arXiv:2611.28949v1 [math.AC] 21 Nov 2026

L⊗k N 的同调性质

AHAD RAHIMI

Abstract. 设 A和 B 是任意域 $\Bbbk$上的交换诺特代数，且 $A \otimes_{\Bbbk} B$ 是诺特的。设 I 和 J 分别是 A 和 B的理想，并设 L 和 N 分别是 A 和 B上的非零有限生成模。在 [13], 中，作者研究了 $L \otimes_{\Bbbk} N$ 的某些代数性质与 L 和 N的相应性质之间的关系，反之亦然。本文根据 L 和 N 分别相对于 I 和 J的相应性质，刻画了 $L \otimes_{\Bbbk} N$相对于 $\mathcal{I} = I \otimes_{\Bbbk} B + A \otimes_{\Bbbk} J$的戈伦斯坦性、近似 Cohen–Macaulay 性和最大深度性质。特别地，当 A 和 B 是局部环时，我们描述了 $L \otimes_{\Bbbk} N$ 作为局部环 $A \otimes_{\Bbbk} B$上的模所具有的这些性质。

Contents

1. 引言 1 2. $L \otimes_{\Bbbk} N$ 3的戈伦斯坦性 3. $L \otimes_{\Bbbk} N$ 5的算术秩 4. $L \otimes_{\Bbbk} N$ 7的近似 Cohen–Macaulay 性质 5. $L \otimes_{\Bbbk} N$ 10的最大深度性质 6. M/的同调性质（$I \otimes_{\Bbbk} B$）M 12参考文献 16

1. 引言

在本文中， R 表示一个带幺元的交换诺特环。

设 A 和 B 是域 $\Bbbk$上的交换诺特 $\Bbbk$-代数，并假设 $A \otimes_{\Bbbk} B$ 也是诺特的。设 I 和 J 分别是 A 和 B的理想，并令 $\mathcal{I} = I \otimes_{\Bbbk} B + A \otimes_{\Bbbk} J$.

我们还可以考虑这样的情形： $A \otimes_{\Bbbk} B$ 是一个局部环，其极大理想为 $\mathfrak{M} = \mathfrak{m} \otimes_{\Bbbk} B + A \otimes_{\Bbbk} \mathfrak{n}$，其中（$A, \mathfrak{m}$）和（$B, \mathfrak{n}$）是局部 $\Bbbk$-代数。在此设定下， A和 B以 $\Bbbk$为公共剩余域，并且 A 和 B 中至少有一个在 $\Bbbk$上是代数的。此外，设 L和 N 分别是 A和 B上的非零有限生成模（见 [13]）。

在本文中，我们用 L和 N 分别相对于 I 和 J 的相应性质，刻画了 $L \otimes_{\Bbbk} N$ 相对于 $\mathcal{I}$ 的 Gorenstein 性质、近似 Cohen–Macaulay 性和最大深度性质。我们还对 [14] 中提出的一个问题作出了肯定回答：如果 $M = L \otimes_{\Bbbk} N$ 相对于 $A \otimes_{\Bbbk} J$ 满足某些同调性质，那么

2020 *Mathematics Subject Classification.* 13C14, 13C15.*Key words and phrases.* 代数闭域、近似 Cohen–Macaulay、算术秩、Cohen–Macaulay 模、Gorenstein、极大深度性质、张量积。

$M/(I \otimes_{\Bbbk} B)M$ 会继承相对于 $\mathcal{I}$ 的相应性质。然而，在一般情况下，戈伦斯坦性和极大 Cohen–Macaulay性不会在该商构造下保持。

