arXiv:2611.28931v1 [math.CV] 21 Nov 2026

多圆盘中的全测地集与 Carath´eodory 几何

[*]Lukasz Kosi´nski *克拉
科夫雅盖隆大学
lukasz.kosinski@uj.edu.pl

John E. McCarthy [†]圣路易斯华
盛顿大学 mccarthy@wustl.edu

星期二 24th 2026年11月

摘要

如果多圆盘 V 的一个子集 $\mathbb{D}^N$ 满足： V中的每一对点都位于一条完全包含于 V中的 $\mathbb{D}^N$ Kobayashi 测地线上，则称其为全测地集合。若其内禀 Carath´eodory 度量与从 $\mathbb{D}^N$继承的 Carath´eodory 度量一致，则称其为 Carath´eodory 集合。

我们证明，对于多圆盘中的代数子簇，这两个概念是一致的，并得到此类集合的完整几何分类。多圆盘的不变度量几何出人意料地具有刚性：每个此类集合经过自同构后，都仅由两类基本几何对象构成：圆盘，以及我们称为 罗马曲面 的一族特殊二维代数曲面。

罗马曲面独立地出现在多圆盘中的三点插值问题研究中。

[*]部分得到国家科学中心 Sheng基金项目编号2023/48/Q/ST1/00048的资助。ORCID 0000-0002-9115-8545。

[†]部分得到美国国家科学基金会DMS 2554487号基金资助。ORCID 0000-0003-0036-7606。MSC分类：32F45

1 概述

令 $\mathbb{D}$ 表示复平面 $\mathbb{C}$中的单位圆盘，并令 ρ表示定义在 $\mathbb{D}$上的伪双曲距离，其定义为

$$\rho(\lambda,\mu)=\left|\frac{\lambda-\mu}{1-\bar{\lambda}\mu}\right|.$$

Schwarz-Pick引理指出，从 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{D}$的每个全纯函数，相对于 ρ都是压缩的。C. Carath´eodory [13]提出了将这一距离推广到 $\mathbb{C}^N$中的任意集合的想法。用 $\mathcal{O}(U,\ G)$表示从 U 到 G的全纯映射。

定义 1.1. 设 $V\subseteq\mathbb{C}^N$。 V 上的*Carath´eodory*伪距离定义为

$$d_V(\lambda,\mu)=\sup\{\rho(f(\lambda),f(\mu)):f\in\mathcal{O}(V,\mathbb{D})\}. \tag{1}$$

设Ω是 $\mathbb{C}^N$中的一个伪凸域，且 $V\subseteq\Omega$是一个解析子簇。若 $\lambda,\ \mu$是 V中的点，则一般而言， $d_V(\lambda,\ \mu)\geq d_\Omega(\lambda,\ \mu)$。如果这两个距离总是相等，我们就称 V是Ω中的Carath´eodory集合。这表明 V与Ω之间存在某种特殊联系。

问题 1.2. 给定一个域Ω，哪些子簇 V是*Carath´eodory*集合?

S. Kobayashi [27] 对 Carath´eodory 的构造进行了对偶化，并使用 $\mathcal{O}(\mathbb{D},\Omega)$ 中的函数，通过将 $\mathbb{D}$ 上的双曲度量推前，在 Ω 上定义了一个 Finsler度量。测地线是一个映射 $\phi\in\mathcal{O}(\mathbb{D},\Omega)$，它相对于这些度量是一个等距映射。若集合 $V\subseteq\Omega$ 中任意两点 V都包含在一条完全位于 V内的测地线的像中，则称集合 $V\subseteq\Omega$ 为全测地。小林版本的 Question 1.2 是:

问题 1.3。 给定一个区域Ω，哪些子簇 V是全测地的?

问题 1.3 可以看作是描述黎曼流形全测地子流形这一问题的复类比。

当 Ω 是球时，可以证明，这两个问题的答案都是： V必须是一个收缩 [29], ，这是一个非常严格的限制。本文旨在研究 Ω 为多圆盘的情形；这一情形要微妙得多，因为多圆盘并非强凸。我们只考虑代数子簇 V，即代数集与多圆盘的交集。

然后我们证明，问题 1.2 和 1.3 的答案相同，并且 V 由一维圆盘和特殊的二维二次曲面完全交构成，我们将其称为罗马曲面。

称三元组 $(A,\ B,\ C) \in \mathbb{C}^3$ 为三角形的，如果 $|A|,\ |B|,\ |C|$ 构成一个三角形（即 $2\times\max(|A|,\ |B|,\ |C|) < |A|+|B|+|C|$）。高度为 1 的罗马曲面是如下形式的集合

$$\mathcal{K}_{(A,B,C)} = \{(x,y,z) \in \mathbb{D}^3 : Ax + By + Cz = \bar{A}yz + \bar{B}xz + \bar{C}xy\} \qquad (2)$$

其中 $(A,\ B,\ C)$ 是三角形的。若 $(A,\ B,\ C) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$，则集合 (2) 是 $\mathbb{D}^3$ 的收缩，当且仅当 $(A,\ B,\ C)$ 不是三角形的。收缩总是全测地的 Carathéodory 集。有趣的情形是三元组为三角形的；在这种情形下，文献 [31] 证明 $\mathcal{K}_{(A,B,C)}$ 仍然是 $\mathbb{D}^3$ 中的全测地 Carathéodory 集。

一个高度为 m 的罗马曲面由满足相容条件的 m 个三角形的三元组（$A_j,\ B_j,\ C_j$）给出：存在 $\mathbb{T}^3$ 中的一个三元组 $\tau = (\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3)$，其元素均为模为 1 的复数，使得

$$A_j\tau_1 + B_j\tau_2 + C_j\tau_3 = 0 \quad \forall\ 1 \le j \le m.$$

给定这些数据，相应的罗马曲面为

$$\{(x,y,z_1,\ldots,z_m) \in \mathbb{D}^{m+2} : A_jx+B_jy+C_jz_j = \bar{A}_jyz_j+\bar{B}_jxz_j+\bar{C}_jxy,\ 1 \le j \le m\}.$$

若 $U \subset \mathbb{D}^m$ 且 $N \ge m$，我们称 $V \subseteq \mathbb{D}^N$ 是 U 上的图，如果存在 $F \in \mathcal{O}(U,\ \mathbb{D}^{N-m})$，使得 $V = \{(x,\ F(x)) :\ x \in U\}$。我们允许 $N = m$，因此 U 是自身上的图。下面给出我们的主要定理。

定理 1.4。设 V 是 $\mathbb{D}^N$ 的一个代数子簇，并假设 V 不只是一个点。那么以下条件等价。

(i) V 是 $\mathbb{D}^N$ 中的一个 *Carath´eodory* 集合。*(ii)* V 在 $\mathbb{D}^N$ 中是全测地的。*(iii)* 对 $\mathbb{D}^N$ 作一个自同构后，V 是一个由若干 $\mathbb{D}$ 的副本与罗马曲面构成的乘积上的图。

这可以被视为一个刚性定理。条件 (i) 是度量条件，条件 (ii) 是几何条件，而条件 (iii) 则说明该集合具有一种非常特定的代数结构。假设V 是代数子簇，这一假设在证明中有所作用：它确保局部

参数化函数满足多项式方程，从而能够控制它们的分支和解析延拓。一个自然的问题是，该定理对于任意解析子簇是否成立。尽管如此，代数情形已经涵盖了主要的几何难点，而且该定理在此情形下给出了完整的分类。

当 $N = 2$时，定理 1.4 是 [6], 的主要结果，尽管情况要简单得多，因为罗马曲面出现在 $N \geq 3$。在双圆盘中，(iii) 简单地表示 V 是 $\mathbb{D}^2$的一个收缩。

$\mathbb{D}^{N_1}$ 中的集合 V_1 与 $\mathbb{D}^{N_2}$ 中的集合 V_2 的笛卡尔积是 $\mathbb{D}^{N_1+N_2}$ 中的一个 Carath´eodory 集，当且仅当 V_1 和 V_2 都是 Carath´eodory 集（见定理 3.4）；而集合上的图是一个 Carath´eodory 集，当且仅当底集是一个 Carath´eodory 集。因此，如果我们将多圆盘中的基本 *Carath´eodory* 集定义为既不能写成笛卡尔积，也不能写成低维多圆盘中某个 Carath´eodory 集上的图，那么由此可知，多圆盘中的每个基本 Carath´eodory 集不是圆盘，就是罗马曲面的一个自同构像。

罗马曲面[1] 是全测地的二维曲面，并非由一维对象构成；从这个意义上说，它们类似于文献 [39]中研究的二维挠曲轨迹。我们还表明，罗马曲面也独立地出现在对多圆盘中三点插值问题的研究中；第 2.3 小节对此作了解释。

理解全测地或 Carath´éodory 集合并非只有几何意义。在考虑冯·诺依曼或 Andô 型不等式，以及研究 Nevanlinna–Pick 插值时，自然会提出问题 1.2 和 1.3。主要结果的意义将在第 2.4 节中解释。

2 引言

2.1 Cartan 对与收缩

本节将详细阐述概述中的内容。首先，我们来定义在非开集合上什么是全纯函数。令 $\mathbb{B}(a,\ r)$ 为以 a 为中心、半径为 r 的开球。

[1]罗马人以修建笔直的道路而闻名，因此我们想为一种二维对象（曲面）取个名字，这种对象具有这样的性质：任意两点之间都存在一条测地线。

定义 2.1。 设 $V \subseteq \mathbb{C}^N$。如果对每个$\mu \in V$，都存在 $\varepsilon > 0$ 和 $f \in \mathcal{O}(\mathbb{B}(\mu, \varepsilon))$，使得 $\phi|_{V\cap\mathbb{B}(\mu,\ \varepsilon)} = f|_{V\cap\mathbb{B}(\mu,\ \varepsilon)}$，则称 ϕ： $V \to \mathbb{C}$ 为全纯。

定义 *2.2.* 设 Ω 是 $\mathbb{C}^N$ 中的一个伪凸域。我们称 $V \subseteq \Omega$ 是一个解析子簇，如果对于每个 $\mu \in V$，存在 $\varepsilon > 0$ 以及函数 f_1、……、$f_k \in \mathcal{O}$（$\mathbb{B}$（μ，ε）），使得 $V \cap \mathbb{B}$（μ，ε）$= \{z \in \mathbb{B}$（μ，ε）：f_j（z）$= 0$，$1 \leq j \leq k\}$。如果 V 是 Ω 的一个解析子簇，我们称（Ω V）为一个 *Cartan* 对。我们称 V 是 Ω 的一个代数子簇，如果存在一个代数集 $\mathfrak{V} \subseteq \mathbb{C}^N$，使得 $V = \mathfrak{V} \cap \Omega$。

有了定义 2.1，(1) 中 d_V 的定义以及 Carath´eodory 集合的定义就有意义了。设（Ω V）是一个 Cartan 对，并设 $\phi \in \mathcal{O}$（V）。H. Cartan 的一个深刻定理 [14] 指出，如果 ϕ： $V \to \mathbb{C}$ 是一个全纯函数，那么它可以延拓为 Ω 上的全纯函数 Φ。但是，如果对 ϕ 的值域有限制，那么何时可以选取具有相同限制的 Φ 就成为一个有趣的几何问题。若每个从 V 到单位圆盘 $\mathbb{D}$ 的全纯函数都能延拓为从 Ω 到 $\mathbb{D}$ 的全纯函数，我们称 Ω 是 V 的一个延拓集。给定 Ω，哪些集合 V 以 Ω 为延拓集这一问题已经得到了广泛研究——例如，当 Ω 为多圆盘时可参见 [44, 6, 19, 26, 17, 35, 30, 31]，其他域则可参见 [9, 4, 29, 12, 36, 2, 3]。

延拓集有一个有限版本。对于正整数 n，如果对于任意 n 个点 $\mu_1, \ldots, \mu_n$，它们属于 V，以及任意 $\phi \in \mathcal{O}(V, \mathbb{D})$，都存在一个 $\Phi \in \mathcal{O}(\Omega\ \mathbb{D})$ 满足：对于每个 j，$\Phi(\mu_j) = \phi(\mu_j)$，则称 Ω 是一个 n-延拓集。根据正规族论证，延拓集等价于对每个 n 都是一个 n-延拓集。Carathéodory 集等价于 2-延拓集。据我们所知，目前还没有已知的 Carathéodory 集不是延拓集的例子。

定义 2.3。 Ω 中的复测地线是一个全纯函数 $f : \mathbb{D} \to \Omega$，它有一个左逆 $\phi \in \mathcal{O}(\Omega\ \mathbb{D})$，即对每个 $z \in \mathbb{D}$ 都满足 $\phi(f(z)) = z$。

复测地线的一个等价定义是，f 是 $\mathbb{D}$ 与赋予各自 Kobayashi 度量的 Ω 之间的等距映射（见第 3.1 小节）。

定义 2.4. 如果 V 是Ω的一个解析子簇，我们称其为全测地的，若对于 V中的任意一对点 μ、ν，都存在一条复测地线f： $\mathbb{D} \to \Omega$ 经过 μ 和 ν，且其像包含于 V。

请注意，V 是否为 Carath´eodory 集合，在很大程度上取决于 Ω 的选择。事实上，[2] 中证明了，若固定 V，总可以选择 Ω 使其成为延拓集，因此也必然是 Carath´eodory 集合。称 V 为全测地则更为微妙。这意味着 V 中的任意两点都位于 Ω 的一条 Kobayashi 测地线 ϕ 上，且该测地线完全包含于 V中。

定义 2.5。设 $(\Omega\ V)$ 是一个 *Cartan* 对。若存在 $r \in \mathcal{O}(\Omega\ V)$ 使得 $r|_V = \mathrm{id}$，则称 V 是 Ω 的收缩。

考虑 Cartan 对 $(\Omega\ V)$ 可能具有的以下 4 个性质：(R) V 是 Ω 的收缩。(E) Ω 是 V的延拓集。(TG) V 在 Ω 中是全测地的。(C) V 是 Ω 中的 Carath´eodory 集合。

显然，(R) 蕴含 (E)、(TG) 和 (C)；当然，(E) 蕴含 (C)。如果 Ω 是有界凸集，则 (TG) 蕴含 (C)[31, 命题 6]。有时逆命题也成立。例如，如果 Ω 是 $\mathbb{C}^N$ 中的单位球，且 V是一个代数子簇（或更一般地，V是相对多项式凸的），由 [29, 定理 3.1] 的证明可知，(C) 蕴含 (R)。如果 V 是 Ω 的一个代数子簇，且 Ω 是严格凸的，利用 Lempert [32] 和 Huang [22], 所发展的技术，[29,命题 2.4] 的证明表明，(C) 蕴含 (TG)（而在二维中，这又蕴含 (R)）。另一方面，一旦放宽严格凸性的要求，在 $\mathbb{C}^2$ 中便存在一些集合 Ω，它们具有代数子簇 V，满足 (E) 但不是收缩，甚至不是光滑的 [4, 2]。

多圆盘的收缩由 Heath 和 Suffridge [21] 刻画；它们都是定义在低维多圆盘上的图。

定理 2.6。*[21]* 设 V 是 $\mathbb{D}^N$的一个 d 维收缩。那么，经过坐标置换后，V 可写为

$$V = \{(z, f(z)) : z \in \mathbb{D}^d\}$$

其中函数 f 属于 $\mathcal{O}(\mathbb{D}^d, \mathbb{D}^{N-d})$。

在本文剩余部分中，我们将研究范围限定为多圆盘 $\mathbb{D}^N$ 的代数子簇V；当我们谈论 Carath´eodory 集合或全测地线集合时，指的也是具有这些性质的多圆盘代数子簇。

2.2 罗马曲面

对于 $b=(b_1,\ b_2,\ b_3)\in\mathbb{C}^3\setminus\{0\}$，定义集合

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_b &:= \{z\in\mathbb{D}^3:\ b_1z_1+b_2z_2+b_3z_3=\bar{b}_1z_2z_3+\bar{b}_2z_1z_3+\bar{b}_3z_1z_2\}\\ &= \{(z_1,z_2)\in D_{\kappa_\beta}:\ z_3=\kappa_b(z_1,z_2)\}\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\kappa_b(z_1,z_2) &= \frac{\bar{b}_3z_1z_2-b_1z_1-b_2z_2}{b_3-\bar{b}_1z_2-\bar{b}_2z_1}\\ D_{\kappa_\beta} &= \{(z_1,z_2)\in\mathbb{D}^2:|\kappa_b(z)|<1\}.\end{aligned}\tag{3}$$

我们称 $b\in\mathbb{C}^3$ 为三角形的，若三元组 $(|b_1|,\ |b_2|,\ |b_3|)$ 构成一个非退化三角形的边（即 $2\times\max(|b_1|,\ |b_2|,\ |b_3|)<|b_1|+|b_2|+|b_3|$）。我们将 $\mathcal{K}$ 记作 $\mathcal{K}_{(1,1,1)}$:

$$\mathcal{K}=\{(x,y,z)\in\mathbb{D}^3:x+y+z=yz+xz+xy\}.$$

$\mathcal{K}_b$ 有两种可能性。如果 b 不是三角形的，那么对变量重新排列，使得 $|b_3|\geq|b_2|+|b_1|$，便得到 $\kappa_b:\ \mathbb{D}^2\to\mathbb{D}$，于是 $\mathcal{K}_b$ 是 $\mathbb{D}^3$ 的二维收缩。否则，它们全都是 $\mathcal{K}$ 的自同构副本，正如 K. Maciaszek [37] 所证明的那样。

定理 2.7。 *[37]* 如果 b 是三角形的，那么存在一个自同构 $\Phi:\ \mathbb{D}^3\to\mathbb{D}^3$，使得 $\Phi(\mathcal{K}_b)=\mathcal{K}$。

令 $\mathcal{M}$ 表示函数族

$$\mathcal{M} = \{\kappa_b:\ b\text{ is triangular}\}.$$

注意， $\mathcal{M}$ 中的每个函数 α 都可以唯一地写成以下形式

$$\alpha(x,y) = \tau\frac{Ax+By+xy}{1+\bar{B}x+\bar{A}y},\tag{4}$$

其中 $|\tau|=1$ 和 $(1,\ |A|,\ |B|)$ 构成一个三角形的三边。我们将使用简写记号 $[\tau;\ A,\ B]$ 表示 $\mathcal{M}$ 中具有 (4) 的标准化形式的函数。 $\mathcal{M}$ 表示由 (4) 这种形式的函数组成的集合，其中 $|\tau|=1$ 和 $(1,\ |A|,\ |B|)$ 构成一个可能退化的三角形的三边，也就是说，我们允许最长边等于另外两边之和。如果

$1 = |A| + |B|$，那么 $\alpha \in O(\mathbb{D}^2,\ \mathbb{D})$。若 $1 + |A| = |B|$，并将变量从 $(x_1,\ x_2,\ \alpha(x_1,\ x_2))$ 改为 $(x_1,\ \beta(x_1,\ x_3)\ x_3)$，那么 $\beta \in O(\mathbb{D}^2,\ \mathbb{D})$。注意，坐标函数的模为 1 的倍数属于 $\mathcal{M}$。

我们将 $\alpha \in \mathcal{M}$ 与集合

$$\hat{T}(\alpha) = \{\omega \in \mathbb{T} : |A + B\omega| < 1\}. \tag{5}$$

$\hat{}$ 三元组 $(1, A, B)$ 是三角形的，当且仅当 $T(\alpha)$ 是 $\mathbb{T}\hat{}$ 中的非空弧，且其闭包不等于整个 $\mathbb{T}$ （引理 5.1）。事实证明， $T(\alpha)$ 在 Carath´eodory 集合的分析中起着关键作用。

定义 2.8。 对于 $j \in \mathcal{I}$，令 α_j 由下式给出

$$\alpha_j(x, y) \ = \ \tau_j \frac{A_j x + B_j y + xy}{1 + \bar{B}_j x + \bar{A}_j y}.$$

我们称 $\{\alpha_j :\ j \in \mathcal{I}\}$ 构成一个边族，当且仅当

(i) 每个 $\alpha_j \in \mathcal{M}$

(ii) 存在模为一的 ω 和 η ，使得

$$A_j + B_j\omega \ = \ \eta \qquad \forall\ j \in \mathcal{I}. \tag{6}$$

我们将 ω 称为该边族的锚点。若 $|\mathcal{I}| = 2$，则称这两个函数为一条边对。

注 2.9. 需要注意的是，(6) 指的是 A_j 和 B_j，而不是$\frac{\partial \alpha_j}{\partial x}(0) = \tau_j A_j$ 和 $\frac{\partial \alpha_j}{\partial y}(0) = \tau_j B_j$。将 α_j 乘以一个模为一的常数会旋转 $\frac{\partial \alpha_j}{\partial x}(0) + \frac{\partial \alpha_j}{\partial y}(0)\omega$，但不会改变 $A_j + B_j\overline{\omega}$。

定义 2.10. 罗马曲面 $\mathcal{L}$ 是 $\mathbb{D}^{2+m}$ 中的一个形如以下形式的子集

$$\mathcal{L} \ = \ \{(x_1, x_2, \alpha_3(x_1, x_2), \ldots, \alpha_{m+2}(x_1, x_2)) : (x_1, x_2) \in D_{\alpha_3} \cap \cdots \cap D_{\alpha_{m+2}}\} \tag{7}$$

对于某个边族 $\{\alpha_3, \ldots, \alpha_{m+2}\}$。我们称 m 为 $\mathcal{L}$的高度。

有时我们需要处理罗马曲面的极限。

定义 2.11. 对于 $j \in \mathcal{I}$，令 α_j 由下式给出

$$\alpha_j(x, y) \ = \ \tau_j \frac{A_j x + B_j y + xy}{1 + \bar{B}_j x + \bar{A}_j y}.$$

如果 $\{\alpha_j : j \in \mathcal{I}\}$ 构成一个弱边族，我们称之为

(i) 每个 $\alpha_j \in \overline{\mathcal{M}}$

(ii) 存在模为一的 ω 和 η，使得对于所有满足 $A_j B_j \neq 0$ 的 $j \in \mathcal{I}$，

$$A_j + B_j\omega = \eta. \tag{8}$$

弱罗马曲面是具有如下形式(7) 的集合，其中某个弱边族至少包含函数 α_j 中的一个，且该函数属于 $\mathcal{M}$。

注意，根据定义，坐标函数的模为 1 的倍数属于任意弱边族。这是因为某个模为 1 的倍数会满足 (8)，而且我们可以任意乘以 τ_j，而不改变这一点。要求弱罗马曲面至少包含一个属于 $\mathcal{M}$ 的函数，是因为否则它们就会是双圆盘上的图，因而是二维收缩子。

高度 1 的罗马曲面恰好是集合 $\mathcal{K}_b$，其中 b 是三角形的。如果某个函数 $\alpha_m \in \mathcal{M} \cap O(\mathbb{D}^2, \mathbb{D})$，那么 $\mathcal{L}$ 就是高度为 $m-1$ 的罗马曲面 $\mathcal{L}'$ 上的图，该曲面由省略 α_m 得到。由于 $\alpha_m : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}$，曲面 $\mathcal{L}'$ 是 Carath´eodory 集，当且仅当 $\mathcal{L}$ 是。因此，在对 Carath´eodory 集进行分类时，考察罗马曲面而非弱罗马曲面是很自然的。然而，$\mathbb{D}^{m+2}$ 的置换自同构保持弱罗马曲面，而不保持罗马曲面（见例 5.5），所以我们也必须考虑它们。（注意，根据定义，所有罗马曲面都经过归一化，使其包含点 0。）

设 $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$。如果 $(\mathbb{C}_\infty)^N$ 中的一个曲面是函数 $\alpha_j(x_1, x_2)$ 的图，其中每个 $\alpha_j \in \mathcal{M}$，那么通常不能将其写成关于另一对变量的图。能够将其写成关于任意一对变量的图，等价于每一对函数都是边对，因此该性质在 $\mathbb{D}^N$ 的自同构下保持不变，因为 $\mathbb{D}^N$ 的每个自同构都可延拓为 $(\mathbb{C}_\infty)^N$ 的一个自同构。

定理 2.12。设 $N \geq 4$。令 $\alpha_3, \ldots, \alpha_N \in \overline{\mathcal{M}}$，并令

$$\mathcal{L} = \{(x_1, x_2, \alpha_3(x_1, x_2), \ldots, \alpha_N(x_1, x_2)) : (x_1, x_2) \in D_{\alpha_3} \cap \cdots \cap D_{\alpha_N}\}.$$

Let

$$\mathcal{L}^\sharp = \{x \in (\mathbb{C}_\infty)^N : x_j = \alpha_j(x_1, x_2),\ 3 \leq j \leq N\}.$$

假设这些 N 函数 $x_1, x_2, \alpha_3(x_1, x_2) \ldots, \alpha_N(x_1, x_2)$ 中任意两个都不是彼此的模为 *1* 的倍数。则以下各项等价：

(i) 对于任意一对 $j,k \in \{1,2,\dots,N\}$， $\mathcal{L}^\sharp$ 到 $x_j - x_k$平面的投影是单射。

(ii) 对于任意一对 $j,k \in \{1,2,\dots,N\}$，存在函数 $\gamma_n \in \mathcal{M}$，使得对于 $n \in \{1,\dots,N\} \setminus \{j,k\}$， $\mathcal{L}$ 可以写成

$$\mathcal{L} = \{(x_1,\dots,x_N) \in \mathbb{D}^N : x_n = \gamma_n(x_j,x_k), (x_j,x_k) \in D_{\gamma_1} \cap \cdots \cap D_{\gamma_N}\}.$$

(iii) 对于任意一对 $j,k \in \{3,\dots,N\}$，函数 α_j和 α_k构成一个弱边对。

此外，若这些条件成立，则要么 $\mathcal{L}$ 是一个收缩，且函数 $\{\alpha_3,\dots,\alpha_N\}$ 构成一个弱边族；要么 $\mathcal{L}$ 是一个弱罗马曲面，也是罗马曲面上的图；要么 $\mathcal{L}$ 两者皆非，此时它是高度一的罗马曲面上的图。

我们在第 7 节证明定理 2.12。例 5.10 给出了一个 $\mathcal{L}$不是弱罗马曲面的例子。

在定理 2.13 中（该定理在第 7 节证明），我们证明罗马曲面是 Carath´eodory 集合。我们分步进行。首先，我们证明它们在无穷小意义下是全测地的——在每一个点处，对于该点切空间中的每一个向量，都存在一条与该向量相切的测地线。然后，我们运用拓扑与几何论证证明罗马曲面是全测地的——对于任意一对点，都存在一条连接它们的测地线。由此，我们得出结论：它们也是 Carath´eodory 集合。

定理 2.13. 罗马曲面是全测地的，也是 *Carath´eodory* 集。

我们在定义 3.3 中定义 Lempert 集；这类集合满足 Lempert 定理 3.2 的结论。与凸域不双全纯等价的 Lempert 域并不多见。定理 2.13 的一个推论是，罗马曲面是 Lempert 集，而其二维基集是 Lempert 域。

定理 2.14. 设 $\mathcal{L}$ 是(7)中的罗马曲面。那么 $\mathcal{L}$ 是 *Lempert* 集，而 $D_{\alpha_3} \cap \cdots \cap D_{\alpha_{m+2}}$是二维 *Lempert* 域。

注 2.15。 由定理 *1.4* 可知，所有基本的 *Carath´eodory* 集合不是圆盘就是罗马曲面。然而，并非所有罗马曲面都是基本的——它们可能是低维多圆盘中某个罗马曲面上的图，如例 *5.5* 所示。

2.3 更多关于罗马曲面

罗马曲面在 [28] 中已隐约出现。尽管当时并未将它们识别或定义为独立的几何对象，但它们已自然地出现，如今可以认出它们就是这些几何对象。下面我们将解释这种联系。

设 $\mu_1, \dots, \mu_n$ 是 $\mathbb{D}^N$ 中的点，且 $w_1, \dots, w_n$ 是 $\mathbb{D}$ 中的点。若存在 $F \in \mathcal{O}(\mathbb{D}^N, \mathbb{D})$，使其插值，即对每个 $1 \le j \le n$ 都满足 $F(\mu_j) = w_j$，并且不存在任何 $r < 1$ 使得 $\mathcal{O}(\mathbb{D}^N, r\mathbb{D})$ 中有函数能够插值，则称这些点为一个 n 点极值 Pick 问题的数据。若没有极值的 $n-1$ 点子问题，则称该问题为非退化。若一个极值问题存在依赖于 k 个变量的解，但不存在依赖于更少变量的解，则称其为严格 k维。

通过应用自同构，总可以将问题规范化，假设 $\mu_1 = 0$ 和 $w_1 = 0$。

定理 2.16。设 $N \ge 3$。$\mathbb{D}^N$ 中的严格三维非退化三点极值 *Pick* 问题从不具有唯一解。经过 $\mathbb{D}^N$ 的一个自同构后，所有解都相同的 $\mathbb{D}^N$ 子集是一个高度为 m 的弱罗马曲面与 $\mathbb{D}^{N-m-2}$ 的笛卡尔乘积。此外，这种形式的每个集合都是某个严格三维非退化三点极值 *Pick* 问题的唯一性集。

我们在第 16 节证明定理 2.16。情形 $N = 3$ 已在 [28] 和 [37] 中证明。

2.4 背景与动机

我们的主要结果是，在多圆盘的代数子簇中，每个基本的 Carath´eodory 集合要么是圆盘，要么是罗马曲面。此外，我们证明每个 Carath´eodory 集合都是全测地的。尽管这是一个几何分类定理，但它实际上处于分析诸多领域的交汇点：冯·诺依曼不等式、谱集、延拓集、Pick 插值、不变距离和复测地线。

冯·诺依曼不等式是如下形式的不等式

$$\sup_{T \in \mathcal{C}} \|p(T)\| \le \|p\|_V, \tag{9}$$

其中，p 是关于 d 个变量的多项式，T 是属于某个类 $\mathcal{C}$的交换 d元算子组，V 是 $\mathbb{C}^d$的某个子集，而右端

表示 V上的上确界范数。冯·诺依曼[46] 最初提出的不等式针对的是 $\mathcal{C}$ 由希尔伯特空间上的压缩算子（范数不超过 1 的算子）组成、且 V为单位圆盘的情形。当形式为 (9) 的不等式成立时，我们称 V 是 T的谱集。

该不等式的重要性在于，矩阵或算子范数有标量范数作为上界。Andô 将 von Neumann不等式推广到了交换压缩算子对这一类，其中 V 变为双圆盘 [7]。[6]背后的动因，是试图用双圆盘的某个子集替代 V，并将 $\mathcal{C}$ 视为某种意义上“位于” V上的交换压缩算子对；这一思想在 [5]中得到了进一步发展。von Neumann不等式与多圆盘延拓集的刻画之间的联系，见 [30, 第 8]节。关于对称化双圆盘的问题，已有许多文献进行探讨，例如 [42, 15]。在 [18, 8]中，研究了使不等式（9）在多圆盘上成立的交换 d元组类别。对于所有交换 d元组，已知最精确且右端带有常数的不等式见 [20]。

进一步说，关于理解 $\mathbb{D}^2$ 子集的 (9) 的问题，源于以下观察：在 $\mathbb{D}^N$ 上对 $N \geq 2$ 求解一个极值 Pick 问题时，存在一个簇 V，使得解在其上唯一，且范数为 1。该解可从这个簇延拓出去，成为一个在整个多圆盘上范数为 1 的函数。这种延拓之所以存在，是因为该簇的几何性质，还是因为解本身的特殊性质？在双圆盘中，答案是：并非所有从 V 到 $\mathbb{D}$ 的全纯函数都能延拓为从 $\mathbb{D}^2$ 到 $\mathbb{D}$ 的函数，因为对于严格二维问题， V 绝不是 Carath´eodory 集，因此允许延拓的是解本身的特殊性质。然而，对于两点问题， V 要么是一个测地圆盘，要么就是整个双圆盘，因此具有扩张性质。

对于 $\mathbb{D}^N$ 中的三点非退化严格三维问题，也可以再次提出这个问题。根据定理 2.16，唯一性集是一个弱罗马曲面（乘以一个多圆盘因子），而且解在该集合之外有多个保范数延拓。我们不知道罗马曲面对所有函数都具有扩张性质，还是只对特殊函数具有这种性质。

人们意识到，所有已知的证明在证明某个集合不具有扩张性质时，实际上证明的是它不是 Carath´eodory 集合；同时，人们也认识到 Carath´eodory 集合是值得研究的对象。这一认识是在 [31], 中形成的，当时人们建立了它与全测地集之间的联系。这些对象一直受到深入研究，研究始于 Kobayashi 和 Lempert [27, 32, 33], ，并延续至今 [11, 10, 38, 41]。

3 背景结果

3.1 小林与 Carath´eodory 度量

关于不变距离和度量的标准参考书是 M.Jarnicki 和 P. Pflug 所著的 [24] 。

定义 3.1。设 $(\Omega\ V)$ 为 *Cartan* 对。对 $\mu,\nu \in V$，定义 *Lempert* 函数

$$l_V(\mu,\nu) := \inf\{\rho(a,b) : \exists\ f \in \mathcal{O}(\mathbb{D},V),\ f(a)=\mu, f(b)=\nu\}. \tag{10}$$

若不存在这样的 f，则定义 $l_V(\mu,\nu) = +\infty$。小林伪距离是小于或等于 l_V 的最大伪距离 k_V。其无穷小版本称为 *Kobayashi-Royden* 伪度量，对 $\mu \in V$ 以及 μ 处的切向量 X 定义

$$l_V(\mu;X) := \inf\{|t| : \exists f \in \mathcal{O}(\mathbb{D},V), f(0)=\mu, tf'(0)=X\}.$$

若小林伪距离是一个距离（即互异点之间的距离非零），则称集合 Ω 为 Kobayashi双曲。注意，根据定义可立即得出：若 $\phi : V \to U$ 是全纯函数，则对 V 中的任意一对点 (μ,ν)，有 $d_U(\phi(\mu)\ \phi(\nu)) \le d_V(\mu,\nu)$，且 $l_U(\phi(\mu)\ \phi(\nu)) \le l_V(\mu,\nu)$。

L. Lempert 证明了以下著名定理。后来，J. Agler [1]找到了一个使用 Pick 插值的算子理论证明。

定理 3.2。 *[32, 33]*设Ω是一个有界凸域。则Ω是 *Kobayashi* 双曲的，并且 $d_\Omega = l_\Omega = k_\Omega$。此外，对于任意 μ、$\nu \in \Omega$，存在一条复测地线 $f : \mathbb{D} \to \Omega$，其像包含 μ 和 ν。

定义 3.3。 如果一个集合 U 满足 $d_U = l_U$，则称其为 *Lempert* 集。如果进一步 U 是一个域，即一个连通开集，则称其为 *Lempert* 域。

对于乘积域，我们将使用 Jarnicki和Pflug 的以下定理：乘积的 Carath´éodory 度量等于各因子上度量的最大值。

定理 3.4。 设 V_1 和 V_2 是连通复解析空间，且$\mu = (\mu_1,\mu_2)$ 和 $\nu = (\nu_1,\nu_2)$ 是 $V_1 \times V_2$中的点。那么

$$d_{V_1\times V_2}(\mu,\nu) = \max(d_{V_1}(\mu_1,\nu_1), d_{V_2}(\mu_2,\nu_2)) \tag{11}$$

$$l_{V_1\times V_2}(\mu,\nu) = \max(l_{V_1}(\mu_1,\nu_1), l_{V_2}(\mu_2,\nu_2)). \tag{12}$$

等式 (11) 在 [23]中得到了证明。等式 (12) 在 [24, 命题 3.7.1]中对域进行了证明，但该证明可立即推广到复解析空间。因此，Lempert 集的乘积是一个 Lempert 集。

注意，如果 Ω 是全纯凸的，只要存在某个函数 $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, V)$ 将 a映射到 μ 并将 b映射到 ν，那么通过正规族论证可知，(10) 中的下确界可以取到，尽管该函数事先可能映射到 Ω 中。如果 Ω 是多圆盘，分别考察每个分量函数可知，每个分量函数都必须映射到 $\mathbb{D}$中，因此下确界实际上由一个函数f 取到，且其值域包含于 V中。如果 $\phi \in \mathcal{O}(V, \mathbb{D})$，那么 $\phi \circ f$ 是从 $(\mathbb{D}, \rho)$ 到自身的压缩映射，因此 $d_V(\mu, \nu) \leq l_V(\mu, \nu)$。所以，如果 V 同时还是一个 Lempert 集，那么 $d_V = k_V = l_V$，于是存在一个极值映射 ϕ，它是 f的左逆。因此，根据定义 2.4，V 是全测地的。于是我们有：

命题 3.5。 令 $(\mathbb{D}^N, V)$ 为一个 *Cartan* 对。假设 V是一个 *Lempert* 集。那么 V 是全测地的。

以下结果已在 [31]中证明；为完整起见，我们给出证明。

命题 3.6。 设Ω 为有界凸集合，且$(\Omega\ V)$ 为一个 *Cartan* 对。若 V 是全测地的，则它是一个 *Carath´eodory* 集合。

