个范畴；第五个范畴则直接比较最终性滤子。

定义 1.3. 以下范畴都以所有的网为对象。对于 $x\colon \mathbb{D} \to X$ 和 $y\colon \mathbb{E} \to Y$，其态射 $x \to y$ 为:

(i) 在 W-Net 中，态射为交换方 (r, f)，其中 r 单调共尾，且 $f \circ x = y \circ r$。(ii) 在 K-Net 中，态射为交换方 (r, f)，其中 r 最终共尾，且 $f \circ x = y \circ r$。(iii) 在 W-Net$_\exists$ 中，态射为具有 W-见证的函数 $f\colon X \to Y$。(iv) 在 K-Net$_\exists$ 中，态射为具有 K- 见证的函数 $f\colon X \to Y$。(v) 在 AA-Net 中，态射为满足 Ev(y) $\subseteq f$(Ev(x)) 的函数 $f\colon X \to Y$。

前缀 W、K 和 AA 分别表示定义 1.1 中的子网概念。我们将两个 W-范畴中的态射称为 W-态射，将两个 K-范畴中的态射称为 K-态射，并将AA-Net 中的态射称为 AA-态射。

[1]这种关系在 [13, 第 2] 节中称为准子网。另见 Schechter [14, 第 7 节，14] 了解更早的相关研究。

显然，在 AA-Net 中， $f \circ x$ 是 y的 AA-子网；用尾集来表述，这意味着要求对于每个 $e_0 \in \mathbb{E}$，都存在 $d_0 \in \mathbb{D}$ 使得

$$f[x[\mathbb{D}_{\geq d_0}]] \subseteq y[\mathbb{E}_{\geq e_0}]. \tag{4}$$

在 W-Net 和 K-Net 中，恒等态射为 $(\mathrm{id}_{\mathbb{D}}, \mathrm{id}_X)$，复合定义为 $(s,g)\circ(r,f) = (s\circ r, g\circ f)$。该复合定义良好，因为单调共尾映射的复合仍是单调共尾映射，而最终共尾映射的复合仍是最终共尾映射。在另外三个范畴中，恒等态射和复合均按值函数定义。存在满遗忘函子 P_W : W-Net $\to$ W-Net$_\exists$ 和 P_K : K-Net $\to$K-Net$_\exists$，它们会遗忘每个方形中的指标见证。子网条件之间的蕴含关系还给出忠实包含关系 W-Net $\to$ K-Net、W-Net$_\exists \hookrightarrow$ K-Net$_\exists$ 以及 K-Net$_\exists \hookrightarrow$AA-Net。

设 C 为定义 1.3(i)–(iv) 中的任意一个范畴。复合这些包含关系，并在需要时使用遗忘函子，可得函子 Q_{C} : C $\to$ AA-Net。最后，通过取最终性滤子，我们得到函子 T: AA-Net $\to$ Fil*，其定义为：在对象上， $T(x\colon \mathbb{D} \to X) = (X, \mathrm{Ev}(x))$；在态射上， $T(f) = f$。AA-态射的定义保证 $T(f)$ 是一个滤子态射，而 (1) 确保它与恒等态射和复合相容。综上，这些函子构成如下交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{W-Net} & \hookrightarrow & \text{K-Net} & & & & \\
\downarrow{\scriptstyle P_W} & & \downarrow{\scriptstyle P_K} & & & & \\
\text{W-Net}_\exists & \hookrightarrow & \text{K-Net}_\exists & \xrightarrow{Q_{\text{K-Net}_\exists}} & \text{AA-Net} & \xrightarrow{T} & \text{Fil}^*.
\end{array}$$

该函子 T 是完全忠实的，因为相应的同态集恰好由相同的函数组成。正如命题2.1中所回顾的，每个真滤子都是某个网的最终性滤子，因此T 是本质满的，因而是一个等价。

例 1.4。 函子 P_W 和 P_K 不一定是忠实的。对于 $c\colon \mathbb{N} \to \{*\}$，常值单点网，指标映射 $r(n) = n$ 和 $s(n) = 2n$ 给出了不同的 W-态射 $c \to c$，其值函数均为 $\mathrm{id}_{\{*\}}$。它们在 P_W下的像，以及在 P_K 下的像，都相同。

例 1.5。 包含关系 W-Net$_\exists$, $\to$ K-Net$_\exists$ 不一定是满的，尽管只保留了值函数。使用 Schechter [14, 第 7.16(b) 节中的相邻对的置换：令 $y_n = n$ 属于 $\mathbb{N}$ 且 $x_n = r(n)$，其中 $r(2k) = 2k+1$ 和 $r(2k+1) = 2k$。映射 r是最终共尾的，但不是单调的。对于值函数 $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$， y 的单射性迫使此见证成立。因此，从 W 到 K 的包含关系并不满，包括范畴 W-Net$_\exists$ 和 K-Net$_\exists$在内。

例1.6。 AA-态射不一定有指标见证。令 $X = \{0, 1\}$。对于非空的 $A \subseteq X$，记 $\uparrow A = \{B \subseteq X : A \subseteq B\}$ 为由 A生成的主滤子。令$x = (1, 0, 0, \ldots\ldots)$ 和 $y = (0, 0, 0, \ldots\ldots)$。它们的滤子都等于 $\uparrow\{0\}$，但由于 x_0，不存在满足 $x = y \circ r$ 的映射 r s。因此，$\mathrm{id}_X\colon x \to y$ 是一个没有任何指标见证的 AA-态射。初始项在这一差别中的作用已在 [1, 例2.4]中显现。该例表明，K-Net$_\exists$ $\to$AA-Net 的包含关系不是满的。

例1.7。 子网可以具有严格更细的最终性滤子。对于 $y_n = n$ 模 2 的 $X = \{0, 1\}$，取 $r(n) = 2n$。W-子网 $x = y \circ r$ 恒为零，而 $\mathrm{Ev}(y) = \{X\}$ 且 $\mathrm{Ev}(x) = \uparrow\{0\}$。这个 W-态射具有恒等值函数，并且严格细化了最终性。因而，对每个子网求逆都会丢弃 AA-Net 所保留的信息。

注 1.8。 Šlapal [15, 定义 1.1 和例 1.2(1)]使用范畴数据，通过在指标集之间的映射进行分解来定义子网。他的范畴 Dir 以有向集为对象，以最终共尾映射为态射。这一选择给出了 K-子网关系

在定义 1.1（ii）中回顾了这一点。在后续工作中，对于一个固定集合 X，他考虑逗号范畴（$F \downarrow X$），其中 $F\colon\ \mathsf{Dir} \to \mathbf{Set}$ 是遗忘函子。其对象是 X中的网，其态射是体现子网关系的指标映射 [16, 定义 2.1 和例 2.2(2)]。

注记 1.9。 对于有向集 $\mathbb{D}$，记 $\mathcal{T}_{\mathbb{D}} = \mathrm{Ev}(\mathrm{id}_{\mathbb{D}})$ 为由其尾集生成的滤子。正如 Schechter [14, 第 7.15(b) 节], 所指出的，Kelley 态射的指标条件本身可以用滤子来表述。对于任意映射 $r : \mathbb{D} \to \mathbb{E}$，$\mathrm{Ev}(r) = r(\mathcal{T}_{\mathbb{D}})$，并且

$$r \text{ is eventually cofinal} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{T}_{\mathbb{E}} \subseteq r(\mathcal{T}_{\mathbb{D}}).$$

事实上，$\mathbb{E}$ 的每个尾集的原像都 $\mathbb{D}$ 包含 2 成立当且仅当。因- 此，K-Net 可在Fil*的箭头范畴中得到全忠实表示。该表示将一个网 x 映射为滤子态射

$$x : (\mathbb{D}, \mathcal{T}_{\mathbb{D}}) \to (X, \mathrm{Ev}(x))$$

并将 Kelley 态射 (r, f) 映射为其交换方块，如 (3) 所示。反过来，对于网 $x\colon\ \mathbb{D} \to X$和 $y\colon\ \mathbb{E} \to Y$，其在箭头范畴中对应对象之间的一个方块有一个分量$r : (\mathbb{D}, \mathrm{T}_{\mathbb{D}}) \to (\mathbb{E}, \mathrm{T}_{\mathbb{E}})$。由于该分量是滤子态射，根据上述等价关系，$r$最终共尾。因此，该方块来自唯一的 Kelley 态射。若 J 表示此表示，cod 表示余域函子，则 $\mathrm{cod} \circ J = T \circ Q_{\mathsf{K\text{-}Net}}$。

