迈向更快的弦图顶点删除参数化算法

Sylvain Guillemot

arXiv:2611.28948v1 [cs.DS] 21 Nov 2026

摘要

弦图顶点删除（ChVD）问题询问：能否通过删除至多 k 个顶点，将输入图 G变为弦图。当 k 作为参数时，已知该问题是固定参数可解的 [1, 2]。然而，ChVD 是否存在单指数固定参数算法仍未解决；也就是说，是否存在一个运行时间为$O(\alpha^k|V(G)|^c)$的算法，其中常数 α 与 k 无关。为此，我们描述了一种用于 ChVD 压缩版本的固定参数算法，其具体如下。给定一个不相交弦图顶点删除压缩问题的实例 $I = (G, k, X)$，满足$|X| = k + 1$, $G - X$ 是弦图，且其最长无弦路径的长度为 L，我们可在时间 $O((L + 1)^{3k}k^2|V(G)|^4)$ 内求解 I。

1. 引言

背景。 设 $\mathcal{C}$ 是一个图的遗传类。给定一个图 G 和一个整数 k， $\mathcal{C}$ 顶点删除问题询问是否存在一个大小至多为 k 的集合 $X \subseteq V(G)$，使得 $G - X$ 属于 $\mathcal{C}$。当类 $\mathcal{C}$ 可在多项式时间内识别时，自然会进一步询问：以 k 为参数的 $\mathcal{C}$ 顶点删除问题是否固定参数可解。若 $\mathcal{C}$ 可由有限多个障碍 [3], 刻画，答案总是肯定的；但对于障碍无界的类，这个问题并不简单。在这种情形下，已有许多肯定结果（近期的一些结果见 [4]），但也有不少否定结果 [5, 6]，此外，一些重要类的相关问题仍悬而未决。

这一类问题中最简单、研究最广泛的或许是反馈顶点集问题（FVS），它对应于当 $\mathcal{C}$ 为森林类时的 $\mathcal{C}$ 顶点删除问题。该问题是参数化复杂性中若干标准方法的试验场，例如有界搜索、树宽和迭代压缩。FVS 问题有多种单指数固定参数算法 [7, 8, 9, 10, 11]。可以说，弦图类可视为森林的一种扩展，并具有类似的刻画：单纯序的存在性 [12, 13], 、团树给出的分隔器布局 [14, 15], ，以及由无弦环构成的障碍。然而，证明弦图顶点删除问题（ChVD）具有固定参数可处理性，比 FVS 困难得多。首个 ChVD 固定参数可解算法由 [1], 提出，采用了树宽约简和 Courcelle 定理。 [2] 的改进算法给出了一种有界搜索

$O^*(k^{O(k)})$ 时间算法，适用于一个更一般的问题，该问题除了允许顶点删除外，还允许边编辑。

电子邮箱地址： guillemo@free.fr（Sylvain Guillemot）

[16, 17] 也为弦图顶点删除问题构造了多项式核。值得注意的是，先前的算法采用了迭代压缩，这如今已成为图修改问题的固定参数可解算法中的一种标准技术。由于反馈顶点集问题存在利用迭代压缩的单指数固定参数算法，这就引出了一个问题：对于更一般的弦图顶点删除问题，是否也存在同样的算法?

我们的结果。 虽然我们没有解决这个问题，但我们朝着肯定的答案迈出了新的一步。我们回顾一下，在迭代压缩的框架下，我们需要求解不相交弦图顶点删除压缩（D-ChVD）问题。D-ChVD 的一个实例是一个元组 $I = (G, k, X)$，由一个弦图 G、一个整数 k以及一个大小为 k 的弦图调节集 [1] $X \subseteq V(G)$ 构成。实例 I 为肯定实例，当且仅当存在一个与 X 不相交且大小至多为 $k-1$ 的弦图调节集 $S \subseteq V(G)$。我们用 L 表示 $G-X$ 中无弦路径的最大长度。由于 G 中的无弦环长度至多为 $(L+1)k$，因此我们可以通过分支，在 $O^*(((L+1)k)^k)$ 时间内直接求解 D-ChVD。然而，即使在 $L = 1$，也就是 $G - X$ 为无边图时，将其改进为单指数时间也颇具挑战。本文给出如下算法结果。

定理 1. 不相交弦图顶点删除问题可在 $O((L+1)^{3k}k^2|V(G)|^4)$ 时间内求解。

高层次描述。下面解释我们算法背后的高层次思路。我们求解以下辅助问题 D-ChVD2。该问题的一个实例是元组 $I = (G, k, X, Y)$，其中 X, Y 是 $V(G)$ 和 $|X| = k$ 的不相交子集。实例 I 的一个解是与 $X \cup Y$ 不相交的集合 $S \subseteq V(G)$，使得 $|S| < k$，且 $G - S$ 是弦图。这里， X 是原始弦图调节集，而 Y 是一个强制顶点集合，这些顶点必须不属于解。我们还令 $W' = X \cup Y$, $Z = V(G) - W'$ 和 $V' = Y \cup Z$。我们通过以下方式进行分支来求解 D-ChVD2。如果 $G[W']$ 不是弦图，则拒绝。否则，我们在 $G - X$ 中识别一条特定的无弦路径 P，称为候选路径，并在至多 $L+1$ 种可能性上进行分支：(B_1) 对每个 $v \in V(P) \cap Z$，我们将 v 纳入解；(B_2) 我们将 $V(P)$ 加入 Y。候选路径有两种类型，称为类型 1 路径和类型 2 路径。

接下来我们定义这两类候选路径。首先定义类型 1 候选路径。 G 中的洞是长度至少为 4 的无弦环 H 。V'-片段是 H 中包含在 V'内的 H 的极大子路径。回想一下，由于 X 是弦图调节集，因此我们有 $V(H) \cap X \neq \emptyset$，从而 H 不能包含在 V'中。若存在 G 中的一个洞 H，满足 (a) P 是 H的一个 V'-片段；(b) 对于每个不同于 P的 H 的 Q V'-片段，我们都有 $V(Q) \subseteq Y$，则候选路径 P 属于类型 1。现在定义类型 2 候选路径。考虑一对 $p = (x, x')$，其中 $x, x' \in X$ 不相邻。若存在 $G[W']$中的无弦(x, x')-路径 Q，使得 $V(Q) \cap Y \neq \emptyset$，则称 p 在 I 中 Y-连通。我们将 $\mathcal{S}_I$ 定义为这样的对(x, x')的集合：其中 $x, x' \in X$ 不相邻，且在 I中不 Y-连通。当且仅当 $V(P) \subseteq V'$ 且存在$(x, x') \in \mathcal{S}_I$，使得 xPx' 是 G中的一条无弦路径时，候选路径 P 属于类型 2。

算法的具体细节。 每一步中候选路径的选择遵循以下准则。回顾一下，如果 $G = (V, E)$ 是弦图，则一个枚举 $\sigma =$

[1] G 的弦图调节集是一个集合 $X \subseteq V$（G），使得 $G - X$ 是弦图。

$v_1v_2\dots v_n$的 G是 G的完美消去序，当且仅当对于每个 p, q, $r\in[n]$满足 p, $q>r$时，如果 $v_pv_r\in E$且 $v_qv_r\in E$，则 $v_pv_q\in E$。在下文中，我们假设已经固定了 $G[V']$的一个 σ完美消去序。接着，我们通过以下方式定义标记 l：对每个 $i\in[n]$，令 $l(v_i)=i$；给定一个集合 $S\subseteq V'$，令 $l(S)=\max_{v\in S}l(v)$。如果存在类型 1 候选路径，我们任意选择一条。另一方面，如果存在类型2候选路径，我们选择一条满足 $l(V(P))$ 最小的候选路径 P。我们在第4节中证明，寻找这样的候选路径可以在多项式时间内完成。需要注意的是，尽管这样的路径可能有指数多个，但我们可以对它们进行紧凑描述，从而能够在 $O(k^2n^4)$ 时间内找到一条。

下面解释类型 2 候选路径定义背后的原因。假设 $G[W']$ 是弦图，并考虑 G中的 H 洞。在这种情况下，H 必然包含一个V'-片段 P，使得 $V(P)\cap Z\neq\emptyset$。此外，(a) P要么是类型 1 候选路径，要么 (b) 存在不相邻的 $x,x'\in X$，使得 xPx'是 H的子路径。然而，在情况 (b) 中，P可能不满足类型 2 候选路径的条件，因为 $(x,x')\notin\mathcal{S}_I$。此时，由于 x,x'在 I中是 Y-连通的，我们可以在 $G[W']$ 中找到一条无弦的 (x,x')-路径 Q，其中包含 Y的一个顶点。我们认为，适当选择 H和 P后，就可以利用路径 Q“缩短”洞 H，从而得到 G中的 H'洞，使得 $|V(H')\cap Z|<|V(H)\cap Z|$。这正是定理 3 的目的，该定理在第 5 节中证明。选择候选路径的准则在这里至关重要，最终它保证，只要 G 不是弦图，我们就能找到一条类型 1 或类型 2 候选路径。

度量。显然，在每个分支步骤 (B_1) 中，参数 k 都会减少 1，但在分支步骤 (B_2) 中是否取得进展并非显而易见。下面详细说明。注意，若 P 是一条类型 1 候选路径，则分支 (B_2) 会直接拒绝，因为将 $V(P)$ 加入 Y 后，我们会在 $G[X\cup Y]$ 中得到一个洞 H。另一方面，若 P 是一条类型 2 候选路径，且 (B_2) 考虑新实例 I'，则存在一对 $(x,x')\in\mathcal{S}_I$，它们在 I 中并非 Y-连通，但在 I' 中变为 Y-连通。这使我们能够定义一个度量 $s(I)$，使其在每个分支 (B_2) 中至少减少 1；因此，全局度量 $m(I)=s(I)+k$ 在每个分支 (B_1) 或 (B_2) 中都至少减少 1。一个粗略的上界给出 $s(I)=O(k^2)$，但实际上我们可以得到界 $s(I)\leq 2k$，如第 6 节的定理 4 所示。这就得到一个全局度量 $m(I)\leq 3k$，它在每个分支中至少减少 1。由于每一步至多沿 $L+1$ 个方向分支，因此可直接得到所声称的 $O^*((L+1)^{3k})$ 运行时间。

2. 定义

我们用记号 $[n]$ 表示从 1 到 n 的整数集合，用记号 $\mathbb{N}$ 表示整数集合。

图。我们用 $G=(V,E)$ 表示一个图，其中 V 是其顶点集，E 是其边集。我们使用记号 $V(G)$，分别地，$E(G)$，来指代集合 V，分别地，E。如果 $uv\in E$，则称 u、$v\in V$ 在 G 中相邻。设 $G'=(V',E')$ 是另一个图。如果 $V'\subseteq V$ 且 $E'\subseteq E$，则称 G' 是 G 的子图。如果 $V'\subseteq V$ 且 $E'=\{e\in E\colon e\subseteq V'\}$，则称 G' 是 G 的诱导子图。给定 $S\subseteq V$，我们用 $G[S]$ 表示 G 中顶点集为 S 的诱导子图，并用 $G-S$ 表示 G 中顶点集为 $V-S$ 的诱导子图。给定 $S\subseteq V$，在 G 中收缩 S 会生成子图 G/S，其顶点集为 $V'=V-S+\{z\}$，边集为

$E' = \{uv \in E:\ u,\ v \in V-S\} \cup \{uz:\ u \in V-S$，并且存在 $v \in S$ 使得 $uv \in E\ \}$.