Proof: 设 $\mu, \nu \in V$，并令 $\phi: V \to \mathbb{D}$ 为一个 Carath´eodory 极值映射。根据定理 3.2，存在一个全纯 $f: \mathbb{D} \to V$，使得 $f(a) = \mu, f(b) = \nu$，其中 $a, b \in \mathbb{D}$，且 f 有一个左逆 ψ。因此

$$d_V(\mu, \nu) = \rho(\phi(\mu), \phi(\nu)) = \rho(\phi(f(a)), \phi(f(b))) \leq \rho(a, b).$$

我们还有

$$d_\Omega(\mu, \nu) \geq \rho(\psi(\mu), \psi(\nu)) = \rho(\psi(f(a)), \psi(f(b))) = \rho(a, b).$$

由于 $d_V(\mu, \nu) \geq d_\Omega(\mu, \nu)$，它们必然相等。 □

3.2 Rudin 定理

我们用 $\mathbb{T}$ 表示 $\mathbb{C}$中的单位圆。对于单项式 $z_1^{i_1} \cdots z_N^{i_N}$，我们将其次数定义为 $i_1 + \cdots + i_N$。多项式的次数是系数非零的单项式次数中的最大值。有理函数的次数是其分子和

分母的次数中的最大值，前提是它们没有公因子。如果 $\mathcal{F}$ 是集合 X上的函数集，则称集合 $E \subseteq X$ 是 $\mathcal{F}$ 的决定集，若 $f = g$在 E上成立，则对任意函数 f， $g \in \mathcal{F}$， $f = g$在 X上成立。

以下记号将在下一个定理中使用。对每个 $w \in \mathbb{C}^N$，令 $\Delta_w = \{\lambda w : \lambda \in \mathbb{D}\}$。对每个 $w \in \mathbb{C}^N$，若 f是定义在 $\mathbb{C}^N$ 的子集上的函数，则函数 $f_w(\lambda) = f(\lambda w)$ 是单个复变量 λ 的函数。我们用 $A(\mathbb{D})$ 表示圆盘代数，也就是在 $\mathbb{D}$ 上全纯且在 $\mathbb{D}$ 上连续的函数。

W. Rudin 证明了以下定理 [43,定理 5.2。2]。

定理 3.7。 设 Ω 是 $\mathbb{C}^N$ 中包含0 的一个连通邻域。设 E 是 $\mathbb{C}^N$ 的一个不包含0 的紧子集，且是多项式的决定集。设 Y 是定义在$\Omega \cup \cup_{w \in E} \Delta_w$ 上的复值函数集合，这些函数在Ω 上全纯，并且满足 $f_w \in A(\mathbb{D})$，对每个 $w \in E$均成立。

假设存在整数 $k \geq 0$，使得对于每个 $w \in E$， f_w 都是次数为 k 的（单变量）有理函数。那么 f 是总次数为 k 的 N 变量有理函数。

设 p 是一个关于 N 个变量的多项式；设每个变量 z_j的最高次数为 d_j。定义 $\overleftarrow{p}(z) = z_1^{d_1} \dots z_N^{d_N} \overline{p(\frac{1}{z})}$。$\mathbb{D}^N$上的内函数是有界全纯函数，其径向边界值在 $\mathbb{T}^N$ 上几乎处处模为 1。

Rudin 在 [43, 定理 5.2.5]中刻画了多圆盘上的有理内函数。他的定理可以推广到在$\mathbb{D}^N$内部有极点的有理函数。这是众所周知的结果，但由于我们未能找到相关参考文献，因此在此给出证明。

定理 3.8。 在 $\mathbb{D}^N$ 上几乎处处模为一的每个有理函数 u，在$\mathbb{T}^N$ 上都可表示为

$$u(z) = z^I \frac{\overleftarrow{p}(z)}{p(z)}$$

其中 p是某个多项式， z^I是某个单项式，且 $I \in \mathbb{Z}^N$。

Proof: 确实可以写成 $u = \frac{q}{p}$，其中 p， q是不具有公因子的多项式。于是

$$\frac{1}{\overline{u(\frac{1}{\bar{z}})}} = z^J \frac{\overleftarrow{p}(z)}{\overleftarrow{q}(z)} \tag{13}$$

其中 J_d 是 z_d 中 q 的最高次数减去其在 p中的次数。由于 u在 $\mathbb{T}^N$上是模为一的，(13) 与 u 在 $\mathbb{T}^N$上几乎处处一致，因此作为有理函数二者相等。因此，存在具有非负幂的单项式 z^{I_1}， z^{I_2} ，使得

$$z^{I_1}p(z)\overleftarrow{p}(z) = z^{I_2}q(z)\overleftarrow{q}(z). \tag{14}$$

将 p 和 q 分解为不可约因子。 $\overleftarrow{p}$ 和 $\overleftarrow{q}$也有相应的因式分解。比较（14）式两边可知，除一个单项式因子外， $q = \overleftarrow{p}$。□

3.3 多圆盘的自同构

对于每个 $\mu \in \mathbb{D}$，令 φ_μ 为莫比乌斯映射

$$\varphi_\mu(z) \quad = \quad \frac{z-\mu}{1-\bar{\mu}z}.$$

其逆变换为 $\varphi_{-\mu}$。 $\mathbb{D}^N$的自同构分为三类，我们称之为置换、旋转和莫比乌斯自同构。置换是如下形式的映射

$$P_\sigma : (z_1, z_2, \ldots, z_N) \mapsto (z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, \ldots, z_{\sigma(N)})$$

对于某个 $\{1, \ldots, N\}$的置换 σ。旋转是如下形式的映射

$$R_\theta : (z_1, z_2, \ldots, z_N) \mapsto (e^{i\theta_1}z_1, e^{i\theta_2}z_2, \ldots, e^{i\theta_N}z_N).$$

莫比乌斯自同构是如下形式的映射

$$\Phi_a : (z_1, z_2, \ldots, z_N) \mapsto (\varphi_{a_1}(z_1), \varphi_{a_2}(z_2), \ldots, \varphi_{a_N}(z_N)),$$

其中 $a \in \mathbb{D}^N$。

$\mathbb{D}^N$ 的每个自同构都可以唯一地写成一个 M¨obius 自同构、一个置换和一个旋转的复合 [43, 参见推论 7.3。3]由于 Carath´eodory 集合这一性质在自同构下保持不变，我们将经常应用自同构来简化记号。所谓 小扰动 ，是指一个自同构 $R_\theta\Phi_a$ ，其中 a 接近 0。

假设 $a \in V$，并且在 a 附近， V 有如下形式的参数化： {(x_1， ……， x_d， α_{d+1}(x) ……， α_N(x))}，其中 x =(x_1， ……， x_d) 位于一个

邻域 U 内，该邻域以 $(a_1, \ldots\ldots, a_d)$ 为中心，且函数 α_j 在 U 上全纯。

令 $V = \Phi_a(V)$。那么 $0 \in V$，并且集合 V 在 0 附近有如下参数化：$\{(y_1, \ldots\ldots, y_d, \tilde{\alpha}_{d+1}(y) \ldots\ldots, \tilde{\alpha}_N(y))\}$，其中 $y_i = \varphi_{a_i}(x_i)$ 和

$$\tilde{\alpha}_j(y_1, \ldots, y_d) = \varphi_{a_j} \circ \alpha_j(\varphi_{-a_1}(y_1), \ldots, \varphi_{-a_d}(y_d)). \tag{15}$$

根据链式法则，

$$\frac{\partial \tilde{\alpha}_j}{\partial y_i}\Big|_0 = \frac{1 - |a_i|^2}{1 - |a_j|^2} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i}\Big|_a \tag{16}$$

3.4 Chevalley和Tworzewski定理

我们将使用Chevalley的一个定理；这种形式的证明可参见例如 [40]。若 $X \subset \mathbb{C}^N$，我们将用 $\pi_m(X)$表示 X 在前 m个坐标上的投影。

定理3.9. 设 X 是 $\mathbb{C}^N$ 中的一个维数为 k的不可约代数集。那么对每个 $m < N$，集合 $\pi_m(X)$ 都是 $\mathbb{C}^m$中的不可约代数子集，其维数小于或等于 k。

定义3.10. 设Ω 是 $\mathbb{C}^N$中的一个连通开集，且 $f \in \mathcal{O}(\Omega)$。称$f$ 在 $x_0 \in\Omega$ 处是纳什函数，若存在 x_0在Ω 中的一个开邻域 U 以及一个不恒为零的多项式 $p \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_{N+1}]$，满足 $p(x, f(x)) = 0$对所有 $x \in U$成立。若 f在每一点处都是纳什函数，则称其为Ω 上的纳什函数。函数 $F \in \mathcal{O}(\Omega\ \mathbb{C}^m)$ 是*Nash*映射，当且仅当其每个分量都是纳什函数。

纳什函数对我们的重要性在于：对代数集进行参数化的函数都是纳什函数。以下结果由 P. Tworzewski [45,Prop. 1.6]证明。

定理 3.11. 设Ω 是 $\mathbb{C}^N$ 中的一个开连通集，且 $F\colon \Omega \to \mathbb{C}^m$ 是一个全纯映射。则下列条件等价。

(i) F 是一个纳什映射。*(ii)* 存在一个 N 维不可约代数子集 $X \subset \mathbb{C}^{N+m}$，使得 $\{(x, F(x))\colon x \in \Omega\} \subset X$。

(iii) 对于 $\mathbb{C}^m$ 的每个基， F 的所有分量都是纳什函数。

3.5 延拓集

N. Sibony 在 [44], 中研究了延拓集，并给出了一个伪凸域 $V \subsetneq \mathbb{D}^2$ 的例子，该域具有这样的性质： $\mathbb{D}^2$ 是 V 的延拓集。在 [6] 中证明了，若对 V 加上一个额外的正则性条件，即要求其为相对多项式凸，那么如果 $\mathbb{D}^2$ 是一个延拓集， V 就必须是一个收缩。延拓集已得到广泛研究，参见例如 [19, 26, 17, 35, 30, 4, 12, 36, 31, 2, 3]。在所有证明延拓性质迫使 V 成为收缩的情形中，检查证明可知，实际用到的仅是它为 Carath´eodory 集合这一点。

4 定理 1.4 的证明提纲

4.1 卡通版

关键的几何思想如下。设 V 是一个包含 0 的 Carath´eodory 集，并假设它在 0 附近可以参数化为 $\{(x,\ \alpha(x))\}$，其中 $x \in \mathbb{C}^d$，且 α 的取值属于 $\mathbb{C}^{N-d}$。定义

$$T(\alpha) = \{\omega \in \mathbb{T}^d : |\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i}\Big|_0 \omega_i| < 1, \quad \forall\ j > d\}.$$

那么对于任意 $\omega \in T(\alpha)$，每个函数 $\lambda \mapsto \alpha_j(\omega_1\lambda,\ \ldots,\ \omega_d\lambda)$ 都可以从 0 的一个邻域延拓为一个从 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{D}$ 的全纯函数。这就是引理 4.4。结合 Schwarz 引理，若 ω 位于 $T(\alpha)$ 的边界上且 $|\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i}\Big|_0 \omega_i| = 1$，则对于某个 $|\eta| = 1$，$\alpha_j(\omega_1\lambda,\ \ldots,\ \omega_d\lambda) = \eta\lambda$。如果 α_j 在许多方向上与一个仿射函数一致，那么这会对 α_j 施加很大的限制；如果这种情况在扰动下仍然成立，我们最终将证明这迫使 α_j 属于 $\mathcal{M}$ （引理 4.5、4.6、4.9）。

4.2 成人版

$(iii) \Rightarrow (i)$：我们必须首先证明罗马曲面确实是 Carath´eodory 集合。在定理 2.13 中，我们先证明它们是全测地的，然后利用命题 3.6 得出它们也是 Carath´eodory 集合。由此可根据定理 3.4 得出，圆盘和罗马曲面的任意乘积都是 Carath´eodory 集合。显然，任何定义在此类集合上的图也都是 Carath´eodory 集合。

$(iii) \Rightarrow (ii)$：在定理 2.14 中，我们将这一结果加强，证明罗马曲面是 Lempert 集。利用命题 3.5，我们得出，定义在圆盘和罗马曲面的乘积上的任何图都是全测地的。

$(ii) \Rightarrow (i)$：这由命题 3.6 得出。

$(i) \Rightarrow (iii)$：我们将固定 $\mathfrak{V}$ 一个位于 $\mathbb{C}^N$中的 d维代数集，其中 $2 \leq d \leq N-1$，并令 $V = \mathfrak{V} \cap \mathbb{D}^N$。我们假设 V是 $\mathbb{D}^N$的一个 Carath´eodory 集合，并须证明，经过 $\mathbb{D}^N$ 的一个自同构后，它具有定理 1.4 中所述的形式。

Let

$$U_b = \mathbb{D}^{m_1} \times \mathcal{L}_1 \times \cdots \times \mathcal{L}_{m_2},$$

其中每个 $\mathcal{L}_j$都是高度为 h_j的罗马曲面。令 $m_3 = N - m_1 - \sum_{j=1}^{m_2} (2+h_j)$ 。令 $f = (f_j)$ 为从 U_b 到 $\mathbb{D}$的全纯函数，其中 $1 \leq j \leq m_3$。令

$$W = \{(x, f(x)) : x \in U_b\}, \tag{17}$$

其中，若 $m_3 = 0$ ，我们就理解为 $W = U_b$。我们的目标是证明，存在 $\mathbb{D}^N$ 的一个自同构，将 V 映射为某个具有这种形式的 W ，其中 m_1， $\mathcal{L}_1$， $\ldots$， $\mathcal{L}_{m_2}$ 以及函数 f可任意选取。

$\mathfrak{V}$ 的奇点将构成一个维数较低的集合，因此我们可以选取一个非奇异点 $a \in V$，并对 $\mathbb{D}^N$ 应用莫比乌斯自同构Φ_a （M¨obius automorphism），得到一个新的代数子簇；它仍然是 Carath´eodory 集合，且 0 是其正则点。应用一个置换自同构后，我们可以假设在 0 附近， V 可以表示为关于前 d 个坐标的图。这意味着存在定义在 $\mathbb{C}^d$ 中 0 的邻域 U 上的全纯函数 α_j ，使得对于某个 $\varepsilon > 0$ ，有

$$V \cap \mathbb{B}(0,\varepsilon) = \{(x_1, \ldots, x_d, \alpha_{d+1}(x_1, \ldots, x_d), \ldots, \alpha_N(x_1, \ldots, x_d)) : x \in U\}. \tag{18}$$

如果 f 是定义在 $\mathbb{C}^d$ 中 0 的某个邻域上的全纯函数的芽，则定义

$$T(f) := \{\omega \in \mathbb{T}^d : |\omega_1 f_{x_1}(0) + \cdots + \omega_{d-1} f_{x_{d-1}}(0) + \omega_d f_{x_d}(0)| < 1\}.$$

由于 $T(f)$ 中的点在 $\mathbb{T}$ 的乘法作用下保持不变，我们可以将它们写成射影形式 $\omega = (\omega_1 : \omega_2 : \cdots : \omega_d)$。通常，选择一个坐标归一化为 1 会很方便。当 ˆ$d = 2$ 时，我们在第 2 节中以归一化条件 $\omega_1 = 1$ 定义了 $T(f)$，因此只需考虑一个数。正如我们在该节中所见， $T(f)$ 包含

˜大量信息，尤其是当我们在应用莫比乌斯自同构后，也考虑 $T(f)$ 时。

注记 4.1. 假设 $T(f)$ 非空。如果 $T(f)$ 在 $\mathbb{T}^d$ 中不稠密，那么 $bT(f) = bT(f)$ 是 $\mathbb{T}^d$ 的一个 $(d-1)$ 维子集（见引理 9.2）。但如果 $T(f)$ 是稠密的，那么 $bT(f)$ 为空，而 $T(f)$ 的边界维数可能从 1 到 $(d-1)$ 维不等——见例 5.11。

定义 4.2. 假设 0 是 V 的一个正则点。我们称 V 在 0 处具有良好参数化，如果局部而言，V 具有 (18) 的形式，且 $\bigcap_{d+1\le j\le N} T(\alpha_j) \neq \emptyset$。我们称 V 在 0 处具有良好的 $(x_{i_1}, \dots, x_{i_d})$ 参数化，如果经过变量置换，使得前 d 个变量为 $(x_{i_1}, \dots, x_{i_d})$，则置换后的集合在0处具有良好参数化。

如果 a 是 V的正则点，我们就说 V 在 a 处有良好参数化，如果$\Phi_a(V)$在0处有良好参数化。

注意，具有良好参数化是一个开条件，因此在小的莫比乌斯扰动下仍然成立。我们记作

$$T(\alpha) = \bigcap_{d+1\le j\le N} T(\alpha_j).$$

从几何上看，

$$T(\alpha) = \pi_{1,\dots,d} T_0(V) \cap (\mathbb{T}^d \times \mathbb{D}^{N-d}), \tag{19}$$

其中 $T_0(V)$ 是 V在 0 处的切空间，而 $\pi_{1,\dots,d}$ 是到前 d个坐标的投影。

步骤 1: 假设 V作为 $\mathbb{D}^N$中的解析子簇是不可约的。特别地，这意味着 V 是连通的。注意，不失一般性，我们可以假设不会出现 $\alpha_j(x) = \eta\alpha_i(x)$ 对于 $i \neq j$ 和 $\eta \in \mathbb{C}$的情况。否则，通过置换使得 $j = N$ 和 $|\eta| \le 1$，我们可以考虑 $\mathbb{D}^{N-1}$ 中的集合 V'，其在 0 处的芽由函数 $\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}$给出。这将是 $\mathbb{D}^{N-1}$ 中的一个 Carath´eodory 集合。如果 V' 具有形式 (17)，那么 V 也如此（将 ηx_i 附加到函数 f即可）。类似地，我们可以假设不会出现 $\alpha_j(x) = \eta x_i$的情况。因此，我们作如下约定：

假设 1. 设 a 是 V 的正则点。应用 *Möbius* 自同构将 a 移至 0，并应用置换自同构使得 V 在局部由 (18) 给出，则有以下结论：

- 对于任何一对 $i \neq j$ *in* $\{d+1, \dots, N\}$，都不存在复数 η 使得 $\alpha_j = \eta\alpha_i$。

- 对于任何 $i \in \{1, \dots, d\}$，都不存在 j *in* $\{d+1, \dots, N\}$ 以及复数 η 使得 $\alpha_j(x) = \eta x_i$。
- 对于 j 中的任何 $\{d+1, \dots, N\}$， α_j 都是常数。

在这一假设下，我们证明，在置换坐标并进行小的 M¨obius 扰动后，总能得到一个良好参数化。注意，下面的引理并不要求 V 是 Carath´eodory 集合。我们将在第 6 节中证明它。

引理 4.3。设 V 是 $\mathbb{D}^N$ 中的一个 d维代数集，且0 是其正则点。假设假设 *1* 对 V 在0处成立。经过置换自同构和 *M¨obius* 扰动后，可以假设 V 在0处具有良好参数化。

步骤 2： 引理 4.3 的重要性源于下面的引理，我们将在第 8 节中证明该引理。对于 $\omega \in \mathbb{T}^d$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}$，记

$$\omega \cdot \lambda := (\omega_1 \lambda, \dots, \omega_d \lambda).$$

引理 4.4。设0 是 V的正则点。若 ω 属于 $T(\alpha)$，则对于每个 j，函数 $\lambda \mapsto \alpha_j(\omega \cdot \lambda)$ 可延拓为从 $\mathbb{D}$ 到$\mathbb{D}$ 的全纯映射，并且从 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{D}$连续。此外，该延拓在除维数为$d-1$的集合外的 $W = \{\omega \cdot \lambda : \lambda \in \mathbb{D},\ \omega \in T(\alpha)\}$ 上连续。

如果 $T(\alpha) = \mathbb{T}^d$，则由引理 4.4 可知，每个 α_j 都能延拓为一个从 $\mathbb{D}^d$ 到 $\mathbb{D}$的全纯函数，因此我们处于条件 (17) 中，且 $m_2 = 0$。为此，注意到对于每个 ω， $\alpha_j(\omega \cdot \lambda)$ 在$\mathbb{D}$ 上全纯，因此 α_j 的幂级数在 $\mathbb{D}^d$中收敛。此外，它在每个点处的极限的模都小于一。因此，在这种情形下， V 是 $\mathbb{D}^N$的一个收缩。对于任意 $a \in V$，若$T(\tilde{\alpha}) = \mathbb{T}^d$，且 $\tilde{\alpha}$ 由 (15) 给出，同样的结论也成立。

如果 V可写为 $V = \{(x, f(x)) : x \in V'\}$，其中某个 $f \in O(V', \mathbb{D})$ 满足该式，那么 V 是 Carath´eodory 集合当且仅当 V' 是。因此，我们可以假设这种情况不会发生，并在以下假设下继续:

假设 2. V在0 处有良好参数化，并且对于 a 在 V 中0 的某个邻域内的每个 a，$\tilde{\alpha}$由(15)给出，$T(\tilde{\alpha})$ 都是 $\mathbb{T}^d$ 的真非空子集。此外，不存在 $\mathbb{D}^N$ 的自同构，使得对于某个 $f \in O(V', \mathbb{D})$ 以及 $\mathbb{D}^{N-1}$ 中的代数集 V'，有 $\tilde{V} = \{(x, f(x)) : x \in V'\}$。

步骤 3： 我们来考察 $T(\alpha) = \cap T(\alpha_j)$ 边界上的点。它们要么位于单个 $T(\alpha_j)$ 的边界上，要么位于多个此类对象的边界上。

首先讨论单一情形。假设对于某个 j，存在一点 ω，它位于 $T(\alpha)$ 的边界上，也位于 $T(\alpha_j)$ 的边界上，并且位于所有其他 $T(\alpha_\ell)$ 的内部，其中 $\ell > d$。接下来我们证明 α_j 属于 $\mathcal{M}$，特别是它只依赖于两个变量。我们在第 9 节证明下一个引理。

引理 4.5. 假设 $\omega \in bT(\alpha_j) \cap \overline{bT(\alpha)}$ 并且 $\omega \in \cap_{d<\ell\le N,\ \ell\neq j} T(\alpha_\ell)$。那么 $\alpha_j \in \mathcal{M}$。

注意，如果我们只假设 $\omega \in bT(\alpha_j) \cap bT(\alpha)$，那么该引理不成立——见例 5.11。在例5.12中，我们表明，即使假设对于每个 $\tilde{\alpha}_j$，$bT(\tilde{\alpha}_j) \cap_{\ell\neq j} T(\tilde{\alpha}_\ell)$ 都非空，该引理仍不成立。

步骤 4： 如果 ω 位于多个不同的 $T(\alpha_j)$ 的边界上，且在扰动下这一点仍然成立，那么当 $d = 2$ 时，它们构成一个边族。

引理 4.6。设 $d = 2$。设 $\ell \ge d + 2$。假设存在 $\varepsilon > 0$，使得对于所有 $a \in V \cap B(0,\ \varepsilon)$，若按 (15) 中的方式记

$$\tilde{\alpha}_j(y_1, \dots, y_d) = \varphi_{a_j} \circ \alpha_j(\varphi_{-a_1}(y_1), \dots, \varphi_{-a_d}(y_d)),$$

则 $bT(\overline{\tilde{\alpha}_{d+1}) \cap} \cdots \cap bT(\overline{\tilde{\alpha}_\ell) \cap} T(\tilde{\alpha}_{\ell+1}) \cap \cdots \cap T(\tilde{\alpha}_N)$ 非空。因此，α_{d+1}、……、α_ℓ 属于 $\mathcal{M}$，并且它们构成一个边族。

我们在第 10 节证明引理 4.6。对于更大的 d，这一结论并不完全成立。

例 4.7。设

$$\kappa(x, y) = \kappa_{(1,1,1)}(x, y) = \frac{xy - x - y}{1 - x - y}.$$

设 $d = 4$，$N = 6$ 和 $\alpha_5(x) = \kappa(x_1,\ x_2)$，以及 $\alpha_6(x) = \kappa(x_3,\ x_4)$。那么 $bT(\alpha_5) = \{\omega \in \mathbb{T}^4 :\ |\omega_1 + \omega_2| = 1\}$，而 $bT(\alpha_6) = \{\omega :\ |\omega_3 + \omega_4| = 1\}$。它们的交集是二维的，扰动后这一点也成立，但 α_5 和 α_6 依赖于不同变量，因此无法构成边族。

然而，如果两个函数共享一块（$d-1$）维边界，引理 4.6 仍然成立。

定义 4.8。设 $\omega \in bT(\alpha)$。如果存在 j，使得 $\omega \in bT(\alpha_j)$，且存在 U 的一个邻域 ω，其中 $\mathbb{T}^d$ 满足 $U \cap bT(\alpha_j) = U \cap bT(\alpha)$，则称 ω 属于 $(d-1)$ 维边界，记作 $\omega \in b_{d-1}T(\alpha)$。若此情形发生，则称 $bT(\alpha_j)$ 在 ω 处共享 $b_{d-1}T(\alpha)$。

当 $d = 2$ 在假设 2 下，$(d-1)$ 维边界就是 $bT(\alpha)$ 的全部内容时，说 $bT(\alpha_j)$ 在 ω 处与 $b_1T(\alpha)$ 相交，仅意味着 $\omega \in bT(\alpha) \cap bT(\alpha_j)$。在例 4.7 中，$bT(\alpha_5)$ 在集合 $\{\omega \in \mathbb{T}^4$ 上与 $b_3T(\alpha)$ 相交：$|\omega_1 + \omega_2| = 1,\ |\omega_3 + \omega_4| < 1\}$。

引理 4.9。设 $d \geq 2$。设 $\ell \geq d+2$。假设存在 $\varepsilon > 0$，使得对于所有 $a \in V \cap B(0,\ \varepsilon)$，若按 (15) 中的写法

$$\tilde{\alpha}_j(y_1, \ldots, y_d) \ = \varphi_{a_j} \circ \alpha_j(\varphi_{-a_1}(y_1), \ldots, \varphi_{-a_d}(y_d)),$$

那么 $bT(\tilde{\alpha}_{d+1})$ **...,** $bT(\tilde{\alpha}_\ell)$ 都在某个属于 $T(\tilde{\alpha}_{\ell+1})$∩的点与 $b_{d-1}T(\alpha)$ 相交 $\cdots \cap T(\tilde{\alpha}_N)$。那么 α_{d+1}、.....、α_ℓ 都属于 $\mathcal{M}$，且它们都依赖于同一对变量。此外，它们构成一个边族。

我们将在第 11 节证明引理 4.9。引理 4.5 和引理 4.6 都是引理 4.9 的特例。我们先证明它们，以便让证明更容易理解。

步骤 5： 现在我们将把函数 $\{\alpha_j\colon\ d+1 \leq j \leq N\}$ 分成两个子集，即界定函数和非界定函数。

定义 4.10。如果在某个点 $\omega \in \mathbb{T}^d$ 满足以下条件，我们就称 α_j 为界定函数：

(i) 集合 $bT(\alpha_j)$ 在某个点 ω 与 $b_{d-1}T(\alpha)$ 相交；***(ii)*** 此外，对于 V 的所有小扰动，都存在一个扰动 $\tilde{\omega}$，使得集合 $bT(\tilde{\alpha}_j)$ 在 $\tilde{\omega}$ 与 $b_{d-1}T(\tilde{\alpha})$ 相交。如果不存在这样的 ω，我们就称 α_j 为非界定函数。

定义 4.11. 如果 α_j 在 ω处有界，且在 ω 处所有界定函数 $\alpha_{j'}$ 中，集合 $T(\alpha_j)$ 是极小的，我们就称 α_j 为极小界定函数。

注 4.12. 即使经过扰动，极小包围函数也不一定唯一。例 5.9 给出了一个边对 $(\alpha,\ \beta)$，它具有如下性质：$T(\alpha)$ 以锚点为起点，而 $T(\beta)$ 以锚点为终点，因此二者互不包含。

我们用 $\mathcal{B}$ 表示界定函数。由引理 4.5、4.6 和 4.9， $\mathcal{B}$ 中的每个函数 α_j 都属于 $\mathcal{M}$。

引理 4.13. 设 α_ℓ 和 $\alpha_{\ell'}$ 属于 $\mathcal{B}$。那么， α_ℓ 和 $\alpha_{\ell'}$ 要么依赖于同一对变量，要么依赖于两对互不相交的变量。

引理 4.13 在第 12 节中证明。

$\mathcal{B}$ 中依赖于同一对变量的函数构成一个边族。

引理 4.14. 假设对于某一对 $i, j \in \{1, \ldots, d\}$，集合 $\mathcal{E} = \{\alpha_k \in \mathcal{B} : \alpha_k$ 是关于 $x_i, x_j\}$ 的函数非空。那么， $\mathcal{E}$ 中的函数构成一个边族。

我们在第 13 节中证明引理 4.14。

有 m_2 对变量满足引理 4.14 的条件。对于 $1 \le j \le m_2$，令 $\mathcal{E}_j$表示相应的边族。令

$$\mathcal{E}'_j = \{\alpha_\ell : \alpha_\ell \text{ is in the same edge family as } \mathcal{E}_j\}.$$

因此， $\mathcal{E}'_j$ 可能包含一些不具边界性质的函数（但经过某个 M¨obius 置换后或许会变得具有边界性质）。我们有， $\mathcal{B}$ 是$\cup_{j=1}^{m_2}\mathcal{E}_j$的不交并。令 $\mathcal{B}' = \cup_{j=1}^{m_2}\mathcal{E}'_j$。

引理 4.13 和 4.14 证明后，便会发现 $T(\alpha)$ 的形式非常简单。如果我们一开始就知道这一点，证明中的一些技术步骤便可以省略。

推论 4.15。 存在坐标 $\{x_1, \ldots, x_d\}$ 的某个置换、某个 $k \le \frac{d}{2}$，以及一些三角三元组 $(1, A_j, B_j)$，使得

$$\overline{T(\alpha)} = \{\omega \in \mathbb{T}^d : |A_j\omega_{2j-1} + B_j\omega_{2j}| \le 1,\ 1 \le j \le k\}.$$

步骤 6。

置换变量，使得

$$\mathcal{B} \ = \ \bigcup_{j=1}^{m_2} \mathcal{E}_j \ = \ \{\alpha_\ell : d+1 \le \ell \le m_3\}.$$

定义

$$G \ = \ \bigcap_{\alpha_\ell \in \mathcal{B}'} \{x \in \mathbb{D}^d : |\alpha_\ell(x)| < 1\}.$$

引理 4.16。设 $j' > m_3$。则 $\alpha_{j'} \in O(G, \mathbb{D})$。

我们在第 14 节证明引理 4.16。
对于每个 j，令

$$\mathcal{L}_j = \{(x_1, x_2, \alpha_\ell(x_1, x_2)) : \alpha_\ell \in \mathcal{E}'_j\}.$$

这是一个高度为 $\#\mathcal{E}'_j$ 的罗马曲面。我们已证明，若 V 不可约，则经过 $\mathbb{D}^N$ 的一个自同构后，它是 $\mathbb{D}^{m_1} \times \mathcal{L}_1 \times$ 上的图
$\cdots \times \mathcal{L}_{m_2}$。

第 7 步： 最后一步是证明 V 实际上不可约；我们将在第 15 节完成这一步。

引理 4.17。若 V 是 $\mathbb{D}^N$ 的一个 *Carath´eodory* 集合，且为代数集，则 V 是 $\mathbb{D}^N$ 中的一个不可约解析子簇。

5 例子

5.1 V 中的例子

让我们考察 $\mathbb{D}^4$ 中的一些二维代数集例子。它们都具有如下形式

$$\begin{aligned} V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{D}^4 : Ax + By - z &= \bar{B}xz + \bar{A}yz - xy, \\ Cx + Dy - w &= \bar{D}xw + \bar{C}yw - xy\}. \end{aligned} \quad (20)$$

记作

$$\begin{aligned} \alpha(x, y) &= \frac{Ax + By + xy}{1 + \bar{B}x + \bar{A}y} \\ \beta(x, y) &= \frac{Cx + Dy + xy}{1 + \bar{D}x + \bar{C}y} \end{aligned}$$

那么，V 是（α，β）的图与四维圆盘的交集。

回顾公式 (5)，有 $\mathbb{T} : \hat{} \ |A + B\omega| < 1\}$。我们将用 j 表示 $e^{i\pi/3}$。

$\hat{}$**引理 5.1**。三元组 $(A, B, 1)$ 是三角形的，当且仅当 $T(\alpha)$ 是 $\overline{\mathbb{T}}$ 的真子弧。

PROOF: 三元组 $(A, B, 1)$ 是三角形的，当且仅当存在某个$\theta \in (0, \pi)$，使得点 $|A|$ 和 $|B|e^{i\theta}$ 之间的距离为 1。这意味着存在模为 1 的常数 ω_1 和 η_1，使得 $A + B\omega_1 = \eta_1$。将 θ 替换为 $-\theta$，还可得到 $A + B\omega_2 = \eta_2$，其中 $\omega_1 \neq \omega_2$。集合 $\hat{T}(\alpha)$ 随即是连接 ω_1 和 ω_2的圆弧之一。 □

$\hat{}$ 我们假设 α 和 β 都在 $\mathcal{M}$ 中，因此由引理 5.1 可知，$T(\alpha)$ 和 $\hat{T}(\beta)$ 都是 $\mathbb{T}$ 的真子弧。回顾，$D_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{D}^2 : |\alpha(x, y)| < 1\}$。

$\hat{}$ $\hat{}$**引理 5.2**。若 $D_\beta \subseteq D_\alpha$，则 $T(\beta) \subseteq T(\alpha)$。

PROOF: 令 $\omega \in \mathbb{T}$。那么

$$\alpha(x, \omega x) = \omega x \frac{x + (A\bar{\omega} + B)}{1 + (\bar{A}\omega + \bar{B})x}. \tag{21}$$

$\hat{}$ $\hat{}$ 若 $\omega \in T(\alpha)$，则 (21) 是二阶布拉施克积。若 $\omega \in bT(\alpha)$，则 $\hat{}$ (21) 是模为一的常数 $(A + B\omega)$ 乘以 x。若 $\omega \in \mathbb{T} \setminus T(\alpha)$，则 $\overline{(21)}$ 在 $\mathbb{D}$ 中有一个极点。

$\hat{}$ $\hat{}$ 若存在某个点 $\omega \in T(\beta) \setminus T(\alpha)$，$\overline{\text{那么整个圆盘}}$ $\{(\lambda, \omega\lambda) : \lambda \in \mathbb{D}\}$ 将包含于 D_β 中，但其中会有一些点不属于 D_α。 □

例 5.3. $A = B = -1$ 和 $C = 1 - j$，$D = j$，其中 j 表示 $e^{i\pi/3}$。那么，α，β 构成一个边族，因为

$$A + Bj^2 = -j = C + Dj^2,$$

因此 V 是一个罗马曲面。

我们有 $\hat{T}(\alpha) = \{e^{i\theta} : \frac{2\pi}{3} < \theta < \frac{4\pi}{3}\}$ 以及 $\hat{T}(\beta) = \{e^{i\theta} : 0 < \theta < \frac{2\pi}{3}\}$。因此$\{x_1, x_2\}$ 不能给出良好参数化。若进行变量替换并写成$V = \{(\gamma_1(x_3, x_4), \gamma_2(x_3, x_4), x_3, x_4)\}$，则 γ_1、γ_2属于 $\mathcal{M}$，计算可得 $\gamma_1 = [-1; \frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{3}}, -\frac{i}{\sqrt{3}}]$ 以及 $\gamma_2 = [-1; \frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}, \frac{i}{\sqrt{3}}]$。由此得到 $\hat{T}(\gamma_1) = \{e^{i\theta} : \frac{2\pi}{3} < \theta < 2\pi\}$ 以及 $\hat{T}(\gamma_2) = \{e^{i\theta} : 0 < \theta < \frac{4\pi}{3}\}$。它们相交，但不在锚点 1 处。我们有 $\{x_3, x_4\}$ 给出良好参数化。

根据引理 5.2，V 不是 $\{x_3, x_4\}$上的高度为 1 的罗马曲面上的图。由于 α 具有这样的性质：$\alpha(x_1, x_2) = x_3$ 与 $\alpha(x_1, x_3) = x_2$ 相同，且 $\alpha(x_2, x_3) = x_1$，因此 V不是任何高度为 1 的罗马曲面上的图，并且良好参数化是其中一个坐标为 x_4的参数化。

例 5.4. 设 $A = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}-1}{2}i$, $B = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{2}-1}{2}i$ 和 $C = \bar{B}$, $D = A$。那么, α, β 这一对构成一个边族, 因为

$$A + B = 1 = C + D,$$

因此, V 是一个罗马曲面。我们有 $\hat{T}(\alpha) = \{e^{i\theta} : 0 < \theta < \frac{3\pi}{2}\}$ 以及 $\hat{T}(\beta) = \{e^{i\theta} : \pi/2 < \theta < 2\pi\}$。所以 $\hat{T}(\alpha) \cap \hat{T}(\beta) = \{e^{i\theta} : \frac{\pi}{2} \prec \theta < \frac{3\pi}{2}\}$, 从而 $\{x_1, x_2\}$ 构成一个良好参数化, 尽管锚点 $\mathbf{1}\hat{}\hat{}$ 不在 $T(\alpha) \cap T(\beta)$ 的闭包中。