2 滤子的实现

为了将网范畴与 Fil*进行比较，我们需要将真滤子实现为网的最终性滤子。我们采用 Bruns–Schmidt [3, 第 3 节，第 170–171] 页 [14, 第 7 节11], 中的构造。另见 Schechter [5, 第 6 引理3], 以及 O'Brien–Troitsky–van der Walt [13, 第 5 命题1]。

对于集合 X上的滤子基 $\mathcal{B}$，令 $\mathbb{D}_{\mathcal{B}} = \{(A, a) : A \in \mathcal{B}\ \ a \in A\}$，当 $B \subseteq A$ 时，按 $(A, a) \leq (B, b)$ 排序。由于真滤子 $\mathcal{F}$ 自身就是一个滤子基，取 $\mathcal{B} = \mathcal{F}$ 便得到 Bruns 和 Schmidt 对 $\mathcal{F}$的构造。

命题 2.1。 有序对 $(\mathbb{D}_{\mathcal{B}}, \leq)$ 是一个有向预序。由$\nu_{\mathcal{B}}(A, a) = a$ 定义的网 $\nu_{\mathcal{B}} :\ \mathbb{D}_{\mathcal{B}} \to X$ 满足

$$\nu_{\mathcal{B}}[(\mathbb{D}_{\mathcal{B}})_{\geq (A,a)}] = A \tag{5}$$

对每个 $(A,\ a) \in \mathbb{D}_{\mathcal{B}}$。因此，$L(\nu_{\mathcal{B}}) = B$，且 $\mathrm{Ev}(\nu_{\mathcal{B}}) = \langle B \rangle$。

证明。对于 $(A,\ a)$、$(B,\ b)$，选择 $C \in \mathrm{B}$ 和 $c \in C\mathrm{in}$，使得 $C \subseteq A \cap B$。那么 $(C,\ c)$ 是一个共同上界。对于每一对 $(B,\ b) \geq (A,\ a)$，我们有 $B \subseteq A$，因此$\nu_{\mathcal{B}}(B,\ b) = b \in B \subseteq A$。反过来，对每个 $a' \in A$，$(A,\ a') \geq (A,\ a)$，从而证明了（5）。关于尾集和生成滤子的断言也随之成立。

□

每个最终性滤子为$\mathcal{F}$ 的网都是 $\nu_{\mathcal{F}}$ 的 W-子网。这是 Costantini–Priola [4, 命题 3.1], 中比较的等滤子情形，其子网关系是 Kelley关系。他们的指标映射实际上是单调的。我们将记录此映射，以及从滤子基得到的比较。

命题 2.2。 设 B 是 X 上真滤子 F 的一个基。包含关系 $j\colon\ \mathbb{D}_{\mathcal{B}} \to \mathbb{D}_{\mathcal{F}}$定义了一个 W-态射 $(j, \mathrm{id}_X) : \nu_{\mathcal{B}} \to \nu_{\mathcal{F}}$，它连接具有相同最终性滤子的网。对于每个网 $x\colon\ \mathbb{D} \to X$，由下式定义的映射 $\mu_x : \mathbb{D} \to \mathbb{D}_{\mathcal{L}(x)}$

$$\mu_x(d) = (x[\mathbb{D}_{\geq d}], x_d)$$

是单调共尾的，并满足 $\nu_{\mathcal{L}(x)} \circ \mu_x = x$。

证明。对于 $(A,a) \in \mathbb{D}_{\mathcal{F}}$，取 $B \in \mathrm{B}$，使得 $B \subseteq A$ 且 $b \in B$。于是 $j(B,b) \geq (A,a)$，从而证明了共尾性。单调性由序的定义可得。交换方程以及滤子的相等性由命题 2.1 得出。对于 μ_x，尾集之间的包含关系给出单调性。给定 $(x[\mathbb{D}_{\geq d_0}], a)$，指标 d_0 本身映射到其上方。交换方程由$\nu_{\mathcal{L}(x)}$的定义得出，而滤子的相等性由命题 2.1 以及 $\mathrm{L}(x) = $ 最终性滤子(x) 得出。

□

注意，在前面的证明中，μ_x 后面可以接上包含关系 $j : \mathbb{D}_{\mathcal{L}(x)} \to \mathbb{D}_{\mathrm{Ev}(x)}$。所得的是一个 W-态射 $(j \circ \mu_x,\ \mathrm{id}_X) : x \to \nu_{\mathrm{Ev}(x)}$，它在具有最终性滤子 $\mathrm{Ev}(x)$ 的两个网之间带有恒等值函数。

网 $\nu_{\mathcal{F}}$给出了一个显式的拟逆 N: Fil* →AA-Net，其定义为：在对象上，$N(X, \mathrm{F}) = \nu_{\mathcal{F}}$；在态射上，$N(f) = f$。命题 2.1 给出 $T \circ N = \mathrm{id}_{\mathsf{Fil}^*}$，因为对于每个真滤子 F，都有 $\mathrm{Ev}(\nu_{\mathcal{F}}) = \mathrm{F}$，并且两个函子都保留表示每个态射的函数。另一方面，对于每个网 $x : \mathbb{D} \to X$，恒等映射 id_X 给出了 $\nu_{\mathrm{Ev}(x)}$ 与 x之间相互逆的 AA-态射。将从$\nu_{\mathrm{Ev}(x)}$ 到 x 的态射记为 ε_x。对于每个 AA- 态射 $f : x \to y$，图表

$$\begin{array}{ccc} N(T(x)) & \xrightarrow{N(T(f))} & N(T(y)) \\ {\scriptstyle \varepsilon_x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_y} \\ x & \xrightarrow[f]{} & y \end{array}$$

c之所以交换，是因为两个复合都由同一个函数 f 表示，即：

$$\varepsilon_y \circ N(T(f)) = f \circ \varepsilon_x.$$

因此，这些分量构成了一个自然同构 $\varepsilon : N \circ T \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathsf{AA\text{-}Net}}$。

3 “局部化”缺失的“箭头”

函子 T：AA-Net →Fil* 是一个等价。然而，虽然在 F 的一个态射中 il*

$$(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\ f\ } (Y, \mathcal{G})$$

一切看起来都很正常，但在一个 AA-态射 $f : x \to y$ 中

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \overset{?}{\cdots\cdots\to} & \mathbb{E} \\ {\scriptstyle x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle y} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

t图示看起来并不完整：缺少一个指标映射，或某个发挥其作用的对象 .

我们证明，将源替换为尾等价 W-子网后，便可获得一个指标映射。该构造将 Schechter [14, 引理 7.18 和推论 7.19]以及 O’Brien–Troitsky–van der Walt [13, 命题 2.2] 中的构造推广到了网取值所在集合之间的函数。[2]

有向集之间的最终共尾映射 $r : \mathbb{A} \to \mathbb{D}$ 使得对于每个网 $x : \mathbb{D} \to X$，$x \circ r$ 都是 x 的 K-子网。因此，$\mathrm{Ev}(x) \subseteq \mathrm{Ev}(x \circ r)$。若要对每个这样的网都成立 $\mathrm{Ev}(x \circ r) = \mathrm{Ev}(x)$，我们还需要指标滤子之间的反向包含关系。这便引出了下面的条件。

[2]关于通过子网实现更细滤子的另一种方式，参见 Gähler [7, 定理 2.8.4，第 82–83]页。

定义 3.1. 我们称有向集之间的单调映射 $r : \mathbb{A} \to \mathbb{D}$ 是尾满射，如果

$$r(\mathcal{T}_{\mathbb{A}}) \subseteq \mathcal{T}_{\mathbb{D}}. \tag{6}$$

等价地， $\mathbb{A}$ 的每个尾集的像都包含 $\mathbb{D}$的一个尾集：对于每个 $a_0 \in \mathbb{A}$，存在 $d_0 \in \mathbb{D}$ 使得 $\mathbb{D}_{\geq d_0} \subseteq r[\mathbb{A}_{\geq a_0}]$。

尾满射映射的像在其陪域中是共尾的。事实上，固定 a_0，选取 d_0 如上，并令 $d \in \mathbb{D}$。的一个上界 d， d_0 属于 $r[\mathbb{A}_{\geq a_0}]$。由于该映射是单调的，因此它也是最终共尾的。因此，对于尾满射映射，(6) 是一个等式。

命题 3.2。 对于单调映射 r： $\mathbb{A} \to \mathbb{D}$，以下条件等价：

(i) r 是尾满射；*(ii)* 对于每个网 x： $\mathbb{D} \to X$，在每个集合 X上，最终性滤子$(x \circ\ r)$ = 最终性滤子(x)；*(iii)* 对于每个网 x： $\mathbb{D} \to \{0,1\}$，最终性滤子$(x \circ\ r)$ = 最终性滤子(x)。