G中的游走是满足 $z_iz_{i+1} \in E$对每个 $i \in [L-1]$均成立的顶点序列 $W = z_1z_2\ldots z_L$；我们用 $V(W) = \{z_1, z_2, \ldots, z_L\}$表示 W中的顶点集合 I，用$W(=)\{z_2, \ldots, z_{L-1}\}$表示 W中的内部顶点集合 E，并用$W(=\{z_iz_{i+1})\ 1 \le i < L\}$表示 W中的边集合 z_1。如果顶点 z_L..... W互不相同，则 G是$|W| = L$中长度为 z_1的路径。如果顶点 z_{L-1}..... $z_L = z_1$互不相同且 W，则 G是 $|W| = L-1$中长度为 W的环。 z_iz_j的弦是形如 i的边，其中 j和 W不相邻；如果 u没有弦，则称其为无弦的。给定两个顶点 $v \in V$和u，v中的一条（ G， G）-路径是 u 中以 v开始并以 $W = z_1z_2\ldots z_L$ 结束的路径。如果 $1 \le i \le j \le L$是路径或环且 $W[z_i, z_j]$，则将子路径 $z_iz_{i+1}\ldots z_j$定义为路径。

给定 $S \subseteq V$，我们定义 $N_G(S) = \{u \in V-S:$ 存在一条边$uv \in E$，其端点为 $v \in S\}$; 并定义扩展邻域 $N_G[S] = S \cup N_G(S)$。若$v \in V$，则将 $N_G(\{v\})$ 简写为 $N_G(v)$，并将 $N_G[\{v\}]$ 简写为 $N_G[v]$。 G 的团是由 G中两两相邻的顶点组成的集合。 G 的分离是V的一个有序划分 (A, S, B)，其中 A、B 非空，且不存在一条边 $ab \in E$，其端点分别为 $a \in A$、$b \in B$。图 G 非连通，当且仅当它存在形如 $(A, \emptyset, B)$ 的分离；否则它是连通的。 G 的一个连通分量是 G的极大连通子图。图是树，当且仅当它是连通的且不包含环。

弦图。 G中的一个洞 是 G 中长度至少为 4 的无弦环。图 G 是弦图，当且仅当 G中不存在洞。顶点 $v \in V$ 在 G 中是单纯的，当且仅当 $N_G[v]$是 G的团。设 $\sigma = v_1v_2\ldots v_n$ 是 V的一个排序。若对于每个 $i \in [n]$， v_i 在 $G[\{v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n\}]$中都是单纯的，则称 σ 是 G 的完美消去序 。等价地， σ 是完美消去序，当且仅当对于满足 p， $q > r$的每个 p, q， $r \in [n]$，若$v_pv_r \in E$ 且 $v_qv_r \in E$，则 $v_pv_q \in E$。众所周知，图是弦图，当且仅当它存在一个完美消去序 [12, 13]。此外，可以在线性时间内找到弦图的完美消去序 [18]。

树族是一个元组 $\mathcal{T} = (T, \{T_v:\ v \in V\})$，其中 T是一棵树，且每个 T_v 都是 T的一棵子树，即 T的一个连通子图。我们称 $\mathcal{T}$是 G的团树，如果满足以下条件：对于每个 $u, v \in V$，当且仅当 $uv \in E$时，有 $V(T_u) \cap V(T_v) \neq \emptyset$。已知，一个图是弦图，当且仅当它存在一棵团树 [13, 15]。设 $\mathcal{T}$是 G的一棵团树。对于每个 $x \in V(T)$，令 $C_x^{\mathcal{T}} = \{v \in V:\ x \in V(T_v)\}$，那么每个集合$C_x^{\mathcal{T}}$都是 G的一个团，并且 G 的每个极大团都具有如下形式： $C_x^{\mathcal{T}}$，其中 $x \in V(T)$。考虑 T的一条边 $e = xy$，并令 C （分别为 C'）表示$T - e$中包含 x（分别包含 y）的连通分量。接着，我们定义 G的分离 $S_{xy}^{\mathcal{T}} = (A, S, B)$，其中$A = \{v \in V:\ T_v \subseteq C\}, B = \{v \in V:\ T_v \subseteq C'\}$，且 $S = \{v \in V:\ T_v$包含 $x, y\}$。

3. 算法

3.1. 辅助结果

为了满足算法的需要，我们考虑以下辅助问题：除了弦图调节集 X 外，还给定一个由 Y 强制 顶点组成的集合。

名称： D-ChVD2**输入：** 一个实例 $I = (G,\ k,\ X,\ Y)$，其中 $G = (V,\ E)$ 是一个图， $k \in \mathbb{N}$ 是一个整数， X， Y 是 V 的不相交子集，满足 $\lvert X\rvert = k$，且 $G - X$ 是弦图**解：** 一个与 $X \cup Y$ 不相交的集合 $S \subseteq V$，满足 $\lvert S\rvert < k$，且 $G - S$ 是弦图

固定一个 D-ChVD2 实例 $I=(G,k,X,Y)$。令 $W'=X\cup Y$、 $Z=V-W'$ 和 $V'=Y\cup Z$。以下假设我们有一个固定的 $G[V']$ 的完美消去序 $\sigma=v_1\dots v_n$。我们定义标记 l，令 $l(v_i)=i$，对每个 $i\in[n]$ 均如此。给定 $S\subseteq V'$，令 $l(S)=\max_{v\in S} l(v)$。如果 P 是一条路径，我们将 $l(V(P))$ 简记为 $l(P)$。如果 H 是 G 中的一个洞，且 $S\subseteq V$，那么 H 的一个 S-片段是包含在 S 中的 H 的极大子路径。给定 H 的一组 S-片段，片段 $P\in\mathcal{F}$ 是 l-极小的，当且仅当对每个 $P'\in\mathcal{F}-\{P\}$，均有 $l(P)<l(P')$。

给定两个顶点 $x,x'\in X$ 和一个集合 $S\subseteq V$，当且仅当在 G 中存在一条无弦的（x,x'）路径 Q，且该路径包含一个属于 S的内部顶点时，我们称 x,x' 在 G中是 S-连通的。若 $y\in V$，我们使用“y-连通”这一说法表示“$\{y\}$-连通”。注意，x,x' 在 G 中是 S-连通的，当且仅当存在某个 $y\in S$，使得它们在 G 中是 y-连通的。令 $\mathcal{P}_I$ 为满足以下条件的有序对（x,x'）的集合：$x,x'\in X$ 与 x,x' 不相邻；令 $\mathcal{S}_I$ 为满足以下条件的有序对（x,x'）的集合：$\in\mathcal{P}_I$ 且 x,x' 不在 $G[W']$中 Y-连通。

设 P 是 $G[V']$中的一条无弦路径。当且仅当在 G 中存在一个洞 H，满足：(a) P是 H的一个 V'-片段；(b) 对于每个不同于 P的 H 的 Q V'-片段，我们都有 $V(Q)\subseteq Y$，此时称 P 为（在 I中的）类型 *1* 候选路径 。当存在某个（x,x'）$\in\mathcal{S}_I$，使得 xPx' 是 G中的一条无弦路径时，称 P为（在I中的）类型*2*候选路径 。若 P是类型 1 或类型 2 候选路径，则称其为（在 I中的）候选路径 。下文中，当实例 I 的含义明确时，我们将简称候选路径。

我们首先考虑寻找候选路径的问题。第4节中证明的以下定理旨在解决这一问题。

定理 2. 我们有一个 *FindCandidatePath*算法，它接受一个 *D-ChVD2* 实例 $I=(G,k,X,Y)$，并在 $O(k^2|V(G)|^4)$ 时间内，要么找到一条类型 *1* 候选路径，要么找到一条大小最小的类型*2*候选路径，或者得出不存在候选路径的结论。

我们需要确保，只要 G 不是弦图，就能找到一条候选路径。若实例 I满足以下条件，我们就称其为良构：对于每个 $(x,x')\in\mathcal{P}_I-\mathcal{S}_I$，对于 $G[V']$ 中满足 xPx'无弦的每条路径P，都存在 $y\in Y$，使得 x,x'在 $G[W']$ 中是 y-连通的，并且 $l(y)\le l(P)$。本质上，选择一条类型 2 最小候选路径的方式，将确保我们的实例在每一步都是良构的。我们将依赖第 5 节中证明的以下定理。

定理 3. 假设 I 是良构的，且 $G[W']$ 是弦图。令 H 为 G 中的一个洞，使得 $|V(H)\cap Z|$ 最小。令 $\mathcal{F}$为路径 P的集合，其中这些路径是 H的 V'-片段，且满足 $V(P)\cap Z\neq\emptyset$。以下二者之一成立：*(a)* $\mathcal{F}=\{P\}$，且 P是一个类型 *1* 候选路径；或 *(b)* $|\mathcal{F}|\ge 2$，并且对于 $P\in\mathcal{F}$ l-极小的情形，我们有 P 类型*2*候选路径。

我们需要证明递归深度至多为 $3k$。模型是一个元组 $\mathcal{M}=(X,G,\mathcal{T})$，其中 $G=(V,E)$ 是弦图，$X\subseteq V$以及 $\mathcal{T}$是 G的团树。令 $Y=V-X$，并假设我们有 $\mathcal{P}=(C_1,C_2,\dots,C_p)$ 对 Y的有序划分。$\mathcal{P}$ 的长度为 $|\mathcal{P}|=p$。令 $Y_0=\emptyset$，并且对于每个 $i\in[p]$，令 $Y_i=\cup_{j\le i}C_j$。如果对于每个 $i\in[p]$，都存在 $x,x'\in X$，使得 x,x'在 $G[X\cup Y_{i-1}]$ 中不是 Y_{i-1}-连通的，并且 x,x' 在 $G[X\cup Y_i]$中是 Y_i-连通的，则称 $\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{M}$ 的渐进划分。我们将需要以下在第 6 节中证明的定理。