例 5.5。 令 $A = -1 - rj^2$, $B = -1 + r$ 和 $C = -1$, $D = -1$, 其中 $0 < r < 1$。那么, α, β 构成一个边族, 因为

$$A + Bj^2 = -j = C + Dj^2,$$

因此, V 是一个高度为 2 的罗马曲面。我们有 $\hat{T}(\beta) = (j^2, j^4) \subsetneq \hat{T}(\alpha) = (j^2, \frac{r+j^4}{1+rj^4})$。锚点 j^2 位于 $\hat{T}(\alpha) \cap \hat{T}(\beta)$ 的闭包中。

切换到 x_1, x_3 坐标, $V = \{x_1, \gamma_2(x_1, x_3)\ x_3, \gamma_4(x_1, x_3)\}$。那么 $\gamma_4 = [1; rj^2, 1-r]$。由于 $|rj^2| + |1-r| = 1$, 我们有 $\gamma_4 \in O(\mathbb{D}^2, \mathbb{D})$, 因此 V 也是高度 1 的罗马曲面上的图。

例 5.6。 假设 $T(\alpha)$ 和 $T(\beta)$ 是重叠弧, 但彼此都不包含对方, 且它们并集的闭包并非整个圆。那么 α, β 不构成边族, 因为 $bT(\alpha) \cap bT(\beta)$ 为空, 所以根据引理 4.14, V 不是罗马曲面。根据引理 5.2, 它也不是变量 $\{x, y, z\}$ 或 $\{x, y, w\}$ 上高度 1 的罗马曲面上的图。

引理 5.2 的逆命题并不成立。

例 5.7。 我们将给出一个例子, 其中 $T(\beta) \subseteq \overline{T(\alpha)}$, 但当我们按照第 3.3 小节所述改变基点 a 后, 便有 $T(\beta) \not\subseteq T(\tilde{\alpha})$。如果 $D_\beta \subseteq D_\alpha$, 那么在对 $\mathbb{D}^4$ 的所有自同构作用之后, 我们仍将有 $D_{\tilde{\beta}} \subseteq D_{\tilde{\alpha}}$, 因此根据引理 5.2, 我们将有 $T(\beta) \subseteq T(\tilde{\alpha})$。

令 $A = B = 1$, 并令 $C = 2.5$, $D = 3$。然后, 精确到小数点后两位,

$$\begin{aligned} \hat{T}(\alpha) &= \{e^{i\theta} : \frac{2\pi}{3} < \theta < \frac{4\pi}{3}\} = \{e^{i\theta} : 2.09 < \theta < 4.19\} \\ \hat{T}(\beta) &= \{e^{i\theta} : 2.82 < \theta < 3.46\} \end{aligned}$$

Let

$$a = (\frac{-1+3i}{4}, \frac{i}{2}, \alpha(\frac{-1+3i}{4}, \frac{i}{2}), \beta(\frac{-1+3i}{4}, \frac{i}{2})).$$

通过计算， $|a_3|$ 和 $|a_4|$ 均小于 1，因此 $a \in V$。如果应用 M¨obius 自同构 Φ_a，我们会得到 $\mathcal{M}$ 中的新函数 $\tilde{\alpha}$ 和 β，根据 16 可知，它们在 0 处的偏导数变为（精确到小数点后两位）

$$\tilde{A} = 0.07 - 0.72i, \tilde{B} = 0.34 - 0.64i, \tilde{C} = -0.99 + 0.30i, \tilde{D} = -0.32 - 1.76i.$$

于是我们得到

$$\hat{T}(\tilde{\alpha}) = \{e^{i\theta} : 1.21 < \theta < 4.28\}, \quad \hat{T}(\tilde{\beta}) = \{e^{i\theta} : 0.96 < \theta < 1.95\}.$$

因此， V 不是 Carath´eodory 集合。

例 5.8。 现在我们给出一个形如 (20) 的集合示例，该集合是 Carath´eodory 集合，并且是 $\mathbb{D}^3$ 中罗马曲面上的图。选取正的常数，使得 $\frac{1}{2} < C = D < A = B$。

于是 $D_\alpha \subsetneq D_\beta$。事实上，$(x, y) \in D_\alpha$ 当且仅当它属于 $\mathbb{D}^2$ 且 $|\alpha(x, y)|^2 < 1$，这正是条件

$$\frac{2}{A}\Re[(x+y)(\bar{x}\bar{y}-1)] < \frac{1-|xy|^2}{A^2}. \tag{22}$$

如果 (22) 对 A 成立，那么它对 $C < A$ 也成立。因此 $D_\alpha \subset D_\beta$，并且该包含必为真包含，因为 $T(\alpha) \subsetneq T(\beta)$。因此， V 是罗马曲面 $\{(x, y, z) \text{ 上 } \beta \text{ 的图} \in \mathbb{D}^3 : z = \alpha(x, y)\}$。如果将 V 写成 $\{x, z\}$ 上的图，它仍然是罗马曲面上的图，但第四个坐标由一个不属于 $\mathcal{M}$ 的函数给出。

例 5.9. 设 $C = D = -1$。设 $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，设 $A = \frac{j^5}{r-j}$ 和 $B = rA$。我们有 $C + Dj^2 = j$、$C + Dj^4 = j^5$，并且 $\hat{}T(\beta)$ 是从 j^2 到 j^4 逆时针方向延伸的弧。$A + Bj^2 = j$ 和 $A + Bj^4 = \frac{j^5 - r}{r-j}$，其模为一的，但仅当 $r = 1$ 时才等于 j^5。因此 α 和 β 构成一对边，且 $\hat{}\hat{}T(\alpha)$ 和 $T(\beta)$ 具有相同的端点；当 $r > 0$ 时，这两条弧重合；当 $r < 0$ 时，它们互为补弧。若扰动到某个点 $(p, q, \alpha(p, q)\ \beta(p, q))$，这些弧仍将有一个公共端点（因为这些函数构成一对边），但根据扰动的不同，我们可能会遇到 $T(\alpha)$ 和 $T(\beta)$ 朝相反方向延伸但彼此重叠（例如 $r = -1, p = -0.1, q = 0$，这给出 $\hat{}T(\tilde{\alpha}) = \{e^{i\theta}: -1.93 < \theta < 2.28\}$ 和 $\hat{}T(\tilde{\beta}) = \{e^{i\theta}: \theta \notin [-1.93, 1.93]\}$），也可能彼此不相交（例如 $r = -1\ p = 0.1\ q = 0$ $T\ \tilde{\alpha} = \{e^{i\theta}\ -2.28 <, , ,$ 这给出 $\hat{}(\ )\ \theta < 1.93\}$ $T\ \tilde{\beta} = \{e^{i\theta}\ \theta \notin [-2.28, 2.28]\}$: 和 $\hat{}(\ ) :$ ）。

5.2 V 在 $\mathbb{D}^5$中的一个例子

例 5.10. 设 $A_3 = -1 = B_3$，设 $A_4 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{3}} = B_4$，且 $B_4 = A_4 = A_5$。设 $\alpha_j = [1;\ A_j,\ B_j]$ 对于 $3 \le j \le 5$。我们有

$$\begin{aligned} A_3 + B_3 j^2 &= j^4 &&= A_4 + B_4 j^2 \\ A_3 + B_3 j^4 &= j^2 &&= A_5 + B_5 j^4 \\ A_4 + B_4 1 &= -1 &&= A_5 + B_5 1. \end{aligned}$$

容易验证，$\hat{T}(\alpha_3) = (j^2, j^4)$，$\hat{T}(\alpha_4) = (j^2,\ 1)$ 且 $\hat{T}(\alpha_5) = (1, j^4)$，其中这些弧均为逆时针方向。

令 $\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{D}^5 :\ x_j = \alpha_j(x_1, x_2)\ 3 \le j \le 5\}$。这是定理 2.12 中不属于弱罗马曲面的情形的一个例子。由该定理的证明可知，$\mathcal{L}$是罗马曲面 $\{x \in \mathbb{D}^3 :\ x_3 = \alpha_3(x_1, x_2)\}$上的一个图，因此是一个 Carathéodory 集合。

5.3 函数示例

例 5.11。令 $2 \le k \le d$，并定义 $f(x) = \frac{1}{k}(x_1 + \cdots + x_k)$。则$T(f) = \{\omega \in \mathbb{T}^d :\ \omega_1 = \cdots = \omega_k\}$。$T(f)$的边界为空，而 $\overline{T(f)}$的边界维数为 $d - k + 1$。

例5.12。在 [25], Knese 给出了所有全纯函数 f 的描述：$\mathbb{D}^d \to \mathbb{D}$ 对于这些函数，Schwarz 不等式处处取等号，也就是说，对于其

$$\sum_{i=1}^{d} (1 - |x_i|^2) \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| = 1 - |f(x)|^2 \tag{23}$$

在每个点 $x \in \mathbb{D}^d$ 都成立。它们都是有理内函数，在每个变量上的次数均为 1，并且满足他所描述的其他限制。我们来选取这样一个函数，例如

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) = \frac{(x_1 + x_2 + x_3) - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + 3x_1x_2x_3}{3 - 2(x_1 + x_2 + x_3) + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)}.$$

Th这对应于从实现中选取对称酉矩阵 U

定理 1.2] 中的公式为 [25,

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

在 0 处，我们有 $\frac{\partial\alpha}{\partial x_1} = \frac{\partial\alpha}{\partial x_2} = \frac{\partial\alpha}{\partial x_3} = \frac{1}{3}$，因此 $T(\alpha) = \mathbb{T}^3 \setminus \{\omega_1 = \omega_2 = \omega_3\}$，而 $bT(\alpha)$ 是空集。集合 $V = \{x_1, x_2, x_3, \alpha(x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{D}^3\}$ 是 $\mathbb{D}^4$ 的一个收缩，因此是一个 Carath´eodory 集合。

~若我们选取一个点 $a \in V$ 并将 V 扰动为 $V = \Phi_a(V)$，则由 (16) 可得

$$\sum_{i=1}^{3} \left| \frac{\partial\tilde{\alpha}}{\partial x_i} \right| = \sum_{i=1}^{3} \frac{1 - |a_i|^2}{1 - |\alpha(a_1, a_2, a_3)|^2} \left| \frac{\partial\alpha}{\partial x_i} \right|$$

由 (23) 可知其值为 1。因此，对于所有 a， $bT(\tilde{\alpha})$ 都是一维的，所以如果我们只假设对于所有扰动， $bT(\tilde{\alpha}_{d+1}) \cap bT(\tilde{\alpha}) \cap_{\ell \geq d+2} T(\alpha_\ell)$ 非空，那么引理 4.5 和 9.6 并不成立。

6 引理4.3 的证明

引理 6.1. 设 $\mathcal{X}$ 是一个 d 维复向量空间，且 $\{v_1, \ldots, v_N\}$ 是张成 $\mathcal{X}$ 的向量，并且其中任意两个都不是彼此的模为 1 的倍数。设 $L_i(u) := \langle u, v_i \rangle$。那么对每个 $1 \leq m \leq d$，都存在 $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ 和 $u \in \mathcal{X}$，使得

$$|L_{\sigma(1)}(u)| = |L_{\sigma(2)}(u)| \cdots = |L_{\sigma(m)}(u)| > \max_{j>m} |L_{\sigma(j)}(u)|,$$

并且 $\{L_{\sigma(1)}, \ldots, L_{\sigma(m)}\}$ 线性无关。

证明。 我们假设 $N > d$，否则结论显然成立。当 $m = 1$ 时，结论由以下事实推出：Hausdorff 维数

$$E_2 = \{u \in \mathcal{X} : \text{ for some } i \neq j, \ |L_i(u)| = |L_j(u)|\}$$

是 $\leq 2d - 1$。那么，不在此集合中的任何点 u 都符合要求。

对于 $2 \le m \le d$，我们将对 m 使用归纳法进行证明。设 $\mathcal{I} = \{1, \dots, N\}$。我们将使用以下归纳假设:

(IH)假设存在 u_1 属于 $\mathcal{X}$ 且 $i_1 \in \mathcal{I}$，使得 $|L_{i_1}(u_1)| > \max_{j \neq i_1} |L_j(u_1)|$。那么存在互不相同的 $i_2, \dots, i_m$ 属于 $\mathcal{I} \setminus \{i_1\}$ 且 $u_m \in \mathcal{X}$，使得

$$|L_{i_1}(u_m)| = |L_{i_2}(u_m)| = \cdots = |L_{i_m}(u_m)| > |L_j(u_m)| \quad \forall j \notin \{i_1, \dots, i_m\}, \tag{24}$$

并且 $\{L_{i_1}, \dots, L_{i_m}\}$ 线性无关。此外，存在一个不可数的 ω 集合，使得可以选取 u_m 满足 (24)，且满足 $L_{i_2}(u_m) = \omega L_{i_1}(u_m)$。

对于 $m = 2$，选取 $\mathcal{X} \setminus E_2$ 中由另一个泛函取到最大值的 u_0（我们可以这样做，因为 $m \le d$）。令

$$E_3 = \{u \in \mathbb{C}^d : \text{ for some distinct } j_1, j_2, j_3,\ |L_{j_1}(u)| = |L_{j_2}(u)| = |L_{j_3}(u)|\}.$$

$\{u \in \mathbb{C}^d$ 的 Hausdorff 维数：$|L_{j_1}(u)| = |L_{j_2}(u)| = |L_{j_3}(u)|\}$ 至多为 $2d - 2$。因此，E_3 的维数至多为 $2d - 2$，且不会使 $\mathbb{C}^d$ 不连通。

画一条连接 u_1 和 u_0 且不与 E_3相交的路径。在$|L_{i_1}(u)|$ 首次不再严格大于所有其他分量的点处，我们得到满足 (24) 且$L_{i_2}(u_2) = \omega L_{i_1}(u_2)$ 的 u_2，其中 ω取某个特定值。此外，L_{i_1} 和 L_{i_2} 线性无关，否则它们将是彼此模为 1 的倍数，这与假设矛盾。

现在，选取 $z \in \mathcal{X}$ 使得$L_{i_2}(z) \neq \omega L_{i_1}(z)$。当 θ 充分小时，令

$$\varepsilon = \frac{(e^{i\theta} - 1)\omega L_{i_1}(u_2)}{L_{i_2}(z) - \omega e^{i\theta} L_{i_1}(z)}.$$

于是我们有

$$L_{i_2}(u_2 + \varepsilon z) = e^{i\theta} \omega L_{i_1}(u_2 + \varepsilon z).$$

So 将 u_2 替换为 $u_2 + \varepsilon z$，我们便得到：对于所有充分接近 0 的 θ，$\omega e^{i\theta}$ 满足 (24)。

现在假设 (IH) 已对 $m - 1 \ge 2$证明。我们要证明它对 $3 \le m \le d$也成立。

我们有 $|L_{i_1}(u_1)| > \max_{j \neq i_1} |L_j(u_1)|$。首先，对 2 应用 (IH)，得到（经过归一化后）

$$1 = L_{i_1}(u_2) = \bar{\omega} L_{i_2}(u_2) > \max_{j \neq i_1, i_2} |L_j(u_2)|.$$

现在令 $Y_\omega = \ker(L_{i_2} - \omega L_{i_1})$。我们想对$Y_\omega$应用归纳假设。

限制在 Y_ω 上时，某些 L_j 可能互为模为 1 的倍数。若是如此，我们就在每个这样的集合中只保留一个元素，其余全部舍弃。然后应用 (IH)，得到 $u_m \in Y_\omega$ 以及互不相同的 i_3，.....，$i_m \in \mathcal{I} \setminus \{i_1, i_2\}$，使得

$$|L_{i_1}(u_m)| = |L_{i_3}(u_m)| = \cdots = |L_{i_m}(u_m)| > |L_j(u_m)| \tag{25}$$

只要 $L_j|_{Y_\omega}$ 不是某个 $1 \le k \le m$ 对应的 $L_{i_k}|_{Y_\omega}$ 的模为 1 的倍数。此外，$L_{i_3}(u_m)/L_{i_1}(u_m)$ 的可能比值集合是不可数的。

现在我们来分析式 (25) 中可能出现的重复。我们声称，只有有限多个 ω 的取值会导致重复，因此可以将它们舍去。

为简化记号，假设 $L_3 \in \{L_{i_k} : k \in \{1, 3, \dots m\}\}$，而 L_4 不是，并且对于某个模为一的 τ，有 $L_4|_{Y_\omega} = \tau L_3|_{Y_\omega}$。首先注意到 $L_3 \neq L_{i_1}$，因为不存在一个 L_4 在 $u_2 \in Y_\omega$ 处具有相同的模。

令 V 为 v_{i_1} 和 v_{i_2} 的张成空间，并令 V 中与 v_{i_1} 和 v_{i_2} 双正交的 y_1, y_2（因此，对于 $j, k \in \{1, 2\}$，有 $L_{i_k}(y_j) = \delta_{jk}$）。那么

$$\mathcal{X} = \{ay_1 + by_2 + \xi : a, b \in \mathbb{C}, \xi \in V^\perp\}$$

and

$$Y_\omega = \{a(y_1 + \omega y_2) + \xi : a \in \mathbb{C}, \xi \in V^\perp\}.$$

我们假设

$$L_4(a(y_1 + \omega y_2) + \xi) = \tau L_3(a(y_1 + \omega y_2) + \xi),$$

因此 $L_4\xi = \tau L_3\xi$ 和

$$L_4(y_1 + \omega y_2) = \tau L_3(y_1 + \omega y_2). \tag{26}$$

情形：存在某个 $\xi \in V^\perp$ 满足 $L_4\xi \neq 0$。

现在我们对 ω 取不同的选择，设为 ω'，重复这一过程。我们必须有相同的 $\tau = (L_4\xi)/(L_3\xi)$，并且

$$L_4(y_1 + \omega' y_2) = \tau L_3(y_1 + \omega' y_2). \tag{27}$$

比较 (26) 和 (27)，我们得到 $L_4 = \tau L_3$ 在 $\mathcal{X}$ 上，这就产生了矛盾。

情形： L_3 和 L_4 属于 L_{i_1} 和 L_{i_2}的张成空间。因此 $L_3 = cL_{i_1} + dL_{i_2}$。我们知道 $|L_3(u_2)| = |c + \omega d| < 1 = L_{i_1}(u_2)$。由于 $u_m = au_2 + \xi$，可得$|L_3(u_m)| = |a||c + \omega d| < |a| = |L_{i_1}(u_m)|$，因此 L_3 不是（25）中的泛函之一。

由于需要考虑的配对只有有限多个，我们只需舍弃有限多个 ω。对于其余所有情况，我们都能得到一个 u_m ，使得 $L_{i_2}(u_m) = \omega L_{i_1}(u_m)$，且（24）成立。

最后，我们来检验线性无关性。由 (IH) 可知， L_{i_1}， L_{i_3}，...， L_{i_m}在 Y_ω 上线性无关，且 L_{i_1} 和 L_{i_2} 线性无关。假设 $\sum_{j=1}^{m} c_j L_{i_j} = 0$。限制在 Y_ω上，我们得到对于所有 $j \geq 3$，都有 $c_j = 0$ ，且 $c_1 + c_2\omega = 0$。由 L_{i_1} 和 L_{i_2}的线性无关性可知，每个$c_j = 0$。 □

引理 4.3。 设 V 是 $\mathbb{D}^N$ 中的一个 d维代数集，且 0 是其正则点。假设对于 V ，假设 *1* 在 0 处成立。经过置换自同构和 *Möbius* 扰动后，我们可以假设V 在0处具有良好参数化。

Proof: 设 0 是 V的一个正则点。定义线性泛函 $L_j : T_0V \to \mathbb{C}$ ，使得 $L_j(u) = \langle u, e_j\rangle$，其中 e_j 是 $\mathbb{C}^n$中的标准基。（因此， v_j 是 e_j 在 T_0V上的投影； T_0V是 V 在 0 处的切空间。）

情形（i）：不存在任何一对 (i, j) 使得 L_i 是 L_j 的模为 1 的倍数。现在可以对 $m = d$ 应用引理 6.1，并且可以置换坐标，使得 σ 是恒等映射。以最初的 d 个坐标为参数，在 0 附近对 V 进行参数化，从而 0 的一个邻域为 $\{(\alpha_j(x_1, \ldots, x_d)) : 1 \leq j \leq N\}$，其中对于 $i \leq d$，令 $\alpha_i(x) = x_i$。记 α_j^i 为 $\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i}(0)$，则有

$$T_0V = \{(x_1, \ldots, x_d, \sum_{i=1}^{d} x_i\alpha_{d+1}^i, \ldots, \sum_{i=1}^{d} x_i\alpha_N^i) : x \in \mathbb{C}^d\}$$

设 u 如引理 6.1 中所述，并进行缩放，使得 $|L_1(u)| = 1$。那么 $u_1, \ldots, u_d$ 是模为 1 的常数，记为 $\omega_1, \ldots, \omega_d$，其余坐标的模都小于 1。这意味着对于 $j > d$， $u_j = \sum_{i=1}^{d} \omega_i\alpha_j^i$ 的模小于 1，因此 $(\omega_1 : \cdots : \omega_d) \in \cap_{j=d+1}^{N} T(\alpha_j)$。

情形（ii）：假设存在某一对，不妨取为 (1，2)，使得 $|L_1| = |L_2|$，并且在施加 M¨obius 自同构扰动后这一点仍然成立。（如果并非对所有 M¨obius 扰动都成立，我们施加其中一个，就又回到了情形（i）。）根据假设 1，没有坐标在 V 上是常数，这意味着没有一个 v_j 为零。因此我们可以选择i_2，.....，$i_d \in \{2, \ldots, N\}$，使得 $\{v_1, v_{i_2}, \ldots, v_{i_d}\}$构成 T_0V 的一组基，从而可以在局部将 V写成关于 $(x_1, x_{i_2}, \ldots..., x_{i_d})$ 的图。在 0 附近，我们有一个参数化

$$\{(\alpha_1(x_1, x_{i_2}, \ldots, x_{i_d}), \ldots, \alpha_N(x_1, x_{i_2}, \ldots, x_{i_d})) : (x_1, x_{i_2}, \ldots, x_{i_d}) \in U\}$$

其中对于 $j \in \{1, i_2, \ldots, i_d\}$，我们将 $\alpha_j(x_1, x_{i_2}, \ldots\ldots, x_{i_d}) = x_j$ 记作。

如果 $L_1 = \tau L_2$，那么我们有

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}(0) \\ \vdots \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_{i_d}}(0) \end{pmatrix} = \tau \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}(0) \\ \vdots \\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_{i_d}}(0) \end{pmatrix}$$

如果对于所有 a，在 V 中 0 的某个邻域上有 $|L_1| = |L_2|$ on $\Phi_a(V)$，由（16）可得

$$\begin{pmatrix} \frac{1-|a_1|^2}{1-|a_1|^2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{1-|a_{i_d}|^2}{1-|a_1|^2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_{i_d}}(a) \end{pmatrix} = \tau(a) \begin{pmatrix} \frac{1-|a_1|^2}{1-|a_2|^2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{1-|a_{i_d}|^2}{1-|a_2|^2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_{i_d}}(a) \end{pmatrix} \tag{28}$$

由于 $\alpha_1(x) = x_1$，(28) 的左端是向量 (1，0，...，0)^t。这意味着 α_2 仅是 x_1 的函数，并且我们有

$$\left| \frac{d\alpha_2}{dx_1} \right| = \frac{1 - |\alpha_2|^2}{1 - |x_1|^2}.$$

根据引理 6.2，我们得出 $\alpha_2(x) = \tau x_1$，这违反了假设 1。□

引理 6.2。设 y 是 x 在 $\mathbb{C}$ 中 *0* 的某个邻域上的全纯函数，并假设 y（0）$= 0$。如果

$$\left| \frac{dy}{dx} \right| = \frac{1 - |y|^2}{1 - |x|^2} \tag{29}$$

那么对于某个 $\omega \in \mathbb{T}$，有 $y = \omega x$ 。

PROOF: 由式（29）可得

$$\frac{2|dy|}{1 - |y|^2} = \frac{2|dx|}{1 - |x|^2}. \tag{30}$$

若沿半径对式（30）进行积分，使 x 从 0 变到 $re^{i\theta}$，我们就得到，y 所经过的双曲距离与 x 所经过的距离相同；由于 x沿着一条测地线移动，因此有 $|y(x)| \leq |x|$。由于 $\frac{dy}{dx}(0) \neq 0$，我们可以交换 x 和 y 的角色，得到反向不等式；因此在 0 的某个邻域内有 $|y| = |x|$。结论由此得证。□

7 边族

在本节中，我们令 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subset \mathcal{M}$。我们假设假设 1 成立，即没有任何 α_j 是某个坐标函数的模为 1 的倍数，并且任意两个 α_j，α_k 都不是彼此的模为 1 的倍数。在引理7.1和引理7.2中，我们假设这一条件适用于 α 和 β；为便于阅读，书写时省略它们的下标。

我们定义

$$\mathcal{L} = \{(x_1, x_2, \alpha_1(x_1, x_2), \ldots, \alpha_m(x_1, x_2)) : (x_1, x_2) \in D_{\alpha_1} \cap \cdots \cap D_{\alpha_m}\} \quad (31)$$

$$\mathcal{L}^\sharp = \{x \in (\mathbb{C}_\infty)^N : x_j = \alpha_j(x_1, x_2),\ 3 \le j \le N\}. \quad (32)$$

在本节中，我们将证明定理2.12、2.13和2.14。

如果有某个 $\alpha_j \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}$，我们将把 b 理解为 $\hat{T}(\alpha_j)$ 表示单元素集

$$b\hat{T}(\alpha_j) \ := \ \{\omega \in \mathbb{T} : |\alpha_j^1 + \alpha_j^2 \omega| = 1\},$$

$\hat{}$ 并且我们将把 $\overline{T(\alpha_j)}$ 理解为

$$\overline{\hat{T}(\alpha_j)} \ := \ \{\omega \in \mathbb{T} : |\alpha_j^1 + \alpha_j^2 \omega| \le 1\}.$$

我们先给出以下引理。

引理7.1. 设 α, β 属于 $\mathcal{M}$，且由下式给出

$$\begin{aligned} \alpha(x, y) \ &= \ \xi \frac{xy + Ax + By}{1 + \bar{B}x + \bar{A}y} \\ \beta(x, y) \ &= \ \tau \frac{xy + Cx + Dy}{1 + \bar{D}x + \bar{C}y}. \end{aligned} \quad (33)$$

那么，$\alpha(x, \beta(x, y))$ 属于 $\overline{\mathcal{M}}$ 当且仅当

$$\eta \ := \ -\frac{\tau \bar{A} D + \bar{C}}{\bar{B}\bar{C} + \tau \bar{A}} \quad (34)$$

是模为一的，且

$$|A|^2 \eta - (B + \eta)(1 + \bar{B}\eta) \ = \ 0. \quad (35)$$

当且仅当此外 B/D 不是实数时，该函数属于 $\mathcal{M}$。此外，如果 $\alpha(x, \beta(x, y))$ 属于 $\overline{\mathcal{M}}$，那么

$$\alpha(x, \beta(x, y)) \ = \ -(\xi\tau\eta) \frac{xy + (C + \bar{\tau} A \bar{D})x - \bar{\eta} B D y}{1 - \eta \bar{B} \bar{D} x + (\bar{C} + \tau \bar{A} D) y}. \quad (36)$$

PROOF: 我们计算得

$$\alpha(x,\beta(x,y)) \;=\; \xi\frac{P(x)y+Q(x)}{R(x)y+S(x)}, \tag{37}$$

其中

$$\begin{aligned} P(x) &= \tau x^2+(\tau B+\tau D+A\bar{C})x+\tau BD \\ Q(x) &= x\left[(\tau C+A\bar{D})x+(\tau BC+A)\right] \\ R(x) &= (\bar{B}\bar{C}+\tau\bar{A})x+\tau\bar{A}D+\bar{C} \\ S(x) &= \bar{B}\bar{D}x^2+(\bar{B}+\bar{D}+\tau\bar{A}C)x+1. \end{aligned}$$

要使（37）属于 $\mathcal{M}$，函数 P,Q,R,S 必须有一个公共根。由于 S 和 P 在 0 处不为零，这个根不可能是 0。（34）给出的数 η 是 R 的根，而 $1/\bar{\eta}$ 是 Q 的非零根；当 η 是模为一的时，这两个根相等。η 是 P 的根，当且仅当它是 $AP(x)-(B+x)R(x)$ 的根。除以 C，便恰好得到（35）。因此，η 也是 S 的根，因为 P 的根是 S 的根关于圆的反射。若从所有 4 个多项式中约去 $(x-\eta)$，便得到（36）。

因此我们已经证明，$\alpha(x,\beta(x,y))$ 是次数为 $(1,1)$ 的有理函数，当且仅当 $|\eta|=1$ 且（35）成立。我们断言，若这两个条件成立，则 $1,|C+\bar{\tau}AD|,|BD|$ 构成一个可能退化的三角形的边，因此该函数属于 $\mathcal{M}$。事实上，若 $|\eta|=1$，则（35）表明 $|A|=|B+\eta|$，所以存在一个模为一的 ω，使得

$$A+\omega B=-\omega\eta. \tag{38}$$

由（34）可得

$$(\bar{\tau}A+BC)=-\eta(\bar{\tau}A\bar{D}+C),$$

结合（38）可得

$$\bar{\tau}-\bar{\omega}C=-\eta\bar{\tau}\bar{D}.$$

So

$$C+\bar{\tau}A\bar{D}=\bar{\tau}\omega(1-B\bar{D}).$$

这三个数 1，$|1-BD|$，$|BD|$ 构成一个可能退化的三角形。当其中一个数等于另外两个数之和时，三角形退化；当且仅当为实数时，这种情况才会发生。□

设 $\alpha \in \mathcal{M}$。我们用 $\alpha^{-1}(x,\ z) = y$ 表示 $\mathcal{M}$ 中的函数，该函数给出方程 $\alpha(x,\ y) = z$ 的唯一解 y；用 $\alpha^{-1}(z,\ y) = x$ 表示给出 x 的函数。复合 $\alpha(x,\ \beta^{-1}(x,\ z))$ 属于 $\mathcal{M}$，当且仅当 α 和 β 构成一个边对。

引理 7.2. 设 $\alpha = [\xi;\ A, B]$ 和 $\beta = [\tau;\ C, D]$ 如 (33) 中所示。那么，$\alpha(x, \beta^{-1}(x, z))$ 属于 $\mathcal{M}$ 当且仅当存在 $\omega_1, \eta_1 \in \mathbb{T}$ 使得

$$A + B\omega_1 \ = \ \eta_1 \ = \ C + D\omega_1. \tag{39}$$

它属于 $\mathcal{M}$ 当且仅当此外 $B\bar{D}$ 不是实数。若 $\alpha(x, \beta^{-1}(x, z))$ 属于 $\mathcal{M}$，则

$$\alpha(x, \beta^{-1}(x, y)) \ = \ \left(\xi\bar{\tau}\bar{\omega}_1\eta_1\frac{\bar{D}}{D}\right) \ \frac{xy + \frac{\tau(A-C)}{\bar{D}}x + \frac{\omega_1\bar{\eta}_1 B}{\bar{D}}y}{1 + \frac{\bar{\omega}_1\eta_1\bar{B}}{D}x + \frac{\bar{\tau}(\bar{A}-\bar{C})}{D}y}. \tag{40}$$

Proof: 若 $\alpha(x, y) = z$，则

$$\alpha^{-1}(x, z) \ = \ \frac{\bar{\xi}\bar{B}}{B}\frac{xz - (\xi A/\bar{B})x + (1/\bar{B})z}{1 + x/B - (\bar{\xi}\bar{A}/B)z}$$

and

$$\beta^{-1}(x, z) \ = \ \frac{\bar{\tau}\bar{D}}{D}\frac{xz - (\tau C/\bar{D})x + (1/\bar{D})z}{1 + x/D - (\bar{\tau}\bar{C}/D)z}$$

因此，根据引理 7.1 $\alpha(x, \beta^{-1}(x, z))$ 属于 $\mathcal{M}$ 当且仅当

$$\eta_0 \ := \ \frac{\bar{A} - \bar{C}}{\bar{B}\bar{C} - \bar{D}\bar{A}} \tag{41}$$

是模为一的，并且

$$|A|^2\eta_0 - (B + \eta_0)(1 + \bar{B}\eta_0) \ = \ 0. \tag{42}$$

方程 (40) 可由 (36) 得出。方程 (42) 等价于

$$|A| \ = \ |B + \eta_0|.$$

这意味着存在某个 $\omega_1 \in \mathbb{T}$，使得

$$A \ = \ -\omega_1(B + \eta_0). \tag{43}$$

令 $\eta_1 = -\omega_1\eta_0$，于是我们有

$$A + \omega_1 B = \eta_1.$$

由（41）和（43），我们得到

$$\begin{aligned} \bar{A} &= (\bar{B}\bar{C} - \bar{D}\bar{A})\eta_0 + \bar{C} \\ &= \bar{C}(\bar{B}\eta_0 + 1) - \bar{D}\bar{A}\eta_0 \\ &= -\bar{C}(\omega_1\eta_0\bar{A}) - \bar{D}\bar{A}\eta_0. \end{aligned}$$

因此

$$\bar{C} + \bar{D}\bar{\omega}_1 = -\bar{\omega}_1\bar{\eta}_0 = \bar{\eta}_1.$$

取复共轭后，我们得到（39）是必要条件。

反过来，假设（39）成立。那么

$$\begin{aligned} BC - AD &= B(C - A) + A(B - D) \\ &= (B - D)(A + B\omega_1) \\ &= \eta_1(C - A)\bar{\omega}_1 \end{aligned}$$

因此，$\eta_0 = -\bar{\omega}_1\eta_1$ 是模为一的，并且 $|B + \eta_0| = |-\bar{\omega}_1 A| = |A|$ 如所需。□

假设我们有一个形如（31）的集合。由引理7.1的证明可知，如果我们尝试将其改写为关于变量 x_1、x_3 的图，比如说，那么它将变成一个形如

$$\{(x_1, \beta_2(x_1, x_3), x_3, \beta_4(x_1, x_3), \dots) : (x_1, x_3) \in U\},$$

对于适当的集合 U。函数 β_2 总是属于 $\mathcal{M}$，若 α_3 属于 $\overline{\mathcal{M}}$，则它也属于 $\mathcal{M}$；但对于 $k \geq 4$，函数 $\beta_k(x_1, x_3) = \alpha_k(x_1, \alpha_2^{-1}(x_1, x_3))$ 要么属于 $\underline{\mathcal{M}}$（当且仅当满足引理 7.2 中的条件时会出现这种情况，也就是说，当且仅当 α_3 和 α_k 构成一对边时），要么是一个关于 x_1 次数为二次、关于 x_3 次数为一次的有理函数。在后一种情况下，存在 $x_1' \neq x_1''$，使得 $\beta_k(x_1', x_3) = \beta_k(x_1'', x_3)$。这意味着，如果我们将 $\mathcal{L}^\sharp$ 投影到由 x_3 和 x_k 坐标张成的二维线性子空间上，它就不是一一映射。随着我们改用其他变量对重复这一论证，便得到：

命题 7.3。设 $\mathcal{L}^\sharp$ 由（32）给出。那么，当且仅当将 $\mathcal{L}^\sharp$ 写成关于任意一对x_j、x_k的图时，每个函数都属于 $\mathcal{M}$，$\mathcal{L}^\sharp$ 关于每一对坐标都是单层的。

引理 7.2 表明，每个 $\alpha_j(x,\ \alpha_k^{-1}(x,\ z))$ 都属于 $\mathcal{M}$，当且仅当每个α_j 和 α_k 构成一个边对；这意味着，对于任意 k，我们可以将 $\mathcal{L}$ 写成关于（x_1, x_k）或（x_2, x_k）的图。如果将这一条件加强到任意基底对，则可知它们要么构成一个边族，要么始终与三种可能的 $\omega-\eta$ 组合中的两种形成边对。

回顾记号 $[\xi; A, B]$，它是以下形式的函数

$$\alpha(x,y)\ =\ \xi\frac{xy+Ax+By}{1+\bar{B}x+\bar{A}y}.$$

我们记作 $\alpha^{\leftarrow}=[\xi; B, A]$。

为后续使用，我们记录如下结论。证明由反复应用引理 7.2 得出。

推论 7.4. 设 $\mathcal{L}\ =\ \{(x_1, x_2, \alpha_3(x_1, x_2)\ldots, \alpha_N(x_1, x_2)) : (x_1, x_2)\ \in D_{\alpha_3}\cap\cdots\cap D_{\alpha_N}\}$ 是一个弱罗马曲面。假设 $\alpha_n=[\tau_n;\ \eta-\omega B_n, B_n]$。定义

$$\sigma_n=\begin{cases}\bar{\omega}\eta & n=1\\ \eta & n=2\\ \bar{\omega}\eta^2\tau_n & n\geq 3\end{cases}$$