证明。 假设 (i) 成立。最终共尾性给出 Ev(x) $\subseteq$ Ev$(x \circ r)$。如果 $x \circ r$ 在某个指标 a_0之后取值于B，则选取 d_0，使得每个 $d \geq d_0$ 都可写成 $r(a)$，其中某个 $a \geq a_0$满足这一条件。于是，对每个 $d \geq d_0$都有$x_d \in B$。这证明了反向包含关系，因此得到 (ii)，而 (ii) 蕴含 (iii)。

对于剩下的蕴含，假设尾满射性在 a_0 处失效。那么 $H = \mathbb{D} \setminus r[\mathbb{A}_{\geq a_0}]$与 $\mathbb{D}$的每个尾集都相交。其示性网 $x = \mathbf{1}_H : \mathbb{D} \to \{0,1\}$ 并非最终为零，而 $x \circ r$ 在 a_0 之后为零。它们的最终性滤子不同，这与 (iii) 矛盾。 □

为了补上缺失的指标映射，我们将把网 $x : \mathbb{D} \to X$ 替换为网 $x \circ \sigma$，使其具有相同的最终性滤子，其中 $\sigma : \mathbb{A} \to \mathbb{D}$ 是有向集之间的单调映射。根据命题 3.2，对于以 $\mathbb{D}$ 为指标的每个网，这一结论成立，当且仅当 σ 是尾满射。

对于网 x： $\mathbb{D} \to X$ 和 y： $\mathbb{E} \to Y$，我们称定义 1.3 中任一范畴里的态射 $x \to y$ 为垂直态射，当且仅当 $X = Y$ 且其值函数为 id_X。若垂直态射满足 精确，则称其为精确态射；当 $x \sim y$时，我们记作

$$S_{\mathrm{ts}} = \{(r, \mathrm{id}_X) : r \text{ is tail-surjective}\}, \tag{7}$$

其中 $(r,\ \mathrm{id}_X)$ 遍历 W-Net中的垂直态射。 S_{ts} 中的每个元素根据命题 3.2都是精确的。字母 S 预示着在态射类处局部化的记号 $\mathsf{C}[S^{-1}]$： S_{ts} 将是这样一个态射类，下标表示尾满射性。如有必要，我们可以通过包含关系 S_{ts} 将其视为 K-Net 中的态射类，其中 W-Net $\to$K-Net。

态射类 S_{ts} 包含恒等态射，并且在复合下封闭。事实上，若 $r : \mathbb{A} \to \mathbb{D}$ 和$s : \mathbb{D} \to \mathbb{E}$ 都是尾满射，则对每个 a_0，存在 d_0， e_0，使得

$$\mathbb{E}_{\geq e_0} \subseteq s[\mathbb{D}_{\geq d_0}] \subseteq (s \circ r)[\mathbb{A}_{\geq a_0}].$$

这一性质将使指标域能够依次替换。现在，我们用这些态射来比较 AA-态射 $f : x \to y$ 与范畴 W-Net 和 K-Net 中的态射。比较将具有一个公共源 u，其中有一个态射 $s : u \to x$ 属于 S_{ts}，以及一个态射 $w : u \to y$，其值函数为 f。因此， u 替换了 x，而不改变其最终性滤子；并且 w 具有一个与 f相容的指标映射。[3]

定义 3.3. 对于网 $x : \mathbb{D} \to X$ 和 $y : \mathbb{E} \to Y$，固定一个 AA-态射 $f : x \to y$，并令 C 为 W-Net 或 K-Net。一个在 C 中表示 f 的锥 是一个 C 中的图表

$$\begin{array}{ccc} & u & \\ {\scriptstyle s}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle w} \\ x & & y \end{array} \tag{8}$$

[3]这类图也会出现在局部化理论中。参见 Miličić [11, 第 1 章，第 1 节3]。

其中 u 是 X中的一个网， $s \in S_{\mathrm{ts}}$ ，且 w 的值函数为 f。我们将以这些锥为对象、以满足下述条件的竖直 C-态射 $h: u \to u'$ 作为从 $(u,\ s,\ w)$ 到 $(u',\ s',\ w')$ 的态射的范畴记作 $\mathsf{C}^{\triangle f}$

$$s' \circ h = s \qquad \text{and} \qquad w' \circ h = w.$$

恒等态射和复合继承自 C。

对于如 (8) 中的锥 (u, s, w)，写作 $u: \mathbb{A} \to X$, $s = (\sigma, \mathrm{id}_X)$ 和 $w = (k, f)$。这里， $\sigma: \mathbb{A} \to \mathbb{D}$是尾满射，而当 C =W-Net 时， $k: \mathbb{A} \to \mathbb{E}$ 是单调共尾的；当 C = K-Net 时，则是最终共尾的。因此，这个锥将本节开头 f 的不完整方形替换为两个交换方块:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \overset{?}{\cdots\cdots\to} & \mathbb{E} \\ {\scriptstyle x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle y} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccccc} \mathbb{D} & \xleftarrow{\sigma} & \mathbb{A} & \xrightarrow{k} & \mathbb{E} \\ {\scriptstyle x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle y} \\ X & \xleftarrow[\mathrm{id}_X]{} & X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array} \tag{9}$$

(9) 中的虚线边表示缺失的映射。由边 σ, x, u 和 id_X 构成的方形是态射 s，由边 k, u, y 和 f 构成的方形是态射 w。因此， $u = x \circ \sigma$，它与 x具有相同的最终性滤子，并且 $f \circ u = y \circ k$。尽管 f 不一定有指标见证，但在将 x 替换为尾等价网 u之后， σ, k 这一对便起到了缺失的指标映射的作用。在第 4 节中，一旦 s 被求逆，这个锥便给出态射 $w \circ s^{-1}$。这就是将缺失的“箭头”局部化的含义。

定理 3.4。 对于 *AA*-态射 $f: \ x \to y$ 以及 C = W-网 或 C =K-网中的任一种，范畴 $\mathsf{C}^{\triangle f}$ 都有一个终对象。更确切地说，存在一个表示锥

$$\begin{array}{ccc} & z_f & \\ {\scriptstyle s_f}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle w_f} \\ x & & y \end{array} \tag{10}$$

其中 s_f 和 w_f 是 *W*-态射，并且对于 C的两种选择，它都是终对象。特别地， $\mathrm{Ev}(z_f) = \mathrm{Ev}(x)$。

证明。 记 $x: \ \mathbb{D} \to X$ 和 $y: \ \mathbb{E} \to Y$。赋予

$$C_f = \{(d, e) \in \mathbb{D} \times \mathbb{E} : f(x_d) = y_e\}$$

其诱导的乘积序。我们首先证明 C_f 在 $\mathbb{D} \times \mathbb{E}$中是共尾的。给定该乘积中的 $(d_0,\ e_0)$，AA 条件给出一个指标 d_* ，使得对于每个 $d \geq d_*$，都存在一个指标 $e \geq e_0$，满足 $f(x_d) = y_e$。选取 $d \geq d_0,\ d_*$，然后选取 $e \geq e_0$，使得 $f(x_d) = y_e$。于是 $(d,\ e) \in C_f$位于 $(d_0,\ e_0)$之上。

作为有向集的共尾子集， C_f 是有向的。其坐标投影 $p: C_f \to \mathbb{D}$和 $q: C_f \to \mathbb{E}$ 是单调共尾的。最后，为了完成设定，我们定义网$z_f: C_f \to X$ ，令$z_f(d, e) = x_d$，对每个$(d, e) \in C_f$均成立。这些映射构成交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \xrightarrow{x} & X \\ {\scriptstyle p}\uparrow & \nearrow{\scriptstyle z_f} & \\ C_f & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ {\scriptstyle q}\downarrow & \searrow{\scriptstyle f\circ z_f} & \\ \mathbb{E} & \xrightarrow[y]{} & Y. \end{array} \tag{11}$$