定理 4。 令 $\mathcal{M}=(X,G,\mathcal{T})$ 为一个模型，并令 $\mathcal{P}$ 为 $\mathcal{M}$的渐进划分。则 $|\mathcal{P}|\leq 2|X|$。

3.2. 算法的陈述与证明

现在，我们可以完成对引言中陈述的定理 1 的证明。若 $I=(G,k,X,Y)$ 中的 $k=0$ 或 $G[X\cup Y]$ 不是弦图，我们就称该实例为平凡的否定实例 。我们通过以下递归算法求解 D-ChVD2 问题。

算法 1 SolveDChVD(I)

1: 假设 $I=(G,k,X,Y)$ 满足 $G=(V,E)$，且 $k\in\mathbb{N}$
2: 令 $W'=X\cup Y$，并令 $Z=V-W'$
3: **若** $k=0$ 或 $G[X\cup Y]$ 不是弦图**则** 返回 false
4: $P\leftarrow$FindCandidatePath(I)
5: **如果** $P=\perp$ **则**返回 true
6: 令 $I'=(G,\ k,\ X,\ Y\cup V(P))$
7: $r\leftarrow$SolveDChVD(I')
8: **如果** r **则**返回 true
9: **对于** $v\in V(P)\cap Z$ **执行**
10: 令 $I'=(G-v,\ k-1,\ X,\ Y)$
11: $r\leftarrow$SolveDChVD(I')
12: **若** r **则** 返回 true
13: **结束 for 循环**
14: 返回 false

我们通过以下三个引理证明算法 1 的正确性，并以定理 1 的证明作结。

引理 1. 假设我们考虑调用 *SolveDChVD*(I) ，其中 I 良构，并考虑一个子调用 *SolveDChVD*(I') ，其中 I' 并非显然为否定的。那么 I' 良构。

证明。对于第 11 行中的子调用，这显然成立。考虑第 7 行中的子调用。令 $I'=(G,k,X,Y')$，其中 $Y'=Y\cup V(P)$，并令 $W''=X\cup Y'$。注意，如果 P 是类型 1 候选路径，那么 I' 将显然为否定；因此， P 是类型2候选路径。考虑一对 $(x,x')\in\mathcal{P}_{I'}-\mathcal{S}_{I'}$。于是我们有 $x,x'\in X$ 在 G 中不相邻，并且 x,x' 在 $G[W'']$ 中是 Y'-连通的。

情形 1： x， x'在 $G[W']$中是 Y-连通的。因此有 $(x,\ x')\in\mathcal{P}_I-\mathcal{S}_I$。考虑 $G[V']$ 中的一条路径 R，使得 xRx' 无弦。由于 I 是良构的，我们有 $y\in Y$，使得 $x,\ x'$在 $G[W']$ 中是 y-连通的，并且 $l(y)\leq l(R)$。由于 $W'\subseteq W''$ 和 $Y\subseteq Y'$，我们还可得 $y\in Y'$，使得 $x,\ x'$在 $G[W'']$ 中是 y-连通的，并且 $l(y)\leq l(R)$。

情形 2： $x,\ x'$在 $G[W']$中不是 Y-连通的。由于它们在 $G[W'']$中是 Y'-连通的，我们找到 $y\in V(P)$，使得 $x,\ x'$在 $G[W'']$中是 y-连通的。考虑 $G[V']$中的一条路径 R，使得 xRx' 无弦。由于 $(x,\ x')\in\mathcal{S}_I$，我们有 R，它是实例 I 的类型 2 候选路径。根据 P 的选取，我们有 $l(P)\leq l(R)$，因此 $l(y)\leq l(R)$。□

引理 2. 假设我们考虑调用 *SolveDChVD*(I) ，其中 I 良构且该调用会终止。如果 *SolveDChVD*(I) 返回 *true*，那么 I 就是 *D-ChVD2* 的一个正实例。

证明。我们对调用树的高度进行归纳。

假设该调用在第 5 行退出。根据定理 2，我们知道 I 不存在候选路径。根据定理 3，必然有 G 是弦图。因此， $S=\emptyset$ 是 I 的一个解。

假设该调用在第 8 行退出。我们考察了带有 $Y'=Y\cup V(P)$ 的实例 $I'=(G,\ k,\ X,\ Y')$。由于 SolveDEChVD(I') 返回了 true，因此该实例并非显然为否定；根据引理 1，我们推知 I' 是良构的。根据归纳假设，我们得到 I' 的一个解 S。由于 S 与 $X\cup Y'$ 不相交，我们也有 S 与 $X\cup Y$ 不相交，因此 S 是 I 的一个解。

假设该调用在第 12 行退出。我们考察了实例 $I'=(G-v,\ k-1,\ X,\ Y)$。由于 SolveDEChVD(I') 返回了 true，因此该实例并非显然为否定；根据引理 1，我们推知 I' 是良构的。根据归纳假设，我们得到 I' 的一个解 S。令 $S'=S\cup\{v\}$。由于 $v\in Z$，存在与 $X\cup Y$ 不相交的 $S'\subseteq V$，使得 $|S'|<k$ 且 $G-S'$ 是弦图。由此可得， S' 是 I 的一个解。□

引理 3. 假设我们考察调用 ***SolveDEChVD***(I)，其中 I 良构，且该调用会终止。如果 I 是 ***D-ChVD2*** 的正实例，那么 ***SolveDEChVD***(I)返回 ***true***。

证明。我们对调用树的高度进行归纳。

设 S 是 I的一个解，则存在与 $X\cup Y$不相交的 $S\subseteq V$，使得 $|S|<k$，且 $G-S$是弦图。由于 $|S|<k$，我们有 $k>0$。由于 S与 $X\cup Y$不相交，因此 $G[X\cup Y]$是 $G-S$的诱导子图，因而是弦图。由此可知，当前调用不会在第 3 行退出。如果算法在第 5 行退出，则得到了所需结论。现在假设算法执行到第 6 行。

情况 1： S与 $V(P)$不相交。考虑实例 $I'=(G,\ k,\ X,\ Y\cup V(P))$。于是 S是 I'的一个解，因此 I' 并非平凡的负实例。根据引理 1， I' 是良构的。由于 I' 是正实例，根据归纳假设，子调用 SolveDEChVD(I') 返回 true。

情形 2： S包含一个顶点 $v\in V(P)$。考虑实例 $I'=(G-v,\ k-1,\ X,\ Y)$。那么 $S-v$ 是 I'的一个解，因此 I' 并非显然为负。根据引理 1， I' 是良构的。由于 I' 为正，根据归纳假设，子调用 SolveDEChVD(I') 返回 true。□

现在我们可以完成定理 1 的证明了。给定一个 D-ChVD2 实例 $I=(G,\ k,\ X,\ Y)$，我们用 $L(I)$ 表示 $G-X$中无弦路径的最大长度。

定理 5. （重述定理 *1*）考虑一个形式为 $I=(G,k,X,\emptyset)$ 的 ***D-ChVD2*** 实例，并令 $L=L(I)$。算法 *1* 能在 $O((L+1)^{3k}k^2|V(G)|^4)$时间内正确求解实例 I。

证明。显然， I 是良构的。引理 2 和引理 3 证明，假设算法终止，则算法能够正确求解实例 I。现在我们来论证算法的运行时间。令 T 为 SolveDEChVD(I)发出的递归调用所构成的树。 T 中的每个节点 u 都标记有一个实例 I_u，并且存在互不相交的集合 R_u, $Y_u\subseteq V'$，使得 $I_u=(G-R_u,k-|R_u|,X,Y_u)$。此外，集合 Y_u 由一系列添加操作得到

$C_1, C_2, \ldots, C_l$ 到 Y。随后，我们可以定义与此序列对应的Y_u 的有序划分 $\mathcal{P}_u = (C_1, C_2, \ldots, C_l)$；由定理 4 可知，我们始终有 $|\mathcal{P}_u| \leq 2|X| = 2k$。接着，我们将子实例的度量定义为 $m(I_u) = 3k - |R_u| - |\mathcal{P}_u|$。注意，对于实例 I_u，我们始终有 $m(I_u) \geq 3k - k - 2k \geq 0$。此外，对于 u的每个子节点 v，都有 $m(I_v) \leq m(I_u) - 1$。最后，对于每个子实例 I_u，都有 $L(I_u) = L$，因此节点 u 至多有 $L+1$ 个子节点。由此可知，递归树 T 的总大小至多为$(L+1)^{3k}$。根据定理 2，每次递归调用所需时间为 $O(k^2|V(G)|^4)$，因此我们得出主调用 SolveDChVD(I)所需时间为 $O((L+1)^{3k}k^2|V(G)|^4)$。□

4. 定理 2 的证明

4.1. 辅助结果

以下引理提供了一种高效算法，用于判定弦图中一对顶点 u, v 的 w-连通性。

引理 4。设 G 是一个具有 n 个顶点的弦图，且令 u、v、$w \in V(G)$。我们可以在 $O(n^3)$ 时间内判定 u、v 在 G 中是否是 w- 连通的。

证明。假设 $G = (V, E)$ 是弦图。我们首先在 $O(n^2)$ 时间内计算出 G 的一个团树 $\mathcal{T} = (T, \{T_v : v \in V\})$，例如使用 [18] 的算法。我们可以假设 $T = (W, F)$，其中 $|W| \leq n$。对于 T 的每条边 xy，我们计算分离$S^{\mathcal{T}}_{xy} = (A, S, B)$。如果 $w \in S$，我们检验 $G[A \cup \{w\}]$ 中是否存在一条 (u, w)- 路径，以及 $G[B \cup \{w\}]$ 中是否存在一条 (v, w)- 路径；若存在，则接受。如果没有找到这样的边 xy，则拒绝。算法的正确性显而易见，其时间复杂度为$O(n^3)$，因为 $|F| \leq n$，并且由于检查 F 中的一条边需要 $O(n^2)$ 时间。□

现在我们定义图中的一些特定路径集。设 $G = (V, E)$ 是一个图。考虑三个集合 A，B，$C \subseteq V$。我们用 $\Pi^1_G(A)$ 表示 G 中长度为 1 且具有形式 $P = z$（其中 $z \in A$）的路径集合。我们用 $\Pi^2_G(A, B)$ 表示 G 中长度为 2 且具有形式 $P = z_1 z_2$（其中 $z_1 \in A$，$z_2 \in B$）的路径集合。我们用 $\Pi^{\geq 3}_G(A, B, C)$ 表示 G 中长度至少为 3、无弦且具有形式 $P = z_1 z_2 \ldots z_L$（其中 $z_1 \in A$，$z_L \in B$，并且对每个 $i\,(1 < i < L)$，$z_i \in C$）的路径集合。