那么对于 $n\geq 3, n\neq j, k$，我们有

$$\gamma_n=[\bar{\omega}^2\eta^2\sigma_n\bar{\sigma}_j\bar{\sigma}_k\frac{\bar{B}_j-\bar{B}_k}{B_j-B_k}; \omega^2\bar{\eta}^2\sigma_k\frac{B_n-B_k}{\overline{B_j}-\overline{B_k}}, \omega^2\bar{\eta}^2\sigma_j\frac{B_j-B_n}{\overline{B_j}-\overline{B_k}}].$$

如果 j 或 k 是1 或2，我们将 $B_1=0$ 和 $B_2=\bar{\omega}\eta$ 解释为。

现在我们可以证明定理 2.12。

定理 2.12。设 $\alpha_3, \ldots,\ \alpha_N\in\mathcal{M}$，并设

$$\mathcal{L}=\{(x_1, x_2, \alpha_3(x_1, x_2), \ldots, \alpha_N(x_1, x_2)) : (x_1, x_2)\in D_{\alpha_3}\cap\cdots\cap D_{\alpha_N}\}.$$

假设 *1*。以下条件等价：

(i) 对于任意一对 $j, k\in\{1, 2, \ldots, N\}$，将 $\mathcal{L}^\sharp$ 投影到 x_j-x_k平面上的映射是单射。

(ii) 对于任意一对 j、$k\in\{1, 2, \ldots, N\}$，存在函数 γ_n，属于 $\mathcal{M}$，使得 $n\in\{1, \ldots, N\}\setminus\{j, k\}$ 可以写成 $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}=\{(x_1, \ldots, x_N)\in\mathbb{D}^N : x_n=\gamma_n(x_j, x_k), (x_j, x_k)\in D_{\gamma_1}\cap\cdots\cap D_{\gamma_N}\}.$$

(iii) 对于任意一对 j、$k \in \{3, \dots, N\}$，函数 α_j 和 α_k 构成一对边。

此外，如果这些条件成立，那么要么 $\mathcal{L}$ 是弱罗马曲面，此时它要么是收缩，要么是罗马曲面上的图；要么 $\mathcal{L}$ 不是弱罗马曲面，此时它是高度一的罗马曲面上的图。

PROOF: (i) 与 (ii) 等价，这就是命题 7.3。

为了证明 (ii) 与 (iii) 等价，我们将变量替换：把 $\mathcal{L}$ 写成定义在 $(x_1,\ x_2)$ 上的函数，改为写成定义在 $(x_n,\ x_k)$ 上的函数。令 $\alpha_j = [\tau_j;\ A_j,\ B_j]$。什么时候可以把 $\mathcal{L}$ 写成定义在任意其他一对变量上的曲面？根据引理 7.2，当且仅当对任意 $j,\ k$，$\alpha_j,\ \alpha_k$ 构成一对边时，我们才能用 $n = 1$ 和任意一个 k 来做到这一点。因此条件 (iii) 是必要的，也就是说，对所有属于 $\{3, 4, \dots, N\}$ 的 $j,\ k$，都存在模为 1 的常数 $\omega_{jk},\ \eta_{jk}$ 满足

$$A_j + B_j\omega_{jk} = \eta_{jk} = A_k + B_k\omega_{jk}. \tag{44}$$

要证明 (iii) 充分，我们必须考察何时能将 $\mathcal{L}$ 写成关于一对既不包含 x_1 也不包含 x_2 的坐标的曲面。为简化记号，我们假设这对坐标是 $x_3,\ x_4$。

首先，我们将 $\mathcal{L}$ 写成关于 $x_1,\ x_3$ 的函数，因此 $\mathcal{L}$ 为

$$\{(x_1, \beta_2(x_1, x_3), x_3, \beta_4(x_1, x_3), \beta_5(x_1, x_3), \dots) : (x_1, x_3) \in U\}$$

其中 U 是某个集合。我们可以这样做，因为每一对 $\alpha_3,\ \alpha_k$ 都是边对。此外，由 (40) 可得

$$\begin{aligned}
\beta_2 &= [\bar{\tau}_3\frac{\bar{B}_3}{B_3};\ -\tau_3\frac{A_3}{\bar{B}_3},\ \frac{1}{\bar{B}_3}] =: [\xi_2; C_2, D_2] \\
\beta_k &= [\bar{\tau}_3\tau_k\bar{\omega}_{3k}\eta_{3k}\frac{\bar{B}_3}{B_3};\ \tau_3\frac{A_k - A_3}{\bar{B}_3},\ \omega_{3k}\bar{\eta}_{3k}\frac{B_k}{\bar{B}_3}] =: [\xi_k; C_k, D_k] \quad k \geq 4.
\end{aligned}$$

现在，我们想将 $\mathcal{L} = \{\gamma_1(x_3, x_4)\ \gamma_2(x_3, x_4)\ x_3, x_4, \gamma_5(x_3, x_4)\ \dots\}$ 写出来。此时有 $\gamma_1(x_3, x_4) = \beta_4^{-1}(x_4, x_3)$，而对于其他 n，有 $\gamma_n(x_3, x_4) = \beta_n(\beta_4^{-1}(x_4, x_3)\ x_3)$。由引理 7.2（变量顺序反过来），$\gamma_n$ 属于 $\mathcal{M}$ 当且仅当 $\beta_4^{\leftarrow}, \beta_n^{\leftarrow}$ 是边对，这等价于说 β_4, β_n 构成边对。

显然，$\beta_n,\ \beta_2$ 构成一个边对，因为记 $\omega,\ \eta$ 为

ω_{2n}， η_{2n}，

$$\begin{aligned} C_2 + D_2\tau_3\eta &= -\tau_3\frac{A_3}{\bar{B}_3} + \frac{1}{\bar{B}_3}\tau_3\eta \\ &= \frac{\tau_3}{\bar{B}_3}\left[-A_3 + A_3 + B_3\omega\right] = \tau_3\omega\frac{B_3}{\bar{B}_3} \\ C_n + D_n\tau_3\eta &= \tau_3\frac{A_n - A_3}{\bar{B}_3} + \omega\bar{\eta}\frac{B_n}{\bar{B}_3}\tau_3\eta \\ &= \frac{\tau_3}{\bar{B}_3}\left[A_n + \omega B_n - A_3\right] = \tau_3\omega\frac{B_3}{\bar{B}_3}. \end{aligned} \tag{45}$$

为了说明 β_4 和 β_n 为 $n \neq 2$ 的一个边对，请注意，与其改写为关于 x_1 和 x_3 的形式，我们同样可以将 $\mathcal{L}$ 写成

$$\{(x_1, \gamma_2(x_1, x_4), \gamma_3(x_1, x_4), x_4, \gamma_5(x_1, x_4), \dots)\}$$

这意味着

$$\beta_n(x_1, \beta_4^{-1}(x_1, \underline{x_4})) = \gamma_n(x_1, x_4).$$

由于 $\gamma_n \in \overline{\mathcal{M}}$，由引理 7.2 可得 β_4 和 β_n 构成一个边对。

这意味着我们可以将 $\mathcal{L}$ 写成关于 x_3， x_4 的图。同样的论证适用于任意 x_j， x_k，因此条件 (iii) 也是充分的。

对于定理的最后一个断言，要么 $\mathcal{L}$ 是一个弱罗马曲面，要么不是。

情形 (a)：函数 $\{\alpha_3, \dots, \alpha_N\}$ 构成一个弱边族：(44) 中所有的 ω_{jk} 都相同，且所有的 η_{jk} 也都相同。(45) 中的论证表明，弱罗马曲面这一性质在坐标变换下保持不变。根据引理 4.3，不妨假设我们有一个良好参数化。现在将 $\{\alpha_j\}$ 分成属于 $\mathcal{M}$ 的那些（记作 $3 \leq j \leq k$）和属于 $b\mathcal{M}$ 的那些（记作 $k+1 \leq j \leq N$）。于是

$$\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{D}^k : x_j = \alpha_j(x_1, x_2), 3 \leq j \leq k\}$$

是一个罗马曲面，而 $\mathcal{L}$ 是其上的图。如果没有任何一个 α_j 属于 $\mathcal{M}$，那么它们都可以延拓为在 $\mathbb{D}^2$上全纯，并且我们有一个收缩。

情形 (b)：(44) 中的 ω_{jk} 恰有 3 个不同的值。在这种情形下，$\mathcal{L}$ 是高度为 1 的罗马曲面上的图。

在 (44) 中，必定有 3 个不同的可能 ω。将它们记为 ω_a、ω_b、ω_c，相应的 η_a、η_b、η_c。选取一个良好参数化。然后我们可以重新标记

ˆ使得 $T(\alpha) = (\omega_a, \omega_b)$。注意， ω_c 不能位于弧 (ω_a, ω_b) 上，ˆ ˆ 因为它必须位于 $T(\alpha)$ 之外。因此，对每个 j ， $T(\alpha_j)$ 都是三条弧 (ω_a, ω_b)、(ω_a, ω_c)、(ω_c, ω_b) 之一。重新排列坐标，使得 ˆ ˆ ˆ$T(\alpha_3) = (\omega_a, \omega_b)$。任何其他满足 $T(\alpha_j) = T(\alpha_3)$ 的 α_j，都必须有 $A_j = A_3$ 和 $B_j = B_3$，因为我们有 $A_j + B_j\omega_a = \eta_a = A_3 + B_3\omega_a$ 且 $A_j + B_j\omega_b = \eta_b = A_3 + B_3\omega_b$。因此， α_j 只是 α_3 的一个模为 1 的倍数。类似地，ˆ 本质上只有一个函数，比如 α_4，满足 $T(\alpha_4) = (\omega_a, \omega_c)$；此外，也只有一个 α_5 ˆ 满足 $T(\alpha_5) = (\omega_c, \omega_b)$。

Let

$$\mathcal{L}' = \{(x_1, x_2, \alpha_3(x_1, x_2) : (x_1, x_2) \in D_{\alpha_3} \cap \cdots \cap D_{\alpha_k}\}.$$

于是 $\mathcal{L}'$ 是一个高度 1 的罗马曲面。我们声称，对于任意 $j > 3$， $|\alpha_j|$在 D_{α_3}上都被 1 所界定。事实上，如果 α_j 是 α_3 的模为 1 的倍数，这一点显然成立。否则， $T(\alpha_3) \subsetneq T(\alpha_j)$。现在沿着一条 M¨obius 自同构的连续路径移动，将原点移至 (a_1, a_2)，得到函数 $\tilde{\alpha}_n$。新的曲面仍满足条件 (i)，因此也满足 (ii) 和 (iii)，并且点 $\tilde{\omega}_a, \tilde{\omega}_b, \tilde{\omega}_c$ 将连续变化。它们不可能合并，因为如果经过某个自同构后我们到达了情形 (a)，那么一路上必定始终处于情形 (a)。因此，对于所有 M¨obius 自同构，我们都有 $T(\tilde{\alpha}_3) \subsetneq T(\tilde{\alpha}_j)$。令 (a_1, a_2) 趋近于 $\mathbb{D}^2$ 中的一个点，该点位于 D_{α_j} 的边界上。根据 (16)，这意味着 $T(\tilde{\alpha}_j)$ 收缩；因此 $T(\tilde{\alpha}_3)$ 收缩；于是再次根据 (16)，这意味着 $|\alpha_3|$必定趋近于 1。因此 $D_{\alpha_3} \subseteq D_{\alpha_j}$，从而 $\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{L}'$上的图。□

引理 7.5。设 $\mathcal{L}$ 是一个弱罗马曲面，并假设它包含一个点 z'，满足 $|z_1'| >$ 最大值$_{j\geq 2}|z_j'|$。那么对某个 $j \geq 2$，它有一个良好的 $\{x_1, x_j\}$参数化。

Proof: 设 $\mathcal{L}$ 如 (31) 中所示。根据定理 2.12，对每个 $j \geq 2$，存在函数 $\alpha_{jk} \in \mathcal{M}$，使得 $\mathcal{L}$ 可写成定义在 $\{x_1, x_j\}$ 上的图，形式为 $\{x \in \mathbb{D}^N : x_k = \alpha_{jk}(x_1, x_j) \ k \neq 1, \ j\}$。

Let

$$\Omega_j = \cup_{k\neq 1,j} b\hat{T}(\alpha_{jk}).$$

Let

$$E = \cup_{j=2}^{N} \cup_{\omega\in\Omega_j} \{z \in \mathbb{D}^N : z_j = \omega z_1\}.$$

由于 E 是 $(2N-2)$ 维的，因此它不会分离 $\mathbb{D}^N$。从 z' 出发，沿着 $\mathcal{L} \setminus E$ 中的一条路径前进，直到到达一点 z''，使得 $|z_1''| = |z_j''| \geq$max$_{k\neq 1,\ j}|z_k''|$。

要证明这样的路径存在，从 z' 出发，沿径向朝 0 前进。如果这条路径到达了 $\mathcal{L}$ 的边界，也就是某个 $|z_j| = 1$ 的地方，那么路径上必定曾有一点满足 $|z_j| = |z_1|$。否则， z' 与 0 位于 $\mathcal{L}$ 的同一个连通分支中，并且在 0 附近，可以将 $\mathcal{L}$ 写成以 $\{x_1, x_2\}$ 为自变量的图，其取值范围是 $\mathbb{D}^2$ 中包含 0 的某个邻域的开集。因此，存在一些点满足 $|z_2| > |z_1|$；由连续性可知，存在一点 z''，如上所述。

设 $\omega = z_j''/z_1''$。我们声称，在 z''处有 $\max_{k\neq 1,\ j} |z_k''| < |z_1''| = |z_j''|$。事实上，这可由以下事实推出：对于任意 $\alpha \in \mathcal{M}$ 和任意 $\lambda \in \mathbb{D}\setminus\overline{\{0\}}$，我们都有如下三分法

$$|\alpha(\lambda, \omega\lambda)| \begin{cases} < |\lambda| & \omega \in \hat{T}(\alpha) \\ = |\lambda| & \omega \in b\hat{T}(\alpha) \\ > |\lambda| & \omega \in \mathbb{T}\setminus\overline{\hat{T}(\alpha)}. \end{cases}$$

我们通过避开 E 排除了第二种可能，因此对于每个 k，我们都有 $\hat{}\ \hat{}\ |\alpha_{jk}(z_1'', \omega z_1'')| < |z_1''|$，从而 $\omega \in T(\alpha_{jk})$。因此，$\cap_{k\neq 1,\ j} T(\alpha_{jk})$ 非空，并且我们有一个良好的 $\{x_1, x_j\}$ 参数化。□

推论 7.6。每个罗马曲面 $\mathcal{L}$ 都是连通的。

Proof: 假设对于某个 i，j，对所有 $z \in \mathcal{L}$ 都有 $|z_i| = |z_j|$。那么存在某个模为一的 ω，使得 $z_j = \omega z_i$，因此只需证明由去掉 j^{th} 分量得到的 $(N-1)$ 维 Carath´eodory 集合满足该结论。于是我们假设不存在两个坐标始终具有相同的模。

设 $z' \in \mathcal{L}$。我们将证明存在一条路径将其连接到 0。事实上，我们可以将它连接到一个邻近点，该点满足其中一个坐标的模严格大于其他所有坐标的模。根据引理 7.5 证明中的论证，我们接着可以将它连接到一个点 z''，该点恰有两个相等的最大分量。为方便记号，我们假设它们是前两个：$|z_1''| = |z_2''| > \max_{k>2} |z_k''|$。此外，再次根据该引理的证明可知，$\omega = z_2''/z_1''$属于 $\cap_{j=3}^N \hat{T}(\alpha_j)$，其中我们记$\mathcal{L} = \{(z_1,\ z_2,\ \alpha_j(z_1,\ z_2)) : (z_1,\ z_2) \in \cap_{j=3}^N D_{\alpha_j}\}$。因此，对每个 $0 \le r \le 1$，我们也有$(rz_1,\ rz_2) \in \cap_{j=3}^N D_{\alpha_j}$，于是 z'与 0 连通。□

定理 2.13。罗马曲面是全测地的，也是 *Carath´eodory* 集合。

Proof of Theorem 2.13: 我们将利用这样一个事实：弱罗马曲面在多圆盘的所有将曲面上的某个点映到原点的自同构作用下保持不变。

设 $\mathcal{L}$ 如（31）所示，其中 $\{\alpha_j\}$ 是一个边族。应用旋转自同构后，我们可以假设每个 $\alpha_j = [1;\ A_j,\ B_j]$，并且由于它们构成一个边族，我们有模为一的 ω_0，η_0，使得

$$A_j + B_j\omega_0 = \eta_0, \qquad 1 \le j \le m.$$

步骤 1。我们将证明 $\mathcal{L}$ 在无穷小意义下是全测地的。

令 $a \in \mathcal{L}$ 和 $X \in T_a\mathcal{L}$ 为复切空间。我们将证明，在 $\mathbb{D}^{m+2}$ 中相对于 $(a; X)$ 存在一条完全包含于 $\mathcal{L}$ 的复测地线。通过应用一个自同构，我们可以假设 $a = 0$。对坐标重新排列，使得 $|X_1| \ge |X_2| \ge \ldots$，并进行缩放，使得 $X_1 = 1$ 和 $X_2 = c \in \mathbb{D}$；于是 $X = (1,\ c,\ A_1 + B_1c,\ \ldots\ldots,\ A_m + B_mc)$。

Let

$$\Gamma \ = \ \{c \in \overline{\mathbb{D}} : |A_j + B_jc| \le 1,\ 1 \le j \le m\}.$$

对于 Γ 中的 c，我们要寻找如下形式的测地线

$$f_c : \lambda \ \mapsto \ (\lambda, \lambda\varphi_{-c}(\omega\lambda), \alpha_1(\lambda, \lambda\varphi_{-c}(\omega\lambda)), \ldots, \alpha_m(\lambda, \lambda\varphi_{-c}(\omega\lambda))), \qquad (46)$$

其中 $\omega = \omega(c)$ 是在 $\mathbb{T}$ 中适当选取的一个点。显然，第一个坐标函数是 f_c 的左逆，因此，只要 $f_c(\mathbb{D}) \subseteq \mathcal{L}$，它就是一条测地线。

情形：$|c| < 1$。写作

$$\alpha_j(\lambda, \lambda\varphi_{-c}(\omega\lambda)) \ = \ \lambda\frac{A_j + B_j\varphi_{-c}(\omega\lambda) + \lambda\varphi_{-c}(\omega\lambda)}{1 + \bar{B}_j\lambda + \bar{A}_j\lambda\varphi_{-c}(\omega\lambda)} \ = \ \lambda\frac{p_j(\lambda)}{q_j(\lambda)},$$

其中，p_j 和 q_j 是将分子和分母分别乘以（$1 + \bar{c}\omega\lambda$）后得到的多项式。

$$\begin{aligned} p_j(\lambda) \ &= \ A_j(1 + \bar{c}\omega\lambda) + B_j(c + \omega\lambda) + \lambda(c + \omega\lambda) \\ q_j(\lambda) \ &= \ (1 + \bar{c}\omega\lambda) + \bar{B}_j\lambda(1 + \bar{c}\omega\lambda) + \bar{A}_j\lambda(c + \omega\lambda). \end{aligned}$$

定义模为一的 λ_0 和 ω 如下：$\lambda_0 = -\bar{\omega}_0\eta_0$，以及 $\omega = \lambda_0\varphi_c(\omega_0)$。于是我们有

$$\begin{aligned} \varphi_{-c}(\omega\lambda_0) \ &= \ \omega_0 \\ \lambda_0\varphi_{-c}(\omega\lambda_0) \ &= \ -\eta_0. \end{aligned}$$

由这些方程可知， λ_0 既是 p_j 的根，也是 q_j的根。此外， p_j 的两个根的乘积为 $\bar{\omega}(A_j + B_j c)$，且 $\omega\lambda^2 p_j(1/\bar{\lambda}) = q_j(\lambda)$。因此，如果 $|A_j + \overline{B_j c}| < 1$，那么 $\lambda p_j(\lambda)/q_j(\lambda)$ 是一个次数为二的有理内函数，其中一个根为 0，另一个根位于圆盘内；如果 $|A_j + B_j c| = 1$ ，那么 $\lambda p_j(\lambda)/q_j(\lambda) = (A_j + B_j c)\lambda$ 是 λ的模为 1 的倍数。无论哪种情况，$|\alpha_j(\lambda, \lambda\varphi_{-c}(\omega\lambda))| < 1$ 对所有 $\lambda \in \mathbb{D}$均成立。

情形： $|c| = 1$。我们对所有 λ 设定 $\varphi_{-c}(\omega\lambda) = c$ ，而 f_c 变为

$$f_c(\lambda) = (\lambda, c\lambda, \alpha_1(\lambda, c\lambda), \ldots, \alpha_m(\lambda, c\lambda)).$$

同样， $\alpha_j(\lambda, c\lambda)$ 要么是 λ 的模为 1 的倍数，要么是二次布拉施克乘积，因此对 $\mathbb{D}$ 中所有的 λ 都属于 $\mathbb{D}$。

步骤 2：我们证明 $\mathcal{L}$ 是全测地的。

我们希望证明，对于 $\mathcal{L}$ 中任意两个互异点，都存在一条经过这两点的测地线。不失一般性，我们可以假设其中一个点是 0，另一个点 z 对每个 $2 \le j \le m+2$ 都满足 $|z_1| \ge |z_j|$ 。事实上，我们可以作出更强的假设，即对每个 $j \ge 2$ 都有 $|z_1| > |z_j|$ ，因为如果我们对一个稠密集证明了该断言，那么通过正规族论证即可得到一般情形；并且对于任意 i， j ，集合 $\{x \in \mathcal{L} : |x_i| \ne |x_j|\}$ 是一个开稠密集。由引理 7.5，存在某个 j 的良好参数化 $\{x_1, x_j\}$ ；不失一般性，我们将假设它是 $j = 2$。

我们希望找到 $c \in \Gamma$ ，使得 $z_1\varphi_{-c}(\omega(c)z_1) = z_2$；那么由 (46) 得到的 f_c 就是所需的测地线。

Let

$$Z = \{\xi \in \overline{\mathbb{D}} : |\alpha_j(z_1, \xi z_1)| \le |z_1|, 1 \le j \le m\}.$$

定义 $\Psi : \Gamma \to Z$ 如下:

$$\Psi(c) = ((f_c(z_1))_2/z_1) = \varphi_{-c}(\omega(c)z_1),$$

其中 $\omega(c)$ 与步骤 1 中的 $= -\omega_0\bar{\eta}_0\varphi_c(\omega_0)$ 相同。映射 Ψ 是连续的，实际上它是 c 和 $\bar{c}$的有理函数；根据步骤 1，我们知道它映入 Z。我们希望证明 Ψ是满射。

Γ 是若干个 $m+1$ 圆盘的交集，因此是凸的，进而是单连通的。此外， Γ 包含 $\cap_{j=1}^m T(\alpha_j)$，后者是 $\mathbb{T}$的一个非空开子集，因为我们有一个良好的 $\{x_1, x_2\}$ 参数化，所以 Γ 有内部。

Z 由 $m+1$ 集合的交集给出，

$$Z = \overline{\mathbb{D}} \cap_{j=1}^m \{\xi : |A_j + (B_j + z_1)\xi|^2 \le |(1 + \bar{B}_j z_1) + \bar{A}_j z_1 \xi|^2\}.$$

这些集合要么是圆盘（如果 $|B_j + z_1|^2 > |A_j z_1|^2$），要么是圆盘的补集（如果不等式反向成立），要么是半平面（如果等式成立）。根据 $|z_1| > |z_j|$ 对所有 $j \geq 2$成立这一假设， $\xi = z_2/z_1$ 位于每个集合的内部，因此它们都不会退化为一个点。

我们提出三个断言：
(i) $\Psi(c)$ 位于 Z 的边界上，当且仅当 c 位于 Γ的边界上。
(ii) Ψ 在 $b\Gamma$上是一对一的。
(iii) Z 的内部是连通的。
这三个断言成立后，根据若尔当曲线定理，Ψ 是从 $b\Gamma$ 到 bZ 的一个同胚，并将 Γ 的内部映到 Z的内部。

为证明 (i)，注意若 $|c| = 1$，则对所有 j， $c \in b\Gamma$ 当且仅当 $|A_j + B_j c| \leq 1$。于是 $\Psi(c) = c$，且 $|\alpha_j(z_1, cz_1)| \leq |z_1|$。

若 $|c| < 1$，则 $c \in b\Gamma$ 当且仅当对于某个 j 有 $|A_j + B_j c| = 1$，并且对于所有 k 都有 $|A_k + B_k c| \leq 1$。第一个等式成立当且仅当 $\alpha_j(\lambda, \lambda\varphi_{-c}(\omega\lambda))$ 满足 $\alpha_j(\lambda, \lambda\varphi_{-c}(\omega\lambda)) = (A_j + B_j c)\lambda$；根据步骤 1，它将 $\mathbb{D}$ 映射到 $\mathbb{D}$，而上述结论由施瓦茨引理得出。因此， $|\alpha_j(z_1, \Psi(c)z_1)| = |z_1|$ 当且仅当 $|A_j + B_j c| = 1$。故 $\Psi(c) \in bZ$ 当且仅当 $c \in b\Gamma$。

要证明 (ii)，若 $|c| = 1$，结论显然。若 $|c| < 1$，设 $|A_j + B_j c| = 1$ 且 $\Psi(c) = \xi$。那么 $\alpha_j(z_1, \xi z_1) = (A_j + B_j c)z_1$。如果还有其他 c' 满足 $\Psi(c') = \xi$，那么就有 $(A_j + B_j c')z_1 = (A_j + B_j c)z_1$。因此 $c' = c$。

为证明 (iii)，定义 $U_0 := \mathbb{D}$ 和 $U_j := \{\xi : |\alpha_j(z_1, \xi z_1)| < |z_1|\}$。我们有 $\hat{}\,\mathrm{int}(Z) = \cap_{j=0}^{m} U_j$，且对于每个 j，弧 $T(\alpha)$ 都在 bU_j 中。现在应用映射 $\xi \overset{\sim}{\mapsto} \frac{1}{\xi - \omega_0}$。于是，经过 ω_0 的每个圆都被映射为一条直线，而集合 U_j 被映射为半平面。这些半平面的交集包含 z_2/z_1 的像点，因此是一个非空开凸集。其 $\hat{}$ 逆像是一个连通开集，且 $T(\alpha)$ 位于其边界上。

步骤 3：为证明 $\mathcal{L}$ 也是一个 Carath´eodory 集合，我们使用命题 3.6。 □

定理 2.14。设 $\mathcal{L}$ 是如（7）中的罗马曲面。则 $\mathcal{L}$ 是一个 *Lempert* 集，而 $D_{\alpha_3} \cap \cdots \cap D_{\alpha_{m+2}}$ 是一个二维 *Lempert* 域。

Proof of Theorem 2.14: 这由定理 2.13 得出。为了证明 $\mathcal{L}$ 是一个 Lempert 集，我们必须证明，对于任意点$\mu, \nu \in \mathcal{L}$， $l_{\mathcal{L}}(\mu, \nu) = d_{\mathcal{L}}(\mu, \nu)$。由于 $\mathcal{L}$ 是全测地的，存在某个全纯映射 $f : \mathbb{D} \to \mathcal{L}$

将 a 映到 μ，并将 b 映到 ν，其中 $a,b\in\mathbb{D}$。于是

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{L}}(\mu,\nu) &= \sup\{\rho(\phi(\mu),\phi(\nu)):\phi\in O(\mathcal{L},\mathbb{D})\} \\ &= \sup\{\rho(\phi(f(a)),\phi(f(b))):\phi\in O(\mathcal{L},\mathbb{D})\} \\ &\le \rho(a,b). \end{aligned}$$

对所有可能的 f 取下确界，我们得到 $d_{\mathcal{L}}(\mu,\nu)\le l_{\mathcal{L}}(\mu,\nu)$。但我们知道存在某个 f 具有左逆 ψ，因此对于这个 f

$$\begin{aligned} l_{\mathcal{L}}(\mu,\nu) &\le \rho(a,b) \\ &= \rho(\psi(f(a)),\psi(f(b))) \\ &= \rho(\psi(\mu),\psi(\nu)) \\ &\le d_{\mathcal{L}}(\mu,\nu). \end{aligned}$$

因此 $\mathcal{L}$ 是 Lempert。

由于 $\mathcal{L}$ 是 U 上的图：一个取值于 $\mathbb{D}^m$的函数的图，因此容易验证 $l_U(x,y)=l_{\mathcal{L}}((x,\alpha(x)),(y,\alpha(y)))$，且 $d_U(x,y)=d_{\mathcal{L}}((x,\alpha(x)),(y,\alpha(y)))$。所以 U 也是 Lempert。□

8 引理4.4的证明

众所周知，Carath´eodory 度量与 Kobayashi 度量在多圆盘上一致；这可以通过直接计算或调用 Lempert 定理看出。它们由下式给出

$$d_{\mathbb{D}^N}(\lambda,\nu) = \max_{1\le i\le N}\rho(\lambda_i,\nu_i). \tag{47}$$

不同于严格凸域的情形，经过 $\mathbb{D}^N$ 中的一对点 λ，ν 的复测地线通常并不唯一；但在式（47）中取得最大值的坐标上，它们是唯一的。

定义 8.1。设 μ、ν 是 $\mathbb{D}^N$ 中的互异点。若对于某个 $\{1,\dots,N\}$ 中的数集合 k，有 $d_{\mathbb{D}^N}(\mu,\nu)=\rho(\mu_{i_j},\nu_{i_j})$，则称它们相对于 $\{i_1,\dots,i_k\}$ 是 k- 平衡的。

假设 (μ,ν) 相对于 $\{1,\dots,k\}$ 是 k-平衡的。任何将 (a,b) 映射到 (μ,ν) 的复测地线 $f\colon\mathbb{D}\to\mathbb{D}^N$，其 f_i 对于 $1\le i\le k$ 唯一确定；具体而言，它是将 (a,b) 映射到 (μ_i,ν_i) 的 $\mathbb{D}$ 的唯一自同构。

以下引理的证明可参见例如 [4, 引理 9.3]。

引理 8.2。 设 $D = \mathbb{D} \setminus \mathbb{D}(w, r)$ 对某个 $w \in \mathbb{D}$ 和正的 $r < 1 - |w|$成立。设 a, b 是 D 中的点。那么存在映射 $g\colon D \to \mathbb{D}$，使得 $\rho(a, b) < \rho(g(a)\ g(b))$。

因此，我们得到以下引理，其思想可追溯至 P. Thomas（见 [6, P.J. Thomas 的附录]）。我们称 ϕ 为 Carath´eodory 极值映射，如果它在（1）中取得上确界。

引理 8.3。 设 V 是一个 *Carath´eodory* 集合，且 $\phi\colon\ V \to \mathbb{D}$ 是一个 *Carath´eodory* 极值映射。那么 ϕ（V） 在 $\mathbb{D}$中稠密。

Proof: 设 ϕ 是点对（μ， ν）的极值映射。如果结论不成立，则 ϕ（V）将包含在某个域 D 中，如引理 8.2 所述。但这样一来， $g \circ \phi$ 也会将 V映射到 $\mathbb{D}$，并且以比 ϕ 更大的程度分离 μ 和 ν，这与其极值性矛盾。□

引理 8.4。 设 0 和 x' 属于 V。假设 x' 是 V 的正则点，并且 V 在 x' 处的芽可以写成

$$(x_1, \ldots, x_d, \beta_{d+1}(x), \ldots, \beta_N(x)).$$

如果 $\tau \in \mathbb{T}^{d+1}$ 满足：存在 $\lambda \neq 0$，使得对于所有 $j \geq d+2$， $\beta_{d+1}(\tau_1\lambda、\ldots、\ \tau_d\lambda) = \tau_{d+1}\lambda$ 以及 $|\beta_j(\tau_1\lambda、\ \ldots、\ \tau_d\lambda)| \leq |\lambda|$，则 $\tau \in \pi_{d+1}(V)$。

Proof: 令

$$\phi_\tau(x_1, \ldots, x_N) := \frac{1}{d+1}(\overline{\tau_1}x_1 + \cdots + \overline{\tau_{d+1}}x_{d+1}).$$

于是 $\phi_\tau(0) = 0$，且 $\phi_\tau(\tau_1\lambda、\ldots、\ \tau_{d+1}\lambda) = \lambda$，因此 ϕ_τ是 V的 Carath´eodory 极值。根据引理 8.3, 这意味着 $\phi_\tau(V)$ 在 $\mathbb{D}$中稠密，因此 $(\tau_1、\ \ldots、\ \tau_{d+1})$ 属于 $\pi_{d+1}(V)$。□

引理 8.5。 设 0 和 x' 属于 V，且 x' 满足

$$|x'_1| = |x'_2| = \cdots = |x'_{d+1}| > |x'_j| \geq 0 \qquad \forall\ d+2 \leq j \leq N. \tag{48}$$

如果 $d+1 = N$我们将 (48) 理解为 x'的所有坐标具有相同的模。假设 x' 是 V 的一个正则点，并且 V 在x' 处的芽可以写成

$$(x_1, \ldots, x_d, \beta_{d+1}(x), \ldots, \beta_N(x)). \tag{49}$$

那么，在 $|x'_1|$ 的某个~~邻~~域内， $\beta_{d+1}(\frac{x'_1}{|x'_1|}\lambda、\ \ldots\ldots、\ \frac{x'_d}{|x'_d|}\lambda)$ 是 λ 的常数倍。

PROOF: 通过与一个旋转自同构复合，我们可以假设所有坐标 x'_j 都是非负实数。令 $g(\lambda) = \beta_{d+1}(\lambda, \ldots, \lambda)/\lambda$。假设（48）表明 $g(x'_1) = 1$。假设 g 不是常值函数；那么它是开映射。对于 $\tau \in \mathbb{T}^d$ 且接近 $(1, \ldots, 1)$ 的情形，定义

$$h_\tau(\lambda) = \beta_{d+1}(\tau_1\lambda, \ldots, \tau_d\lambda)/\lambda.$$

根据 Hurwitz 定理，存在 $\mathbb{T}$ 中包含 1 的一个邻域 J，以及 $\mathbb{D}$ 中包含 x'_1 的一个邻域 U，使得对于所有充分接近 $(1, \ldots, 1)$ 的 τ，以及所有属于 J 的 τ_{d+1}，都存在某个点 $\lambda \in U$，使得 $h_\tau(\lambda) = \tau_{d+1}$。利用表示式 (49)，这意味着若 $(\tau_1, \ldots, \tau_d, \tau_{d+1})$ 在 $\mathbb{T}^{d+1}$ 中充分接近 $(1, \ldots, 1)$，则 V 包含如下形式的点

$$\gamma_\tau(\lambda) := (\tau_1\lambda, \ldots, \tau_d\lambda, \tau_{d+1}\lambda, \beta_{d+2}(\tau_1\lambda, \ldots \tau_d\lambda), \ldots, \beta_N(\tau_1\lambda, \ldots \tau_d\lambda))$$

其中对于每个 $j \geq d+2$，都有 $|\beta_j(\tau_1\lambda, \ldots \tau_d\lambda)| < |\lambda|$。（注意，$\lambda$ 的选取取决于 τ。）因此，V 包含一个 $(d+1)$ 平衡对 $(0, \gamma_\tau(\lambda))$。

根据引理 8.4，对于 $\mathbb{T}^{d+1}$ 中某个邻域内的所有 τ，$(\tau_1, \ldots, \tau_{d+1})$ 都属于 $\pi_{d+1}(V)$，该邻域包含 $(1, \ldots, 1)$。由 Chevalley 定理 3.9 可知这是不可能的，因为 V 是 d 维的。□

在第 15 节中，我们希望得到引理 8.5 的一个变体，其中不再假设不可约性。

引理 8.6. 设 V 是一个罗马曲面，在 $\mathbb{D}^N$ 中参数化为 $\{(x, \alpha(x)) : x \in U \subseteq \mathbb{D}^d\}$。假设 $P \in V$ 和 $b \notin V$ 关于前 $d+1$ 个坐标是$(d+1)$-平衡的。定义 τ_j 为 $\varphi_{b_j}(P_j)$ 的相位。令 W 为包含 $V \cup \{b\}$ 的 ***Carathéodory*** 集。或者 W 的维数大于 d，或者

$$\alpha_{d+1}(\varphi_{b_i}(\tau_i\lambda)) = \varphi_{b_{d+1}}(\tau_{d+1}\lambda) \tag{50}$$

对所有满足$(\varphi_{b_i}(\tau_i\lambda)) \in U$ 的 $\lambda \in \mathbb{D}$，

PROOF: 首先注意到，引理 8.5 可以改写为引理 8.7，其证明完全相同，只是最后一句变成了二分情形。于是，(50) 在 $|m_{b_1}(P_1)|$ 的某个邻域内成立。由推论 7.6，U 是连通的，因此等式在整个 U 上成立。□