因此，$s_f = (p, \mathrm{id}_X)$和$w_f = (q, f)$是W-态射。投影 p是尾部满射。事实上，对于 $c_0 = (d_0, e_0) \in C_f$，按上文选取 d_*，于是 $d_1 \geq d_0, d_*$。每个 $d \geq d_1$都有某个 $e \geq e_0$使得 $f(x_d) = y_e$，进而$(d, e) \in (C_f)_{\geq c_0}$，因此

$$\mathbb{D}_{\geq d_1} \subseteq p[(C_f)_{\geq c_0}]. \tag{12}$$

这就证明了 $s_f \in S_{\mathrm{ts}}$。命题 3.2 现在给出 Ev(z_f) = Ev(x)。为证明终端性，考虑任意一个表示 f 的锥 (u, s, w)，并记 $u\colon \mathbb{A} \to X$, $s = (\sigma, \mathrm{id}_X)$，以及 $w = (k, f)$。方形方程给出 $f(x_{\sigma(a)}) = f(u_a) = y_{k(a)}$对每个 $a \in \mathbb{A}$ 都成立。因此，映射 $\sigma, k : \mathbb{A} \to C_f$ 定义为

$$\langle \sigma, k \rangle(a) = (\sigma(a), k(a))$$

是良定义的。两个坐标都最终共尾。对于给定的 $(d_0,\ e_0) \in C_f$，因此它们分别在 $\mathbb{A}$ 的某个公共尾集上大于 $d_0,\ e_0$。因此 $\langle \sigma,\ k \rangle$ 是最终共尾的。在 W-Net 中，两个坐标也都是单调的，因此 $\langle \sigma,\ k \rangle$ 是单调共尾的。由此可得$h = (\langle \sigma,\ k \rangle,\ \mathrm{id}_X)\colon u \to z_f$是一个 C-态射，其坐标投影给出 $s_f \circ h = s$和$w_f \circ h = w$。这些方程唯一确定了 h 的两个分量，正如所需。 □

根据定理 3.4，每个表示 f 的锥 (u, s, w) 到 $\mathsf{C}^{\triangle f}$ 中的 (z_f, s_f, w_f) 都有唯一的态射。其底层 C- 态射 $h\colon u \to z_f$ 满足 $s = s_f \circ h$ 和 $w = w_f \circ h$，因此，一旦将 S_{ts} 中的态射映为同构，所有这些锥就确定了同一个态射。事实上，设 $\Phi : \mathsf{C} \to \mathsf{A}$ 是一个将 S_{ts} 映为同构的函子。对于每个表示 f 的锥 (u, s, w)，

$$\Phi(w) \circ \Phi(s)^{-1} = \Phi(w_f) \circ \Phi(s_f)^{-1}. \tag{13}$$

注意到这一点即可看出，$\Phi(s_f) \circ \Phi(h) = \Phi(s)$，且 $\Phi(s_f)$ 和 $\Phi(s)$ 都是可逆的。因此$\Phi(h)$也是可逆的。代入 $s = s_f \circ h$ 和 $w = w_f \circ h$ 即可证明 (13)。

推论 3.5。对于固定的网 $x\colon \mathbb{D} \to X$ 和 $y\colon \mathbb{E} \to Y$，以及函数 $f\colon X \to Y$，以下条件等价：

(i) $f\colon\ x \to y$ 是一个 *AA*-态射；

(ii) 存在一个网 x'，满足 $x' \sim x$，以及一个 *W*-态射 $(r, f)\colon x' \to y$；

(iii) 存在网 x' 和 y'，满足 $x' \sim x$ 和 $y' \sim y$，以及一个值函数为 f 的 *W*-态射 $x' \to y'$。

在 *(ii)* 中，可以选取满足条件的 x'，使垂直 *W*-态射 $x' \to x$ 属于 S_{ts}。

证明。定理 3.4 证明了 (i) 推出 (ii)，而取 $y' = y$ 可得 (ii) 推出 (iii)。(iii) 中的 W-态射给出 最终性滤子(y') $\subseteq f$(最终性滤子(x'))。将这些滤子分别替换为 最终性滤子(y) 和 最终性滤子(x)，即可证明 (i)。 □

接下来我们将表示与复合联系起来。设 $f\colon\ x \to y$ 和 $g\colon\ y \to v$ 是 AA-态射。定理 3.4 给出了 $\mathsf{C}^{\triangle f}$ 和 $\mathsf{C}^{\triangle g}$ 中的终端表示锥 (z_f, s_f, w_f) 和 (z_g, s_g, w_g)。我们将据此构造一个表示 $g \circ f$ 的锥。为构造这个新锥，我们补全一个边为 $w_f\colon\ z_f \to y$ 和 $s_g\colon\ z_g \to y$ 的方形，从而得到所需的公共源。

命题 3.6。设 C 为 W-网 或 K-网，并设 $b = (r, f)\colon\ x \to y$和 $s = (\sigma, \mathrm{id}_Y)\colon\ z \to y$ 是 C-态射，且有 $s \in S_{\mathrm{ts}}$。存在一个 *W*-态射 $h\colon\ u \to z$，其值函数为f，以及一个态射 $t\colon\ u \to x$，属于 S_{ts}，使得下方方形在 C 中交换：

$$\begin{array}{ccc} u & \xrightarrow{\ h\ } & z \\ {\scriptstyle t}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s} \\ x & \xrightarrow[\ b\ ]{} & y. \end{array}$$

证明。设 $\mathbb{D}$、$\mathbb{E}$、$\mathbb{A}$ 分别是 x、y、z 的指标集。令

$$G = \{(d, a) \in \mathbb{D} \times \mathbb{A} : r(d) = \sigma(a)\}$$

所诱导的乘积序。固定乘积中的 (d_0, a_0)。由 σ 的尾满射性，存在指标 e_1，使得 $\mathbb{E}_{\geq e_1} \subseteq \sigma[\mathbb{A}_{\geq a_0}]$。$r$ 的最终共尾性随后给出一个指标 $d_1 \geq d_0$，使得对于每个 $d \geq d_1$，$r(d) \geq e_1$。对于每个这样的 d，存在 $a \geq a_0$，使得 $r(d) = \sigma(a)$。因此，G 在乘积中是共尾的，因而是有向的。其投影 $p\colon G \to \mathbb{D}$ 和 $q\colon G \to \mathbb{A}$ 是单调共尾的。应用于 $(d_0, a_0) \in G$ 时，同样的论证给出

$$\mathbb{D}_{\geq d_1} \subseteq p[G_{\geq (d_0, a_0)}],$$

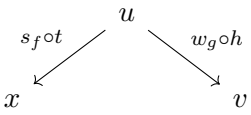
因此 p 是尾满射的。

定义 $u(d, a) = x_d$。在 G 上，

$$f(x_d) = y_{r(d)} = y_{\sigma(a)} = z_a.$$

因此，$t = (p, \mathrm{id}_X)$ 和 $h = (q, f)$ 是 W-态射，其中 $t \in S_{\mathrm{ts}}$。它们复合的指标映射满足 $r \circ p = \sigma \circ q$，其值函数满足 $f \circ \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_Y \circ f$。这证明了在任一范畴中，$b \circ t = s \circ h$。 □

对于定理 3.4的锥，应用命题 3.6 于 $b = w_f$ 和 $s = s_g$。所得的锥



表示 $g \circ f$，因为 $s_f \circ t \in S_{\mathrm{ts}}$。根据定理 3.4中的终端性，此锥到所选的、表示 $g \circ f$的锥存在唯一态射。相应的（13）式实例，就是定理证明中用于复合的恒等映射4.3。

注记 3.7. 对于命题 3.6 中 C 的任一种选择，其证明中构造的方形都是 C 中的拉回。为此，设 $\xi\colon \mathbb{B} \to Z$ 是一个网，带有所选范畴中的态射 $t' = (\alpha, \varphi)\colon \xi \to x$ 和$h' = (\beta, \psi)\colon \xi \to z$，并假设 $b \circ t' = s \circ h'$。两个分量相等可得 $r \circ \alpha = \sigma \circ \beta$以及 $\psi = f \circ \varphi$。因此，由 $\ell(i) = (\alpha(i)\ \beta(i))$ 定义的映射 $\ell\colon \mathbb{B} \to G$是良定义的。由于 α 和 β 最终共尾，对于每个 $(d, a) \in G$，ℓ 的两个坐标最终分别大于等于 d 和 a。因此 ℓ 最终共尾。若两个映射都是单调的，则 ℓ也单调。此外，$u \circ \ell = x \circ \alpha = \varphi \circ \xi$，因此 $(\ell, \varphi)\colon \xi \to u$ 是所选范畴中的态射。它与 t 和 h 的复合分别为 t' 和 h'。与投影的方程确定了该态射的两个分量，因此它是唯一的。由此，这里构造的拉回具有 $t \in S_{\mathrm{ts}}$。此方形为 S_{ts} 确立了第 4 节中引入的条件 (F2)。

4 范畴意义下的局部化

我们采用 Gabriel–Zisman [6, 第 I 章第 1.1 节和引理 1.2] 中关于局部化的泛性质表述。若 S 是 C 中的态射类，函子 $q\colon \mathsf{C} \to \mathsf{L}$ 称为关于 S 的局部化，如果它将 S 映为同构，并且对于每个范畴 A，前复合给出一个等价

$$q^* : \mathrm{Fun}(\mathsf{L}, \mathsf{A}) \to \mathrm{Fun}_S(\mathsf{C}, \mathsf{A}). \tag{14}$$