注意，集合 $\Pi^{\geq 3}_G(A, B, C)$ 通常具有指数规模。不过，我们只需要找出该集合中的一条最小权重路径，这可以通过以下方法高效完成。

引理 5. 考虑一个有 n 个顶点的图 G、权函数 $w : V(G) \to \mathbb{N}$，以及三个集合 $A, B, C \subseteq V(G)$。给定 G 中的一条路径 P，令 $w(P) = \max_{v \in V(P)} w(v)$。我们可以在 $O(n^3)$ 时间内计算出一条 $P \in \Pi^{\geq 3}_G(A, B, C)$ 路径，使 $w(P)$ 最小；若不存在这样的路径，则报告这一情况。

证明。固定 $a \in A$。令 $B' = B - N_G[a]$，并令 $S = \{a\} \cup B' \cup C$。我们构造带权图 $\mathcal{H} = (G', w')$，其中 $G' = G[S]$，且 $w' = w|_S$。使用针对（max, min）设定进行调整的 Dijkstra 算法 [19]，我们在 $O(n^2)$ 时间内计算 $d_{\mathcal{H}}(a, v)$ 中 $v \in S$ 的距离。我们选择使 $d_{\mathcal{H}}(a, b)$ 最小的 $b \in B'$，由此得到 $\Pi^{\geq 3}_G(\{a\}, B, C)$ 中一条最小路径的权重。遍历顶点 $a \in A$ 并选取使结果最小的顶点后，我们在 $O(n^3)$ 时间内求得 $\Pi^{\geq 3}_G(A, B, C)$ 中一条最小路径的权重。通过适当的链接，我们可以在 On^2 时间内恢复这样一条最小路径。□

4.2. 主要结果的证明

考虑 D-ChVD2 的一个实例 $I=(G,k,X,Y)$。与上文相同，我们有 $G=(V,E)$、$W'=X\cup Y$、 $Z=V-W'$ 和 $V'=Y\cup Z$。我们定义以下概念。

- I 中的一个 *1*-锚点是一个元组（x），满足 $x\in X$。
- I 中的一个 *2*-锚点是一个元组（x,x'），满足 $x,x'\in X$ 在 G中相邻。
- I 中的一个 *3*-锚点是一个元组（x,x',y），满足 $x,x'\in X$ 在 G中不相邻，且 $y\in W'$ 满足 x,x' 在 $G[W']$中 y-连通。
- I 中的一个 *4*-锚点是一个元组（x,x'），满足 $x,x'\in X$ 在 G中不相邻，且 x,x'在 $G[W']$中不 Y-连通。

对于 $i\in[4]$，我们将 $\mathcal{S}_I^i$ 定义为 I中 i-锚点的集合。注意， $\mathcal{S}_I^4$ 与第 3 节中考虑的集合 $\mathcal{S}_I$ 相同。对于每个 $t\in\mathcal{S}_I^i$，我们按如下方式定义路径集$\mathcal{P}_{I,t}^i$ 。

- 设 $t=(x)$ 是 I 中的一个 1-锚点。设 $A_t=\{z\in V'\colon N_G(z)\cap\{x\}=\{x\}\}$ 和 $B_t=\{z\in V'\colon N_G(z)\cap\{x\}=\emptyset\}$。我们定义 $\mathcal{P}_{I,t}^1=\Pi_G^{\geq 3}(A_t,A_t,B_t)$ 。
- 设 $t=(x,x')$ 是 I 中的一个 2-锚点。设 $A_t=\{z\in V'\colon N_G(z)\cap\{x,x'\}=\{x\}\}$, $B_t=\{z\in V'\colon N_G(z)\cap\{x,x'\}=\{x'\}\}$ 和 $C_t=\{z\in V'\colon N_G(z)\cap\{x,x'\}=\emptyset\}$。我们定义 $\mathcal{P}_{I,t}^2=\Pi_G^2(A_t,B_t)\cup\Pi_G^{\geq 3}(A_t,B_t,C_t)$ 。
- 设 $t=(x,x',y)$ 是 I 中的一个 3-锚点。设 $A_t=\{z\in V'\colon N_G(z)\cap\{x,x',y\}=\{x\}$, $B_t=\{z\in V'\colon N_G(z)\cap\{x,x',y\}=\{x'\}\}$, $C_t=\{z\in V'\colon N_G(z)\cap\{x,x',y\}=\emptyset\}$以及 $D_t=\{z\in V'\colon N_G(z)\cap\{x,x',y\}=\{x,x'\}\}$。我们定义 $\mathcal{P}_{I,t}^3=\Pi_G^1(D_t)\cup\Pi_G^2(A_t,B_t)\cup\Pi_G^{\geq 3}(A_t,B_t,C_t)$。
- 设 $t=(x,x')$ 是 I 中的一个 4-锚点。设 $A_t=\{z\in V'\colon N_G(z)\cap\{x,x'\}=\{x\}\}$, $B_t=\{z\in V'\colon N_G(z)\cap\{x,x'\}=\{x'\}\}$, $C_t=\{z\in V'\colon N_G(z)\cap\{x,x'\}=\emptyset\}$ 以及 $D_t=\{z\in V'\colon N_G(z)\cap\{x,x'\}=\{x,x'\}\}$。我们定义 $\mathcal{P}_{I,t}^4=\Pi_G^1(D_t)\cup\Pi_G^2(A_t,B_t)\cup\Pi_G^{\geq 3}(A_t,B_t,C_t)$。

下面两个引理证明了，为了找到候选路径，我们可以将范围限制在集合 $\mathcal{P}_{I,t}^i$ 内。

引理 6。 设 P 是 $G[V']$ 中的一条无弦路径。

1. 如果 P 是 I 中的一条类型 *1* 候选路径，那么对于某些 $i\in[3]$ 和 $t\in\mathcal{S}_I^i$，有 $P\in\mathcal{P}_{I,t}^i$。2. 如果对于某些 $i\in[3]$ 和 $t\in\mathcal{S}_I^i$，有 $P\in\mathcal{P}_{I,t}^i$，那么我们可以在 I 中找到一条类型 *1* 候选路径 P'。

证明。第 1 点。假设 P 是 I 中的一条类型 1 候选路径。于是，我们在 G 中找到一个 H 洞，使得 (a) P 是 H 的一个 V'- 片段；(b) 对于不同于 P 的每个 H - 片段 Q V'，都有 $V(Q)\subseteq Y$。假设 $H=z_1z_2\dots z_Lz_1$，并且不妨设 $P=z_1z_2\dots z_p$。于是有 $z_L\in X$。若 $p=L-1$，则得到 $t=(z_L)\in\mathcal{S}_I^1$，且 $P\in\Pi_G^{\geq 3}(A_t,A_t,B_t)$，因此 $P\in\mathcal{P}_{I,t}^1$。若 $p=L-2$，则得到 $t=(z_L,z_{L-1})\in\mathcal{S}_I^2$，且 $P\in\Pi_G^2(A_t,B_t)\cup\Pi_G^{\geq 3}(A_t,B_t,C_t)$，因此 $P\in\mathcal{P}_{I,t}^2$。现在假设 $p<L-2$。令 $x=z_L,x'=z_{p+1}$ 和 $y=z_{p+2}$。注意到，路径 $z_{p+1}z_{p+2}\dots z_L$ 包含 y，并且

包含于 W' 中。因此， x， x' 在 $G[W']$ 中是 y-连通的，从而 $t=(x,\ x',\ y)$ 属于 $\mathcal{S}_I^3$。此外，我们有 $P\in\Pi_G^1(D_t)\cup\Pi_G^2(A_t,\ B_t)\cup\Pi_G^{\geq 3}(A_t,\ B_t,\ C_t)$，因此 $P\in\mathcal{P}_{I,\ t}^3$。

要点 2。假设对于某个 $i\in[3]$ 和 $t\in\mathcal{S}_I^i$，$P\in\mathcal{P}_{I,\ t}^i$。若 $i=1$，则有 $t=(x)$，其中 $x\in X'$；又由于 $P\in\mathcal{P}_{I,\ t}^1$，我们有 $H=xPx$ 是 G 中的洞，因此 P 是 I 中的类型 1 候选路径。若 $i=2$，则有 $t=(x,\ x')$，其中 x、$x'\in X'$ 在 G 中相邻；又由于 $P\in\mathcal{P}_{I,\ t}^2$，我们有 $H=xPx'x$ 是 G 中的洞，因此 P 是 I 中的类型2候选路径。现在假设 $i=3$。于是我们有 $t=(x,\ x',\ y)$，其中 x、$x'\in X$ 在 G 中不相邻，并且存在 $y\in W'$ 使得 x、x' 在 $G[W']$ 中由 y 连通。我们在 $G[W']$ 中找到一条包含 y 的无弦 $(x,\ x')$ 路径。假设 $P=z_1z_2\ldots z_p$，并假设 $Q=z_1'z_2'\ldots z_q'$。于是，对于某个 r $(1<r<q)$，我们有 $z_1'=x$、$z_q'=x'$ 和 $z_r'=y$。令 J 为满足 $z_\alpha z_\beta'\in E$ 的对 $(\alpha,\ \beta)$ $(1\leq\alpha\leq p,\ 1\leq\beta\leq r)$ 的集合；注意， J 包含 $(1, 1)$。选择使 $\alpha+\beta$ 最大的 $(\alpha,\ \beta)\in J$。令 J' 为满足 $z_\gamma z_\delta'\in E$ 的对 $(\gamma,\ \delta)$ $(\alpha\leq\gamma\leq p,\ r\leq\delta\leq q)$ 的集合；注意， J' 包含 $(p,\ q)$。选择使 $\gamma+\delta$ 最小的 $(\gamma,\ \delta)\in J'$。由于 P 的顶点均不与 y 相邻，因此有$\beta<r<\delta$。令 $P'=P[z_\alpha,z_\gamma]$ 和 $Q'=Q[z_\beta',z_\delta']$，则 $E(P')\cup E(Q')$ 在 G 中构成一个洞 H'。因此， P' 包含于 H' 的一个 V'-片段 R 中；对于与 R 不同的 H' 的每个 R' V'-片段，我们有 $V(R')\subseteq V(Q')\subseteq Y$。由此可得， P' 是 I 中的类型 1 候选路径。□