引理 8.7。 设 W 是包含 0 的 *Carath´eodory* 集合。假设存在一个正则点 $x' \neq 0 \in W$，使得在局部， x' 处的芽可以写成 $(x_1, \dots, x_d, \beta_{d+1}(x) \dots, \beta_N(x))$。假设

$$|x_1'| = |x_2'| = \cdots = |x_{d+1}'| > |x_j'| \geq 0 \qquad \forall\ d+2 \leq j \leq N.$$

那么，要么 $\beta_{d+1}(\frac{x_1'}{|x_1'|}\lambda, \dots, \frac{x_d'}{|x_d'|}\lambda)$ 在 $|x_1'|$ 的某个邻域内是 λ 的常数倍，要么维数$(W) > d$。

现在我们可以证明引理 4.4。

引理 4.4。 假设 0 是 V 的正则点。如果 ω 属于 $T(\alpha)$，那么对于每个 j，函数 $\lambda \mapsto \alpha_j(\omega \cdot \lambda)$ 都可延拓为从 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{D}$ 的全纯映射，且该映射从 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{D}$ 连续。此外，~~此延拓在~~ $W = \{\omega \cdot \lambda : \ \lambda \in \mathbb{D},\ \omega \in T(\alpha)\}$ 上连续，至多可能例外于一个维数为$d-1$的集合。

Proof: 我们将证明：(i) 如果 ω 属于 $T(\alpha)$ 的稠密子集，那么 $\alpha_j(\omega \cdot \lambda)$ 在 $\mathbb{D}$ 上全纯；(ii) 对所有 $\omega \in T(\alpha)$，这一结论仍然成立；(iii) 函数 $\lambda \mapsto \alpha_j(\omega \cdot \lambda)$ 属于圆盘代数（即它可延拓为在 $\mathbb{D}$ 上连续的函数）。

(i) 首先假设 $\omega \in T(\alpha)$。定义一个一维集合如下

$$W_\omega := \left[\{(\omega_1\lambda, \omega_2\lambda, \dots, \omega_d\lambda) : \lambda \in \mathbb{D}\} \times \mathbb{C}^{N-d}\right] \cap V.$$

如果能够证明以下内容，则函数 $\alpha_j(\omega \cdot \lambda)$ 是全纯的

$$W_\omega \setminus \{0\} \subset \{x : \ \forall\ j > d,\ |x_j| < |x_1|\}. \tag{51}$$

事实上，如果 (51) 成立，则从 W_ω 到第一个分量的投影是 proper 的。这意味着 W_ω 在 x_1 上必定是单层的，因此 $\alpha_j(\omega \cdot \lambda)$ 可延拓为整个 $\mathbb{D}$ 上的全纯函数，并且取值于 $\mathbb{D}$。

假设 (51) 不成立。根据定理 3.11，函数 $\alpha_j(\omega \cdot \lambda)$ 中的每一个都是纳什函数，因此满足某个多项式方程 $p_j(\lambda, \alpha_j(\omega \cdot \lambda)) = 0$。令 D_j 为判别式 $p_j(x, y)$（关于 y）为零的点所构成的有限集合。于是， $\alpha_j(\omega \cdot \lambda)$ 可以解析延拓到 $\mathbb{C} \setminus D_j$ 的任意单连通子集。我们可以找到 $\lambda \in \mathbb{D}$，使得 $(\omega \cdot \lambda, \alpha(\omega \cdot \lambda))$ 是 V 的正则点，并且

$$\max_{j>d} |\alpha_j(\omega \cdot \lambda)| = |\lambda|. \tag{52}$$

如果存在唯一的 $j > d$ 使得 (52) 中的最大值能够取到，那么引理 8.5 表明，对于某个 $\tau \in \mathbb{T}$，有 $\alpha_j(\omega \cdot \lambda) = \tau\lambda$。在 0 处对这个方程求导，得到 $|\sum_{i=1}^d \alpha_j^i \omega_i| = 1$，这与 $\omega \in T(\alpha_j)$ 的条件矛盾。

因此，在 (i) 的证明余下部分中，我们可以假设 $T(\alpha)$ 中存在一个开集 U，使得对于所有 U 中的 ω，(51) 都不成立；并且对于所有满足 (52) 的点 λ，最大值都不会在唯一的 j 处取到。

令我们固定一些 $\omega' \in U$ 和一个点 $\lambda' \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$，使得 $(\omega' \cdot \lambda', \alpha(\omega' \cdot \lambda'))$ 对 V 是正则的，并且 $\max_{j>d} |\alpha_j(\omega' \cdot \lambda')| = |\lambda'|$.。不失一般性，我们可以假设此最大值在 $j = d+1$ 处取得。令

$$\tau'_{d+1} \;=\; \frac{\alpha_{d+1}(\omega' \cdot \lambda')}{\lambda'}.$$

由于 $\alpha_{d+1}(\omega' \cdot \lambda')$ 不可能是坐标函数的模为一的倍数（否则会违反 $\omega' \in T(\alpha)$），根据 Hurwitz 定理，对于所有接近 τ'_{d+1} 的 τ_{d+1}，都存在接近 λ' 的 λ，使得 $\alpha_{d+1}(\omega' \cdot \lambda) = \tau_{d+1}\lambda$。固定这样一个 τ_{d+1} 和 λ。于是存在序列 $\lambda_{(i)} \to \lambda$ 和 $\omega_{(i)} \to \omega$ 以及集合 $S \subseteq \{d+1, \dots, N\}$，使得

$$\max_{j>d} |\alpha_j(\omega_{(i)} \cdot \lambda_{(i)})| = |\lambda_{(i)}| \tag{53}$$

并且，使得（53）中的最大值恰好在 $j \in S$ 时取得。由引理 8.4 可知，对于所有接近 τ'_{d+1} 的 τ_{d+1}，点 $(\omega',\ \tau_{d+1})$ 都属于 $\pi_{d+1}(V)$。对 ω' 作扰动时，同样的辐角也成立。但这意味着 $\pi_{d+1}(V) \cap \mathbb{T}^{d+1}$ 不包含在 $(d+1)$ 环面中某个 d 维（实）子集内，这与 Chevalley定理矛盾。

（ii）我们已经证明，对于 $T(\alpha)$ 中的稠密集点 $\mathcal{T}$，该引理成立。现在假设 $\omega \in T(\alpha)$。令 $\omega_N \in \mathcal{T}$ 收敛到 ω。那么函数 $\alpha_j(\omega_N \cdot \lambda)$ 将收敛到一个全纯函数，该函数将 $\mathbb{D}$ 映射到 $\mathbb{D}$，并且在原点的某个邻域内与 $\alpha_j(\omega \cdot \lambda)$ 一致，因此在整个圆盘上也一致。

(iii) 设 $f(\lambda) := \alpha_j(\omega \cdot \lambda)$。为证明 f 属于圆盘代数，我们利用以下事实：$p_j(\lambda, f(\lambda)) = 0$。设 $\lambda_0 \in \mathbb{T}$。设 $\lambda_k \in \mathbb{D}$ 是一个收敛到 λ_0 的数列，并假设 $f(\lambda_k)$ 收敛到某个极限 w。那么 $p_j(\lambda_k, f(\lambda_k)) = 0$ 收敛到 $p_j(\lambda_0, w)$；因此，w 必定是 $p_j(\lambda_0, \cdot)$ 的有限个根之一。设这些根为 w_1、.....、w_d，并设 $\varepsilon > 0$ 足够小，使得以 w_i 为圆心、ε 为半径的闭圆盘两两不相交。存在 $\delta > 0$，使得若 $\lambda \in \mathbb{D}$ 且 $|\lambda - \lambda_0| < \delta$，则 $f(\lambda) \in \cup_{i=1}^{d} \mathbb{D}(w_i, \varepsilon)$；否则便可找到一个数列 $\lambda_k \to \lambda_0$，使得 $f(\lambda_k)$ 收敛到某个不属于这些 w_i 的极限。但由于 f 在 $\mathbb{D}$ 上连续，因此必定存在一个 w_i，使得 $f(\mathbb{D} \cap \mathbb{D}(\lambda_0, \delta)) \subseteq \mathbb{D}(w_i, \varepsilon)$。由于 ε 可以任意小，我们得出结论：f 在 λ_0 处连续。

(iv) 同理，为证明 α_j 在 $\lambda_0\cdot\omega_0\in W$ 处连续，设 $\lambda_k\cdot\omega_k\in W$ 收敛到 $\lambda_0\cdot\omega_0$，并假设 $\alpha_j(\lambda_k\cdot\omega_N k$ 收敛到 w。由于 α_j 是纳什函数，存在某个多项式 Q，使得在 0 的某个邻域内（此处 α_j 是全纯函数），有 $Q(x,\ \alpha_j(x))=0$；因此，只要 α_j 可全纯延拓，该等式便成立。于是，对 $\lambda\in\mathbb{D}$ 和 $\omega\in T(\alpha)$，有 $Q(\lambda\cdot\omega,\ \alpha_j(\lambda\cdot\omega))=0$。（注意，$Q$ 不依赖于 ω。）因此，$Q(\lambda_k\cdot\omega_k,\ \alpha_j(\lambda_k\cdot\omega_k)=0$。

由于 Q 连续，$Q(\lambda_0\cdot\omega_0,\ w)=0$，因此我们有 w 是 $Q(\lambda_0\cdot\omega_0,\ \cdot)$ 的一个零点。$Q(\lambda_0\cdot\omega_0,\ \cdot)$ 可能恒等于 0；但这只会发生在 $\lambda_0\cdot\omega_0$ 落入某个维数为 $d-1$ 的代数集时。否则，我们像之前一样得出结论：α_j 在 $\lambda_0\cdot\omega_0$ 处连续。□

9 引理 4.5 的证明

引理 9.1。令 $\omega\in bT(\alpha)\cap bT(\alpha_j)$。那么存在 $\eta\in\mathbb{T}$，使得对于所有 $\lambda\in\mathbb{D}$，$\alpha_j(\omega\cdot\lambda)=\eta\lambda$。

Proof: 根据引理 4.4，我们知道 $\alpha_j(\omega\cdot\lambda)\in\mathcal{O}(\mathbb{D},\ \mathbb{D})$，且将 0 映到 0。由于 $\omega\in bT(\alpha_j)$，该函数在 0 处的导数模为一，因此由施瓦茨引理可得结论。□

引理 9.2. 令 $c_1,\dots,c_d\in\mathbb{C}$。集合 $\{|\sum_{i=1}^d c_i\omega_i|:\ \omega\in\mathbb{T}^d\}$ 是区间 $[s,t]$，其中 $t=\sum_{i=1}^d|c_i|$ 且 $s=\max(0,2\max^{1\le i\le k}(|c_i|)-\sum_{j=1}^d|c_j|)$。

Proof: 不失一般性，假设所有 c_i 均为正且递减。集合 $\{\sum_{i=1}^2 c_i\omega_i\}$ 是闭环域 $\{z:\ c_1-c_2\le|z|\le c_1+c_2\}$。（如果 $c_1=c_2$，则得到一个闭圆盘。）依次添加每个额外的 $\{c_j\omega_j:\ \omega_j\in\mathbb{T}\}$，便会得到越来越厚的环域。外半径将增加 c_j，内半径将减少 c_j（除非它减至 0）。□

我们不会明确使用引理 9.2，但它在概念上有所帮助。特别注意，模位于区间（s，t）内的任意复数都可以写成总和 $\sum c_i\omega_i$，其中在选择这些数 ω_i 时具有 $k-1$ 个自由度。

引理 9.3。设 $P\in\mathbb{C}[x_1,\dots,x_d][z]$ 不可约，并假设 P 关于 z 的次数为 m。设 W 是 $\mathbb{T}^d$ 的一个开子集。设 f_1，……，f_m 是位于 W 上方的分支，按重数计数（因此 $P(x,f_j(x))=0$ 对 $x\in W$ 成立）。假设 $|f_1|=1$ 在 $W\cap\mathbb{T}^d$ 上成立。那么 $f_1\cdots f_m$ 是亚纯函数，并且在 $\mathbb{T}^d$ 上几乎处处的模为1 。

PROOF: 令 $\gamma(z) = i\frac{1+z}{1-z}$ 为 Cayley变换， $\delta(z) = \frac{z-i}{z+i}$ 为其逆变换。函数 $R(x, z) = P(\delta(x_1).....,\ \delta(x_d)\ \delta(z))$ 是一个有理函数；令 $Q(x, z)$ 为其最简形式下的分子。注意， Q 也必定不可约，因为如果 Q 可分解为 Q_1Q_2，那么 P 的零点集将是 $Q_1 \circ \gamma$ 和 $Q_2 \circ \gamma$ 的零点集的并集。

设 $g_j = \gamma \circ f_j \circ \delta$，并设 $W' = \gamma(W) \subseteq \mathbb{R}^d$。那么，引理的假设表明，$g_1$ 在 W'上是实值的。写作 $Q = q_1 + iq_2$，其中q_1， $q_2 \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_d][z]$。由于 g_1 在 W'上是实值的，因此 $q_1(g_1)$ 和$q_2(g_1)$ 在 W'上为零。因此， Q 的零点集同时包含于 q_1 的零点集和 q_2的零点集。由于 q_1 和 q_2的次数都不超过 Q 的次数，而后者不可约，因此 q_1 和 q_2 必定是 Q 的常数倍（也可能为零）。这意味着 Q 是 $\mathbb{R}[x][z]$中某个多项式的常数倍。因此，每个 g_j 要么是实数，要么与另一个数构成共轭复数对。相应的 f_j 于是要么模为一，要么成对出现且乘积模为一。因此$f_1 \ldots f_m$ 在 W上模为一。由于 $f_1 \ldots f_m$ 是 P的所有根的乘积，它是系数的有理函数，因此是 x中的有理函数。□

引理9.4. 假设存在 $\varepsilon > 0$，使得对于所有 $a \in V \cap B(0, \varepsilon)$，若按(15)中的方式记

$$\tilde{\alpha}_j(y_1, \ldots, y_d) = \varphi_{a_j} \circ \alpha_j(\varphi_{-a_1}(y_1), \ldots, \varphi_{-a_d}(y_d)),$$

那么存在一个开集 U，包含于 $\mathbb{T}^d$，使得 $U \cap \overline{bT(\tilde{\alpha}_{d+1})}$非空，并且对于所有 $\omega \in \overline{bT(\tilde{\alpha}_{d+1}) \cap U}$，存在 $\eta \in \mathbb{T}$，使得 $\tilde{\alpha}_{d+1}(\omega \cdot \lambda) = \eta\lambda$对所有$\lambda \in \mathbb{D}$都成立。

那么 α_{d+1} 是一个有理函数，并且在 $\mathbb{T}^d$ 上几乎处处模为一。

PROOF: 由于 $\overline{bT(\alpha_{d+1})}$ 非空，引理 9.2 中的区间 (s, t)（其中 $c_i = \frac{\partial \alpha_{d+1}}{\partial x_i}(0)$）满足 $s < 1 < t$。令 β表示 α_{d+1}。记 $\Phi_\mu(x)$ 为 $=(\varphi_{\mu_1}(x_1) \ldots, \varphi_{\mu_d}(x_d))$，并且

$$\beta_\mu(x) = \varphi_{\beta(\mu)} \circ \beta \circ \Phi_{-\mu}(x).$$

存在一个开集 G位于 $\mathbb{C}^d$中，使得对于所有 μ属于 G以及所有 τ属于 $bT(\beta_\mu) \cap U$，存在 $\eta \in \mathbb{T}$（取决于 μ 和 τ），使得

$$\beta_\mu(\tau \cdot \lambda) = \eta\lambda. \tag{54}$$

我们可以假设 U 在模一标量的乘法作用下保持不变（因为每个 $T(\beta_\mu)$ 都是如此）。

由于 $U = -U$ 且 $\lim_{\mu\to 0} \Psi_\mu(x) = x$，我们可以将 G 缩小为 G'，即一个更小的 0 的邻域，使得

$$U' = \cap_{\mu\in G'} \Phi_{-\mu}(U)$$

非空。定义

$$\begin{aligned} X &:= \bigcup_{\mu\in G'} bT(\beta_\mu) \cap U' \subseteq \mathbb{T}^d \\ Y &:= \{\Phi_{-\mu}(\tau\cdot\lambda) : \lambda \in \mathbb{D},\ \mu \in G', \tau \in bT(\beta_\mu)\cap U'\} \subseteq \mathbb{D}^d \\ Z &:= \bigcup_{\mu\in G'} T(\beta_\mu) \cap U' \subseteq \mathbb{T}^d \end{aligned}$$

断言： X 在 $\mathbb{T}^d$中具有非空内部，且 β 在 X上几乎处处为模为一的。

断言的证明：设 $\omega \in bT(\beta)$。令 F：由下式定义 $\mathbb{D}^d \times \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$

$$F(\mu,\xi) := \left| \sum_{i=1}^d \frac{1-|\mu_i|^2}{1-|\beta(\mu)|^2} \frac{\partial\beta}{\partial x_i}\Big|_\mu \xi_i \right|^2 .$$

Then

$$X = \cup_{\mu\in G'} \{\xi \in U' : F(\mu,\xi) = 1\}.$$

函数 $F(\mu,\ \xi)$在 μ和 ξ中是实解析的，并且对 U'中的所有 ω，$F(0,\ \omega) = 1$。如果它在$(0,\ \omega)$处关于 μ的导数非零，那么隐函数定理表明，对于邻域 ω 中的任意 ξ，都可以在 G'中找到μ，使得 $F(\mu,\ \xi) = 1$。这将意味着 X有内部。

计算可得 $\frac{\partial F}{\partial \mu_k}$如下，其中我们用上标表示 β 在0处的偏导数：

$$\frac{\partial F}{\partial \mu_k}|_{(0,\omega)} = (\sum_{i=1}^d \beta^{ki}\omega_i)(\sum_{j=1}^d \overline{\beta^j\omega_j}).$$

由于 $|\sum_{j=1}^d \overline{\beta^j\omega_j}| = 1$，该导数为零当且仅当前一个因子为零，因此 $\frac{\partial F}{\partial \mu_k}|_{(0,\omega)} = 0$ 推出

$$\sum_{i=1}^d \beta^{ki}\omega_i = 0. \tag{55}$$

要知道 X 具有内部，我们只需知道存在某个点 $(0,\ \omega)$，在该点处 F 相对于 μ的导数非零；因此，如果事实并非如此，我们可以得到，对于 $bT(\beta)$ 中的所有 $\omega\ \cap U'$，(55) 仍然成立。

有两种可能：

(i) $\{\omega \in U' \cap bT(\beta)\}$ 的张成空间是整个 $\mathbb{C}^d$，在这种情况下，每个 β^{ki} 都必须为 0。

(ii) $\mathcal{M} = \vee\{\omega \in U' \cap bT(\beta)\}$ 在 $\mathcal{M}^{\perp}$中含有一个非零向量 η。在这种情况下，随着 ω遍历 $U' \cap bT(\beta)$这一 $\mathbb{T}^d$中的（$d-1$）维子集，我们必须有 $\sum_{i=1}^{d} \omega_i \bar{\eta}_i = 0$。假设有三个（或更多） η_i非零，其中包括 η_1。那么在 $\mathcal{M}$中，x_1是其他变量的线性函数；但当我们改变 ω_2、.....、ω_d时，总和 $\sum_{i>1} \frac{\bar{\eta}_i}{\bar{\eta}_1}\omega_i$ 具有内部，因此不可能始终满足模为 1。因此，情形（ii）发生当且仅当 η 的分量中恰有两个非零，且它们的比值 $-\bar{\gamma}$ 模为一。为方便记号，假设它们是 η_1 和 η_2。那么 $bT(\beta) = \{\omega \in \mathbb{T}^d :\ \omega_2 = \gamma\omega_1\}$、$|\beta^1 + \gamma\beta^2| = 1$和 $\beta^{k1} + \gamma\beta^{k2} = 0$。

现在对 β_ν for $\nu \in G'$ 应用相同的分析。我们有

$$
\begin{aligned}
\beta_\nu(x) &= \varphi_{\beta(\nu)} \circ \beta \circ \Phi_{-\nu}(x) \\
\beta_\nu^i(x) &= \varphi'_{\beta(\nu)}(\beta(\Phi_{-\nu}(x)))\beta^i(\Phi_{-\nu}(x))\varphi'_{-\nu_i}(x) \\
&= \frac{1-|\beta(\nu)|^2}{(1-\overline{\beta(\nu)}\beta(\Phi_{-\nu}(x))^2}\beta^i(\Phi_{-\nu}(x))\frac{1-|\nu_i|^2}{(1+\bar{\nu}_i x_i)^2} \\
\beta_\nu^{ki}(x) &= \frac{2(1-|\beta(\nu)|^2)}{(1-\overline{\beta(\nu)}\beta(\Phi_{-\nu}(x))^3}\beta^k(\Phi_{-\nu})\frac{1-|\nu_k|^2}{(1+\bar{\nu}_k x_k)^2}\beta^i(\Phi_{-\nu}(x))\frac{1-|\nu_i|^2}{(1+\bar{\nu}_i x_i)^2} \\
&\quad -\frac{1-|\beta(\nu)|^2}{(1-\overline{\beta(\nu)}\beta(\Phi_{-\nu}(x))^2}\beta^{ki}(\Phi_{-\nu}(x))\frac{1-|\nu_k|^2}{(1+\bar{\nu}_k x_k)^2}\frac{1-|\nu_i|^2}{(1+\bar{\nu}_i x_i)^2} \\
&\quad -2\delta_{ki}\frac{1-|\beta(\nu)|^2}{(1-\overline{\beta(\nu)}\beta(\Phi_{-\nu}(x))^2}\beta^i(\Phi_{-\nu}(x))\frac{1-|\nu_i|^2}{(1+\bar{\nu}_i x_i)^3}\bar{\nu}_i \\
\beta_\nu^{ki}(0) &= \frac{2}{(1-|\beta(\nu)|^2)^2}\beta^k(\nu)(1-|\nu_k|^2)(1-|\nu_i|^2)\beta^i(\nu) \\
&\quad -\frac{1}{1-|\beta(\nu)|^2}\beta^{ki}(\nu)(1-|\nu_k|^2)(1-|\nu_i|^2) \\
&\quad -2\delta_{ki}\frac{1}{1-|\beta(\nu)|^2}\beta^i(\nu)(1-|\nu_i|^2)\bar{\nu}_i.
\end{aligned}
$$

如果我们始终处于情形（i），那么每个 $\beta_\nu^{ki}(0)$ 都为零，因此对于每个 $i \neq k$，我们

get

$$\beta^{ki}(\nu) = 2\frac{\beta^i(\nu)\beta^k(\nu)}{1-|\beta(\nu)|^2}. \tag{56}$$

(56) 式的左边关于 ν 是全纯的，而右边不是。因此两边都必须是常数，且等于 $\beta^{ki}(0) = 0$。这意味着，对于除至多一个 i 值以外的所有值，$\beta^i(\nu)$ 恒等于零。但若 β 只依赖一个变量，比如 x_1，那么要么 $\beta^1(0)$ 的模小于 1，此时 $T(\beta) = \mathbb{T}^d$ 且 $bT(\beta)$ 为空；要么模大于或等于 1，此时 $T(\beta)$ 为空。

反之，假设我们处于情形（ii）。那么，除了前两个偏导数外，β的所有偏导数都为零，因此 β 只是 x_1, x_2的函数。此外，我们有

$$\gamma(\nu) = -\frac{\beta^1(\nu)}{\beta^2(\nu)}\frac{1-|\nu_1|^2}{1-|\nu_2|^2}$$

模为 1。但若令 $|\nu_1| = |\nu_2| = r$ 足够小，这就表明全纯函数 $\frac{\beta^1(\nu)}{\beta^2(\nu)}$ 在 $r\mathbb{T}^2$ 上模为 1。根据最大值原理，它在 0 的某个邻域内必为常数。但此时改变 ν^1 和 ν^2 的模会导致矛盾。因此，一般扰动下不会出现情形（ii）。

因此我们得出结论：F 不是常数，因而 X 有内部。

根据引理 4.4，X 中几乎处处的点都是某个 β_μ的连续点；由（54）可知这些值模为一，因此 β 在 X上几乎处处模为一。$\lhd$

我们暂时还不能直接对 β 应用定理 3.7，因为我们不知道 β 在 Y上是全纯的。引理 9.3 将帮助我们绕过这一困难。根据 Tworzewski 定理 3.11，我们知道 β 是纳什函数，因此存在某个不可约多项式 $P \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d][x_{d+1}]$，使得 $P(x, \beta(x)) = 0$。令 W为 X的内部。函数 β是其中一个分支，不失一般性，我们可以假设它是 f_1。乘积 $\beta f_2 \cdots f_m$可延拓为有理函数 g；若我们将 $P(x, z)$ 写为 $= \sum_{j=0}^m P_j(x)z^j$，则它是 $(-1)^m P_0/P_m$。根据引理 9.3，该函数在 $\mathbb{T}^d$的某个非空开子集上模为一，因此由于它是有理函数，我们得出 g 在 $\mathbb{T}^d$上几乎处处模为一。

现在我们对 $\Phi_b(V)$ 重复这一论证，其中 $b = (\mu, \alpha(\mu))$，且 μ 遍历 G'。我们得出，对于所有 μ 属于 G'，

$$\varphi_{\beta(\mu)}(\beta \circ \Phi_\mu)\varphi_{\beta(\mu)}(f_2 \circ \Phi_\mu) \cdots \varphi_{\beta(\mu)}(f_m \circ \Phi_\mu)$$

在 $\mathbb{T}^d$ 上几乎处处为有理的且模为一的，并且由于 Φ_μ 是 $\mathbb{T}^d$ 的有理微分同胚，函数

$$\varphi_{\beta(\mu)}(\beta)\varphi_{\beta(\mu)}(f_2)\cdots\varphi_{\beta(\mu)}(f_m) \tag{57}$$

is 在 $\mathbb{T}^d$ 上也几乎处处是有理的且模为一。令 $c=\beta(\mu)$；则 (57) 变为

$$g_c \;:=\; \varphi_c(\beta)\varphi_c(f_2)\cdots\varphi_c(f_m) \tag{58}$$

对于非空开子集 $\mathbb{D}$ 中的 c，在 $\mathbb{T}^d$ 上是有理的且几乎处处模为一，因此由恒等定理可知，对于所有 $\mathbb{D}$ 中的 c，结论均成立。

令 $E=\{\tau\in\overline{T(\alpha)}\colon\ \beta(\tau\cdot\lambda)$ 是一个有限布拉施克乘积$\}$。写作 $E=\cup_{k=1}^{\infty}E_k$，其中 E_k 是满足 $\beta(\tau\cdot\lambda)$ 的次数为 k 的所有 τ 组成的集合。若某个 E_k 的闭包有内部，则由 Rudin 定理 3.7 可得，β 是一个次数为 k 的有理函数。现在假设这种情况不会发生，那么由贝尔纲定理可知，E 的补集稠密。

我们可以找到任意接近 ω 的 τ，使其位于 $T(\alpha)$ 中，并且函数 $\beta(\tau\cdot\lambda)$ 不是有限布拉施克乘积；根据引理 4.4，我们知道该函数属于圆盘代数。因此存在某个点 $\zeta\in\mathbb{T}$，使得 $\beta(\tau\cdot\zeta)\;=c\in\mathbb{D}$。由于只要分子和分母不同时为零，$g_c$ 就是一个在 $\mathbb{T}^d$ 上模为一的有理函数，因此由 (58) 可知，必定存在一个介于 2 和 m 之间的 j，使得 $\beta(\tau\cdot\zeta)f_j(\tau\cdot\zeta)\;=1$。对于位于 $\mathbb{T}^d$ 中 ~~$\tau\cdot\zeta$~~ 的某个邻域内的点，我们可以重复这一论证。由此可得函数

$$(1-\beta\overline{f_2})\cdots(1-\beta\overline{f_m})\;=\;0 \tag{59}$$

在 $\mathbb{T}^d$ 中 $\tau\cdot\zeta$ 的某个开邻域上。由于 (59) 的左侧是实解析的，因此在所有函数都能解析延拓到的任意连通开集上，它必定为零。特别地，(59) 在 Z 上成立，因此由连续性可知，它在 X 上几乎处处成立。由于 β 在 X 上几乎处处模为一，因此我们有

$$(\beta-f_2)\cdots(\beta-f_m)\;=\;0$$

在 X 上几乎处处成立。因此，P 的判别式在 X 上消失，进而恒等于 0，这与 P 不可约的事实矛盾。□

引理 9.5. 假设存在 $\varepsilon>0$，使得对于所有 $a\in V\cap B(0,\ \varepsilon)$，若按 (15) 中的方式记

$$\tilde{\alpha}_j(y_1,\ldots,y_d)\;=\varphi_{a_j}\circ\alpha_j(\varphi_{-a_1}(y_1),\ldots,\varphi_{-a_d}(y_d)),$$

则存在一个开集 U，使得 $\mathbb{T}^d$ 中的 $U \cap bT(\tilde{\alpha}_{d+1})$ 非空且包含于 $T(\tilde{\alpha})$ 中。

那么 α_{d+1} 是一个有理函数，并且在 $\mathbb{T}^d$ 上几乎处处模为一。

Proof: 这由引理9.4和9.1得出。 □

集合 $\{\gamma \in \overline{\mathcal{M}} : \gamma(0) = 0\}$ 是形如（3）中的有理函数 κ_b 的集合，其中 $b_3 \neq 0$，且 $\{|b_1|, |b_2|, |b_3|\}$ 中最大的一个不大于另外两个之和。

引理 9.6。设 γ 是一个关于 d 个变量的有理函数，它在 $\mathbb{T}^d$ 上几乎处处模为一，并且满足 $\gamma(0) = 0$。假设存在一个开集 U，它包含于 $\mathbb{T}^d$，使得 $U \cap bT(\gamma) \neq \emptyset$，并且对于所有 $\omega \in U \cap bT(\gamma)$，存在 $\eta \in \mathbb{T}$，使得对于所有 $\lambda \in \mathbb{D}$，$\gamma(\omega \cdot \lambda) = \eta\lambda$。此外，假设对 γ 的所有小扰动，这一条件均成立。那么 $d = 2$ 且 $\gamma \in \mathcal{M}$。

Proof: 我们必须有 $d \geq 2$，因为如果 $d = 1$，假设 $\gamma(\omega\lambda) = \eta\lambda$就会违反假设1。记 $\omega = (\omega', \omega_d)$，其中 $\omega' \in \mathbb{T}^{d-1}$，并且 $\mathbb{C}^d \ni x = (x', x_d)$。对于 $c \in \mathbb{D}$，令

$$\gamma_c(x', x_d) = \varphi_{\gamma(0,c)} \circ \gamma(x', \varphi_{-c}(x_d)).$$

固定某个 ω'，使得 $(\omega', \omega_d) \in U \cap bT(\gamma)$。这些假设意味着，当 c 接近 0 时，存在 ω_c，$\eta_c \in \mathbb{T}$，使得若 $\omega \in U \cap bT(\gamma)$，则

$$\gamma_c(\omega' \cdot \lambda, \omega_c\lambda) = \eta_c\lambda \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{D}. \tag{60}$$

假设该结论成立，我们有

$$\gamma(\omega' \cdot \lambda, \varphi_{-c}(\omega_c\lambda)) = \varphi_{-\gamma(0,c)}(\eta_c\lambda), \tag{61}$$

并且 (61) 的右端关于 λ 是次数至多为 1 的有理函数。令 c 趋近于某个点 $\tau \in \mathbb{T}$。(61) 的左端收敛到 $\gamma(\omega' \cdot \lambda, \tau)$，而右端收敛到 λ 的线性分式变换或一个点，因此关于 λ 的次数为 1 或 0。

若 $d = 2$，这意味着 γ 在 x_1中的次数至多为一。若 $d > 2$，对 ω' 作微扰后 γ 的总次数至多为一（相对于 $x_1, \ldots, x_{d-1}$）。将 x_d 与 x_1 互换后重复上述辐角论证，可得 γ 分别关于每个变量的次数至多为一，且总次数至多为 2，其中至多有一个二次项。交换坐标后，这意味着 γ 的分子具有如下形式

$$A_1x_1 + \cdots + A_dx_d + x_1x_2.$$

根据定理 3.8，分母必须是它的反射，且在 0 处非零，这要求 $d = 2$。最后， $c = 0$ 处的条件 $\gamma(\omega\cdot\lambda) = \eta\lambda$意味着 $|A_1\omega_1 + A_2\omega_2| = 1$，因此 $\gamma \in \mathcal{M}$。

为证明该断言，注意到根据定理3.8，存在某个多项式P_c 使得

$$\gamma_c(x) \;=\; x^I \frac{P_c(x)}{\overleftarrow{P_c(x)}}.$$

P_c 的系数可以在 c 和 $\bar{c}$中解析地选取，因为 γ_c 在 c， $\bar{c}$ 中是解析的，而 P_c 由 γ_c的零点集确定，且只差一个常数。于是（60）变为

$$P_c(\omega'\cdot\lambda, \omega_c\lambda) \;=\; \eta_c\lambda\overleftarrow{P}_c(\omega'\cdot\lambda, \omega_c\lambda). \tag{62}$$

比较 λ的不同次幂的系数，（62）给出了一个联系 ω_c 和 η_c的方程组。由 λ 的一次幂得到的方程具有如下形式

$$E_c\omega_c + F_c \;=\; \eta_c,$$

其中 E_c和 F_c在 c， $\bar{c}$中是解析的。 ω_c， η_c为模为一的这一事实意味着，当 c接近零时，二次方程存在一个模为一的解 ω_c

$$(E_c\bar{F}_c)\omega_c^2 + (|E_c|^2 + |F_c|^2 - 1)\omega_c + (\bar{E}_cF_c) \;=\; 0. \tag{63}$$

有两种可能：

（i）由（62）得到的方程中有一个是关于 ω_c的独立条件。

(ii) 对 (62) 中 λ 的各次幂进行比较所得的所有方程均可化为 (63)。

若情形 (i) 成立，则通过欧几里得算法，我们可以得到一个关于 ω_c 的实解析系数线性方程。由于该方程在 c 附近有模为一的解，因此它对所有 c都有模为一的解。

若情形 (ii) 成立，注意到 (63) 的两个根的乘积关于 c 是实解析的，且模为一。因此，其中一个根必定属于 $\mathbb{D}$，这正是所需的结论。□

引理 4.5。 假设 $\omega \in bT(\alpha_j)\overline{\cap bT(\alpha)}$ 并且 $\omega \in \cap_{d<\ell\le N,\ \ell\neq j}T(\alpha_\ell)$。那么 $\alpha_j \in \mathcal{M}$。

Proof: 不妨设， $j = d + 1$。扰动至 $\tilde{\alpha}$ 后，我们将扰动 $bT(\alpha_{d+1})$，而对于小扰动，它将保持在 $\cap_{j=d+2}^{N}T(\tilde{\alpha}_j)$ 中。因此根据引理 9.5，我们得出 α_{d+1} 在$\mathbb{T}^d$上几乎处处为有理的且模为一的，并满足引理 9.6 第一句中的假设。根据引理

9.1，接下来的两句话也成立。因此，$d = 2$且 α_{d+1} 属于 $\mathcal{M}$。这意味着 $\alpha_{d+1} = [\tau;\ A,\ B]$ 其中 1，$|A|$，$|B|$ 满足三角形不等式，但可能不是严格不等式。

若 $|A|+|B| = 1$，则 $\overline{T(\alpha_{d+1})} = \mathbb{T}^d$，因此它没有边界。若 $|A| = 1+|B|$（反之亦然），则 $T(\alpha_{d+1})$ 为空。因此必有 (1，$|A|$，$|B|$) 是三角形的，且 α_{d+1} 属于 $\mathcal{M}$。□

10 引理 4.6 的证明

引理 10.1。设 α、β 属于 $\mathcal{M}$，且对所有小扰动，我们都有 $T(\tilde{\alpha}) = T(\beta)$。那么 α 是 β 的模为一的倍数。

Proof: 假设 $\alpha = [\tau_1;\ A,\ B]$ 且 $\beta = [\tau_2;\ C,\ D]$. $T(\alpha)$ 的端点是 $|A\omega + B| = 1$ 的解，也就是方程的根

$$A\bar{B}\omega^2 + [|A|^2 + |B|^2 - 1]\omega + \bar{A}B \ = \ 0.$$

若 $T(\alpha)$ 和 $T(\beta)$ 有相同的端点，则必有

$$\frac{|A|^2 + |B|^2 - 1}{A\bar{B}} \ = \ \frac{|C|^2 + |D|^2 - 1}{C\bar{D}} \tag{64}$$

$$\frac{\bar{A}B}{A\bar{B}} \ = \ \frac{\bar{C}D}{C\bar{D}} \tag{65}$$

我们可以将 (65) 重新表述为：A/B 是 C/D的实数倍。

现在令 $a = (a_1, a_2, \alpha(a_1, a_2)\ \beta(a_1, a_2))$，并令 $\tilde{\alpha} = \varphi_{a_3} \circ \alpha(\varphi_{-a_1}, \varphi_{-a_2})$ 和 $\tilde{\beta} = \varphi_{a_4} \circ \beta(\varphi_{-a_1}, \varphi_{-a_2})$。于是根据 (16)，$A/B$ 变为 $\frac{1-|a_1|^2}{1-|a_2|^2}\frac{\alpha^1}{\alpha^2}$，其~~中$\alpha^i$ 是 a~~处的 i^{th} 偏导数。经过这次变量替换后，条件 (65) 变为：α^1/α^2 是 β^1/β^2的实数倍。