这里，$\mathrm{Fun}_S(\mathsf{C}, \mathsf{A})$ 是将 S 映为同构的函子的全子范畴。待求逆的类中的态射称为分母。对于下文讨论的函子 Q_{C}，前复合实际上是函子范畴之间的一个同构。

我们从范畴 W-Net 开始。记 $Q = Q_{\text{W-Net}}$: W-Net →AA-Net 为如下函子：它将交换方 (r, f) 映为其值函数 f（参见第 1 节）。此前，我们引入了 S_{ts} ，将其定义为指标映射满足定理 3.4 和命题 3.6 中所用尾部满射条件的垂直态射类。现在我们将其与一个更大的类进行比较。对于网 $x\colon \mathbb{D} \to X$ 和 $y\colon \mathbb{E} \to X$，垂直态射 $(r, \mathrm{id}_X)\colon x \to y$ 是一个交换方形

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \xrightarrow{\ r\ } & \mathbb{E} \\ {\scriptstyle x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle y} \\ X & \xrightarrow[\mathrm{id}_X]{} & X \end{array} \tag{15}$$

而保持最终性只要求 Ev(x) =Ev(y)。因此，我们用 S_{eq} 表示 W-Net 中这一类精确垂直态射，下标表示两个最终性滤子相等：

$$S_{\text{eq}} = \{(r, \mathrm{id}_X) : x \sim y\}. \tag{16}$$

命题 3.2 给出 $S_{\text{ts}} \subseteq S_{\text{eq}}$。由于 $x = y \circ r$，属于 S_{eq} 只要求对网 y 有 Ev($y \circ r$) = Ev(y)。根据命题 3.2， r 的尾满射性要求对每个由 $\mathbb{E}$指标化的网 y' ，都有 Ev($y' \circ r$) = Ev(y')。

任何使 Q 成为局部化的分母类，都必须由经 Q映为同构的态射组成。因此，这种分母类中最大的一个就是 AA-Net 中同构的原像。我们先描述这些同构。

引理 4.1。 *AA*-态射 $f\colon x \to y$ 是同构，当且仅当 f 是双射，并且$f(\mathrm{Ev}(x)) = \mathrm{Ev}(y)$。

证明。 反向态射必定是反函数，因此 f 是双射。 f 和 f^{-1} 的态射条件进而给出滤子相等。反过来，所述相等关系使f^{-1} 成为 AA-态射，且两个复合都是恒等函数。

□

因此我们定义

$$S_{\text{sat}} = Q^{-1}(\mathrm{Iso}(\text{AA-Net})). \tag{17}$$

将定义与引理 4.1结合起来，该引理刻画了AA-Net中的同构，得到

$$S_{\text{ts}} \subseteq S_{\text{eq}} \subseteq S_{\text{sat}}. \tag{18}$$

每个类都包含恒等态射，并且对复合封闭。对于 S_{eq}中的态射 $x \to y$ 和$y \to z$ ，有 Ev(x) = Ev(y) = Ev(z)，因此它们的复合也属于 S_{eq}。对于S_{sat}，封闭性源于同构对复合封闭。

我们将证明， S_{sat} 在以下意义上既是 S_{ts} 的饱和，也是 S_{eq} 的饱和：它由这样的态射组成，即每个分别将 S_{ts}、 S_{eq}中的态射变为可逆态射的函子都会将这些态射映为同构。这些态射必然会变为可逆态射，而将它们添加进来并不会改变局部化。这将由下文证明的泛性质推出。

例 4.2. 对于由 $\mathbb{N}$ 指标化的单点常值网，指标映射 $n \mapsto 2n$ 定义了一个精确垂直 W-态射。它不是尾满射，因为其像不包含任何奇数指标。因此 $S_{\text{ts}} \subsetneq S_{\text{eq}}$。两个不同单元素集之间的双射，配以单元素集指标网，属于 S_{sat} ，且不是垂直的。因此 $S_{\text{eq}} \subsetneq S_{\text{sat}}$。

命题 2.2 给出了另一个不一定属于 S_{ts}的精确态射。设 $\mathcal{F}$ 为 $\mathbb{N}$上的余有限滤子，并令 $\mathcal{B}$ $= \{\{k \in \mathbb{N} :\ k \geq n\} :\ n \in \mathbb{N}\}$。基包含 $\mathbb{D}_{\mathcal{B}} \to \mathbb{D}_{\mathcal{F}}$ 是精确的。然而， $\mathbb{D}_{\mathcal{F}}$的每个尾集都包含一对 (A, k) ，其中 A 是一个足够靠后的数值尾集，并且移除了其中一个非初始点。这样的 A 不属于 $\mathcal{B}$，因此该包含关系不是尾满射。

定理 4.3。 函子 Q: W-网 $\to$ AA-网 在每个类 S_{ts},S_{eq} 和 S_{sat}处都是局部化。更准确地说，对于每个范畴 A，式 (14) 中的函子都是同构。

证明。 根据（18）， Q 将这三个类中的每一类都映为同构。先假设 Φ :W-网 $\to$A 将 S_{ts}反转。定义 Φ 在对象上的作用为 $\Phi(x) = \Phi(x)$，在态射上的作用为

$$\overline{\Phi}(f) = \Phi(w_f) \circ \Phi(s_f)^{-1}, \tag{19}$$

其中 (z_f, s_f, w_f) 是定理 3.4 中的锥。根据（13），每个表示 f 的锥 (u, s, w) 都满足 $\Phi(w) \circ \Phi(s)^{-1} = \Phi(f)$。特别地，W-态射 $b = (r, f) : x \to y$ 给出锥 (x, id_x, b)。将（13）应用于此锥，得到

$$\overline{\Phi}(f) = \Phi(b).$$

这包括恒等态射，并证明它与每个已有方形上的 Φ 一致。这也表明，固定值函数的所有 W- 见证在 Φ 下的像都相同。对于复合，设 $f : x \to y$ 和 $g : y \to v$ 是 AA- 态射。将命题 3.6 应用于 w_f 和 s_g，可得 $t : u \to z_f$ 属于 S_{ts}，以及一个 W-态射 $h : u \to z_g$，使得 $w_f \circ t = s_g \circ h$。因此 $\Phi(s_g)^{-1} \circ \Phi(w_f) = \Phi(h) \circ \Phi(t)^{-1}$，并且

$$\begin{aligned}
\overline{\Phi}(g) \circ \overline{\Phi}(f) &= \Phi(w_g) \circ \Phi(s_g)^{-1} \circ \Phi(w_f) \circ \Phi(s_f)^{-1} \\
&= \Phi(w_g \circ h) \circ \Phi(s_f \circ t)^{-1} \\
&= \overline{\Phi}(g \circ f).
\end{aligned}$$

最后一个等式由 (13) 得出，因为 $(u, s_f \circ t, w_g \circ h)$ 表示 $g \circ f$。因此，Φ 是一个函子，且 $\overline{\Phi} \circ Q = \Phi$。在 AA-Net 中，图锥满足 $f = Q(w_f) \circ Q(s_f)^{-1}$。因此， Φ 的任何分解都必须满足 (19)。由于 Q 在对象上是恒等映射，其对象取值也已被唯一确定。这就证明了分解的唯一性。

接下来处理自然变换。设 $\alpha : \Phi \Rightarrow \Psi$ 是两个函子之间的一个自然变换，这两个函子都将 S_{ts}映为可逆态射。定义 $\alpha_x = \alpha_x$。对 s_f 和 w_f 的自然性给出

$$\begin{aligned}
\overline{\Psi}(f) \circ \alpha_x &= \Psi(w_f) \circ \Psi(s_f)^{-1} \circ \alpha_x \\
&= \Psi(w_f) \circ \alpha_{z_f} \circ \Phi(s_f)^{-1} \\
&= \alpha_y \circ \Phi(w_f) \circ \Phi(s_f)^{-1} = \alpha_y \circ \overline{\Phi}(f).
\end{aligned}$$

因此，这些相同的分量定义了一个自然变换 $\alpha : \Phi \Rightarrow \Psi$。这些分量保证了唯一性，而它们取值不变则确保恒等态射和自然变换的纵向复合得以保留。先扩张再限制得到恒等映射。反过来，将 AA-Net 上一个函子的限制扩张后，利用图公式即可恢复该函子。因此，对于 $S = S_{\mathrm{ts}}$， Q^* 是范畴的一个同构。

最后，将 S_{eq} 或 S_{sat} 逆变为同构的函子也会将 S_{ts} 逆变为同构，并具有刚刚证明的分解。每个经过 Q 分解的函子都会将这两个更大的类都逆变为同构。因此，对其中任意一个类，限制与延拓运算都给出该同构。 □