引理 7. 设 P 是 $G[V']$ 中的一条无弦路径。

1. 如果 P 是 I 中的一条类型 *2* 候选路径，那么对于某个 $t\in\mathcal{S}_I^4$，有 $P\in\mathcal{P}_{I,t}^4$。
2. 如果对于某个 $t\in\mathcal{S}_I^4$，有 $P\in\mathcal{P}_{I,t}^4$，那么 P 是 I 中的一条类型 *2* 候选路径。

证明。第 1 点。设 P 是 I 中的一条类型 2 候选路径。于是我们找到 $(x,x')\in\mathcal{S}_I$，使得 xPx' 是 $G[V']$ 中的一条无弦路径。设 $t=(x,x')$，于是有 $t\in\mathcal{S}_I^4$。假设 $P=z_1z_2\ldots z_p$。如果 $p=1$，则有 $z_1\in D_t$。如果 $p>1$，则有 $z_1\in A_t, z_p\in B_t$，以及 $z_i\in C_t$ $(1<i<p)$。由此可得： $P\in\Pi_G^1(D_t)\cup\Pi_G^2(A_t,B_t)\cup\Pi_G^{\geq 3}(A_t,B_t,C_t)$。我们得出 $P\in\mathcal{P}_{I,t}^4$。

第 2 点。假设 $P\in\mathcal{P}_{I,t}^4$ 对于某个 $t=(x,x')\in\mathcal{S}_I^4$。假设 $P=z_1z_2\ldots z_p$。如果 $P\in\Pi_G^1(D_t)$，那么 $z_1\in D_t$ 且 xPx' 是 G中的一条无弦路径。如果 $P\in\Pi_G^2(A_t,B_t)$，那么$z_1\in A_t, z_2\in B_t$，因此 xPx' 是 G中的一条无弦路径。如果 $P\in\Pi_G^{\geq 3}(A_t,B_t,C_t)$，那么$z_1\in A_t, z_p\in B_t$，且 $z_i\in C_t(1<i<p)$，因此 xPx' 是 G中的一条无弦路径。由于 $(x,x')\in\mathcal{S}_I$，我们得出 P是 I中的一条类型 2 候选路径。□

现在我们可以完成定理 2 的证明了。

定理 6。 （定理 *2* 的重述）我们有一个 ***FindCandidatePath***算法，它接收一个 $I=(G,k,X,Y)$ ***D-ChVD2*** 实例，并在 $O(k^2|V(G)|^4)$ 时间内，要么找到P 类型 *1* 候选路径，要么找到 Q 最小为 $l(Q)$ 的类型*2* 候选路径，或者得出不存在候选路径的结论。

证明。令 $n=|V(G)|$。

算法首先构造锚点集合。我们可以在常数时间内判断一个元组是 1-锚点还是 2-锚点。要判断元组 $(x,\ x',\ y)$ 是否为 3-锚点，我们使用引理 4，在 $O(n^3)$ 时间内判断 x， x' 是否在 $G[W']$ 中 y-连通。要判断元组 $(x,\ x')$ 是否为 4-锚点，我们使用引理 4，在 $O(n^4)$ 时间内判断 Y 是否在 $G[W']$ 中连通。因此，我们可以在 $O(k^2n^4)$ 时间内列出这些锚点。

现在假设锚点集合已知。要寻找类型 1 候选路径，根据引理 6，只需判断是否存在某个 $i \in [3]$ 和某个 $t \in \mathcal{S}_I^i$，使得 $\mathcal{P}_{I,\,t}^i$ 非空。同理，要寻找类型 2 最小候选路径，根据引理 7，只需对每个元组 $t \in \mathcal{S}_I^4$ 和每条路径 $P \in \mathcal{P}_{I,\,t}^4$，计算 $l(P)$ 的最小值。根据引理 5，给定一个 t 后，该计算可在 $O(n^3)$ 时间内完成。由于有 $O(k^2 n)$ 个 3-锚点和 $O(k^2)$ 个 4-锚点，我们可以在 $O(k^2 n^4)$ 时间内找到所需结果。
□

5. 定理 3 的证明

我们需要弦图的以下标准性质。

引理 8. 假设 G 是弦图。设 $P = z_1 z_2 \dots z_L$ 是 G 中的一条无弦路径，且$L \geq 3$，并设 $R \subseteq V(G)$ 满足：***(a)*** $G[R]$ 是连通的；***(b)*** $z_1, z_L \in N_G[R]$。那么对每个 $i \in [L]$，都有 $z_i \in N_G[R]$。

证明。反设，对于某个 i $(1 < i < L)$，$z_i \notin N_G[R]$。令 $J = \{p : 1 \leq p < i$ 且 $z_i \in N_G[R]\}$，并令 $J' = \{p : i < p \leq L$ 且 $z_i \in N_G[R]\}$。由于 $z_1 \in N_G[R]$，我们有 $J \neq \emptyset$；由于 $z_L \in N_G[R]$，我们有 $J' \neq \emptyset$。取 J的最大元素 p，并取 J'的最小元素 q。由于 $G[R]$是连通的，我们找到Q，它是无弦的 (z_p, z_q)-路径，其内部顶点属于 R。于是，$Q z_{q-1} \dots z_p$是G中的一个洞，矛盾。□

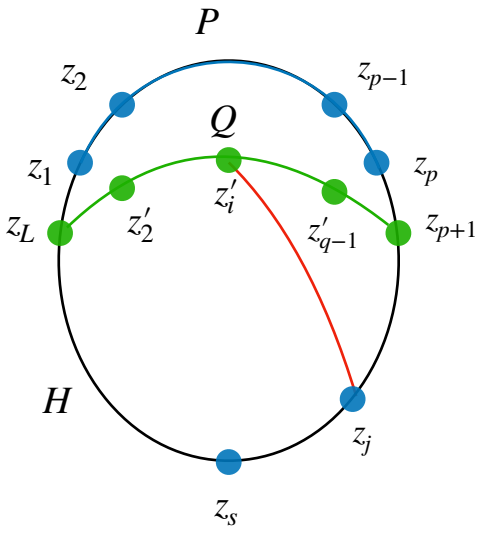

图 1：展示断言 2 中的情形。

现在我们可以证明定理 3 了。

定理7。 （重述定理 *3*）假设 I 是良构的，且 $G[W']$ 是弦图。设 H 是 G 中的一个洞，并且 $|V(H) \cap Z|$ 最小。设 $\mathcal{F}$ 是由路径P组成的集合，这些路径是 H 的 V'-片段，并且满足 $V(P) \cap Z \neq \emptyset$。以下情况必有其一：***(a)*** $\mathcal{F} = \{P\}$，且P 是类型 *1* 候选路径；或 ***(b)*** $|\mathcal{F}| \geq 2$，并且对于 $P \in \mathcal{F}$ l-极小的情形，我们有 P类型*2*候选路径。

证明。利用完美消去序 σ，我们可以为$G[V']$构造一个形式为 $\mathcal{T}=(T,\{T_v\colon v\in V'\})$ 的团树。假设 $T=(W,F)$，且 T以某个节点 $r_T\in W$为根。给定两个节点 $u,v\in W$，若 v 比 u更靠近 r_T，我们记作 $u\leq_T v$。给定 T 的一个连通子集 S，我们令 $r(S)$表示 S中相对于 $\leq_T$极大的元素。给定 $v\in V'$，我们令 $r(v)=r(T_v)$。我们可以假设：给定 $u,v\in V'$，若$r(u)\leq_T r(v)$，则 $l(u)\leq l(v)$。

由于 $G[W']$ 是弦图，洞 H 必定与 Z相交，因此 $\mathcal{F}$ 非空。显然，如果 $\mathcal{F}=\{P\}$，那么 P 就是一条类型 1 候选路径。现在假设 $|\mathcal{F}|\geq 2$，并令$P\in\mathcal{F}$ l为极小的。假设 $H=z_1z_2\ldots z_Lz_1$，且 $P=z_1z_2\ldots z_p$满足 $p<L$。考虑 $x=z_L$和 $x'=z_{p+1}$，则有 x，$x'\in X$不相邻。考虑与 P不同的 $P'\in\mathcal{F}$，则 V（P'）$\cap Z$包含某个顶点 z_s，使得 $p+1<s<L$。

如果 P是一条类型2候选路径，问题便解决了。反设不然。由于 xPx'是 G中的一条无弦路径，我们有（x，x'）$\notin\mathcal{S}_I$。由于 I是良构的，存在 $y\in Y$使得x，x'在 $G[W']$中 y连通，且 l（y）$\leq l$（P）。于是我们找到一条 Q无弦（x，x'）路径，它位于$G[W']$中且包含 y。设 $Q=z'_1z'_2\ldots z'_q$，其中 $z'_1=x$，$z'_q=x'$，并且对某个 r （$1<i<q$），有 $z'_r=y$。

断言 *1.* $r(y)\leq_T r(P)$.

证明. 如果我们有 $r(P)<_T r(y)$，那么就会推出 $l(P)<l(y)$，这与事实矛盾。因此，我们要么有 (a) $r(y)\leq_T r(P)$，要么有 (b) $r(y)$ 和 $r(P)$ 在 $\leq_T$ 下不可比较。为导出矛盾，假设我们处于情形 (b)。对于每个 $u\in V(P)$，我们有 $r(u)\leq_T r(P)$，这意味着 $r(u)$ 和 $r(y)$ 在 $\leq_T$ 下不可比较；因此，$y\notin N_G[V(P)]$。考虑 $G'=G[V(P)\cup V(Q)]$。由于 $|V(G')\cap Z|<|V(H)\cap Z|$，根据 H 的选取，我们有 G' 是弦图。考虑 $R=V(P)$。于是我们有 $G'[R]$ 连通且z'_1，$z'_q\in N_G[R]$。根据引理 8，我们有 $z'_r\in N_G[R]$。但我们已经看到 $y\notin N_G[R]$，这与事实矛盾。□

由断言 1 可知，y，z_s 彼此不同，且在 G 中不相邻。事实上，反设 $y=z_s$或 $yz_s\in E$。由 P 的极小性可知，在 $\leq_T$ 下，$r(P)<_T r(P')$ 与 $r(P)$ $r(P')$ 中必有一组不可比较。由于 $r(y)\leq_T r(P)$，因此 z_s 必须与$r(P)$相邻，矛盾。

断言 *2.* (a) 对每个 i，j(2 $\leq i<q-1$，$p+1\leq j<s$)，都有 $z'_iz_j\notin E$；(b) 对每个 i，j (2 $<i\leq q-1$，$s<j\leq L$)，都有 $z'_iz_j\notin E$。