现在我们将情形特化为 $\beta = \kappa = [1;\ -1, -1]$，根据定理 2.7，这样做是可行的。于是 (65) 表明 A/B 是实数，而 (64) 推出 $|A|^2+|B|^2 = 1 \pm |AB|$。我们有

$$\frac{\alpha^1(x, y)}{\alpha^2(x, y)} \ = \ \frac{A + (|A|^2 - |B|^2 + 1)y + \bar{A}y^2}{B + (|B|^2 - |A|^2 + 1)x + \bar{B}x^2}$$

对于所有足够小的 x, y，这必须是对应于 κ 的表达式的实数倍 r，即

$$\frac{\kappa^1(x, y)}{\kappa^2(x, y)} \ = \ \frac{1 - y + y^2}{1 - x + x^2}.$$

交叉相乘，得到

$$[A+(|A|^2-|B|^2+1)y+\bar{A}y^2][1-x+x^2] \;=\; r\,[B+(|B|^2-|A|^2+1)x+\bar{B}x^2][1-y+y^2].$$

比较系数可知 $A = rB = A$，因此 A 和 B 都是实数，并且 $A^2 - B^2 + 1 = -rB = r(B^2 - A^2 + 1)$。若 $r = 1$，则得到 $A = -1 = B$。否则，由等式 $(r^2 - 1)B^2 + 1 = r((1 - r^2)B^2 + 1)$ 可得 $B^2 = \frac{1}{(1+r)^2}$，将其代入等式 $(r^2 - 1)B^2 + 1 = -rB$，便得到 $B = \frac{-2}{1+r}$，这与已知矛盾。□

引理 4.6。设 $d = 2$。设 $\ell \geq d + 2$。假设存在 $\varepsilon > 0$，使得对所有 $a \in V \cap B(0, \varepsilon)$，若如(15)中所示写成

$$\tilde{\alpha}_j(y_1, \ldots, y_d) \;= \varphi_{a_j} \circ \alpha_j(\varphi_{-a_1}(y_1), \ldots, \varphi_{-a_d}(y_d)),$$

则 $bT(\tilde{\alpha}_{d+1}) \cap \cdots \cap bT(\tilde{\alpha}_\ell) \cap T(\tilde{\alpha}_{\ell+1}) \cap \cdots \cap T(\tilde{\alpha}_N)$ 非空。于是，α_{d+1}、……、α_ℓ 属于 $\mathcal{M}$，并且它们构成一个边族。

Proof. 证明：由于 T 中的 $+1$ 和 -1 对称，我们可以直接应用引理 9.5，得出每个 α_j 在 $\mathbb{T}^2$ 上都是有理的且模为一的。根据引理 9.1 和引理 9.6，它们都属于 $\mathcal{M}$。由于 $bT(\alpha_j) \neq \emptyset$，它们必定都位于 $\mathcal{M}$ 中。

令 $\omega \in b\overline{T(\alpha_{d+1})} \cap \cdots \cap b\overline{T(\alpha_\ell)} \cap T(\alpha_{\ell+1}) \cap \cdots \cap T(\alpha_N)$。存在模为一的 η_j，使得

$$\alpha_j(\omega_1\lambda, \omega_2\lambda) \;=\; \eta_j\lambda, \qquad d+1 \leq j \leq \ell.$$

对于任意 $d+1 \leq i \neq j \leq \ell$，定义 γ_i 如下：$\gamma_i(x_1,\ x_j) = \alpha_i(x_1,\ \alpha_j^{-1}(x_1,\ x_j))$。于是

$$\begin{aligned}\gamma_i(\omega_1\lambda, \eta_j\lambda) &= \alpha_i(\omega_1\lambda, \alpha_j^{-1}(\omega_1\lambda, \eta_j\lambda)) \\ &= \alpha_i(\omega_1\lambda, \omega_2\lambda) \\ &= \eta_i\lambda.\end{aligned}$$

根据假设，这对小扰动也成立，因为 $\tilde{\gamma}_i(x_1,\ x_j) = \tilde{\alpha}_i(x_1,\ \tilde{\alpha}_j^{-1}(x_1,\ x_j))$。由于 γ 几乎处处为模为一的，根据引理 9.6，每个 $\gamma_i \in \mathcal{M}$。类似地，$\alpha_i(\alpha_j^{-1}(x_j,\ x_2)\ x_2) \in \mathcal{M}$，因此根据定理 2.12，要么集合 $\{\alpha_{d+1}, \ldots, \alpha_\ell\}$ 构成一个边族，要么存在某个函数（记作 α_{d+1}），使得对每个 $d + 2 \leq n \leq \ell$，都有 $D_{\alpha_{d+1}} \subseteq D_{\alpha_n}$。但后一种情形会违背假设 2，因为我们只需去掉那些函数，就能得到一个维数更低的 Carath´eodory 集合。□

11 引理4.9的证明

引理 4.9。设 $d \geq 3$。设 $\ell \geq d+2$。假设存在 $\varepsilon > 0$，使得对所有 $a \in V \cap B(0,\ \varepsilon)$，若按(15)中的方式写作

$$\tilde{\alpha}_j(y_1, \ldots, y_d) \ = \varphi_{a_j} \circ \alpha_j(\varphi_{-a_1}(y_1), \ldots, \varphi_{-a_d}(y_d)),$$

那么 $bT(\tilde{\alpha}_{d+1}) \ldots, bT(\tilde{\alpha}_\ell)$ 在某个点处都共享 $b_{d-1}T(\alpha)$，该点位于 $T(\tilde{\alpha}_{\ell+1}) \cap \cdots \cap T(\tilde{\alpha}_N)$。于是 $\alpha_{d+1}, \ldots, \alpha_\ell$ 都属于 $\mathcal{M}$，且它们都依赖于同一对变量。此外，它们构成一个边族。

Proof: 选取两个函数 $\alpha_j, \alpha_{j'}$，使其满足 j, j' 介于 $d+1$ 和 ℓ 之间。根据引理 9.5，它们都是有理的，且在 $\mathbb{T}^d$ 上几乎处处模为一；由引理 9.1 和引理 9.6，我们可以得出它们实际上都属于 $\mathcal{M}$，正如我们在引理 4.6 的证明中所论证的那样。

如果 α_j 和 $\alpha_{j'}$ 不依赖于同一对变量，那么 $bT(\alpha_j) \cap bT(\alpha_{j'})$ 的维数将为 $(d-2)$，因此 $bT(\alpha_j)$ 和 $bT(\alpha_{j'})$ 不可能在点 $\omega \in bT(\alpha_j) \cap bT(\alpha_{j'})$ 处共享 $b_{d-1}T(\alpha)$。

因此我们知道，所有函数 α_j 都依赖于同一对变量。现在我们处于与第 10 节相同的情形。用于证明引理 4.6 的相同辐角现在表明，$\{\alpha_{d+1}, \ldots, \alpha_\ell\}$ 构成一个边族。□

12 引理4.13的证明

引理 12.1. 设 $\alpha_j = [1;\ A, B]$，设 $\omega \in bT(\alpha_j(x_1, x_2))$，并设 $\omega_j = A\omega_1 + B\omega_2$。那么，存在一个方向，可以沿该方向扰动 a_1，同时保持 $a_2 = 0 = \cdots = a_d$，使得在 ω_2 保持不变的情况下，ω_1 和 ω_j 发生移动。

Proof: 由于 $T(\alpha_j)$ 是 $\mathbb{T}$ 不变的，我们可以假设 $\omega_2 = 1$。我们有$A\omega_1 + B = \omega_j$。现在进行一个小扰动 Φ_a，其中只有 $a_1 \neq 0$。$\tilde{}$ $\tilde{}$那么 $bT(\tilde{\alpha}_j)$ 将包含点 $(\tilde{\omega}_1,\ 1)$，其中 $|A\tilde{\omega}_1 + B| = 1$，而 ω_j将$\tilde{}$ $\tilde{}$变为 $\tilde{\omega}_j = A\tilde{\omega}_1 + B \in \mathbb{T}$。我们想证明 $\tilde{\omega}_1$ 必定会移动。

假设情况并非如此。那么，对于 $\mathbb{D}$ 中的所有 λ，$\tilde{\alpha}_j(\omega_1\lambda,\ \lambda) = \tilde{\omega}_j\lambda$。这意味着

$$\alpha_j(\varphi_{-a_1}(\omega_1\lambda), \lambda) = \varphi_{-\alpha_j(a_1,0)}(\tilde{\omega}_j\lambda). \tag{66}$$

令 $\tilde{a}_j$ for $\alpha_j(a_1,0)$。展开后，(66) 变为

$$\frac{(A+\lambda)(\omega_1\lambda + a_1) + B\lambda(1 + \bar{a}_1\omega_1\lambda)}{(\bar{A}\lambda + 1)(1 + \bar{a}_1\omega_1\lambda) + \bar{B}(\omega_1\lambda + a_1)} \ = \ \frac{\tilde{\omega}_j\lambda + \tilde{a}_j}{1 + \overline{\tilde{a}_j}\tilde{\omega}_j\lambda}. \tag{67}$$

(67) 左端的分子 $p(\lambda)$ 和分母 $q(\lambda)$ 因此必须对每个 a_1 共享一个根。众所周知，两个二次多项式$E_1\lambda^2+F_1\lambda+G_1$ 和 $E_2\lambda^2+F_2\lambda+G_2$ 共享一个根，当且仅当它们的结式为零，这意味着

$$(G_1E_2 - G_2E_1)^2 = (E_1F_2 - E_2F_1)(F_1G_2 - F_2G_1) \tag{68}$$

在我们的情形中

$$p(\lambda) = (1 + \bar{a}_1B)\omega_1\lambda^2 + (A\omega_1 + B + a_1)\lambda + Aa_1,$$

$\bar{}$ $\bar{}$ $\bar{}$和 $E_2 = \omega_1G_1$， $F_2 = \omega_1F_1$， $G_2 = \omega_1E_1$，因此要验证 (68)，我们需要验证

$$\begin{aligned}&[|A|^2|a_1|^2 - |1 + \bar{a}_1B|^2]^2\\ &\quad\stackrel{?}{=} \left|(1 + \bar{a}_1B)\omega_1(\bar{A}\bar{\omega}_1 + \bar{B} + \bar{a}_1) + \bar{A}\bar{a}_1(A\omega_1 + B + a_1)\right|^2\end{aligned}$$

要看出这不可能恒成立，考察 a_1中的四阶项。左边没有关于 $a_1^2|a_1|^2$的项，而右边 $a_1^2|a_1|^2$ 的系数是 $\bar{A}\bar{B}\bar{\omega}_1$，它不可能为零。

交换 j 和 1 的角色可得，当 a_1 变化且 a_2 保持不变时， ω_j 也必须变化。□

引理 4.13. 设 α_ℓ 和 $\alpha_{\ell'}$ 属于 $\mathcal{B}$。那么， α_ℓ 和 $\alpha_{\ell'}$ 要么依赖于同一对变量，要么依赖于两对互不相交的变量。

假设有函数 $\alpha_j(x_1, x_2)$和 $\alpha_{j'}(x_1, x_3)$，且二者都属于 $\mathcal{B}$。按引理 ??取 m，其中 α_m 属于 $\mathcal{M}$，且 m是 x_1 和 x_2的函数；并使得 $\{x_2, x_3, \dots, x_d, x_m\}$ 是一个良好参数化，对应的函数为 β。

考虑

$$\beta_{j'}(x_2, \dots, x_m) \;=\; \alpha_{j'}(\beta_1(x_2, x_m), x_3).$$

这是一个关于 3 个变量的有理函数，当 $|x_2| = |x_3| = |x_m| = 1$ 时模为一。由于我们有一个良好的 $\{x_2, x_3, \dots, x_d, x_m\}$ 参数化，因此知道 $T(\beta)$ 非空。我们声称 $T(\beta_{j'}) \neq \mathbb{T}^d$。事实上，由于 $\alpha_{j'}$ 和 β_1 属于 $\mathcal{M}$，我们知道 $|\alpha_{j'}^1| + |\alpha_{j'}^3| > 1$ 和 $|\beta_1^2| + |\beta_1^m| > 1$。因此

$$|\beta_{j'}^2| + |\beta_{j'}^3| + |\beta_{j'}^m| = |\alpha_{j'}^1|(|\beta_1^2| + |\beta_1^m|) + |\alpha_{j'}^3| > 1,$$

因此 $\overline{T(\beta_{j'})} \neq \mathbb{T}^d$。

假设我们知道 $bT(\beta_{j'})$ 共享 $b_{d-1}T(\beta)$。那么，我们可以利用引理 4.4 和 9.1 来证明，引理 9.6 的假设对于 $\beta_{j'}$ 成立

以及小扰动。引理的结论将表明， $\beta_{j'}$ 是一个关于两个变量的函数，这就产生了矛盾。

我们无法完全做到这一点，但经过自同构后就可以。我们的辐角只取决于 $T(\alpha)$，因此为方便记号起见，不妨假设对于每一对 $(x_i,\ x_j)$，至多存在一个函数 $\alpha_{ij}(x_i,\ x_j) = \alpha_{ji}(x_i,\ x_j)$，其中 $\alpha_{ij} = [1;\ A_{ij},\ B_{ij}]$。令

$$\Delta := T_0(V) \cap \overline{\mathbb{D}}^N = \{y \in \overline{\mathbb{D}}^N : A_{ij}y_i + B_{ij}y_j = y_{ij}\}.$$

（回顾（19）。）在引理 4.13 的其余证明中，任何记作ω_i 的数都是模为一的，任何记作 z_i 的数都属于 $\mathbb{D}$，而任何记作 $\zeta_i \in \mathbb{D}$的数（无论下标为何）都是如此。我们用 $*$ 表示其他项属于 $\mathbb{D}$，用 $+$表示它们属于 $\mathbb{D}$。集合 Δ中的任意点，即 0 处d维切空间与 $\mathbb{D}^N$的交集，都由其前d个坐标唯一确定。对于 $\Delta\cap(\mathbb{T}^d\times\mathbb{D}^{N-d})$中的点 $(\omega_1, \ldots\ldots, \omega_d,\ \zeta_{ij})$，坐标$\zeta_{ij}$ 仅取决于 ω_i 和 ω_j。

由于 α_{12}是边界的[2]，我们有一个点 $\omega^{(0)} = (\omega_1^{(0)},\ \ldots\ldots,\ \omega_d^{(0)},\ \omega_{12}^{(0)},\ *)$ 位于Δ中。在 $\mathbb{T}$中移动 ω_3，保持其他 $d-1$ 坐标介于 1 和 d之间不变，直到另一个坐标变为模为一的。

情形：第一个变为模为一的这样的坐标是 ω_{13} 或 ω_{23}。我们可以假设只有一个新的坐标变为模为一的。

事实上，根据引理 12.1，通过对 V施加一个小的 M¨obius 扰动，我们可以假设 ζ_{13} 和 ζ_{23} 不会同时变为模为一的，因为对 a_1 的小扰动会影响 ω_{13}，但不会影响 ω_{23}。同样，如果另一个点 ζ_{3j} 也同时变为模为一的，那么我们可以扰动 ω_j，使新的模小于 1。由于所有其他项 z_{kj} 对于 $k > 3$ 都在 $\mathbb{D}$中，因此对ω_j作小扰动时，它们仍会留在那里。

因此，我们可以假设有一个点 $\omega' = (\omega_1',\ \ldots,\ \omega_d',\ \omega_{12}',\ \omega_{13}',\ *)$ 位于 Δ 中。此外，根据构造，我们有 $\pi_{1,\ldots,d}\omega' \in T(\alpha)$。进行变量替换，得到$\beta(x_2,\ \ldots,\ x_d,\ x_{12})$。

我们希望证明 $\pi_{2,\ldots,d,\ 12}\omega' \in T(\beta)$。根据引理 ?? （取 $m = 12$），点 $\omega^{(0)}$ 位于 $bT(\beta)$ 中。我们有

$$\beta_{13}(x_2, x_3, x_{12}) = \alpha_{13}(\beta_1(x_2, x_{12}), x_3),$$

以及 $\beta_{13}^3 = \alpha_{13}^3 \neq 0$。由于 $\zeta_1 = C_2\omega_2 + D_{12}\omega_{12}$，其中 $\beta_1 = [1; C_2, D_{12}]$，圆周上存在一个方向，使得沿该方向扰动 ω_2 时，在该

[2]注意，对于 $i=1$ 和 $j=2$，α_{12} 和 ω_{12} 分别表示 α_{ij} 和 ω_{ij}。

方向上会使 $|\zeta_1|$ 减小。因此，如果我们沿该方向将 ω_{12} 旋转一小段，然后移动 ω_3，使其仍处于 $bT(\beta_{13})$ 中，就会得到一个点 $\omega'' = (z_1, \omega_2, \ldots, \omega_d, \omega_{12}, \omega_{13}, *) \in bT(\beta) \cap bT(\beta_{13})$。现在我们有两个自由度：如果分别独立地扰动 ω_2 和 ω_{12}（在 ω'' 中），就能找到对 ω_3 的适当扰动，使得 ω_{13} 仍然模为一，而原本属于 $\mathbb{D}$ 的所有其他项仍留在其中。现在可以应用引理 9.6，得出 $\beta_{13}(x_2, x_3, x_{12})$ 实际上是两个变量的函数，由此便得到我们所需的矛盾。

情形：从 $\omega^{(0)}$ 开始并旋转 ω_3 时，第一个变为模为一的坐标既不是 ω_{13}，也不是 ω_{23}。那么它就是另一个坐标，比如说 ω_{34}。同样，根据引理 12.1，我们可以假设不会同时遇到两个模为一的数。继续旋转 ω_3，但现在也旋转 ω_4，以使 ω_{34}（它只取决于 ω_3 和 ω_4）保持模为一。我们继续旋转，直到再次遇到一个模为一的数；可以假设它是 ω_{35} 或 ω_{45}。无论是哪一种，现在我们都有两个模为一的数，且它们有一个共同坐标，比如说 ω_{34} 和 ω_{35}。现在重复之前的论证，但将 x_1 替换为 x_3，作为要消去并由 x_{34} 替代的变量。□

引理 4.14 的证明

引理 *13.1.* 设 α、$\beta \in \mathcal{M}$，并且 $W = \{(x, y, \alpha(x, y)\ \beta(x, y))\} \cap \mathbb{D}^4$。假设 $T(\alpha)$ 与 $T(\beta)$ 重叠，二者互不包含，并且 $T(\alpha)$ 和 $T(\beta)$ 的四个端点互不相同。那么 W 在 *0* 处不是 *Carathéodory* 集合，也就是说，对所有 $\varepsilon > 0$，都存在 $P \in W \cap B(0, \varepsilon)$，使得 $d_W(P, 0) > d_{\mathbb{D}^4}(P, 0)$。

ˆPROOF: 我们可以假设 $\alpha = [1;\ A, B]$ 和 $\beta = [1;\ C, D]$，并且 $T(\alpha) =$ ˆ (ω_1, ω_3)，而 $T(\beta) = (\omega_2, \omega_4)$，且 $\arg(\omega_1) < \arg(\omega_2) < \arg(\omega_3) < \arg(\omega_4)$。圆 $C_1 = \{\zeta :\ |A + B\zeta = 1|\}$ 与单位圆交于 ω_1 和 ω_3。圆 $C_2 = \{\zeta :\ |C + D\zeta = 1|\}$ 与单位圆交于 ω_2 和 ω_4。因此，C_1 和 C_2 必有两个交点，一个位于 $\mathbb{D}$，另一个位于$\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$。令 ζ 为 $\mathbb{D}$ 中的点，其中

$$|A + B\zeta| = 1 = |C + D\zeta|.$$

设 $A + B\zeta = \omega_\alpha$ 和 $C + D\zeta = \omega_\beta$。定义

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{3}(x_1 + \bar{\omega}_\alpha x_3 + \bar{\omega}_\beta x_4).$$

当 t 非常接近 0 时，注意到

$$\begin{aligned} f(t,\zeta t,\alpha(t,\zeta t),\beta(t,\zeta t)) &= f(t,\zeta t,\omega_\alpha t,\omega_\beta t)+O(t^2)\\ &= t+O(t^2). \end{aligned}$$

因此，如果我们能证明 $F(W)\subsetneq\mathbb{D}$，那么根据引理 8.2，结论就成立。

假设 $F(W)\supseteq\mathbb{T}$。那么对于每个 $x_1\in\mathbb{T}$，都存在某个 x_2，使得

$$\alpha(x_1,x_2)=\omega_\alpha x_1,\quad \beta(x_1,x_2)=\omega_\beta x_1.$$

So

$$\alpha^{-1}(x_1,\underline{\omega_\alpha x_1})=\beta^{-1}(x_1,\underline{\omega_\beta x_1}).$$

我们有

$$\alpha^{-1}(x_1,\underline{\omega_\alpha x_1})=\left(\frac{\bar{B}\omega_\alpha}{B}\right)x_1\, m_{\frac{B\bar{\omega}_\alpha}{\bar{B}}\zeta}(x_1):=g(x_1),$$

一个二次布拉施克乘积。

现在我们交换 x_1 和 x_2 的角色，并找到一个点 $\zeta'\in\mathbb{D}$，使得 $|A\zeta'+B|=1=|C\zeta'+D|$。我们得到模为 1 的常数 η_α，η_b 以及一个在 0 处取值为零的二次布拉施克乘积 h，使得 ∂W 包含

$$\Gamma_2:=\{(h(x_2),x_2,\eta_\alpha x_2,\eta_\beta x_2):x_2\in\mathbb{T}\}$$

以及

$$\Gamma_1:=\{(x_1,g(x_1),\omega_\alpha x_1,\omega_\beta x_1)x_1\in\mathbb{T}\}.$$

为方便起见，记 $g(x)=xb(x)$ 和 $h(x)=xc(x)$，其中 b,c 的次数为 1。交集 $\Gamma_1\cap\Gamma_2$ 发生在 $x=h(g(x))$ 时，也就是

$$1=b(x)c(g(x)). \tag{69}$$

(69) 的右侧是一个次数为 3 的布拉施克乘积，因此有三个互不相同的解：ξ_1,ξ_2,ξ_3。令 $\upsilon_j=g(\xi_j)=\xi_j b(\xi_j)$。由于 b 的次数为 1，我们得到这三个值

$$b(\xi_j)=\frac{\upsilon_j}{\xi_j} \tag{70}$$

彼此不同。我们有

$$\alpha(\xi_j,\upsilon_j)=\omega_\alpha\xi_j=\eta_\alpha\upsilon_j \tag{71}$$

$$\beta(\xi_j,\upsilon_j)=\omega_\beta\xi_j=\eta_\beta\upsilon_j. \tag{72}$$

方程（71）表明

$$\frac{\upsilon_j}{\xi_j} = \omega_\alpha \bar{\eta}_\alpha, \tag{73}$$

并且，除非 $(\xi_j,\ \upsilon_j)$ 是 α 的一个奇点，否则这一结论成立；当 $-1 =$ $B\xi_j + A\upsilon_j$ 时会出现这种情况，也就是说，只有在以下情况下才不成立

$$A + B\upsilon_j\bar{\xi}_j = -\bar{\upsilon}_j. \tag{74}$$

由于 (70) 中的三个值互不相同，它们中至多只有一个等于 $\omega_\alpha\bar{\eta}_\alpha$，所以其中两个必定属于 $bT(\alpha)$，并满足 (74)。

同理，其中两个必定属于 b $\hat{T}(\beta)$，这意味着

$$C + D\upsilon_j\bar{\xi}_j = -\bar{\upsilon}_j. \tag{75}$$

因此我们得出结论：对于某个 $j \in \{1,2,3\}$，方程 (74) 和 (75) 均成立，因而 $bT(\alpha) \cap bT(\beta)$ 非空。这是一个矛盾，因此，要么 F，要么交换 x_1 和 x_2 后得到的类似函数，必须将 W 映入 $\mathbb{D}$ 的一个真子集。□

引理 *13.2.* 设 α、$\beta \in \mathcal{M}$，并设 $W = \{(x, y, \alpha(x, y)\ \beta(x, y))\} \cap \mathbb{D}^4$。假设 $T(\alpha)$ 和 $T(\beta)$ 相交于一点，但它们不是边对。那么 W 不是 *0* 处的 *Carathéodory* 集，也就是说，对于所有 $\varepsilon > 0$，都存在 $P \in W \cap B(0, \varepsilon)$，使得 $d_W(P, 0) > d_{\mathbb{D}^4}(P, 0)$。

Proof: 我们按照引理 13.1 的证明进行，但现在可以找到一个点 $\zeta \in \mathbb{T}$，使得 $|A + B\zeta| = 1 = |C + D\zeta|$。如上所述，这样便可找到一个 j，使得 (74) 和 (75) 均成立。这意味着 α 和 β 在 $\upsilon_j\xi_j$ 处构成一对边，产生矛盾。□

引理 4.14. 假设对于某一对 $i, j \in \{1, \ldots, d\}$，集合 $\mathcal{E} = \{\alpha_k \in \mathcal{B} :\ \alpha_k$ 是关于 $x_i, x_j\}$ 的函数，且该集合非空。那么 $\mathcal{E}$ 中的函数构成一个边族。

Proof: 为明确起见，我们固定一对变量，例如 x_1 和 x_2，并令 $\mathcal{B}'$ 为 $\mathcal{B}$ 中所有仅依赖于变量对 (x_1, x_2) 的函数所组成的集合。令 I' 为 $\mathcal{B}'$的指标集，则 $\alpha_\ell \in \mathcal{B}'$ 当且仅当 $\ell \in I'$。

对于每个 $\ell \in I'$，由于它与 $b_{d-1}T(\alpha)$ 共享，因此存在 $\mathbb{T}^d$ 中的一个开集 U，使得 $U \cap bT(\alpha_\ell) = U \cap bT(\alpha)$ 非空。我们可以假设 U 在 $\mathbb{T}$ 的作用下保持不变。下面展开说明这些陈述。我们知道$\alpha_\ell \in \mathcal{M}$，因此 $bT(\alpha_\ell) = bT(\alpha_\ell)$，而是否属于该集合仅取决于比值

ω_1： ω_2。因此，如果 $\omega = (\omega_1$： ω_2： $\ldots\omega_d) \in U \cap bT(\alpha_\ell)$ 且 $\alpha_k \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}'$，那么$\omega \in T(\alpha_k)$。

$\alpha_\ell\ x_1\ x_2 = \{\omega_2 \mid \alpha_\ell^1 0 + \omega_2 \alpha_\ell^2 0 \mid < 1\}$ $\cap_{\ell \in I'} T\ \alpha_\ell\ x_1 \hat{}\ x_2$

对于 $\alpha_\ell \in \mathcal{B}'$，$\alpha_\ell$ 只取决于 x_1 和 x_2，因此我们定义

(，)) : ( ) ( ) 交集 ˆ((，)) 是一个非空开弧（$\omega_2^\bullet$，$\omega_2^\dagger$） $\subsetneq \mathbb{T}$。

不失一般性，我们可以假设在 $\mathcal{B}'$ 中存在某个最小包络函数 α_j，它在第一坐标为 1、第二坐标为 $\omega_2^\bullet$ 的点处与 $b_{d-1}T(\alpha)$相交（它必定是 $\omega_2^\bullet$ 或 $\omega_2^\dagger$，而 $\omega_2^\dagger$ 的情形只需作显而易见的修改即可处理）。重新标记各指标，使得 $I' = \{d+1, \ldots, p, p+1, \ldots q\}$；其中，若 $d+1 \le \ell \le p$，则 $bT(\alpha_\ell)$在（1： $\omega_2^\bullet$: ...）处与 $b_{d-1}T(\alpha)$ 相交；若 $p+1 \le \ell \le q$，则 $bT(\alpha_\ell)$ 在（1： $\omega_2^\bullet$: ...）处不与 $b_{d-1}T(\alpha)$相交，但在（1： $\omega_2^\dagger$: ...）处与其相交。我们要证明，要么 $p = q$，要么 $\mathcal{B}'$ 中的所有函数在另一个公共边缘点处相交，并在那里构成一个边族（如图 1 所示）。

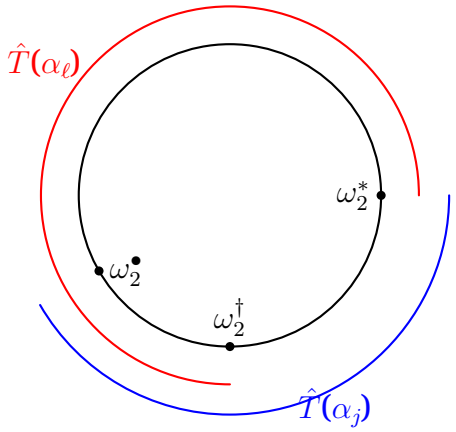

图 1：具有相反定向的边对

ˆ 情形 1：假设 α_j 是一个最小包络函数，且 $T(\alpha_j)$ 是弧 ˆ$(\omega_2^\bullet, \omega_2^\star) \supsetneq T(\alpha)$。根据引理 13.1 和 13.2，若 $p+1 \le \ell \le q$，则 α_ℓ 和 α_j 必须在 ω_2^* 处构成一对边。但对于 $d+1$ 与 p 之间的任意 j'，$\alpha_{j'}$ 也必须与 α_ℓ 构成一对边，而且这也必须发生在 ω_2^* 处。因此，$\mathcal{B}'$ 在 ω_2^* 处构成一个边族。

情形 2：假设 α_m 是一个最小包络函数，且 $\{d+1, \ldots, q\}$ 中任意其他的 ℓ，我们必须有 α_ℓ 和 α_m 构成一个边对。因此，可能存在某个 α_j，在 $\omega_2^\bullet$ 处与 α_m 构成边对；还存在另一个 α_ℓ，与它构成一条边

对，在 $\omega_2^{\dagger}$ 处与它构成边对；而且由于 α_ℓ 和 α_j 本身构成一个边对，因此该处必为 $\omega_{2^\circ}^*$。接着，根据定理 2.12， α_ℓ 和 α_j 在 D_{α_m} 上都被 1 所界，这意味着在 ℓ 和 j 坐标下，我们有以其他坐标为底的图形。这与假设 2 相矛盾。□

14 引理4.16的证明

回顾一下，我们选择了坐标，使得界定函数 $\mathcal{B}$ 由下式给出

$$\mathcal{B} = \bigcup_{j=d+1}^{d+m_2} \mathcal{E}_j = \{\alpha_\ell : d+1 \leq \ell \leq m_3\},$$

$\mathcal{B}'$ 是一个可能更大的集合 $\cup\mathcal{E}_j'$，它包含每个 $\mathcal{E}_j$ 对应的完整边族，并且

$$G = \bigcap_{\alpha_\ell \in \mathcal{B}'} \{x \in \mathbb{D}^d : |\alpha_\ell(x)| < 1\}.$$

ˆ 对于 $\alpha = [\tau;\ A,\ B] \in \mathcal{M}$，定义 $\partial_+ T(\alpha)$ 为 $_b\hat{}T(\alpha)$ 中唯一满足以下性质的点 τ：对于正且充分小的 ε， $\tau e^{i\varepsilon} \in \hat{}T(\alpha)$；ˆ ˆ ˆ 并令 $\partial_- T(\alpha)$ 为 $bT(\alpha)$ 中的另一个点。若将弧 $T(\alpha)$ ˆ ˆ 按逆时针方向定向，则 $\partial_+ T(\alpha)$ 是该弧的起点，而 $\partial_- T(\alpha)$ 是终点。设 $\mathcal{L}$ 是一个罗马曲面，由下式给出

$$\mathcal{L} = \{(x_1, x_2, \alpha_k(x_1, x_2)) : 3 \leq k \leq m\}. \tag{76}$$

令每个 $\alpha_k = [\tau_k;\ A_k,\ B_k]$。由于它们构成一个边族，因此存在酉模 ω, η，使得 $A_k + B_k\omega = \eta,\ \ \forall k$。假设对每个 k，都有 $\omega \in \partial_+ T(\alpha_k)$。ˆ 那么，对每个莫比乌斯自同构， $T(\tilde{\alpha}_k)$ 都是一条具有相同起点的弧。因此，它们的交集 $\cap_{k=3}^m T(\tilde{\alpha}_k)$ 只是最小的那条弧，而我们知道它永不为空。所以 (x_1, x_2) 是 V 上每一点处的良好参数化。

ˆ ˆ**引理 14.1**。设 $\alpha = [\tau;\ A、\ B]$ 属于 $\mathcal{M}$。设 $\omega \in bT$（α）。那么 $\omega = \partial_+ T$（α）¯当且仅当 $\arg(AB\omega) \in [0, \pi)$。

Proof: 这由下式可得

$$|A + B\omega e^{i\varepsilon}|^2 = |A|^2 + |B|^2 + 2\Re(\bar{A}B\omega)(\cos\varepsilon + i\sin\varepsilon).$$

□

引理 14.2。 设 c_1、...、c_N 是互不相同的复数。那么存在某种选择 j、k，使得对于任意 $i \neq j$、k，都有

$$\arg \frac{c_j - c_i}{c_k - c_i} \in [-\pi, 0).$$

PROOF: 令 P 为集合 $\{c_i\}$的凸包。取 c_j 为此多边形的一个顶点，令 E 为从 c_j出发的 P 的一条边，并取 c_k 为 E的另一端点。若 $c_i \in E$，则 $\frac{c_j - c_i}{c_k - c_i} = -1$。对于其他每个 c_i，它们都位于包含延伸 E的直线一侧的半平面内。如有必要，交换 c_j 和c_k，我们可以假设，当 t 从 c_j 移动到 c_k时，对于每个不在 E中的 c_i，$t - c_i$ 的辐角都在减小，且总减小量小于 π。因此，$c_j - c_i$ 与 $c_k - c_i$ 之间的辐角差为负，但大于 $-\pi$。□

为简化计算，注意如果我们从如 (76) 中的罗马曲面$\mathcal{L}$ 开始，那么对 $\mathbb{D}^m$应用旋转自同构后，我们可以假设 $\omega = 1 = \eta$，并且每个 $\tau_k = 1$。因此我们可以写成 $\alpha_k = [1;\ 1 - B_k,\ B_k]$。

引理 14.3. 设 $\mathcal{L}$为由(76)给出的罗马曲面，其中对每个$\ell \geq 3$，都有 $\alpha_\ell = [1; 1 - B_\ell, B_\ell]$。将 $\mathcal{L}$ 改写为关于 x_j, x_k的图：

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{D}^m : x_i = \gamma_i(x_j, x_k)\}$$

那么对每个 $i \neq j, k$，都有

$$\gamma_i = [\frac{\bar{B}_j - \bar{B}_k}{B_j - B_k}; \frac{B_i - B_k}{\bar{B}_j - \bar{B}_k}, \frac{B_j - B_i}{\bar{B}_j - \bar{B}_k}]. \tag{77}$$

若 $i = 1$，取 $B_1 = 0$；若 $i = 2$，则在(77)中取 $B_2 = 1$。

PROOF: 这是推论 7.4 的一个特例。 □

推论 14.4. 设 B_j 和 B_k 是 $\{B_i$ 的凸包中的相邻顶点：$1 \leq i \leq m\}$。那么，将变量替换为 $\gamma_i(x_j, x_k)$后，我们有ˆ所有弧 $T(\gamma_i)$ 共享一个公共起点（或共享一个公共终点），并且(x_j, x_k) 在 $\mathcal{L}$的每一点都是良好参数化。

PROOF: 第一个断言由公式 (77) 和引理 14.1 得出：我们有 $(B_j - B_i)/(B_i - B_k)$ 始终位于上半平面，或始终位于下半平面。

第二个断言由连续性得出。当我们移动 a 以得到 $\tilde{\gamma}_i$ 时，从锚点出发的弧的方向不会改变。如果它们都朝同一方向延伸，它们的交集就等于其中最小的那条弧；我们知道它不会趋于零，因为 $\gamma_i \in \mathcal{M}$。□

引理 14.5。 设 $\mathcal{L}$ 是一个罗马曲面，按照引理 *14.3* 通过 $\alpha_\ell = [1;\ 1 - B_\ell,\ B_\ell]$ 进行归一化。可以适当选择 j、k 在 $\{1, \dots, m\}$ 中，使得如果通过 γ_i 对 $\mathcal{L}$ 进行参数化，即 $\gamma_i(x_j, x_k)$，那么对于所有属于 $\mathcal{M}$ 的函数 γ_i，弧 $T(\gamma_i)$ 都具有一个公共起点。