该定理表明， S_{sat} 既是 S_{ts} 的饱和，也是 S_{eq}的饱和。事实上，S_{sat} 中的每个态射都会被任何将 S_{ts} 或 S_{eq}逆变为同构的函子映射为同构，因为每个这样的函子都经过 Q分解。 S_{sat} 之外的态射并不会被强制变为可逆态射，正如 Q本身所示。此外，在 W-Net 中，平行态射在此局部化中的像相等，当且仅当它们的值函数相同。

Kelley指标映射不一定是单调的。下面的观察会改变其定义域上的序，使其成为 Willard指标映射，同时保留源网的最终性滤子。

引理 4.4。 设 $r : \mathbb{D} \to \mathbb{E}$ 是最终共尾的。在 $\mathbb{D}$的底集上定义一个预序如下：

$$d \leq_r d' \quad \Leftrightarrow \quad d \leq d' \text{ in } \mathbb{D} \text{ and } r(d) \leq r(d') \text{ in } \mathbb{E}.$$

那么 $\mathbb{D}_r = (\mathbb{D}, \leq_r)$ 是有向的，并且具有滤子 $T_{\mathbb{D}}$。恒等映射 $a : \mathbb{D}_r \to \mathbb{D}$ 是单调且尾满射的，而 $r : \mathbb{D}_r \to \mathbb{E}$ 是单调共尾的。

证明。 对于 d, $d' \in \mathbb{D}$，在 $\mathbb{E}$ 中选取 $r(d)$ $r(d')$ 的一个公共上界。最终共尾性给出 $\mathbb{D}$ 的一个尾集，其像都位于该上界之上。这个尾集中一个大于 d, d' 的元素，就是 $\mathbb{D}_r$ 中的一个公共上界，由此证明其有向性。

对于固定的 d_0，选取 d_*，使得当 $d \geq d_*$ 时， $r(d_0) \leq r(d)$，并选取 $d_1 \geq d_0$, d_*。于是

$$\mathbb{D}_{\geq d_1} \subseteq (\mathbb{D}_r)_{\geq_r d_0} \subseteq \mathbb{D}_{\geq d_0}.$$

这些包含关系证明了由尾集生成的两个滤子相等，也证明了 a 的尾满射性。根据定义，映射 a 是单调的。同一定义也使 r 单调，并且其共尾值域保持不变。

□

现在，我们将局部化扩展到 Kelley 态射以及这样的范畴：其中态射只记录值函数，同时要求指标映射存在。在 K-Net 中，对于 S_{ts} 中的 Willard 态射、精确的垂直 K-态射以及 $Q^{-1}_{\mathsf{K\text{-}Net}}(\mathrm{Iso}(\mathsf{AA\text{-}Net}))$，我们分别保留记号 S_{ts}、 S_{eq} 和 S_{sat}。在 W-Net$_\exists$ 和 K-Net$_\exists$ 中，当一个态射的值函数具有来自 W-Net 或 K-Net 中相应类别的见证时，该态射就属于这些类别之一。

在 W-Net$_\exists$中，例 $n \mapsto 2n$ 4.2 中的指标映射 不再区分前两个类别，因为其值函数也具有恒等映射见证。然而，这两个类别仍然不同。考虑指标集分别为 $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{N}^2$的单点常值网。对从第一个网到第二个网的精确态射而言，对角线是一个 W-见证。每个单调映射$\mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ 的链像都是链，而每个乘积尾集都包含不可比较点 $(p+1,\ q)$和 $(p,\ q+1)$。这样的见证不可能是尾满射。

定理 *4.5.* 设 *C* 是 *W-Net*、*W-Net*$_\exists$、*K-Net* 或 *K-Net*$_\exists$ 中的任意一个。函子 $Q_{\mathsf{C}} : C \to$ *AA-Net* 在 *C* 的每个类 S_{ts}、 S_{eq} 和 S_{sat} 处都是局部化。更准确地说，对于每个范畴 *A*，式 *(14)* 中的函子都是一个同构。特别地，$C[S_{\mathrm{eq}}^{-1}] \simeq$*AA-Net* $\simeq$ *Fil**。

证明. 对于 K-Net，假设 Φ 逆转 S_{ts}。将其限制到 W-Net，并应用定理 4.3，得到 $\Phi : \overline{\mathsf{AA\text{-}Net}} \to \mathsf{A}$。给定一个 K-态射 $b = (r, f) : x \to y$，将其源视为同一个函数 $x_r : \mathbb{D}_r \to X$，其序如引理 4.4 所述。该引理给出 W-态射 $a = (\mathrm{id}_{\mathbb{D}}, \mathrm{id}_X) : x_r \to x$，它属于 S_{ts}，以及 W-态射 $t = (r, f) : x_r \to y$，且 $b \circ a = t$。因此

$$\Phi(b) = \Phi(t) \circ \Phi(a)^{-1} = \overline{\Phi}(Q_{\mathsf{K\text{-}Net}}(b)).$$

最后一个等式使用了已建立的关于 W-态射的分解以及恒等映射$Q_{\mathsf{K\text{-}Net}}(b) = Q(t) \circ Q(a)^{-1}$。因此 Φ 在所有 K-态射上都有分解， Φ 并且通过限制到 W-Net可得唯一性。两个此类函子之间的自然变换根据定理 4.3，可由它们在 Willard 上的限制唯一延拓。所得变换对每个 AA-态射都是自然的，并且其在 Kelley 范畴上的限制具有原来的分量。这证明了K-Net的函子范畴同构。根据引理 4.1，较大的类映射为同构，因此定理 4.3 的扩张论证适用。

对于其余情形，令 $P = P_W$ 或 $P = P_K$，并分别将 C 和 C$_\exists$ 记作它的源和目标。若 $\Phi : \mathsf{C}_\exists \to \mathsf{A}$ 将所示分母变为可逆，则 $\Phi \circ P$将它们在 C 中对应的类变为可逆。刚刚证明的结果给出唯一的 $\Phi : \overline{\mathsf{AA\text{-}Net}} \to \mathsf{A}$，使得

$$\overline{\Phi} \circ Q_{\mathsf{C}} = \Phi \circ P.$$

C 中的每个态射 $f_\exists$ 都有一个提升 b，且该提升属于 C，因为 P 是满的。在此提升处求值可得 $\Phi(\overline{Q_{\mathsf{C}_\exists}}(f)) = \Phi(f)$。对象上的等式成立，因为 P 是对象上的恒等映射，因此整个分解都是严格的。

对于自然变换 $\alpha : \Phi \Rightarrow \Psi$，与 P 复合，并利用 C 上的结果进行延拓。延拓后的分量仍然是 α_x。对于 C 中的每个态射$_\exists$，通过选取一个提升即可得到自然性；通过与 P复合即可得到唯一性。因此，限制与延拓在函子和自然变换上互为逆运算。

□

推论 4.6。 对于每个 $\mathsf{C} \in \{$W-网，W-网$_\exists$，K-网，K-网$_\exists\}$，复合

$$\mathsf{C} \xrightarrow{Q_{\mathsf{C}}} \text{AA-Net} \xrightarrow{T} \text{Fil}^*$$

是关于定理 *4.5*中指定的相应分母类的局部化 .

证明。 由定理 Q_{C} 可知，前复合是一个等价4.5；而与 T前复合是一个等价，因为 T 是一个等价。它们的复合即为$T \circ Q_{\mathsf{C}}$所需的等价。

□

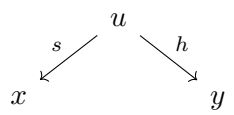
注 4.7。 推论 4.6 中的Fil* 态射是函数，态射相等即函数通常意义下的相等。当允许函数的定义域限制在滤子的成员上时，会出现另一种比较方式。相对于滤子$\mathcal{F}$ 的芽 由定义在某个 $A \in \mathcal{F}$上的这类函数表示。若两个代表在包含于各自定义域交集中的某个$\mathcal{F}$ 成员上相等，则它们确定同一个芽。

Blass [2, 第 1 节和定理 15], 也允许非真滤子，他通过将滤子范畴中滤子成员的包含关系局部化，得到他的滤子与芽范畴。对于超滤子，Garner [8, 第 2.2 节、定义 4 和命题 5] 通过反演连续单射来描述这一过程。这些局部化还会产生超出推论 4.6 中所述的进一步识别。

例如，考虑取值于 $X = \{0, 1\}$ 的常零网。恒等映射 id_X 和常零函数都给出具有恒等指标映射的 W-自态射。它们在$\{0\}$ 上相等；该集合是最终性滤子的成员，因此二者确定同一个芽。在 AA-Net 和 Fil* 中，它们仍然不同，因为它们在 1 处的取值不同。