证明. 我们只证明 (a)，因为 (b) 可由对称性推出。为导出矛盾，假设对于某个 i，j($2\leq i<q-1$，$p+1\leq j<s$)，有 $z'_iz_j\in E$。示意图见图 1。考虑 $G'=G[\{z_L,z_1,z_2,\ldots,z_j\}\cup V(Q)\}]$。由于 $|V(G')\cap Z|<|V(H)\cap Z|$，根据 H 的选取，G' 是弦图。考虑 $P'=z_Lz_1\ldots z_j$ 和 $R=\{z'_2,z'_3,\ldots,z'_i\}$，则 P' 是 G' 中的一条无弦路径，且 R 是 G'的一个连通子集。由于 z_L，$z_j\in N_{G'}[R]$，并且 G' 是弦图，由引理 8 可得 $z_{p+1}\in N_{G'}[R]$。但是，我们有$z_{p+1}=z'_q$与 z'_2、.....、z'_i不同且不相邻，矛盾。□

回顾一下，我们有 $z'_r=y$。令 J 为满足 $2\leq\alpha\leq r$、$s\leq\beta\leq L$ 和 $z'_\alpha z_\beta\in E$ 的对 (α, β) 的集合。令 J' 为满足 $r\leq\gamma\leq q-1$、$p+1\leq\delta\leq s$ 和 $z'_\gamma z_\delta\in E$ 的对 (γ，δ) 的集合。注意到 J 包含 (2，L)，且 J' 包含 ($q-1$，$p+1$)。我们选择具有最小 $\beta-\alpha$ 的 (α，β) $\in J$，并选择具有最大 $\delta-\gamma$ 的 (γ，δ) $\in J'$。考虑 $P'=P[z_\delta,z_\beta]$ 和 $Q'=Q[z'_\alpha,z'_\gamma]$。

断言 *3*。 $E(P')\cup E(Q')$ 在 G 中构成一个洞。

证明。令 $C=E(P')\cup E(Q')$。我们首先证明 $|P'|+|Q'|\geq 4$。反设 $|P'|+|Q'|\leq 3$。我们分以下情况讨论。首先假设 $|Q'|=1$

且 $|P'| \leq 2$。于是有 $\alpha = \gamma = r$，从而 $Q' = y$。但是， z_s 是 P' 的一个端点，且必须与 y 相邻，矛盾。现在假设 $|Q'| = 2$ 且 $|P'| = 1$。于是有 $\beta = \delta = s$ ，从而 $P' = z_s$。但是， y 是 Q' 的一个端点，且必须与 z_s 相邻，矛盾。

假设 C 不是无弦环。令 S 为满足$\alpha \leq i \leq \gamma$且 $\delta \leq j \leq \beta$的对 (i, j) 的集合，其中 $(i, j) \neq (\alpha, \beta)$，$(\gamma, \delta)$。令 S_1为满足 $z'_i = z_j$的对 $(i, j) \in S$的集合，并令 S_2为满足 $z'_i z_j \in E$的对 $(i, j) \in S$的集合。由于 C不是无弦环，因此有 $S_1 \cup S_2 \neq \emptyset$。假设 $(i, j) \in S_1$。若 (a) $|P'| = 1$且 $|Q'| = 3$，或 (b) $|P'| = 3$且 $|Q'| = 1$，则必有 $i = r, j = s$，但 z'_r 和 z_s 彼此不同，这就产生了矛盾。否则，我们可以得出结论：$(i - 1, j)$ 、 $(i + 1, j)$ 中有一个属于 S_2，或者 $(i, j - 1)$、$(i, j + 1)$ 中有一个属于 S_2。

因此，我们可以假设 $S_2 \neq \emptyset$。考虑 $(i,\ j) \in S_2$。首先假设$i = r$。如果 $j \geq s$，则有 $(i,\ j) \in J$，且 $j - i < \beta - \alpha$，这与 $(\alpha,\ \beta)$ 的选择矛盾。如果 $j \leq s$，则有 $(i,\ j) \in J'$，且 $j - i > \delta - \gamma$，这与 $(\gamma,\ \delta)$ 的选择矛盾。现在假设 $i < r$。根据断言 2，$p + 1 \leq j < s$ 不成立。因此，我们有$s \leq j \leq L$。但这样一来，$(i,\ j) \in J$，且 $j - i < \beta - \alpha$，这与 $(\alpha,\ \beta)$ 的选择矛盾。最后，情形 $i > r$ 可由对称性得出。□

根据断言 3，我们得到 $E(P') \cup E(Q')$ 在 G 中构成一个洞 H'。由于 $V(H') \subseteq (V(H) - V(P)) \cup V(Q)$、$V(P) \cap Z \neq \emptyset$ 和 $V(Q) \cap Z = \emptyset$，因此有 $|V(H') \cap Z| < |V(H) \cap Z|$，这与 H 的选择矛盾。□

6. 定理 4 的证明

6.1. 辅助结果

本节包含三个引理，它们将有助于证明定理 4。

引理 *9.* 设 $G = (V, E)$ 是一个弦图，其团树为 $\mathcal{T} = (T, \{T_v : v \in V\})$。设 $T = (W, F)$，且 K 是 W 的连通子集。令 $Z = \{v \in V : V(T_v) \cap K \neq \emptyset\}$。考虑 G 中的一条无弦路径 $P = z_1 z_2 \dots z_p$，满足 $V(P) \cap Z = \{z_p\}$。存在一条边 $e = xy \in F$，其满足 $x \in K, y \notin K$，使得 $S^{\mathcal{T}}_{xy} = (A, S, B)$，且 $z_p \in S$ 和 $z_i \in B$ $(1 \leq i < p)$。

证明。考虑 $U = \cup_{i \in [p-1]} V(T_{z_i})$。由于 P 是一条路径， U 是 T 的连通子集。若有 $U \cap K \neq \emptyset$，我们将找到 $i \in [p-1]$，使得 $V(T_{z_i}) \cap K \neq \emptyset$，从而有 $z_i \in Z$，矛盾。因此， U 和 K 是 T 的不相交连通子集。选择 T 中从 u 到 v 的 Q (u, v)-路径，使 $u \in K, v \in U$ 和 Q 的长度最小。假设 $Q = z'_1 z'_2 \dots z'_q$。令 $x = z'_1, y = z'_2$，并考虑 T 中的 $e = xy$ 边。根据 Q 的选择，我们有 $x \in K$ 和 $y \notin K$。考虑 $S^{\mathcal{T}}_{xy} = (A, S, B)$。令 C（分别为 C'）为包含 x（分别为 y）的 $T - e$ 的连通分量。根据 Q 的选择，我们有 $K \subseteq C$ 和 $U \subseteq C'$。由此，对于每个 i $(1 \leq i < p)$，有 $z_i \in B$ 。下面证明 $z_p \in S$。由于 z_p 与 z_{p-1} 相邻，我们找到 $x \in V(T_{z_p}) \cap V(T_{z_{p-1}})$。由于 $z_p \in Z$，我们找到一个顶点 $y \in V(T_{z_p}) \cap K$。由于 $V(T_{z_{p-1}}) \subseteq C'$，我们有 $x \in C'$。由于 $K \subseteq C$，我们有 $y \in C$。由于 T_{z_p} 包含 x 和 y，它包含边 e，因此 $z_p \in S$。□

引理 10. 设 $G = (V, E)$ 是一个图，设 $u, v, w \in V$，且设 P是 G 中的一条无弦(u, v)路径，其中包含作为内部顶点的 w 。假设存在 $S \subseteq V$ ，使得 $G[S]$ 是

连通的，且 $N_G[w] \subseteq N_G[S]$。于是我们可以在 G 中找到一条无弦(u,v)路径 P'，使得 ***(a)*** $V(P') \subseteq V(P) - w + S$，***(b)*** $I(P') \cap S \neq \emptyset$。

证明。假设对于某个 i（$1 < i < L$），$P = z_1 z_2 \ldots z_L$与 $z_i = w$。由于z_{i-1}，$z_{i+1} \in N_G$（w），它们位于 $N_G[S]$中。考虑满足 $z_p \in N_G[S]$的最小 $p \leq i-1$，并考虑满足 $z_q \in N_G[S]$的最大 $q \geq i+1$。由于 $G[S]$ 是连通的，我们在 G 中找到一条 Q 无弦（z_p，z_q）路径，其中 I（Q）$\subseteq S$。由此可知，$P' = z_1 z_2 \ldots z_{p-1} Q z_{q+1} \ldots z_L$ 是 G中一条无弦（u，v）路径。显然，我们有 V（P'）$\subseteq V$（P）$- w + S$；又由于 Q 的长度至少为 3，因此有 I（P'）$\cap S \neq \emptyset$。□

引理 ***11.*** 设 $G = (V, E)$ 是一个弦图，且设 $\mathcal{T} = (T, \{T_v : v \in V\})$ 是 G 的一棵团树。设 $w \in V$ ***and*** $S \subseteq V$. 假设对于每个 $z \in S$, $E(T_z) \cap E(T_w) \neq \emptyset$ ***and*** (P_2) $E(T_w) \subseteq \cup_{z \in S} E(T_z)$，均有 (P_1)。那么我们有：***(a)*** $G[S]$ 是连通的，且 ***(b)*** $N_G[w] \subseteq N_G[S]$。

证明. 我们来证明断言 (a)。考虑 $U = \cup_{z \in S} T_z$。我们断言，U 构成 T 的一棵子树。假设并非如此，那么我们可以找到 T 的一条边 $e = xy$，它将 U 分成两个非连通子集。假设在 e 的 x 一侧有一棵子树 T_u，在 e 的 y 一侧有一棵子树 T_v。根据 (P_2)，T_w 不可能包含边 e，因此我们可以假设 T_w 位于 e 的 y 一侧。但这样一来，我们有 $E(T_u) \cap E(T_w) = \emptyset$，这与 (P_1) 矛盾。因此，U 是 T 的一棵子树，我们由此得出 $G[W]$ 是连通的。

让我们证明命题（b）。考虑 $u \in N_G[w]$，于是我们有 $V(T_u) \cap V(T_w) \neq \emptyset$。考虑交集中的 x。由（P_2），对于某个 $z \in S$，我们有 $x \in V(T_z)$。于是我们有 $V(T_u) \cap V(T_z) \neq \emptyset$，因此 $u \in N_G[S]$。□

6.2. 主要结果的证明

本节中，我们考虑模型 $\mathcal{M} = (X, G, \mathcal{T})$，其中 $G = (V, E)$、$\mathcal{T} = (T, \{T_v : v \in V\})$，且 $T = (W, F)$。令 $Y = V - X$。假设 T 的根为某个节点 r_T。给定 $u \in W$，我们将其在 T 中的父节点记为 $p(u)$；若 $u = r_T$，则记为 $\perp$。