ˆPROOF: 如果所有弧 $T(\alpha_j)$ 都以 1 为公共起点，我们取 $j = 1,\ k = 2$。如果它们以该点为终点，则取 $j = 2,\ k = 1$。否则，我们处于类似图 1 的情形。选择某个 j，使得 $\partial_- T(\alpha_j) = \hat{}\partial_-(\cap_{i=3}^m T(\alpha_i))$。将此点称为 ω。于是我们知道 $|(1 - B_j) + B_j\omega| = 1$，并且对于所有 i，都有 $|(1 - B_i) + B_i\omega| \le 1$。令 $\eta = (1 - B_j) + B_j\omega$。那么半平面 $\{z \in \mathbb{C}:\ \Re[\bar{\eta}(1 - z + z\omega)] \le 1\}$ 的边界包含 B_j，且不包含其他 B_i，因为边界中的任意 B_i 都必须满足 $(1 - B_i) + B_i\omega = \eta$。因此，$B_j$ 是 $\{B_i\}$ 的凸包的顶点，根据推论 14.4，我们可以选择 B_k（一个相邻顶点），从而使引理成立。□

引理 14.6。 存在某种坐标选择，使得 V 具有良好参数化，并且使得每个 $\{\gamma_i\}$ 边族都满足：ˆ锚点是每条弧 $T(\gamma_i)$的起点。

PROOF: 让我们从一个良好参数化 $(x_1, \dots, x_d)$ 开始。我们希望证明，对于每个边族，都可以按照引理 14.5 进行选择，并且还具有以下附加性质：对于所有其他函数，我们仍然拥有良好参数化。我们将依次处理每个边族，因此只需证明我们可以对边族 $\mathcal{E} = \{\alpha_n(x_1, x_2) :\ n \in \mathcal{I}\}$ 做到这一点。按照引理 14.3，我们可以将此边族归一化为 $\alpha_n = [1;\ 1 - B_n, B_n]$。我们希望找到 $j,\ k \in \mathcal{I} \cup \{1, 2\}$，使得当我们用 x_j 和 ˆx_k 替换 x_1 和 x_2 时，(i) 新函数 γ_n 满足每个 $T(\gamma_n)$ 都以 1 为其起点，并且 (ii) 我们仍然拥有良好参数化。

首先注意，如果锚点 1 是每个 $T(\alpha_n)$ 的起点（或根据对称性，是终点ˆ），我们就无需采取任何行动。否则，我们选择 $(x_j,\ x_k)$，使弧 ˆ$T(\alpha_j) = (1,\ \omega_2^\dagger)$ 和 ˆ$T(\alpha_k) = (\omega_2^\star,\ 1)$ 尽可能短：前者是在所有以 1 为起点的弧中最短的，后者是在所有以 1 为终点的弧中最短的。

根据推论 4.15，我们了解了 $T(\alpha)$ 的结构。将 x_1，x_2替换为来自 $\mathcal{I}$ 的坐标 x_j，x_k，不会影响前两个坐标之外的 $T(\alpha)$，因此我们只需关注那些不属于任何边族，且 α_p^1 和 α_p^2 中至少有一个非零的 α_p。选择某个不属于任何边族的 α_p；为方便记号，我们将这个函数称为 ψ。我们知道 $T(\psi) \supset T(\alpha)$，因为 ψ 在任何地方都不与边界相交。

我们知道，如果 $(\omega_1 : \omega_2) \in \cap\{T(\alpha_n(x_1, x_2)) : \alpha_n \in \mathcal{E}\}$ 且 $(\omega_3 : \cdots : \omega_d) \in T(\alpha)$，那么对于所有介于 $d+1$ 和 N 之间的 ℓ，都有 $|\sum_{i=1}^d \alpha_\ell^i \omega_i| < 1$。令

$$R = \sup\{|\sum_{i=3}^d \psi^i \omega_i| : (\omega_3 : \cdots : \omega_d) \in \pi_{3,\dots,d} T(\alpha)\}.$$

由于 $\{\psi^1\omega_1 + \psi^2\omega_2\}$ 关于圆形对称，我们必有

$$|\psi^1\omega_1 + \psi^2\omega_2| + R < 1.$$

定义 $D(\alpha_k) = \{\omega_2 \in \mathbb{D} : |\alpha_k^1 + \alpha_k^2\omega_2| < 1\}$，令 $S(\alpha_k) = bD(\alpha_k)$，并令 $D_R(\psi) = \{\omega_2 : |\psi^1 + \psi^2\omega_2| < 1 - R\}$，以及 $S(\psi) = bD_R(\psi)$。D 上的$\hat{}$表示圆盘，T表示环面，并且我们有 $T(\alpha_k) = D(\alpha_k) \cap \mathbb{T}$。

现在，让我们交换坐标 x_2 和 x_j，并保持 x_1不变。我们将得到新的函数 $\beta_i(x_1, x_3, \dots, x_d, x_j) = \alpha_i(x_1, \beta_2(x_1, x_j)\ x_3, \dots, x_d)$，其中 $\beta_2(x_1, x_j) = \alpha_j^{-1}(x_1, x_j)$。回顾一下，我们选择 j，使得 $\hat{T}(\alpha_j)$ 是一条弧，其起点为锚点 1，终点为 $\omega_2^\dagger$，并且满足对于每个其他的 $n \in \mathcal{I}$，都有 $\omega_2^\dagger \in T(\alpha_n)$。

注意，如果 $g(x_1, x_j) = f(x_1, \beta_2(x_1, x_j))$，那么对于任意 τ_2，若定义 $\tau_j = \alpha_j^1 + \alpha_j^2\tau_2 = (1 - B_j) + B_j\tau_2$，则 $\tau_2 = \beta_2^1 + \beta_2^j\tau_j$，因此

$$\begin{aligned} g^1 1 + g^j\tau_j &= f^1 + f^2\beta_2^1 + f^2\beta_2^j\tau_j \\ &= f^1 + f^2(\beta_2^1 + \beta_2^j\tau_j) \\ &= f^1 + f^2\tau_2. \end{aligned}$$

因此，当且仅当 τ_j 属于 $D(g) = \{\omega_j : |g^1 + g^j\omega_j| < 1\}$ 时，$\tau_2 \in D(f)$。

定义 $\omega_j^\dagger = (1 - B_j) + B_j\omega_2^\dagger$，以及 $\omega^\dagger = (1 : \omega_3 : \cdots : \omega_d : \omega_j^\dagger)$，其中 $(\omega_3 : \cdots : \omega_d)$ 是 $\pi_{3,\dots,d}T(\alpha)$ 中某个固定点。于是 $\omega_j^\dagger$ 位于 $\cap_{i\in\mathcal{I}, i\neq j}\hat{T}(\beta_i) \cap b\hat{T}(\beta_2)$ 中，而对于所有其他的 α_ℓ，$\omega^\dagger$ 都位于 $T(\alpha_\ell(x_1, x_3, \dots, x_d, x_j))$ 中。如果我们稍微扰动 $\omega_j^\dagger$

使得 $\omega^\dagger$ 落入 $T(\beta_2)$，那么对于新坐标中的所有 β，我们都得到 $\cap T(\beta)$ 中的一个点，因此 $\{x_1, x_3, \dots, x_d, x_j\}$ 是一种良好参数化。

我们可以用一种更强有力的几何方法来看待这一点。固定 $\omega_1 = 1$，并令 $\omega_3, \dots, \omega_d$ 如上所述。定义 $\hat{D}(\alpha) = \cap_{i=d+1}^{N} \{z_2 \in \mathbb{D} \colon |\alpha_i^1 + \alpha_i^2 z_2| < 1\}$. $\hat{}$ 图 2 中凸集 $D(\alpha)$ 的边界由经过 $\omega_2^*, \omega_2^\dagger, U_2, V_2$ 的四段弧组成。按照图 3 中的方式改变变量，只有当 $D(\beta)$ 的边界包含单位圆的一段弧时，新的 $\hat{}$ 坐标才是合适的（图中， $D(\beta)$ 的边界由经过 $\omega_j^*, \omega_j^\dagger, U_j, V_j$ 的四段弧组成）。

断言：1 属于 $S(\psi)$。
如果 1 不属于 $S(\psi)$，则情况如图 2 所示。

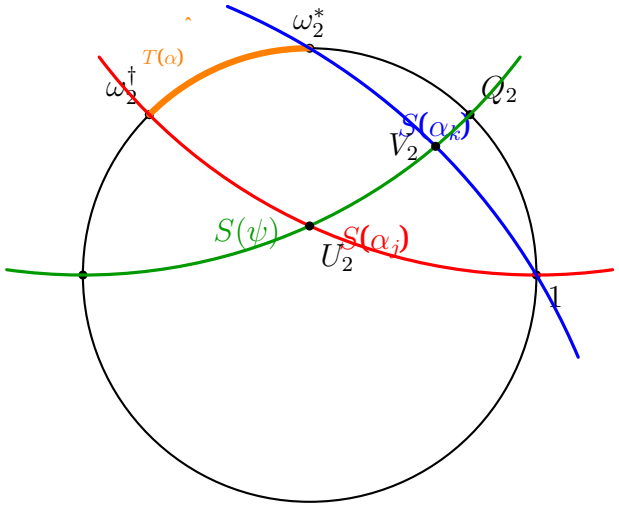

图 2：在 ω_2 平面中， $\omega_1 = 1$

首先假设，构成 $\hat{D}(\alpha)$ 部分边界的函数只有 $x_2, \alpha_j, \alpha_k, \psi$，如图 2 所示。那么，当我们像图 3 那样将坐标变换为 (x_1, x_j) 时，可以看到 $\phi = \psi(x_1, \beta_2(x_1, x_j)$ $x_3, \dots, x_d)$ 在 U 处构成边界。这意味着 $\phi(x_1, x_j) \in \mathcal{M}$，且 ϕ, β_2 和 β_k 根据引理 4.14 都属于一个边族。由于 $bT(\beta_2)$ 和 $bT(\beta_k)$ 只有点 1 是共同的，因此点 1 也必定属于 $bT(\phi)$，所以点 1 一直就在 $bT(\psi)$ 中。这是一个矛盾。

如果还有更多函数，也有类似的论证。在图 2 中，画出

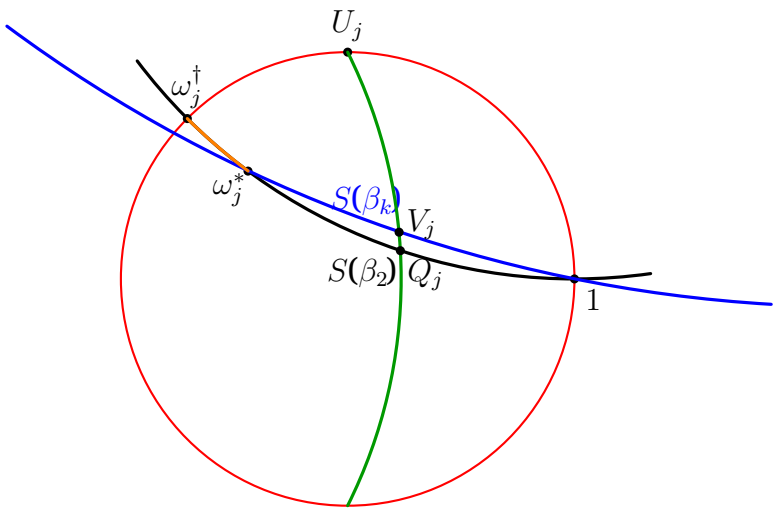

图 3：在 ω_j 平面中，$\omega_1 = 1$

从 1 到 $\omega_2^\dagger$ 和 ω_2^*的直线。如果存在某个 ψ，使得 1 不在 $D_R(\psi)$ 中，ˆ ˆ 就选取一个满足 $S(\psi)\cap\mathbb{T}$最接近 $T(\alpha)$ 的对象。将会有一条 $bD(\alpha)$ 的弧，它来自 $b(D_R(\psi))$（图中的绿色弧）。这条弧将与 $S(\alpha_{j'})$ 和 $S(\alpha_{k'})$ 中的弧相连，而它们也都在 $bD(\alpha)$ 中。现在我们用 j' 和 k' 重复这一论证，从而得出 1 一直都必须在 $S(\psi)$ 中。◁

因此我们可以得出结论，对于每个不属于 $\mathcal{I}$ 的 ℓ，$(1,\dots,1)$ 都属于 $T(\alpha_\ell)$。现在ˆ我们可以使用推论 14.4 选择一对 x_j, x_k，使得所有弧 $\{T(\gamma_i) : i \in \mathcal{I}\}$ 都有公共起点 1；这是一个良好参数化，因为对于所有其他 γ，$(1,\dots,1) \in T(\gamma_\ell)$。现在我们用与其他边族相关联的其他坐标集合重复这一论证。□

所有弧都朝同一方向延伸的重要性如下。

推论14.7。 存在某种坐标选择 $\{x_{i_1},\dots,x_{i_d}\}$，使其对应用于 V 的每个莫比乌斯自同构都适用。

Proof: 如引理 14.6 所示，在 0 处选取一个良好参数化。我们可以假设它是 $\{x_1,\dots,x_d\}$。由连续性可知，在每个 $a \in V$ 处，所有依赖于点对 x_{2i-1}，x_{2i} 的ˆ 边族，其 $T(\alpha_j(x_{2i-1},\ x_{2i}))$ 都从锚点沿同一方向延伸，因此它们的交集就是

最小的一个。这永不为空，因为每个函数都属于 $\mathcal{M}$。因此 $T(\tilde{\alpha})$ 将是若干带的乘积，且非空。□

引理 4.16。设 $j' > m_3$。则 $\alpha_{j'} \in O(G, \mathbb{D})$。

PROOF: 记 ψ 为 $\alpha_{j'}$。

设 V_1 为 V_{reg} 中的点集，在该集合中，局部地 V 可以由前 d 个坐标参数化。注意，$V \setminus V_1$ 是一个维数至多为 $d-1$ 的代数集，因此 V_1 是连通的。

我们知道 ψ 不是边界，并且它是一个在 0 附近全纯的纳什函数。假设它不能从 G 全纯延拓到 $\mathbb{D}$。这可能是因为以下两种情况之一：

(i) 存在一个点 $a \in G$，它是 ψ 的奇点；或者

(ii) 存在一个点 $a \in G$，在该点 ψ 的模为 1。

第一种情况下，$P = (a, \alpha(a))$ 属于 $V \setminus V_1$。第二种情况下，我们可以假设 $P \in bV$（取沿路径首次出现这种情况的点即可）。

断言：(i) 不可能发生。

通过一个莫比乌斯自同构 Φ 将 P 移至 0。于是对每个 $\tilde{\alpha}_\ell$，0 都不是正则点。但它是低维集合 $\{(x_1, \ldots\ldots, x_d, \tilde{\alpha}_\ell(x))$ 的正则点：$\alpha_\ell \in \mathcal{B}'\}$。根据推论 14.7 中的论证，我们可以假设 $\cap\{T(\tilde{\alpha}_\ell)$：$\alpha_\ell \in \mathcal{B}'\} \neq \emptyset$。

取一个点 $Q = (\omega_0 \cdot \lambda_0, \tilde{\alpha}(\omega_0 \cdot \lambda_0))$，使其是 $V = \Phi(V)$ 的正则点，且满足 $\lambda_0 \in \mathbb{D}$ 和 $\omega_0 \in \cap\{T(\tilde{\alpha}_\ell)$：$\alpha_\ell \in \mathcal{B}'\}$。现在应用另一个交换 0 与 Q 的自同构。在新的坐标系中（记作 $\tilde{\alpha}$），点 P 现在移到了 $Q = (\omega_0 \cdot \lambda_0, \tilde{\alpha}(\omega_0 \cdot \lambda_0))$，而 0 是一个正则点。如果我们将 $|\lambda_0|$ 取得足够小，还可以确保 $\{x_1, \ldots, x_d\}$ 在 Q 处是良好参数化，且 $\omega_0 \in \cap\{T(\tilde{\alpha}_\ell)$：$\alpha_\ell \in \mathcal{B}'\}$。

此外，我们必须有 $\cap\{T(\tilde{\alpha}_\ell)$：$\alpha_\ell \in \mathcal{B}'\} \subseteq T(\psi)$，否则 ψ 将是有界的，因此属于 $\mathcal{M}$。这意味着 $\psi \in \mathcal{M}$，所以在其模不超过 1 的区域的闭包中没有奇点。

由于 0 是正则的，现在我们可以应用引理 4.4，得出 $\psi(\omega\lambda)$ 是正则的，$\lambda \in \mathbb{D}$ 是全纯的，并且对 $\omega \in \cap\{T(\tilde{\alpha}_\ell)$：$\alpha_\ell \in \mathcal{B}'\}$ 的一个非空开集也成立。

现在令 ε_i 接近 0。将 $\omega \in \cap\{T(\tilde{\alpha}_\ell)$：$\alpha_\ell \in \mathcal{B}'\}$ 的坐标记为 ω_i。那么 $\lambda \mapsto \psi(\varphi_{\varepsilon_i}(\omega_i\lambda))$ 对于 $\lambda \in \mathbb{D}$ 是全纯的，并且取 $\lambda = \lambda_0$ 时，集合 $\{(\varphi_{\varepsilon_i}(\omega_i\lambda_0))\}$ 是 $\omega_0 \cdot \lambda_0$ 的一个邻域。这意味着 ψ 在经过 a 的许多方向的一维切片上是全纯的。

根据引理 14.8，ψ 是定义在整个 G 上的全纯函数，至多可能

在 $Y \cap G$上除外；这是一个维数至多为 $d-2$的集合。由于 $G \setminus Y$是单连通的，所选分支的单值化是平凡的（即沿闭合回路进行解析延拓所得的值是单值的），因此 ψ 是定义在 $G \setminus Y$上的良定义有界全纯函数。所以，根据黎曼延拓定理， ψ 可解析延拓至整个 G。

断言：(ii) 不可能发生。

根据推论14.7，我们可以假设 $\{x_1, \dots, x_d\}$ 对 V 的每个 Möbius 自同构都是良好参数化。因此， $\cap_{\alpha_\ell \in \mathcal{B}'} T(\tilde{\alpha}_\ell)$ 在 P 处非空。根据 (16)，我们知道 $T(\psi)$ 会在 P 处缩小至空集。因此，当我们沿着 V_1 内的一条路径移向 P 时，在某个阶段必定会有一个新的函数成为约束函数。它必定属于 $\mathcal{M}$，并且它要么依赖一对新的变量，要么依赖一对旧变量。两种情况都不可能。若是前一种情况，则 $T(\tilde{\alpha})$ 中会有一个涉及这对新变量的约束，因此它一直都会是 $T(\alpha)$ 中的一个约束。若是后一种情况，根据引理4.14和4.13，该函数必须属于某个边族 $\mathcal{E}'_j$ ，所以它从一开始就会属于 $\mathcal{B}'$ 。□

引理 14.8。 设 ψ 是关于 $x = (x_1, \dots, x_d)$的纳什函数，且 F 是一个不可约多项式，使得 $F(x, \psi(x)) = 0$。设 X 为$F \in \mathbb{C}[x][z]$的轨迹集，即将 W 投影到前 d 个坐标所得的集合，其中

$$W = \{(x, w) \in \mathbb{C}^{d+1} : F(x, w) = 0, \frac{\partial F}{\partial w}(x, w) = 0\}.$$

设 Y 为 X的非光滑点集合。设 $\lambda_0 \in \mathbb{D}$, $\omega_0 \in \mathbb{T}^d$，并设$a = \omega_0 \cdot \lambda_0$。假设对于所有充分接近 *0* 的 ε_i 以及所有接近 ω_0的 ω ，函数 $\psi(\phi_{\varepsilon_i}(\omega_i \lambda))$ 对所有 $\lambda \in \mathbb{D}$在 λ 上全纯。

若 a 不属于 Y，则 ψ 在 a处全纯。

注意， X 是 F（视为$\mathbb{C}[x][w]$中的一个元素）的判别式为零的点，因此 X 是维数为 $d-1$的代数集，而 Y的维数至多为 $d-2$ （作为 X的奇点集合）。

Proof: 如果 a 不在 X中，那么根据隐函数定理， ψ 是全纯的。设 $a \in X \setminus Y$成立。我们将用一个局部论证来证明， ψ 在 a附近有 Puiseux级数展开，然后利用 ψ在经过 a 的圆盘上全纯这一事实，得出它实际上是解析的。

存在一个局部双全纯变量替换，将 a 映射到 0，并将轨迹集 X 映射到 $\{x_1 = 0\}$。经过变量替换后， F 变为$H \in \mathcal{O}(x)[w]$，并且我们可以假设 H 关于 w是首一的；函数 ψ

经过变量替换后变为 χ。我们记作 $x=(x_1,\ x')$。解析圆盘族 $\lambda\mapsto(\varphi_{\varepsilon_i}(\omega_i\lambda))$也通过这个双全纯映射变换。我们可以选取一个子族，使其与 $\{x_1=0\}$ 横截相交，且其并集覆盖 $\{0\}\times U'$，其中 U'是 $\mathbb{C}^{d-1}$中 0 的一个邻域。特别地，我们可以从中挑出一个形如 $\lambda\mapsto(\lambda,\ \sigma_{x'}(\lambda))$的族，其中$\sigma_{x'}(0)=x'$。

现在，我们采用 [16, 定理 4.24]（另见 [34, 第 170], 页，或者更确切地说，参见其证明，因为该定理的表述假设 $d=2$）中所述形式的带参数的 Puiseux 定理。由于轨迹集为 $x_1=0$，当 $x_1\neq 0$ 接近 0 时， H 的判别式不为零，因此定理 4.24 适用。于是，存在定义在 (0,0) 附近的全纯函数芽 h_μ 和$p\in\mathbb{N}$，使得

$$H(x_1^p,x',w)=\prod_{\mu=0}^{p-1}(w-h_\mu(x_1,x')).$$

因此，对于某个 μ_0， $\chi(x_1^p,x')=h_{\mu_0}(x_1,x')$。令 h 表示 h_{μ_0}。

我们来展开 $h(x_1,x)=\sum_n x_1^n\mathfrak{h}_n(x')$。我们的假设是， χ 在一维曲线上全纯，这意味着 $\sum\lambda^{n/p}\mathfrak{h}_n(\sigma_{x'}(\lambda))$ 在 0 附近全纯。只有当 $n\not\equiv 0$（模 p）时， $\mathfrak{h}_n$ 才会消失。这证明 χ 在 0 处全纯。□

15 引理4.17的证明

引理 15.1. 设 $g:\ \mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 为全纯函数，满足 $g(0)=0$ 和 $|g'(0)|=c<1$。设 $0<R<1$。设 ε 满足

$$0<\varepsilon<\frac{R(1-c)}{8}. \tag{78}$$

若 $\eta,\zeta\in\mathbb{C}$和 $|\eta|,|\zeta|<\varepsilon$，则对于所有满足 $1>|\lambda|>R$的 λ，都有$\rho(g(\lambda)\ \eta)<\rho(\lambda,\zeta)$。

Proof: 设 $g'(0)=\omega c$ 满足 $|\omega|=1$。由 Schwarz 引理可得

$$\left|\varphi_{-\omega c}(\frac{g(\lambda)}{\lambda})\right|\ \leq\ |\lambda| \tag{79}$$

对所有 λ 属于 $\mathbb{D}$。令

$$M\ =\ \max\{|\varphi_{-\omega c}(\lambda):|\lambda|\leq s\}\ =\ \frac{c+s}{1+sc}.$$

令 $|\lambda| = s > R$。那么 (79) 表明 $\left|\varphi_{-\omega c}\left(\frac{g(\lambda)}{\lambda}\right)\right| \le s$，因此 $\left|\frac{g(\lambda}{\lambda}\right| \le M$)，所以

$$|g(\lambda)| \ \le \ s\frac{c+s}{1+sc}.$$

Then

$$\rho(g(\lambda),\eta) \ \le \ \frac{s\frac{c+s}{1+sc}+\varepsilon}{1+\varepsilon s\frac{c+s}{1+sc}}. \tag{80}$$

我们还有

$$\rho(\lambda,\zeta) \ \ge \ s\frac{1-\frac{\varepsilon}{s}}{1-\varepsilon s}. \tag{81}$$

比较 (80) 和 (81)，我们要证明

$$s(1-\frac{\varepsilon}{s})(1+sc+\varepsilon s(c+s)) \ \overset{?}{>} \ (1-\varepsilon s)(s(c+s)+\varepsilon(1+sc)). \tag{82}$$

除以 s 并改写 (82)，得到

$$\begin{aligned}(1-s)(1-c) \quad &\overset{?}{>} \quad \varepsilon\left[\frac{2}{s}+2c-2s(c+s)\right]-\varepsilon^2\left[(1-s)(1-c)\right]\\ \Leftrightarrow (1-c) \quad &\overset{?}{>} \quad \frac{2\varepsilon}{s}\left[(1+s+s^2)+cs\right]-\varepsilon^2(1-c),\end{aligned}$$

这由假设 (78) 得出。 □

命题 15.2。设 V 是 $\mathbb{D}^N$ 中一个不可约的 d 维 *Carathéodory* 集合，且满足 $0 \in V$。设 X 是 0 的某个邻域中的光滑簇，满足 $0 \in X$ 和 $X \not\subseteq V$。任何包含 $V \cup X$ 的 *Carathéodory* 集合 W 的维数都大于 d。

Proof: 假设维数为 d。我们将导出一个矛盾。令 $V = \{(x_1, \ldots\ldots, x_d, \alpha_j(x)): \ d+1 \le j \le N\}$。我们将证明分为 3 个步骤。第一步，假设没有 α_j 是坐标函数。第二步，去掉这一假设，但令 $d = 2$。第三步，考虑最一般的情形。

步骤 1： 假设 V 满足假设 1 的第二部分，即 α_j 中没有一个是坐标函数。

令 $\omega \in T(\alpha)$。令 $\varepsilon > 0$ 满足：对于所有满足 $\|b\| \le \varepsilon$ 的 $b = (b', \ b_{d+1}, \ldots\ldots, \ b_N)$，若令 $\tilde{\alpha}_j = \varphi_{\alpha_j(b')} \circ \alpha_j(\varphi_{-b_1}(x_1) \ldots\ldots, \ \varphi_{-b_d}(x_d))$，则有

$\omega \in T(\tilde{\alpha})$，并且存在 $c_0 < 1$，使得对每个$d+1 \le j \le N$，都有 $|\sum_{i=1}^{d} \tilde{\alpha}_j^i(0)\omega_i| \le c_0$。

令 $b \in X \setminus V$具有 $\|b\| < \varepsilon$ 和$|\varphi_{\alpha_j(b')}(b_j)| < \varepsilon$，对每个 $d+1 \le j \le N$均成立。对于 $\lambda \in \mathbb{D}$，考察

$$\begin{aligned} & d((\varphi_{-b_i}(\omega_i\lambda), \alpha_j(\varphi_{-b_i}(\omega_i\lambda))), (b', b_{d+1}, \ldots, b_N)) \\ &= \max[\max_{1\le i\le d} \rho(\varphi_{-b_i}(\omega_i\lambda), b_i), \max_{d+1\le j\le N} \rho(\alpha_j(\varphi_{-b_i}(\omega_i\lambda)), b_j)]. \end{aligned} \tag{83}$$

对于 $1 \le i \le d$，式 (83) 中的距离为 $|\lambda|$。当 $\lambda = 0$时，该距离在某个 $j \ge d+1$处取到。 (83)

如有必要，缩小 ε，选取 $s > \frac{1}{2}$，使其小于$1 - \frac{8\varepsilon}{1-c_0}$。现在我们可以对 $\psi(\lambda) = \tilde{\alpha}_j(\omega \cdot \lambda)$应用引理 15.1，其中 $\eta = \varphi_{\alpha_j(b')}(b_j)$且 $\zeta = 0$，从而得出对所有满足 $|\lambda| = s$的 λ，均有

$$\rho(\alpha_j(\varphi_{-b_i}(\omega_i\lambda)), b_j) < |\lambda|. \tag{84}$$

因此，由连续性可知，存在某个 $\lambda = \lambda(b)$，使得式 (83) 在至少 $d+1$ 个位置处取到，其中包括第一个 d。

现在对某条路径 $b(t) \to 0$重复此过程。我们得到一个（或更多）适用于 $b(t)$的平衡对，以及一个形如 $(\varphi_{-b'}(\omega \cdot \lambda_t)\ \alpha(\varphi_{-b'}((\omega \cdot \lambda_t)))$ 的点。

由 (84) 可知，在半径为s的圆盘内，存在一条围绕 0 的闭曲线，使得对于该曲线上的 λ

$$\max_{d+1\le j\le N} \rho(\alpha_j(\varphi_{-b_i}(\omega_i\lambda)), b_j) = |\lambda|. \tag{85}$$

存在一条弧，使得对于某个 j，(85) 左端的最大值能够取到；不失一般性，我们可以假设该点为 $d+1$。对于这条弧上的每个点 λ，都存在一个模为一的 $\omega_{d+1}(\lambda)$，使得

$$\alpha_{d+1}(\varphi_{-b_1}(\omega_1\lambda), \ldots, \varphi_{-b_d}(\omega_d\lambda)) = \varphi_{b_{d+1}}(\omega_{d+1}\lambda). \tag{86}$$

如果 $\omega_{d+1}(\lambda)$ 在这条弧上为常数，那么根据解析性，(86) 对$\mathbb{D}$中的所有 λ 都成立。对 λ 求 (86) 的导数，并在 $\lambda = 0$ 处取值。我们得到

$$\sum_{i=1}^{d} \alpha_{d+1}^i(b)(1-|b_i|^2)\omega_i = (1-|b_{d+1}|^2)\omega_{d+1}.$$

现在令 $b(t) \to 0$ 趋于极限。左端趋于 $\sum \alpha_{d+1}^i(0)\omega_i$，由于 $\omega \in T(\alpha)$，其模小于 1，而右端的

模为 1。这是一个矛盾，因此当 b 充分接近 0 时，我们必有 ω_{d+1} 不是常数。

若 ω_{d+1} 不是常数，我们可以利用 (86) 求出用 λ表示的 ω_{d+1} 。

$$\frac{1}{\lambda}\varphi_{-b_{d+1}} \circ \alpha_{d+1}(\varphi_{-b_1}(\omega_1\lambda), \ldots, \varphi_{-b_d}(\omega_d\lambda)) \;=\; \omega_{d+1}$$

特别地，固定一个较小的 b，我们得到一个满足 (86) 的 ω_{d+1} 开集，其中存在某个 λ 也满足 (85)。扰动 (ω_1，……，ω_d) 后，我们得出结论：在 $\mathbb{T}^{d+1}$ 中存在一个 (ω_1，……，ω_d，ω_{d+1}) 的开集，使这两个方程都成立。

现在应用一个将 b映到 0 的 $\mathbb{D}^N$ 自同构 $\Phi = (\varphi_{b_1}$，……，$\varphi_{b_N})$。我们有 $\Phi(V)$ 包含一个点 ($\omega_1\lambda$，……，$\omega_{d+1}\lambda$，y_{d+2}，……，y_N)，其中对每个 $j \geq d+2$都有$|y_j| \leq |\lambda|$ 。

现在我们像引理 8.5 的证明那样论证，$\pi_{d+1}(W)$ 在 $\overline{\mathbb{T}^{d+1}}$中包含一个非空开集，因此根据 Chevalley 定理 3.9，W的维数至少为 $d+1$。

步骤 2： 假设 $d = 2$。我们将对 N 使用归纳法，证明允许某些 α_j 为坐标函数的模为 1 的倍数时的情形。

我们可以假设 V 具有如下形式

$$\{(x_1, x_2, \alpha_j(x)) : x \in U\} \tag{87}$$

其中，对于 $3 \leq j \leq p-1$，函数 α_j 是坐标函数的模为 1 的倍数；对于 $p \leq j \leq N$，它们则不是。通过旋转自同构，我们可以假设每个 α_j 对于 $j < p$ 要么是 x_1，要么是 x_2。令 $b \in X \setminus V$。

令 $\omega \in \cap_{j=p}^{N} T\ \alpha_j$ $\frac{1}{2} < s \preceq 1$ $c =$ $_{p\leq j\leq N} |\omega_1\alpha_j^1\ 0\ +()$。选取，令 max ( ) $\omega_2\alpha_j^2\ 0\ |$ $d\ b\ V$ 78 ( )，并假设 (,) 小于 ( ) 右侧。

考虑

$$d(b, (\omega \cdot \lambda, \alpha(\omega \cdot \lambda)).$$

那么，对于 $|\lambda| = s$，根据引理 15.1，只有在 $\{1, \ldots, p-1\}$ 这些位置上它才会处于激活状态。沿圆 $|\lambda| = s$ 旋转，我们将到达一个 λ 值，使其相对于至少两个不同的指标处于激活状态。

断言：我们可以假设这两个不同的指标分别对应两个不同的坐标函数。

事实上，设

$$\begin{aligned} J_1 &= \{1\} \cup \{j : 3 \leq j \leq p-1, \text{ and } \alpha_j(x) = x_1\} \\ J_2 &= \{2\} \cup \{j : 3 \leq j \leq p-1, \text{ and } \alpha_j(x) = x_2\}. \end{aligned}$$

对于半径为 s的圆上的任意给定 λ，我们有

$$d(b,(\omega\cdot\lambda,\alpha(\omega\cdot\lambda))=\max_{1\le j\le p-1}\rho(b_j,\omega_j\lambda). \tag{88}$$

假设最大值总是在 $j\in J_1$ 处取得。

令 $(1:\tau)\in\cap_{j=p}^{N}T(\alpha_j)$。那么圆盘 $\{(\mu,\ \tau\mu):|\mu|<1\}\subset U$（其中 U 是 V 的基底，见 (87)）。固定某个 $\mu\in\mathbb{D}\setminus\{0\}$。将 Möbius 自同构 $\Psi=(\varphi_\mu,\ \varphi_{\tau\mu},\ \varphi_{\alpha_j(\mu,\ \tau\mu)})$ 应用于 $\mathbb{D}^N$。那么对于 $j\in J_1$，b_j 映到 $\varphi_\mu(b_j)$；对于 $j\in J_2$，b_j 映到 $\varphi_{\tau\mu}(b_j)$。集合 $\cap_{j=p}^{N}T(\tilde{\alpha}_j)$ 仍然非空。因此，(88) 将变为

$$\begin{aligned}d(\tilde{b},(\omega\cdot\lambda,\tilde{\alpha}(\omega\cdot\lambda))&=\max_{1\le j\le p-1}\rho(\tilde{b}_j,\omega_j\lambda)\\&=\max(\max_{j\in J_1}\rho(\bar{\omega}_j\varphi_\mu(b_j),\lambda),\max_{j\in J_2}\rho(\bar{\omega}_j\varphi_{\tau\mu}(b_j),\lambda))\end{aligned}$$

对于固定的 μ 和 τ，选择 ω，使得 $\{\bar{\omega}_j\mu:\ j\in J_1\}$ 与 $\{\bar{\omega}_j\tau\mu:\ j\in J_2\}$ 不相交。由于 $b\to 0$，我们有 $\varphi_\mu(b_j)\to-\mu$，且 $\varphi_{\tau\mu}(b_j)\to-\tau\mu$。这意味着来自 J_1 的点和来自 J_2 的点趋向于圆周上的一个集合，该圆的半径为 $|\mu|$。因此，我们可以假设能在半径为 s 的圆周上找到一个 λ，使得 (88) 至少对 j 的两个取值取得，一个在 J_1 中，另一个在 J_2 中；因为沿着半径为 s 的圆周移动时，不可能总是离来自 J_1 的点最近。必要时重新标记坐标，我们可以假设这些取值为 $j=1$ 和 $j=2$。$\lhd$

此外，沿着弧 $\{\lambda:\ \rho(\bar{\omega}_1b_1,\ \lambda)=\rho(\bar{\omega}_2b_2,\ \lambda)\}$ 移动时，会出现某个第三个值 $3\le j_3\le p-1$，使得 $\rho(\bar{\omega}_1b_1,\ \lambda)=\rho(\bar{\omega}_{j_3}b_{j_3},\ \lambda)$（见图4）。特别地，沿着这条弧移动时，必定存在一点，使得数对 b和 $P=(\omega\cdot\lambda,\ \alpha(\omega\cdot\lambda))$ 关于 $x_1,\ x_2$ 和 x_j 至少是三重平衡的，其中某个 $j>2$（它也可能小于 p，也可能不小于）。

如果数对 $(b,\ P)$ 恰好是三重平衡的，我们可以应用引理 8.6，并得出结论：要么 $\dim(W)>d$，要么

$$\alpha_j(\varphi_{b_1}(\omega_1\lambda),\varphi_{b_2}(\omega_2\lambda))\ =\ \varphi_{b_j}(\omega_j\lambda)\qquad\forall\lambda\in\mathbb{D}. \tag{89}$$

现在有两个子情形。

如果 $j<p$，那么 α_j 是一个坐标函数，记作 $\alpha_j(x_1,\ x_2)=x_1$，以明确起见。于是 (89) 表明 $b_j=b_1$ 和 $\omega_j=\omega_1$。如果这对 b 的一个非离散集合成立，我们可以投影到不包含 j 的 $N-1$ 坐标上，然后通过归纳法继续进行。

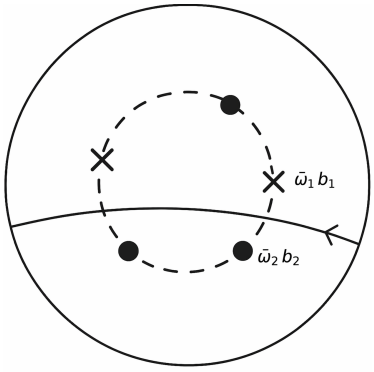

图4：弧 $\{\lambda : \ \rho(\bar{\omega}_1 b_1, \ \lambda) = \rho(\bar{\omega}_2 b_2, \ \lambda)\}$