这些局部化还会使更多态射可逆。令 $i : \{0\} \to X$ 为包含映射。配上恒等指标映射，它给出一个 W-态射，将$\{0\}$ 中的常零网映到 X中的常零网。由于 i 不是双射，根据引理 AA-Net 中的像不是同构4.1；在Fil*中也不是。不过，它是最终性滤子成员$\{0\}$ 的包含映射；转到芽之后，它就变得可逆，其逆由常值函数 $X \to \{0\}$表示。

局部化的存在本身并不意味着其分母允许进行分式演算。回顾一下，这种演算通过原范畴中的态射对来描述局部化态射，并附有复合和比较这些态射对的规则。我们采用 [17, 定义 4.27.1] 中的右乘法系 约定。这些态射对的形式为



其中 $s \in S$，表示 h 的像与 s 在局部化中的像的逆态射的复合。对 S 的要求如下：

(F1) S 包含恒等态射，并且对复合封闭。

（F2）对于 $f : x \to y$ 和 $s : z \to y$，其中有 $s \in S$，存在 $t : u \to x$ 属于 S，以及 $h : u \to z$，使得$f \circ t = s \circ h$。

（F3）如果 $s \circ f = s \circ g$ 且有 $s \in S$，则存在 $t \in S$，其目标为 f、g 的公共源，使得 $f \circ t = g \circ t$。

命题 3.6 证明了在 W-Net 和 K-Net 中，S_{ts} 满足 (F2)，而 (F1) 已在上文验证。然而，条件 (F3) 不成立。将 S_{ts} 扩大为 S_{eq} 或 S_{sat} 也会导致 (F2) 不成立，以下映射说明了这一点。取常值网 $c\colon \mathbb{N} \to \{*\}$。指标映射分别为 $\rho_0(n) = 2n$ 和 $\rho_1(n) = 2n+1$ 的垂直自态射属于 S_{eq}。若存在一个如 (F2) 所示的方形，就必须有 $\rho_0 \circ a = \rho_1 \circ b$，但由于两个值域不相交，这在非空定义域上不可能成立。因此，(F2) 对于 S_{eq} 和 S_{sat} 不成立。

指标映射为 $\lambda(n) = \lfloor n/2 \rfloor$ 的垂直自态射属于 S_{ts}，并且 $\lambda \circ \rho_0 = \lambda \circ \rho_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$。然而，$\rho_0 \circ v = \rho_1 \circ v$ 在任何非空定义域上都不可能成立。因此，(F3) 对于 S_{ts} 以及两个更大的类都不成立。所有这些映射都是 W-态射，因此相同的障碍也适用于 K-Net 中相应的类。

命题 4.8。 在 W-网$_\exists$ 或 K-网$_\exists$中，定理 *4.5*所指定的三个分母类都是右乘法系。对于 K-网$_\exists$中的最小类，其条件是存在一个尾满 *Willard* 见证。

证明。 令 C 为 W-Net$_\exists$ 或 K-Net$_\exists$，令 S 为所指示的一个类。对于 (F1)，若该类由此类存在性条件定义，则恒等态射和复合都存在所需的见证。精确性以及同构的原像也在复合下封闭。所有三个类都包含 S_{ts} 的像，并且经由 Q_{C}映到同构。

给定 $f\colon x \to y$ 和 $s\colon z \to y$，且满足 $s \in S$，复合 $Q_{\mathsf{C}}(s)^{-1} \circ Q_{\mathsf{C}}(f)\colon x \to z$ 是一个 AA-态射。定理 3.4 将其值函数表示为一个态射 $t\colon u \to x$，该态射在 S_{ts} 中存在见证，并且有一个 W-态射 $h\colon u \to z$。这些值函数满足 $f \circ t = s \circ h$，这表示 C 中态射相等。由此证明了 (F2)。

对于（F3），引理 4.1 表明，s 的值函数是双射。因此，$s \circ f = s \circ g$意味着 $f = g$ 作为函数相等，因而作为 C 中的态射也相等。取 t 为恒等映射即可证明该条件。 □

在 W-Net 和 K-Net 中，指标见证对三个类的（F3）以及其中两个较大的类的（F2）构成了障碍。一旦只保留见证存在这一事实，三个类都成为右乘法系，而定理 4.5 表明其局部化是相同的。因此，在 W-Net$_\exists$ 和 K-Net$_\exists$中，AA-态射由如上所述的有序对（s，h）描述，并遵循分式演算 [17, 第 4 节27], 的标准规则；而在 W-Net 和 K-Net 中，则必须改用第 3 节的表示。

5 最后说明

第 3 节的表示可以看作分式。令 C 为 W-Net 或 K-Net，并令（u，s，w）表示一个 AA-态射 $f\colon x \to y$。分母 $s \in S_{\mathrm{ts}}$改变了 x 的表示，却不改变其最终性滤子；而分子 w 的值函数为 f。在 AA-Net 中，$f = Q_{\mathsf{C}}(w) \circ Q_{\mathsf{C}}(s)^{-1}$。定理 3.4 中的终端锥（$z_f$，$s_f$，$w_f$）类似于既约分式：表示 f 的每个锥（u，s，w）都有唯一的态射$m\colon u \to z_f$，满足$s = s_f \circ m$ 以及$w = w_f \circ m$。类似地，每个具有正分母的整数分式，都可以通过将分子和分母同时乘以同一个正整数，从其既约形式得到。命题 3.6 中的完备化所起的作用，类似于在这些表示进行复合时寻找公分母。正如所预期的那样，这一类比存在局限：因子的次序很重要，而且态射 m 不一定属于 S_{ts}，尽管 $Q_{\mathsf{C}}(m)$ 是可逆的。此外，S_{ts} 在 W-Net 和 K-Net 中不满足条件（F3），因此它不能在这些范畴中给出右分式演算。

现在我们回到同一固定集合上网与滤子的比较 X。对于定理4.5中的四个范畴C，令C_X 以 X 中的网为对象，态射则取自

C 中值函数为id_X的态射。值集函子C $\to$ **Set** 将一个网映到其取值所在的集合，并将一个态射映到其值函数。因此，C_X 就是它在 X上的纤维。[4] 令P_X为 X上的真滤子范畴，其中当且仅当 $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 时，恰有一个态射$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$；并令 S_X 由C_X 中最终性滤子相同的网之间的态射构成。

推论 5.1。函子 $E_X : \mathsf{C}_X \to \mathsf{P}_X$，其在对象上的定义为 $E_X(x) = \mathrm{Ev}(x)$，是关于 S_X 的局部化。特别地，

$$\mathsf{C}_X[S_X^{-1}] \simeq \mathsf{P}_X.$$

对于由那些具有尾满 *Willard* 见证的态射组成的较小分母类，同样的结论也成立；其中该见证必须是方形范畴中指定的指标映射。

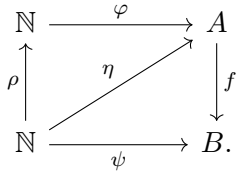
证明。设 A_X 以 X 中的网为对象，并且对 $x \to y$ 存在唯一态射 $\mathrm{Ev}(y) \subseteq \mathrm{Ev}(x)$。证明定理 4.5所用的所有构造，在值函数为恒等态射时都会保持值集：这对定理 3.4中的表示与比较、命题 3.6中的完备化，以及引理 4.4中的序精化都成立。因此，关于泛性质的证明可限制到 C $_X \to \mathsf{A}_X$，其结论也包括关于自然变换的断言。由此可得关于较小类的局部化；通过同样的扩张论证，也可得关于 S_X 的局部化。

取最终性滤子的函子 $\mathsf{A}_X \to \mathsf{P}_X$ 根据其同态集的定义是完全忠实的，并且由命题 2.1知它是本质满的。与此等价复合即可证明该断言。

□

因此，该集合上的真滤子按精化排序，也构成了网的一个局部化，而 $\mathbf{P}_X$ 中的反向包含关系记录了子网关系的方向：子网具有更细的最终性滤子。尽管 X 中的网可能构成一个真类，但该局部化与这个小偏序集等价。[5]

表示定理还允许我们通过一个函数提升子网。设 $f\colon A \to B$ 是一个函数。对于序列和子序列，该构造是直接的：若 $\varphi\colon \mathbb{N} \to A$ 且$\psi = (f \circ \varphi) \circ \rho$，其中 $\rho\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 严格递增，则 $\eta = \varphi \circ \rho$ 是 φ 的一个子序列，且$f \circ \eta = \psi$。这些映射构成交换图