对于每个节点 $x \in W$，令 $D_x^{\mathcal{T}} = C_x^{\mathcal{T}} \cap X$。我们定义有向图 $D_{\mathcal{M}} = (W, A_{\mathcal{M}})$，其中 $A_{\mathcal{M}}$ 在 $xy \in F$ 且 $D_x^{\mathcal{T}} \subseteq D_y^{\mathcal{T}}$ 时包含弧 (x, y)。$D_{\mathcal{M}}$ 的一个分支是一个按包含关系极大的连通子集 $K \subseteq W$，满足对于 $x, y \in K$，有 $D_x^{\mathcal{T}} = D_y^{\mathcal{T}}$。$D_{\mathcal{M}}$ 的一个极大分支是 $D_{\mathcal{M}}$ 的一个分支 K，且不存在弧 $(x, y) \in A_{\mathcal{M}}$ 满足 $x \in K, y \notin K$。$\mathcal{M}$ 中的可约边是满足以下条件的边 $uv \in F$：(a) $v = p(u)$；(b) $(u, v) \in A_{\mathcal{M}}$；(c) 对于 T 中 u 的每个子节点 w，都有 $(u, w) \notin A_{\mathcal{M}}$。

考虑 W 的一个连通子集 S。将 $\mathcal{M}$ 中的 S 收缩后，得到模型 $\mathcal{M}' = (X, G', \mathcal{T}')$，其定义如下。一方面，我们有 $\mathcal{T}' = (T', \{T'_v : v \in V(G)\})$，其中 T'（分别为 T'_v）是通过收缩 T（分别为 T_v）中 S 的顶点得到的；另一方面，我们有 $V(G') = V(G)$ 和 $E(G') = E(G) \cup \{uv : u, v \in V(G)\ V(T_u) \cap S \neq \emptyset$ 以及 $V(T_v) \cap S \neq \emptyset\}$。我们将 $\mathcal{M}$ 中收缩 S 后的结果记为 $\mathcal{M}/S$。如果存在 S 使得 $\mathcal{M}' = \mathcal{M}/S$，我们就称 $\mathcal{M}'$ 是 $\mathcal{M}$ 的一个子式。

在以下引理中，假设给定了 Y 的一个有序划分 $\mathcal{P} = (C_1, \ldots\ldots, C_p)$，它是 $\mathcal{M}$ 的一个渐进划分。令 $Y_0 = \emptyset$ 和 $Y_i = \cup_{j \leq i} C_j$，其中 $i \in [p]$。对每个 $i\ (0 \leq i \leq p)$，令 $W'_i = X \cup Y_i$。接下来的引理讨论 $D_{\mathcal{M}}$ 不是无环的情形。

引理 12。假设 K 是 $D_{\mathcal{M}}$ 的极大分支，并令 $\mathcal{M}' = \mathcal{M}/K$。那么 $\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{M}'$ 的渐进划分。

证明。假设 $\mathcal{M}'=(X,\ G',\ \mathcal{T}')$。令 $Z=\{v\in V\colon\ V(T_v)\cap K\neq\emptyset\}$。注意，对于每个 $v\in Z\cap X$，都有 $K\subseteq V(T_v)$。于是我们有 $E(G')=\{uv\colon\ uv\in E$ 或 $u,\ v\in Z\}$。我们证明 $\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{M}'$ 的渐进划分。考虑 $i\in[p]$。于是我们找到 $u,\ v\in X$，它们在 $G[W'_{i-1}]$ 中不是 Y_{i-1}-连通的，而在 $G[W'_i]$ 中是 Y_i-连通的。

第一点：u、v 在 $G'[W'_i]$中是 Y_i-连通的。由于 u、v 在 $G[W'_i]$中是 Y_i-连通的，我们在 G 中找到一条 P无弦的（$u,\ v$）-路径，使得 $V(P)\subseteq W'_i$且 $V(P)\cap Y_i\neq\emptyset$。假设$P=z_1z_2\dots z_L$ 满足 z_1、$z_L\in X$。如果 P在 G'中是无弦的，则可得所需结论。现在假设 P在 G'中有一条弦。我们不妨假设该弦为 z_pz_q，且$q-p$最大。因此，$P'=z_1z_2\dots z_pz_q\dots z_L$是 G'中的一条无弦路径，并且有z_p、$z_q\in Z$。如果有 $z_p\in X$，则有 $K\subseteq V(T_{z_p})$ 以及 $V(T_{z_q})\cap K\neq\emptyset$，从而 $z_pz_q\in E$，矛盾。因此，z_p属于 Y_i。我们推得 P'是 G'中的一条无弦（$u,\ v$）-路径，使得 $V(P')\subseteq W'_i$且 $V(P')\cap Y_i\neq\emptyset$。于是，$u$、$v$在$G'[W'_i]$中是 Y_i-连通的。

第二点：u,v在 $G'[W'_{i-1}]$中不与 Y_{i-1}连通。反设存在 G'中的一条无弦（u,v）路径 P，使得 $V(P)\subseteq W'_{i-1}$且 $V(P)\cap Y_{i-1}\neq\emptyset$。假设 $P=z_1z_2\dots z_L$。若 G中存在路径 P，则可得 u,v在 $G[W'_{i-1}]$中Y_{i-1}连通，这与假设矛盾。现在假设边 z_pz_{p+1} 不在G中。于是有 z_p，$z_{p+1}\in Z$。若有 $z_p\in X$ 或 $z_{p+1}\in X$，则可得$z_pz_{p+1}\in E$，这与假设矛盾。因此，有 z_p，$z_{p+1}\in Y_{i-1}$。此外，对每个 $j<p$ 或$j>p+1$，都有 $z_j\notin Z$，否则 z_j将与 G'中的 z_p,z_{p+1} 均相邻。由引理 9，可找到 T中的一条边 $e=xy$，使得 $x\in K,y\notin K$且 $S^{\mathcal{T}}_{xy}=(A,S,B)$，其中$z_p\in S$且 $z_i\in B$（$i<p$）。根据 K的选取，有（x,y）$\notin A_{\mathcal{M}}$，因此 $D^{\mathcal{T}}_x\not\subseteq D^{\mathcal{T}}_y$。于是，我们找到一个顶点 $w\in D^{\mathcal{T}}_x-D^{\mathcal{T}}_y$。接着有 $z_pw\in E$且 $z_jw\notin E$（$j<p$）。此外，由于 $w\in X$，我们有 $K\subseteq V(T_w)$，因此 $z_{p+1}w\in E$。考虑满足 $z_qw\in E$的极大 q（$q\geq p+1$）。我们得到 G中的一条无弦（u,v）路径 $P'=z_1z_2\dots z_pwz_q\dots z_L$，使得 $V(P')\subseteq W'_{i-1}$且 $V(P')\cap Y_{i-1}\neq\emptyset$。但此时 u,v在$G[W'_{i-1}]$中 Y_{i-1}连通，这与假设矛盾。

由上述内容可得，$\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{M}'$的渐进划分。 □

下面的引理讨论 $\mathcal{M}$包含一条可约边的情形。

引理 13. 假设 $e\in F$ 是 $\mathcal{M}$中的一条可约边。令 $\mathcal{M}'=\mathcal{M}/e$。那么，$\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{M}'$的渐进划分。

证明。假设 $e=xx'$满足 $x'=p(x)$，并假设 $\mathcal{M}'=(X,\ G',\ \mathcal{T}')$。令$Z=\{v\in V\colon\ V(T_v)\cap e\neq\emptyset\}$。于是我们有 $E(G')=\{uv\colon\ uv\in E$或 $u,\ v\in Z\}$。我们证明 $\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{M}'$的渐进划分。考虑 $i\in[p]$。于是我们找到 $u,\ v\in X$，它们在 $G[W'_{i-1}]$ 中不 Y_{i-1}-连通，而在 $G[W'_{i-1}]$中 Y_i-连通。

第一点：u,v在 $G'[W'_i]$中是 Y_i-连通的。由于 u,v在 $G[W'_i]$中是 Y_i-连通的，我们可在 G中找到一条无弦的（u,v）-路径 P，使得 $V(P)\subseteq W'_i$且 $V(P)\cap Y_i\neq\emptyset$。假设$P=z_1z_2\dots z_L$且 z_1，$z_L\in X$。如果 P在 G'中是无弦的，则得到所需结论。现在假设 P在 G'中有一条弦。我们不妨设这条弦是 z_pz_q，且 $q-p$最大。因此，我们在 G'中有一条无弦路径 $P'=z_1z_2\dots z_pz_q\dots z_L$。由对称性，不妨设 $V(T_{z_p})\cap e=\{x\}$且 $V(T_{z_q})\cap e=\{x'\}$。由于 e是可约的，我们有（x,x'）$\in A_{\mathcal{M}}$，从而 $D^{\mathcal{T}}_x\subseteq D^{\mathcal{T}}_{x'}$。如果有 $z_p\in X$，就会有 $x'\in V(T_{z_p})$，这与假设矛盾。因此，我们有 $z_p\in Y_i$。由此可知，P'是无弦的（u,v）-路径，位于

G'，使得 V（P'）$\subseteq W'_i$且 V（P'）$\cap Y_i \neq \emptyset$。因此我们得出， u， v在$G'[W'_i]$中是 Y_i-连通的。