如果 $j \geq p$，对 λ 求 (89) 的导数，并在 $\lambda = 0$ 处取值。我们得到

$$\alpha_j^1(b_1, b_2)\omega_1(1 - |b_1|^2) + \alpha_j^2(b_1, b_2)\omega_2(1 - |b_2|^2) \ = \ \omega_j(1 - |b_j|^2). \tag{90}$$

现在令 $b \to 0$。左边将趋于一个模小于一的极限，因为 $(\omega_1 : \ \omega_2) \in T(\alpha_j)$，而右边将有一个模为一的极限。这一矛盾意味着 $\dim(W) > d$。

如果 $(b, \ P)$ 是 4-平衡或更高阶的，稍微扰动 ω。这样我们要么得到一个三重平衡对，并应用引理 8.6；要么得到一个连续统，在其中可应用引理 8.4。现在我们按三重平衡情形继续。如果某个指标 $2 < j < p$ 在平衡对 $(b, \ P)$ 中是活动指标，那么我们可以去掉这个坐标，将问题化为 $(N - 1)$ 维。如果活动指标为 $\geq p$，那么我们再次得到 (89) 和 (90)，并得到与 $b \to 0$ 相同的矛盾。

步骤 3： 最一般的 V 具有以下形式。存在罗马曲面 $\mathcal{L}_r$，对于 $1 \leq r \leq m_1$，其形式为

$$\mathcal{L}_r \ = \ \{(y, z, \alpha_j(y, z)) : (y, z) \in U_r, 1 \leq j \leq h_r\}.$$

集合 $\{\alpha_j : \ 1 \leq j \leq h_r\}$ 是一个边族，而 $U_r = \{(y, \ z) \in \mathbb{D}^2 : |\alpha_j(y, \ z)| < 1, \ 1 \leq j \leq h_r\}$。于是 V是 $\mathcal{L}_1 \times \cdots \times \mathcal{L}_{m_1} \times \mathbb{D}^{m_2}$上的一个图，其中 $k = 2m_1 + m_2$。记作

$$V = \{(x_1, \ldots, x_d, \alpha_j(x)) : x \in U_1 \times \cdots \times U_{m_1} \times \mathbb{D}^{m_2}\}. \tag{91}$$

我们可以假设 α_j 仅在范围 $d + 1 \leq j \leq p - 1$ 内是坐标函数，并且根据步骤 1，我们可以假设 $p - 1 > d$。对于 $1 \leq r \leq d$，令

$$J_r = \{r\} \cup \{j : d + 1 \leq j \leq p - 1, \text{ and } |\alpha_j(x)| = |x_r|\}$$

令 $\omega \in \cap_{j=p}^{N} T(\overset{\alpha_j}{\underset{16}{1-c}} \quad \overset{c=}{\underset{2}{1}} < s_i < 1 \quad \lambda_1 \ \ldots \ \lambda_{m_1+m_2} \quad <$ s)。令 $\max_{p \le j \le N} |\sum_{i=1}^{d} \alpha_j^i(0)\omega_i|$。假设 $d(b,\ V)$。令。令，、为模为 的复数。则

$$x' = (\omega_1\lambda_1, \omega_2\lambda_1, \omega_3\lambda_2, \omega_4\lambda_2, \ldots, \omega_{2m_1-1}\lambda_{m_1}, \omega_{2m_1}\lambda_{m_1}, \lambda_{m_1+1}, \ldots, \lambda_{m_1+m_2}) \tag{92}$$

位于 $U_1 \times \cdots \times U_{m_1} \times \mathbb{D}^{m_2}$ 中，因此点 $(x',\ \alpha(x')) \in V$。根据引理 15.1，距离 $d(b,\ (x',\ \alpha(x'))$ 的活动槽位只会在范围 $\{1, \ldots, p-1\}$ 内。由于我们可以独立旋转每个 λ_i，根据步骤 2 中的辐角，我们可以选择形如 (92) 的 x'，使得

$$\rho(\bar{\omega}_{2i-1}\lambda_i, b_{2i-1}) = \rho(\bar{\omega}_{2i}\lambda_i b_{2i}) = |s_i| + o(1)$$

如 $b \to 0$。因此，通过增大较小的 $|s_i|$，我们可以找到一个形如 (92) 的点，使得 $d(b,\ (x',\ \alpha(x'))$ 至少是 d 平衡的，并且相对于每个 J_r 中至少一个指标都是活动的。如有必要，对指标重新编号后，我们可以假设 1、.....、d 都是活动的，因此

$$\begin{aligned} d(b, (x', \alpha(x')) = \rho(\bar{\omega}_1\lambda_1, b_1) = \rho(\bar{\omega}_2\lambda_1, b_2) = \cdots = \rho(\bar{\omega}_{2m_1}\lambda_{m_1}, b_{2m_1}) \\ = \cdots = \rho(\lambda_{m_1+m_2}, b_d). \end{aligned}$$

现在应用一个莫比乌斯自同构 Φ，将 $(b_1,\ \ldots\ldots,\ b_d,\ \alpha(b_1,\ \ldots\ldots,\ b_d))\tilde{}$ 移到 0。经过该自同构后，V 变为 $\{(x,\ \tilde{\alpha}(x)):\ x \in U\}$，如 (91) 所示。$\tilde{}$点 b 映到 b，其前 d 个坐标为 0，而 $(x',\ \alpha(x'))$ 映到 $(y,\ \tilde{\alpha}(y))$，其中 y 具有如下形式

$$y = (\tau_1 s, \tau_2 s, \ldots, \tau_d s),$$

对于某个 $\tau \in \mathbb{T}^d$，因为 $\rho(0, y_i) = s$ 对于 $1 \le i \le d$。此外，由于 $T(\alpha)$ 是开集，如果 $d(b, V)$ 足够小，那么对每个 $1 \le r \le m_1$，对于那些对应于罗马曲面$\Phi(\mathcal{L}_r)$ 的 α_j，点对 (τ_{2r-1}, τ_{2r}) 都属于 $T(\tilde{\alpha}_j)$。

相对于以下对象，$(y, \alpha(y))$ 至少是 d-平衡的。点 $P_s = \tilde{}(\tau \cdot s, \tilde{\alpha}(\tau \cdot s))$ 全都属于 $\tilde{}$ $\tilde{}V$，最终 $d(P_s, b)$ 会在大于 d 的坐标上变为活跃。$\tilde{}$因此，必定存在某个 s 的取值，使得 (P_s, b) 至少是 $(d+1)$-平衡的，且坐标 $1, \ldots, d$ 都是活跃的。现在我们可以像在步骤 2 中那样完成辐角论证。□

引理 4.17 可由命题 15.2 直接推出。

16 定理 2.16 的证明

如果存在一个同样是极值映射的 $(n-1)$ 点子问题，那么称 $\mathbb{D}^N$ 上的 n 点极值 Pick 问题是退化的。如果不存在依赖于 $n-1$ 个变量的插值函数，则称其为严格 n 维的。

当 $n=2$ 时，利用 Lempert 定理可以解决刻画二点 Pick 问题的唯一性集的问题。如果 $n=3$ [28]，则已证明存在类似现象。特别地，以下定理已得到证明。

定理 16.1. 设(μ_1,μ_2,μ_3) 和(w_1,w_2,w_3) 是 $\mathbb{D}^N$ 中一个严格三维非退化极值 *Pick* 问题的数据。那么存在一个解析圆盘 $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}^N$，其像中包含 μ_1、μ_2 和 μ_3，以及一个次数为二的布拉施克乘积 b，使得 *Pick* 问题的每个解 ϕ 都满足

$$\phi(f(\lambda))=b(\lambda).$$

让我们对这个定理作一些简化处理。显然可以假设 $\mu_1=0$、$w_1=0$，且对于某个 $\gamma\in\mathbb{D}$，有 $b(\lambda)=\lambda m_\gamma(\lambda)$。由于该问题非退化，所有分量 f_j 都不是莫比乌斯映射；又由于该问题是三维的，至少有三个分量是次数为二的布拉施克乘积，不妨记为 $f_{i_1},\dots,f_{i_k}$。一般情形是恰有三个分量满足这一条件，即 $k=3$。如果 $k>3$，则需要进行一些额外的簿记工作。

由于对于 $j\notin\{i_1,\dots,i_k\}$，f_j 不是次数为 2 的布拉施克乘积，因此存在一个解只依赖于 z_{i_1}、……、z_{i_k} 变量。此外，对于每个 i_j，都存在某个只依赖于三个变量的解，其中一个变量是 z_{i_j}。通过置换，不妨设 $i_j=j$、$j=1$、……、k。令 $f_j(\lambda)=\omega_j\lambda\varphi_{a_j}(\lambda)$。

记 conv$(a_1,\dots,a_k)$ 表示集合 $\{a_1,\dots,a_k\}$ 的凸包的内部。由此，根据 [28, 引理 11]，可知 γ 属于 conv$(a_1,\dots,a_k)$。

在 [28] 和 [37] 中进行的计算表明：

引理 16.2。令 a_{j_1}，a_{j_2}，a_{j_3} 和 $\gamma\in\overline{\mathrm{conv}}(a_{j_1},a_{j_2},a_{j_3})$。

(i) 假设 γ 位于以 a_{j_1}、a_{j_2}为顶点的一条边上，且不等于任一端点，则存在 F_0 属于 $b\mathcal{M}$，使得 $F_0(\lambda\varphi_{ta_{j_1}}(\lambda)\,\lambda\varphi_{ta_{j_2}}(\lambda))=\lambda\varphi_{t\gamma}(\lambda)$，$t\in(0,1)$。

(ii) 假设 $\gamma \in \operatorname{conv}(a_{j_1}, a_{j_2}, a_{j_3})$。那么可以找到解$\phi_1(z) = F_1(F_2(z_{j_1}, z_{j_2})\ z_{j_3})$和 $\phi_2(z) = F_3(z_{j_1}, F_4(z_{j_2}, z_{j_3}))$，其中 F_r 属于 $b\mathcal{M}$ 且具有如下形式：$F_r = [\frac{\bar{A}_r}{|A_r|};\ A_r, B_r]$，其中 $|A_r| + |B_r| = 1$。

集合 $\{z:\ \phi_1(z_{j_1},\ z_{j_2},\ z_{j_3}) = \phi_2(z_{j_1},\ z_{j_2},\ z_{j_3})\}$ 与该簇重合

$$\{(z_{j_1}, z_{j_2}, z_{j_3}) \in \mathbb{D}^3 : z_{j_3} = \alpha(z_{j_1}, z_{j_2})\}$$

其中 α 是 $\mathcal{M}$ 中由下式给出的函数

$$\alpha = [-\omega_1\omega_2\bar{\omega}_3\frac{a_{j_2} - a_{j_1}}{\bar{a}_{j_2} - \bar{a}_{j_1}}; \omega_2\frac{a_{j_2} - a_{j_3}}{\bar{a}_{j_2} - \bar{a}_{j_1}}, \omega_1\frac{a_{j_3} - a_{j_1}}{\bar{a}_{j_2} - \bar{a}_{j_1}}].$$

有了这些工具，我们便可以证明该定理。回顾一下，弱罗马曲面类似于罗马曲面，但函数允许取值于 $\mathcal{M}$。

定理 2.16。设 $N \geq 3$。$\mathbb{D}^N$ 中的严格三维非退化三点极值 *Pick* 问题从不具有唯一解。经过 $\mathbb{D}^N$ 的一个自同构后，唯一性簇是一个高度为 m 的弱罗马曲面与 $\mathbb{D}^{N-m-2}$ 的笛卡尔积。此外，每个这样的集合都是某个严格三维非退化三点极值 *Pick* 问题的唯一性簇。

Proof: 设 $(\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3)$ 和 $(w_1,\ w_2,\ w_3)$ 是 $\mathbb{D}^N$ 中一个严格三维非退化极值 Pick 问题的数据。按照定理 16.1 后的注释，应用自同构并作相应化简。

根据 $[28, \text{第 } 3 \text{ 节} 1],$，存在 $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{D}$，它们不全共线；存在一点 γ属于 conv$(a_1, \ldots, a_k)$，以及 $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \mathbb{T}$，使得 Pick 问题的所有解 ϕ 都满足

$$\phi(\omega_1\lambda\varphi_{ta_1}(\lambda), \omega_2\lambda\varphi_{ta_2}(\lambda), \ldots, \omega_k\lambda\varphi_{ta_k}(\lambda), *) = \lambda\varphi_{t\gamma}(\lambda) \tag{93}$$

对于每个 λ，属于 $\mathbb{D}$ 且 $t \in (0, 1],$，其中 $*$ 表示其他变量可任意取值。由此可得，唯一性簇 $\mathcal{U}$ 包含由改变 t 和 λ所扫过的三维实集合。令 $\mathcal{U}$（$a_1, \ldots, a_k$）为其在 $\mathbb{D}^k$ 中的复化，所得复簇的维数为 2。这个复化可以显式求得。若 $\beta_j = [\frac{a_2 - a_1}{\bar{a}_2 - \bar{a}_1};\ \frac{a_2 - a_j}{\bar{a}_2 - \bar{a}_1}, \frac{a_j - a_1}{\bar{a}_2 - \bar{a}_1}]$，则 $\lambda\varphi_{ta_j}(\lambda) = \beta_j\ (\lambda\varphi_{ta_1}(\lambda)\ \lambda\varphi_{ta_2}(\lambda))$。因此，若我们令

$$\alpha_j = [-\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2\omega_j\frac{a_2 - a_1}{\bar{a}_2 - \bar{a}_1}; \omega_2\frac{a_2 - a_j}{\bar{a}_2 - \bar{a}_1}, \omega_1\frac{a_j - a_1}{\bar{a}_2 - \bar{a}_1}],$$

那么 $\alpha_3,\dots,\alpha_k \in \overline{\mathcal{M}}$，且 (93) 表明 $\mathcal{U}$（$a_1,\dots,a_k$）$\times \mathbb{D}^{N-k}$包含于 $\mathcal{U}$，其中

$$\mathcal{U}(a_1,\dots,a_k) := \{x \in \mathbb{D}^k : x_j = \alpha_j(x_1,x_2),\ 3 \le j \le k\}.$$

由于

$$\omega_2\frac{a_2-a_j}{\bar{a}_2-\bar{a}_1} + \omega_1\frac{a_j-a_1}{\bar{a}_2-\bar{a}_1}\bar{\omega}_1\omega_2 = \omega_2\frac{a_2-a_1}{\bar{a}_2-\bar{a}_1},$$

$\{\alpha_3,\dots,\alpha_k\}$构成一个弱边族。

因此，为了证明定理的第一部分，只需证明 $\mathcal{U}$实际上等于 $\mathcal{U}$(a_1，……，a_k)；为此，只需证明 $\mathcal{U}$包含于一个二元全纯映射的图中。

我们将根据构成包含 γ 的凸包的 a_j的数量进行归纳。具体而言，我们将证明如下命题：若对于某个 $n \le k$，有 $\gamma \in$conv(a_1，……，a_n)，其中 a_1、a_2和 a_3两两不同，并且

$$F(\lambda\varphi_{a_1}(\lambda),\dots,\lambda\varphi_{a_n}(\lambda)) = \lambda\varphi_\gamma(\lambda) \tag{94}$$

对于某个 $F \in \mathcal{O}(\mathbb{D}^n,\ \mathbb{D})$，则存在有限多个 $F_j \in \mathcal{O}(\mathbb{D}^n,\ \mathbb{D})$，它们满足（94），且交集 $\cap_j\{F_j = F\}$ 包含于一个由 x_1 和 x_2构成的全纯映射的图中。当 $n = 3$ 时，该断言由引理 16.2 的第（ii）部分得到：$\phi_1 = \phi_2$ 所在的集合是一个代数曲面，因此与集合 $\mathcal{U}$(a_1，a_2，a_3)一致，而后者是 α_3的图。令 $n > 3$。经过坐标置换，不妨设 $\gamma \in$conv(a_1，……，a_{n-2}，a_{n-1})，并且当 $s > 0$ 足够小时，$\gamma \in$conv(a_1，……，a_{n-2}，$(1-s)a_{n-1} + sa_n$)。

根据引理 16.2 (i)，存在 $F_s \in b\mathcal{M}$，使得 F_s($\lambda\varphi_{a_{n-1}}$(λ) $\lambda\varphi_{a_n}$(λ)) =$\lambda\varphi_{(1-s)a_{n-1}+sa_n}$($\lambda$)。将归纳假设应用于 $\{a_1,\dots,a_{n-2},(1-s)a_{n-1}+sa_n\}$，我们可以找到满足以下条件的函数 $F_{j,\ s}$

$$F_{j,s}(\lambda\varphi_{a_1}(\lambda),\dots,\lambda\varphi_{a_n-2}(\lambda),\lambda\varphi_{(1-s)a_{n-1}+sa_n}(\lambda)) = \lambda\varphi_\gamma(\lambda)$$

并且，这些集合的交集（在这些集合上它们都相等）包含于 x_1, x_2 的一张图中。对三个互不相同的较小正数 s 分别进行此操作，例如 s_1，s_2 和s_3。那么这些函数

$$F_{j_i;i}(z) := F_{j_i,s_i}(z_1,\dots,z_{n-2},F_{s_i}(z_{n-1},z_n)),$$

$i = 1$，2、3 和 $1 \le j_i \le p_i$构成了我们所要寻找的函数集。

确实，

$$\begin{aligned} & F_{j_i;i}(\lambda\varphi_{a_1}(\lambda),\ldots,\lambda\varphi_{a_n}(\lambda)) \\ &= F_{j_i,s_i}(\lambda\varphi_{a_1}(\lambda),\ldots,\lambda\varphi_{a_{n-2}}(\lambda),F_{s_i}(\lambda\varphi_{a_{n-1}}(\lambda),\lambda\varphi_{a_n}(\lambda))) \\ &= F_{j_i,s_i}(\lambda\varphi_{a_1}(\lambda),\ldots,\lambda\varphi_{a_{n-2}}(\lambda),\lambda\varphi_{(1-s)a_{n-1}+sa_n}(\lambda)) \\ &= \lambda\varphi_\gamma(\lambda); \end{aligned}$$

因此（94）成立。

所有 F_{j_1,s_1} （当 j_1 从 1 到 p_1变化时）都重合的集合，是 $\mathbb{C}^{n-1}$ 中的一个二维集合，它是关于 x_1 和 x_2 的图，由 $x_\ell = \beta_\ell(s_1,x_1,x_2)$ 给出，其中 $3 \le \ell \le n-1$。所有 $F_{j_1;1}$ 都重合的集合是三维的，因为我们要求 $F_{s_1}(x_{n-1},x_n) = \beta_{n-1}(s_1,x_1,x_2)$。

由于 $F_{s_1} \neq F_{s_2}$，所有 $F_{j_2;2}$ 也重合的集合将低一维，并满足以下约束

$$\begin{aligned} F_{s_1}(x_{n-1},x_n) &= \beta_{n-1}(s_1,x_1,x_2) \\ F_{s_2}(x_{n-1},x_n) &= \beta_{n-1}(s_2,x_1,x_2). \end{aligned} \tag{95}$$

由于 $F_{s_i} \in b\mathcal{M}$，解（95）得到关于 x_{n-1} 和 x_n 的二次方程，其系数涉及 $\beta_{n-1}(s_1,x_1,x_2)$ 、 $\beta_{n-1}(s_2,x_1,x_2)$，以及 F_{s_1} 和 F_{s_2} 的参数。还要求

$$F_{s_3}(x_{n-1},x_n) = \beta_{n-1}(s_3,x_1,x_2)$$

将二次方程化为线性方程，因此 x_{n-1} 和 x_n 都是关于 x_1 和 x_2的函数。

现在我们可以去掉 a_j 互异这一假设。假设 $\{a_1,\ldots,a_m\}$是一个由互异点组成的极大集合，根据我们刚刚证明的结论，$\mathcal{U}(a_1, \ldots\ldots, a_m)$ 是一个关于 x_1 和 x_2的函数 G 的图。对于 $m+1$ 和 k之间的每个 ℓ，都存在某个 $p \in \{1,\ldots,m\}$ 使得 $a_\ell = a_p$。接着，我们令$G_\ell = G_p$，从而延拓 G。

为了证明定理的第二部分，只需证明每个弱罗马曲面都是唯一性簇，因为如果 $\mathcal{U}$ 是某个在 $\mathbb{D}^k$上的极值 Pick 问题的唯一性簇，我们只需在每个 μ_j 中附加 $N-k$个零点，就能得到一个定义在 $\mathbb{D}^N$ 上的问题，其唯一性集为 $\mathcal{U} \times \mathbb{D}^{N-k}$。

因此，取一个弱罗马曲面 $\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{D}^N : x_j = \alpha_j(x_1,x_2) \ \ 3 \le j \le N\}$，其中 α_j 构成一个弱边族。对 $\mathbb{D}^N$ 应用旋转自同构后，我们可以假设 $\alpha_j = [1;\ A_j, B_j]$ 且 $A_j + B_j = 1$。

根据 $[28, \text{第 } 3 \text{ 节}, 1]$, 对于任意 $a_1, \ldots, a_N$，其中 $\mathbb{D}$，以及开凸包 $\{a_i\}$ 中的任意 γ，都存在一个函数 $\Phi\colon \mathbb{D}^N \to \mathbb{D}$ 满足

$$\Phi(\lambda\varphi_{a_i}(\lambda)) = \lambda\varphi_\gamma(\lambda) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{D}. \tag{96}$$

由于 (96) 的右端是一个次数为 2 的布拉施克乘积，因此对于任意互不相同的三元组 λ_1、λ_2、λ_3，若令 $\mu_n = (\lambda_n\varphi_{a_i}(\lambda_n))$ 且 $w_n = \lambda_n\varphi_\gamma(\lambda_n)$，则将 μ_n 映射到 w_n 的三点问题是极值映射。根据前一部分，唯一性集等于 $\mathbb{D}^N$ 中的一个弱罗马曲面。

我们希望选取 $\lambda_1 = 0$ 和 $w_1 = 0$，并选取 a_j，使得

$$\begin{aligned} \frac{a_2 - a_1}{\bar{a}_2 - \bar{a}_1} &= 1 \\ \frac{a_2 - a_j}{\bar{a}_2 - \bar{a}_1} &= A_j. \end{aligned}$$

那么，根据引理 16.2，这个极值问题的唯一性簇将是 $\mathcal{L}$。

令 $r > 0$ 足够小。选取 a_2 足够小，令 $a_1 = a_2 - r$，并令 $a_j = a_2 - rA_j$。当 r 足够小时，所有点 a_j 都将位于 $\mathbb{D}$ 中。如果某个 A_j 不是实数，则 a_1、a_2、a_j 不共线，于是我们可以在所有 a_i 的开凸包中找到某个 γ。因此，根据引理 16.2，这个极值问题的唯一性簇将是 $\mathcal{L}$。

如果每个 A_j 都是实数，那么每个 α_j 都会属于 $\overline{\mathcal{M}} \setminus \mathcal{M}$，根据弱罗马曲面的定义，至少有一个必须属于 $\mathcal{M}$。□

17 结论与开放问题

我们证明了，在多圆盘的代数子簇中，Carath´eodory 集恰好就是全测地集。除自同构外，这类集合都可表示为圆盘乘积与罗马曲面上的图。

罗马曲面对理解多圆盘的复几何至关重要。我们还证明，弱罗马曲面（可能与一个多圆盘作乘积）会作为严格三维、非退化的三点极值 Pick 问题的唯一性集出现。

我们的主要结果——Carath´eodory 集合的分类 $V \subseteq \mathbb{D}^N$——的证明分为几个阶段，因为必须同时控制若干局部与整体现象。最简单的情形是 V 的维数

为 1，因为这时不存在罗马曲面。其次简单的情形是余维为 1，因为这时证明中没有步骤 4。接下来是维数或余维为 2 的情形，因为此时步骤 4 较为简单。一旦达到 $\mathbb{D}^6$，那里的辐角基本上与所有更高的 N 情形相同。

以下是作者未能回答的一些问题。

1. 我们一直假设 V 是代数集合与多圆盘的交集。这样做是为了在局部参数化 V 时，能够确定这些函数是纳什函数，从而更容易处理。但实际上，它们最终证明是 $\mathcal{M}$ 中的有理函数，这说明这一假设或许并非必要。若只要求 V 是 $\mathbb{D}^N$ 的全纯子簇，定理 1.4 是否仍然成立?

2. 高度 1 的罗马曲面在 $\mathbb{D}^3$ 的某个自同构作用下都等价于 $\mathcal{K}$。我们知道，除了是 Carathéodory 集合之外，它们还是 3 点插值问题的唯一性集。$\mathcal{K}$ 的函数论十分引人入胜。下面提出三个问题，后一个问题比前一个更强。

(a) $\mathbb{D}^3$ 是 $\mathcal{K}$ 的 3-延拓集吗? 这意味着，若 $\mathcal{K}$ 中有点 λ_1，λ_2，λ_3，$\mathbb{D}$ 中有点 w_1，w_2，w_3，且存在全纯函数 $\phi\colon \mathcal{K} \to \mathbb{D}$，使得对每个 j 都有 $\phi(\lambda_j) = w_j$，那么是否存在一个全纯函数 $\Phi : \mathbb{D}^3 \to \mathbb{D}$，也将每个 λ_j 映射到 w_j? (b) $\mathbb{D}^3$ 是 $\mathcal{K}$ 的延拓集吗? 也就是说，它对每个 n 都是 n-延拓集吗? (c) $\mathcal{K}$ 是否存在 Andô 不等式? Andô 不等式断言：只要 T_1，T_2，T_3 是希尔伯特空间上的可交换算子，且每个算子的范数都小于 1，并满足方程 $T_1 + T_2 + T_3 = T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3$，那么对于任意多项式 p，都有 $\|p(T)\| \leq \|p\|_{\mathcal{K}}$。

$\mathbb{D}^3$ 的代数子集存在一种二分情形：要么每个具有扩张性质的集合都是收缩，要么每个 Carath´eodory 集合都具有扩张性质。解决 (b) 即可确定这两种说法中哪一种成立。

3. 无论 (a)–(c) 对 $\mathcal{K}$ 的答案是什么，这些答案是否适用于 $\mathbb{D}^N$ 中的每个罗马曲面?

18 符号索引

符号用法$[\tau;\ A,B]\,(x_1,x_2)\ \mapsto \tau^{\frac{Ax_1+Bx_2+x_1x_2}{1+Bx_1+Ax_2}}\mathcal{M}$ $\{[\tau;\ A,B]\colon\ |\tau|=1,(|A|,|B|,1)$ 是三角形的$\}\kappa$ $[1;\ -1,-1]\mathcal{K}$ $\{(x_1,x_2,x_3)\ \in\mathbb{D}^3\colon x_1+x_2+x_3=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3\}\alpha_j^i$ $\frac{\partial\alpha_j}{\partial x_i}(0)T\ \alpha_j\ x_1\ \dots\ x_d$ $\{\underline{\omega}\in\mathbb{T}^d\ \ |\sum_{i=1}^d\alpha_j^i\omega_i|<1\}(\,(\,,\,))\colon()\cap_{j=d+1}^N T(\alpha_j)\,\hat{}\,T\ \alpha_j(x_1,x_2))\,\{\omega_2\colon\ (1,\omega_2)\ \in T(\alpha_j)\}D_{\alpha_j}$ $\{x\in\mathbb{D}^2\colon\ |\alpha_j(x)|<1\}D(\alpha_j(x_1,x_2))\,\{\zeta\in\mathbb{D}\colon\ |\alpha_j^1+\alpha_j^2\zeta|<1\}\varphi_\mu\ \ \mathbb{D}\to\mathbb{D}$ $z\mapsto\frac{z-\mu}{1-\bar{\mu}z}\colon\colon\Phi_a\ \ \mathbb{D}^N\to\mathbb{D}^N$ $\Phi_a\ x_1\ \dots(\,,\,,x_N)\ =(\varphi_{a_1}(x_1)\dots,\varphi_{a_N}(x_N))\tilde{\alpha}_j(x_1,\dots,x_d)\ \varphi_{\alpha_j(a_1,\dots,a_d)}\circ\alpha_j(\varphi_{-a_1}(x_1)\dots,\varphi_{-a_d}x_d)$ ——

19 人工智能披露

在最初证明定理以及撰写本文初稿时，我们完全没有使用人工智能，绘制图片除外。论文完成后，我们用人工智能检查了一遍，发现了几处漏洞和不一致之处，并已予以修正。唯一一处较大的改动出现在第 13 节的证明中：我们意识到，引理 13.1 和 13.2 比原先的辐角更直接地证明了引理 4.14。意识到这一点后，我们提出了引理 13.1，随后使用人工智能完成了引理 13.1 的证明。

对于我们使用的人工智能模型而言，这个证明过于复杂，无法判断它是否认为完整证明正确。作者相信该定理是正确的，并且我们已经给出了完整证明，不过我们也承认，在任何篇幅如此之长、复杂度如此之高的人工撰写论文中，都可能存在一些小错误。我们对本文的一切内容负全部责任。

致谢： 第一作者感谢 Jakub Byszewski 富有益处的讨论。

参考文献

[1] Jim Agler。算子理论与 Carath´eodory 度量。*InventionesMath.*, 101:483–500，1991年。[2] Jim Agler、 Lukasz Kosi´ński 和 John E. McCarthy。定义在 $\mathbb{C}^n$ 上的簇中的全纯函数的保范扩张。《泛函分析杂志》，283(9)：论文编号 109636，39 页，2022年。[3]Jim Agler、 Lukasz Kosi´ński 和 John E. McCarthy。全纯函数的完全保范扩张。*Israel J. Math.*，255(1)：251–263，2023年。[4] Jim Agler、Zinaida Lykova 和 Nicholas Young。对称化双圆盘中的测地线、收缩及保范扩张性质。*Mem. Amer. Math. Soc.*，258(1242)：vii+108，2019年。[5] Jim Agler 和 John E. McCarthy。特征簇。*Acta Math.*，194(2)：133–153，2005年。[6] Jim Agler 和 John E. McCarthy。来自双圆盘子簇的全纯函数的保范扩张。《数学年刊》（第 *2* 辑），157(1)：289–312，2003年。[7] Tsuyoshi Andˆo。关于一对交换压缩算子。*Acta Sci. Math.(Szeged)*，24：88–90，1963年。[8] Sibaprasad Barik、B. Krishna Das 和 Jaydeb Sarkar。有限秩交换压缩算子的等距膨胀与冯·诺伊曼不等式。《数学科学通报》，165：102915，25 页，2020年。[9] Tirthankar Bhattacharyya 和 Haripada Sau。对称化双圆盘上的全纯函数——实现、插值与扩张。《泛函分析杂志》，274(2)：504–524，2018年。[10] Filippo Bracci 和 Herv´e Gaussier。关于单位球中凸映射的 Muir-Suffridge 猜想的证明，位于 $\mathbb{C}^n$。*Math. Ann.*，372(1-2)：845–858，2018年。[11] Filippo Bracci、Herv´e Gaussier、Nikolai Nikolov 和 Pascal J. Thomas。具有

关于小林距离。《美国数学会汇刊》，377(1):471–493，2024年。[12] A. Brudnyi. 关于 H^∞极大理想空间上的Oka原理。《代数与分析》，31(5):24–89，2019年。.[13] C. Carath´eodory. 一种在解析函数理论中出现的特殊度量。宗座科学院会议录，Nuovi Lincei 80:135–141，1927年。[14] Henri Cartan. *S´Henri Cartan研讨班 1951/2*。W.A. Benjamin，纽约，1967年。[15] B. Krishna Das、Poornendu Kumar 和 Haripada Sau. 对称化双圆盘上的特征簇与Nevanlinna-Pick问题。《数学杂志》，310(3):论文第40号，29页，2025年。[16] Zofia Denkowska 和 Jacek Stasica. 波兰式半解析集合 `风格。Travaux en Cours丛书第69卷。Hermann，2008年。[17] Michael A. Dritschel、Daniel Est´evez 和 Dmitry Yakubovich. 解析一致代数在子簇上的迹与测试集族。《伦敦数学会杂志》（第二辑），95(2):414–440，2017年。[18]Anatolii Grinshpan、Dmitry S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi、Victor Vin- nikov 和 Hugo J. Woerdeman. 满足多变量冯·诺伊曼不等式的交换压缩算子组类。《泛函分析杂志》，256(9):3035–3054，2009年。[19] Kunyu Guo、Hansong Huang 和 Kai Wang. 多圆盘中的收缩及具有 H^∞扩张性质的解析簇。《几何分析杂志》，18(1):148–171，2008年。[20] Michael Hartz. 关于多圆盘上的冯·诺伊曼不等式。《数学年刊》，391(4):5235–5264，2025年。[21] L. F. Heath 和 T. J. Suffridge. 复 n空间中的全纯收缩。《伊利诺伊数学杂志》，25(1):125–135，1981年。[22] Xiao Jun Huang. 强拟凸点附近极值映射的保持原理及其应用。《伊利诺伊数学杂志》，38(2):283–302，1994年。

[23] Marek Jarnicki 和 Peter Pflug. 关于Carath´eodory伪距离乘积性质的一点说明。第53卷，第89–94页。1999年。第十二届解析函数会议（卢布林，1998年）。[24] Marek Jarnicki 和 Peter Pflug.《复分析中的不变距离与度量》，德格鲁伊特数学论丛第9卷。Walter de Gruyter GmbH & Co. KG，柏林，增订版，2013年。[25] Greg Knese. 多圆盘上的施瓦茨引理。《美国数学会会刊》，135:2759–2768，2007年。[26] Greg Knese. 一种精细的Agler分解及其几何应用。《印第安纳大学数学杂志》，60(6):1831–1841，2011年。[27] Shoshichi Kobayashi. 复流形上的不变距离与全纯映射。《日本数学会杂志》，19:460–480，1967年。[28] ˙Lukasz Kosi´nski. 多圆盘上的三点Nevanlinna-Pick问题。《伦敦数学会会刊》（第三辑），111(4):887–910，2015年。[29] ˙Lukasz Kosi´nski 和 John E. McCarthy. 有界全纯函数的保范延拓。《美国数学会汇刊》，371(10):7243–7257，2019年。[30] ˙Lukasz Kosi´nski 和 John E. McCarthy. 三圆盘上有界全纯函数的延拓。《伊比利亚美洲数学杂志》，36(3):791–816，2020年。[31] ˙Lukasz Kosi´nski 和 Wlodzimierz Zwonek. 扩张性质与通用集合。《加拿大数学杂志》，73(3):717–736，2021年。[32] L´aszl´o Lempert. Kobayashi度量与区域到球的表示。《法国数学会通报》，109:427–484，1981年。[33] L´aszl´o Lempert. 内在距离与全纯收缩。载于《复分析及其应用 *’81*（瓦尔纳，*1981*年）》，第341–364页。保加利亚科学院出版社，索非亚，1984年。[34] S. ˙Lojasiewicz.《复解析几何》。Birkh¨auser，波士顿，1991年。[35] Krzysztof Maciaszek. N维单位圆盘上的多项式延拓性质。《复分析与算子理论》，13(6):2771–2780，2019年。

[36] Krzysztof Maciaszek. 经典 Cartan 域 $\mathcal{R}_{II}$中的多项式延拓性质。《巴塞尔数学档案》，115(6):657–666，2020年。[37] Krzysztof Maciaszek. 关于多圆盘中三点 Pick 问题的唯一性簇几何。《数学科学通报》，188:论文编号 103337，12页，2023年。[38] Vladimir Markovic. Teichmüller 空间上的 Carath´eodory 度量与L形枕头套。《杜克数学杂志》，167(3):497–535，2018年。[39] Curtis T. McMullen、Ronen E. Mukamel 和 Alex Wright. 三次曲线与模空间中的全测地子簇。《数学年刊》（第 *2* 辑），185(3):957–990，2017年。[40] David Mumford. 代数几何 *I*，数学科学基础丛书第 221 卷。施普林格出版社，柏林—纽约，1976年。复射影簇。[41] Nikolai Nikolov 和 Pascal J. Thomas. Lempert 函数的拟三角不等式。《复分析协同》，12(1):论文编号 3，9页，2026年。[42] Sourav Pal 和 Orr Moshe Shalit. 对称化双圆盘中的谱集与特殊簇。《泛函分析杂志》，266(9):5779–5800，2014年。[43] Walter Rudin. 多圆盘函数论。W. A. Benjamin 出版社，纽约—阿姆斯特丹，1969年。[44] Nessim Sibony. 有界全纯函数的延拓与 Carath´eodory 度量。《数学发明》，29(3):205–230，1975年。[45] Piotr Tworzewski. 解析集与线性子空间的交集。《比萨高等师范学校科学类年刊》（第 *4* 辑），17(2):227–271，1990年。[46] John von Neumann. 关于酉空间一般算子的谱理论。《数学通讯》，4:258–281，1951年。