对于像网的 AA-子网，未必存在诸如 ρ 这样的映射。下一个推论表明，在转而取给定 AA-子网的一个 W-子网后，可以得到一个提升，同时保留其最终性滤子。

推论 5.2. 设 $f : A \to B$ 是一个函数，$\varphi : \mathbb{D} \to A$ 是一个网，且 $\psi : \mathbb{E} \to B$ 是 $f \circ \varphi$的一个 *AA-* 子网。存在 φ 的一个 *W-* 子网 η，使得 $f \circ \eta$ 是 ψ 的一个 *W-* 子网，并且

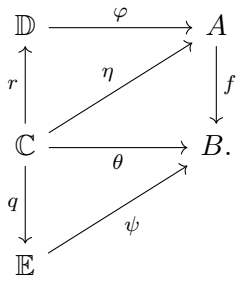
$$\mathrm{Ev}(f \circ \eta) = \mathrm{Ev}(\psi).$$

证明。将定理 3.4 应用于 AA-态射 $\mathrm{id}_B : \psi \to f \circ \varphi$。它给出了一个网 $\theta : \mathbb{C} \to B$ 以及单调共尾映射 $q : \mathbb{C} \to \mathbb{E}$、$r : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$，使得

$$\theta = \psi \circ q = f \circ \varphi \circ r.$$

[4]对于 C = K-Net，这个纤维是 Šlapal [16, 第 2] 节的逗号范畴（$F \downarrow X$），该内容已在第 1 节中回顾。[5]这种描述也与值集的变化相容。函数 $f\colon X \to Y$将 x 映射到 $f \circ x$，保留每个垂直方块的指标映射，并将 F 映射到 f (F)。这些赋值保留分母类，并满足 Ev($f \circ x$) = f(Ev(x))。

此外，$\mathrm{Ev}(\theta) = \mathrm{Ev}(\psi)$。令 $\eta = \varphi \circ r$。构造中的映射构成交换图



这两个指标映射都是单调共尾的，并且 q 是尾满射。由于 $f \circ \eta = \theta$，所需结论即得。□

这一提升结果也通过超网与紧致性相关。回顾一下，超滤子是按包含关系极大的真滤子；当网 u 属于 X，且 $\mathrm{Ev}(u)$ 是超滤子时，它就是超网。[6] 根据命题 2.1，每个包含 $\mathrm{Ev}(u)$ 的真滤子，都是 u 的某个 AA-子网的最终性滤子。因此，u 是超网，当且仅当它与自身的每个 AA-子网尾等价。推论 5.2 随即表明，函数保持超网。若 φ 是超网，且 ψ 是 $f \circ \varphi$ 的 AA-子网，那么推论给出的 W-子网 η 满足 $\eta \sim \varphi$，因为超网的每个子网都与它尾等价。因此 $\mathrm{Ev}(\psi) = \mathrm{Ev}(f \circ \eta) = f(\mathrm{Ev}(\varphi)) = \mathrm{Ev}(f \circ \varphi)$，所以 $f \circ \varphi$ 与自身的每个 AA-子网尾等价。这就是超网版蒂霍诺夫定理证明中的保持步骤；该证明利用了一个空间紧致，当且仅当其中每个超网都收敛于 [12, Section 7.5.6]。在那里，这一步通常通过子集的逆像得到。这里则由证明局部化时所用的表示得出。

人们可能会将从网到滤子的转换，与对几乎处处相等的可测函数进行的识别相比较。我们预计，我们的工作将表明，这种比较至少在三个方面具有误导性。首先，网的指标为其最终性滤子参数化了一个基，而转换到滤子会遗忘这种参数化；这正如将圆描述为平面的子集会遗忘其按角度进行的参数化一样。仅以此为由认为网是可有可无的，就如同因为可以直接处理实数的收敛级数之和，便认为这些收敛级数是可有可无的一样。其次，网带有显然的态射，即由指标映射和值函数构成的交换方，而局部化描述了这些态射如何产生Fil^*中的态射。第三，这一转换所涉及的不仅仅是对尾等价网的识别。对于固定集合中的网，AA-子网关系是一个预序，而尾等价是其对称部分。映射Ev 相对于包含关系反转了这一预序：x 是 y 的 AA-子网，当且仅当 $\mathrm{Ev}(y) \subseteq \mathrm{Ev}(x)$。与几乎处处相等相对应的概念，其实更接近于取芽，即识别在滤子的某个成员上相等的函数。正如注 4.7 所示，这又是一个 Fil^* 并未采取的步骤。

因此，这种等价并不意味着网可以被弃用。若要得出这一点，就必须要求网的每一种相关用法都只取决于其最终性滤子，而这种等价并未说明这一点。构造可能会显式地使用指标，正如上文的提升论证所示。局部化所说明的是，构造若要下降到滤子，就必须忽略哪些表示方式的变化。

参考文献

[1] J. F. Aarnes 和 P. R. Andenæs。关于网与滤子。《斯堪的纳维亚数学》**31**(1972)，285–292。doi:10.7146/math.scand.a-11435。

[6] 作者认为，内网 是一个更合适的术语：下面的子网刻画表明，对于由 AA-子网关系定义的预序，内网在尾等价意义下具有极小性。

[2] A. Blass。滤子的两个闭范畴。Fund. Math. 94 (1977)，129–143。doi:10.4064/fm-94-2-129-143。[3] G. Bruns 和 J. Schmidt。Moore–Smith 网与滤子的等价性。Math. Nachr. 13 (1955)，169–186。doi:10.1002/mana.19550130308。[4] C. Costantini 和 E. Priola。滤子、网与共尾型。Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste 33 (2001)，1–18。 https://rendiconti.dmi.units.it/volumi/33/01.pdf.[5] F. Di Biase 和 S. G. Krantz。沿滤子对测度空间中积分的微分。J. Geom. Anal. 33 (2023)，第 29 号文章。doi:10.1007/s12220-022-01050-7。[6] P. Gabriel 和 M. Zisman。《分式演算与同伦论》。数学及其边界领域成果，第 35 卷。施普林格，1967。doi:10.1007/978-3-642-85844-4。[7] W. Gähler。《分析学基本结构 I》。数学丛书，第 58 卷。Birkhäuser，巴塞尔，1977。第 2.8 节，尤其是定理 2.8.4，第 82–83 页。[8] R. Garner。超滤子、有限余积与局部连通分类拓扑斯。Ann. Pure Appl. Logic 171 (2020)，第 10 期，第 102831 号文章。doi:10.1016/j.apal.2020.102831。编号结果的引用指向 arXiv:1808.08687v2。[9] J. L. Kelley。《一般拓扑学》。Van Nostrand，1955。[10] V. Koubek 和 J. Reiterman。关于滤子范畴。Comment. Math. Univ. Carolin. 11 (1970)，19–29。 https://dml.cz/dmlcz/105263.[11] D. Miličić。《导出范畴讲义》。讲义。第 1 章，第 1.3 节。https://www.math.utah.edu/~milicic/Eprints/dercat.pdf.[12] M. Müger。《工作数学家的拓扑学》。讲义，版本日期为2022年8月3日。第 7.5.6 节。 https://www.math.ru.nl/~mueger/topology.pdf.[13] M. O’Brien、V. G. Troitsky 和 J. H. van der Walt。网收敛结构及其在向量格中的应用。Quaest. Math. 46 (2023)，243–280。doi:10.2989/16073606.2021.2012721。编号结果的引用指向 arXiv:2103.01339v1。[14] E. Schechter。《分析学及其基础手册》。学术出版社，1997。第 7 章，尤其是第 7.11–7.19 节。[15] J. Šlapal。范畴拓扑学中的网空间。Ann. N.Y. Acad. Sci. 806 (1996)，第 1 期，393–412。doi:10.1111/j.1749-6632.1996.tb49183.x。[16] J. Šlapal。收敛的范畴方法。Filomat 30 (2016)，第 12 期，3329–3338。doi:10.2298/FIL1612329S。[17] Stacks Project 作者。Stacks Project。范畴，第 4.27 节“范畴中的局部化”，标签 04VB。 https://stacks.math.columbia.edu/tag/04VB。访问日期：2026年10月22日。

[18] S. Willard. 一般拓扑学。Addison–Wesley，1970。定义 11.2。

Germán I. Gomero Ferrer 精确科学系，圣克鲁斯州立大学，伊列乌斯，巴伊亚州，45662-900，巴西电子邮箱地址： gigferrer@uesc.br

Renan M. Mezabarba 精确科学系，圣克鲁斯州立大学，伊列乌斯，巴伊亚州，45662-900，巴西电子邮箱地址： rmmezabarba@uesc.br