第二点： u,v在 $G'[W'_{i-1}]$中不是 Y_{i-1}-连通的。反证，假设在 G'中存在一条无弦的（u,v）-路径 P，使得 $V(P) \subseteq W'_{i-1}$且 $V(P) \cap Y_{i-1} \neq \emptyset$。假设 $P = z_1 z_2 \dots z_L$。如果 P是 G中的一条路径，我们就会发现 u,v在 $G[W'_{i-1}]$中是 Y_{i-1}-连通的，这与假设矛盾。因此，我们可以假设 P不是 G中的一条路径。于是，我们找到某个 p $(1 \leq p < L)$，使得 $z_p, z_{p+1} \in Z$ 在 G中不相邻。对于每个 $j(j \neq p, p+1)$，都有 $z_j \notin Z$；否则， z_j将与 G'中的 z_p和 z_{p+1}相邻。由对称性，不妨假设对于每个 $j \neq p, p+1$，都有 $V(T_{z_p}) \cap e = \{x\}$、$V(T_{z_{p+1}}) \cap e = \{x'\}$ 以及 $V(T_{z_j}) \cap e = \emptyset$。由于 e是可约的，因此 $D^{\mathcal{T}}_x \subseteq D^{\mathcal{T}}_{x'}$，从而 $z_p \in Y_{i-1}$。根据引理 9，我们在 T中找到一条边 $e' = xy$，满足 $y \notin e$，使得 $S^{\mathcal{T}}_{xy} = (A, S, B)$、$z_p \in S$ 以及$z_j \in B$ $(1 \leq j < p)$。由于 $y \notin e$，我们有 $y \neq x'$，因此 y 是 T中 x 的子节点。由于 e 是可约的，因此 $D^{\mathcal{T}}_x \nsubseteq D^{\mathcal{T}}_y$。接着，我们找到一个顶点 $w \in D^{\mathcal{T}}_x - D^{\mathcal{T}}_y$。由于$D^{\mathcal{T}}_x \subseteq D^{\mathcal{T}}_{x'}$，我们有$w \in D^{\mathcal{T}}_{x'}$。由此可知， w 在 G 中与 z_p, z_{p+1} 相邻，而在 G中与 z_j $(1 \leq j < p)$不相邻。考虑满足 w 在 G 中与 z_q相邻的最大 $q \geq p+1$。那么，$P' = z_1 z_2 \dots z_p w z_q \dots z_L$是 G 中的一条无弦（u,v）-路径，满足 $V(P') \subseteq W'_{i-1}$且 $V(P') \cap Y_{i-1} \neq \emptyset$。由此可知， u,v在 $G[W'_{i-1}]$中是 Y_{i-1}-连通的，这与假设矛盾。

由上述内容可知， $\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{M}'$的渐进划分。 □

借助前面的引理，我们现在可以证明定理 4。

定理 8. （定理 *4* 的重述）设 $\mathcal{M} = (X, G, \mathcal{T})$ 是一个模型，且 $\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{M}$的渐进划分。那么 $|\mathcal{P}| \leq 2|X|$。

证明。我们不妨假设：对于 $\mathcal{M}$的每个真小子式 $\mathcal{M}'$，有序划分$\mathcal{P}$都不是 $\mathcal{M}'$的渐进划分。如上所述，我们设 $\mathcal{M} = (X, G, \mathcal{T})$,$G = (V, E)$, $\mathcal{T} = (T, \{T_v : v \in V\})$和 $T = (W, F)$。令 $Y = V - X$，并假设 $\mathcal{P} = (C_1, \dots, C_p)$是 Y的一个有序划分。设 $D_{\mathcal{M}} = (W, A_{\mathcal{M}})$。由引理 12 和 13 可知， $D_{\mathcal{M}}$ 是无环的，且 $\mathcal{M}$ 不含可约边。

下面的断言给出了团树中顶点数量的线性上界。

断言 *1.* $|W| \leq 2|X| + 1$.

证明。令 W_1 为满足 $x \neq r_T$ 且 $(x, p(x)) \in A_{\mathcal{M}}$的顶点 $x \in W$ 的集合，并令 $W_2 = W - W_1$。

定义 ϕ如下： $X \to W$，使得对每个 $u \in X$， $\phi(u) = r(u)$。注意，对每个 $u \in X$，若 $\phi(u) = x$，则 $x \in W_2$：事实上，若 $p(x) = y \neq \perp$，由于 $u \in D^{\mathcal{T}}_x - D^{\mathcal{T}}_y$，我们有 $D^{\mathcal{T}}_x \nsubseteq D^{\mathcal{T}}_y$，因此 $(x, y) \notin A_{\mathcal{M}}$。此外，每个元素 $x \in W_2 - r_T$ 在 ϕ 下都有一个原像：若 $p(x) = y$，由于 $D^{\mathcal{T}}_x \nsubseteq D^{\mathcal{T}}_y$，我们得到 $u \in D^{\mathcal{T}}_x - D^{\mathcal{T}}_y$，因此 $r(u) = x$。由此可得 $|W_2| \leq |X| + 1$。

我们定义 $\phi' : W_1 \to W_2$ 如下。考虑带有 $y = p(x)$ 的 $x \in W_1$，于是有 $(x, y) \in A_{\mathcal{M}}$。由于 $D_{\mathcal{M}}$ 不包含可约边，因此在 T 中存在 x 的子节点 z，使得 $(x, z) \in A_{\mathcal{M}}$。由于 $D_{\mathcal{M}}$无环，我们有 $(z, x) \notin A_{\mathcal{M}}$，因此 $z \in W_2$。令 $\phi'(x) = z$。注意到 ϕ' 是单射，且 ϕ' 的像包含于 $W_2 - r_T$中。因此，我们有$|W_1| \leq |W_2| - 1$。

我们得出结论： $|W| = |W_1| + |W_2| \leq 2|W_2| - 1 \leq 2|X| + 1$。 □

对于每个 $i \in [p]$，令 $T_i = \cup_{v \in C_i} T_v$，并令 $T'_i = \cup_{j<i} T_j$。以下断言表明，集合 T'_i 必须在每一步都增长。

断言 2. 对于每个 $i \in [p]$，我们有 $E(T_i) \not\subseteq E(T_i')$。

证明。反设 $E(T_i) \subseteq E(T_i')$。由于 $\mathcal{P}$是 H的渐进划分，我们可找到 $u, v \in X$，使得 u, v 在 $G[W_i']$ 中是 Y_i- 连通的，而在 $G[W_{i-1}']$ 中不是 Y_{i-1}- 连通的。令 $\mathcal{S}$ 为 G 中满足 $V(P) \subseteq W_i'$且 $V(P) \cap Y_i \neq \emptyset$的无弦$(u, v)$-路径 P的集合；因此， $\mathcal{S}$非空。选取 $P \in \mathcal{S}$，使得 $|V(P) \cap C_i|$最小。若 $V(P) \cap C_i = \emptyset$，则可得 u, v在 $G[W_{i-1}']$中是 Y_{i-1}-连通的，矛盾。假设 $V(P) \cap C_i \neq \emptyset$，并选取$w$属于该交集。由于 $u, v \in X$，我们有 $w \in I(P)$。根据假设，我们有$E(T_w) \subseteq E(T_i')$。令 $S = \{z \in Y_{i-1} \colon E(T_z) \cap E(T_w) \neq \emptyset\}$。由引理 11， $G[S]$是连通的，且 $N_G[w] \subseteq N_G[S]$。由引理 10，我们可在G 中找到一条无弦(u, v)-路径 P'，使得 $V(P') \subseteq V(P) - w + S$且 $I(P') \cap S \neq \emptyset$。于是我们有 $P' \in \mathcal{S}$，并且$|V(P') \cap C_i| < |V(P) \cap C_i|$，这与 P的选取矛盾。□

下面完成该命题的证明。基于断言 2 的直接归纳法表明，对于每个 $i \in [p]$， T_i 至少有 i 条边。因此，我们有 $p \leq |F|$。由于 T 是一棵树，我们有 $|F| \leq |W| - 1$。根据断言 1，我们得出 $p \leq 2|X|$。□

参考文献

[1] D. Marx，《弦图删除是固定参数可解的》，*Algorithmica*，第57卷，第4期，第747–768页，2010年。[2] Y. Cao 和 D. Marx，《弦图编辑是固定参数可解的》，*Algorithmica*，第75卷，第1期，第118–137页，2016年。[3] L. Cai，《图修改问题中遗传性质的固定参数可处理性》，信息处理快报，第58卷，第4期，第171–176页，1996年。[4] M. Wahlström，《基于偏图的 LP 分支算法》，载于第二十八届 *ACM-SIAM* 离散算法年度研讨会论文集，*SODA 2017*，巴塞罗那，西班牙，*Porta Fira* 酒店，*2017*年*1*月*16*日至*19*日 （P. N. Klein 编），第1559–1570页，SIAM，2017年。[5] D. Lokshtanov，《无轮删除是 W[2]-难的》，载于参数化与精确计算：第三届国际研讨会，*IWPEC 2008*，加拿大维多利亚，*2008*年*5*月*14*日至*16*日。论文集 （M. Grohe 和 R. Niedermeier 编），第5018卷《计算机科学讲义》，第141–147页，Springer，2008年。[6] P. Heggernes、P. van 't Hof、B. M. P. Jansen、S. Kratsch 和 Y. Villanger，《删除顶点以得到完美图类的参数化复杂性》，理论计算机科学，第511卷，第172–180页，2013年。[7] M. Cygan、J. Nederlof、M. Pilipczuk、M. Pilipczuk、J. M. M. van Rooij 和 J. O. Wojtaszczyk，《在单指数时间内求解以树宽为参数的连通性问题》，*ACM*算法汇刊，第18卷，第2期，第17:1–17:31页，2022年。[8] J. Li 和 J. Nederlof，《在 k 大小的集合中以 $O^*(2.7^k)$时间检测反馈顶点集》，*ACM*算法汇刊，第18卷，第4期，第34:1–34:26页，2022年。

[9] J. Chen、F. V. Fomin、Y. Liu、S. Lu 和 Y. Villanger，《反馈顶点集问题的改进算法》，计算机系统科学杂志，第74卷，第7期，第1188–1198页，2008年。[10] Y. Cao、J. Chen 和 Y. Liu，《关于反馈顶点集：新度量与新结构》，*Algorithmica*，第73卷，第1期，第63–86页，2015年。[11] T. Kociumaka 和 M. Pilipczuk，《更快的确定性反馈顶点集算法》，信息处理快报，第114卷，第10期，第556–560页，2014年。[12] D. R. Fulkerson 和 O. Gross，《关联矩阵与区间图》，太平洋数学杂志，第15卷，第3期，第835–855页，1965年。[13] D. J. Rose，《三角化图与消去过程》，数学分析与应用杂志，第32卷，第3期，第597–609页，1970年。[14] G. A. Dirac，《关于刚性电路图》，汉堡大学数学研讨班报告，第25卷，第1–2期，第71–76页，1961年。[15] F. Gavril，《树中子树的交图恰为弦图》，组合理论杂志*B*辑，第16卷，第47–56页，1974年。[16] B. M. P. Jansen 和 M. Pilipczuk，《弦图顶点删除的近似与核化》，*SIAM*离散数学杂志，第32卷，第3期，第2258–2301页，2018年。[17] A. Agrawal、D. Lokshtanov、P. Misra、S. Saurabh 和 M. Zehavi，《受反馈顶点集启发的弦图顶点删除核》，*ACM*算法汇刊，第15卷，第1期，第11:1–11:28页，2019年。[18] D. J. Rose、R. E. Tarjan 和 G.S. Lueker，《图上顶点消去的算法方面》，*SIAM*计算杂志，第5卷，第2期，第266–283页，1976年。[19] E. W. Dijkstra，《关于两个与图有关的问题的注记》，数值数学，第1卷，第269–271页，1959年。