我们在第2节首先研究 $L \otimes_{\Bbbk} N$ 的戈伦斯坦性。我们称一个 R-模K 关于 R 的理想 $\mathfrak{a}$ 是 Gorenstein 的，如果 $\operatorname{Ext}^i_R(R/\mathfrak{a}, K)$ 仅在一个 i 值处非零，即 $i = \operatorname{cd}(\mathfrak{a}, R)$（见 [8]）。在通常的局部情形（$R, \mathfrak{m}'$）中，Gorenstein R-模是关于 $\mathfrak{m}'$ 为 Gorenstein 的模。利用 [13] 中的一个结果以及 K¨unneth 公式，我们证明了：$L \otimes_{\Bbbk} N$ 关于 $\mathcal{I}$ 为 Gorenstein，当且仅当 L 和 N 分别关于 I 和 J 为 Gorenstein；见定理 2.4。特别地，在局部情形中，$L \otimes_{\Bbbk} N$ 为 Gorenstein，当且仅当 L 和 N 都为 Gorenstein。

接下来，我们将在引理 3.2 中证明，如果 $\Bbbk$ 是代数闭域，那么 $\operatorname{Rad}(\mathcal{I}) = \operatorname{Rad}(I) \otimes_{\Bbbk} B + A \otimes_{\Bbbk} \operatorname{Rad}(J)$。利用这一事实，我们在定理 3.4 中证明

$$\operatorname{ara}(\mathcal{I}, L \otimes_{\Bbbk} N) = \operatorname{ara}(I, L) + \operatorname{ara}(J, N).$$

这一结果用于建立下一节的主要结果。

接下来，我们考察 $L \otimes_{\Bbbk} N$ 的近似 Cohen–Macaulay 性。根据 [5], 的一个结果，近似 Cohen–Macaulay 模恰好是序列 Cohen–Macaulay 模，且其 Cohen–Macaulay 滤过的长度为二。因此，近似 Cohen–Macaulay 性可以视为 Cohen–Macaulay 性的自然推广。例4.5表明，L 和 N 的近似 Cohen–Macaulay 性并不意味着 $L \otimes_{\Bbbk} N$ 的近似 Cohen–Macaulay 性。利用定理 3.4，以及 $\Bbbk$ 是代数闭域这一假设和等式 $\operatorname{cd}(I, L) = \operatorname{ara}(I, L)$ 与 $\operatorname{cd}(J, N) = \operatorname{ara}(J, N)$，我们证明如下刻画：$L \otimes_{\Bbbk} N$ 关于 $\mathcal{I}$ 是近似 Cohen–Macaulay 的，但关于 $\mathcal{I}$ 不是 Cohen–Macaulay 的，当且仅当 L 关于 I 是近似 Cohen–Macaulay 的，但关于 I 不是 Cohen–Macaulay 的，同时 N 关于 J 是 Cohen–Macaulay 的；见定理 4.7。

特别地，在局部情形下，$L \otimes_{\Bbbk} N$ 是近似 Cohen–Macaulay 但不是 Cohen–Macaulay，当且仅当 L 是近似 Cohen–Macaulay 但不是 Cohen–Macaulay，且 N 是 Cohen–Macaulay。

下一个结果讨论最大深度性质，它是近似 Cohen–Macaulay 性的推广。若 K 是一个 R-模，且 $\operatorname{grade}(\mathfrak{a}, K) = \operatorname{mcd}(\mathfrak{a}, K)$，其中 $\operatorname{mcd}(\mathfrak{a}, K) = \min\{\operatorname{cd}(\mathfrak{a}, R/\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R K\}.$，则称 K 关于理想 $\mathfrak{a}$ 具有最大深度。我们首先证明，若 $\Bbbk$ 是代数闭域，则

$$\operatorname{mcd}(\mathcal{I}, L \otimes_{\Bbbk} N) = \operatorname{mcd}(I, L) + \operatorname{mcd}(J, N);$$

见命题 5.1。利用这一等式，我们证明 $L \otimes_{\Bbbk} N$ 关于 $\mathcal{I}$具有最大深度，当且仅当 L 和 N 分别关于 I 和 J具有最大深度；见定理 5.2。特别地，在局部情形下，$L \otimes_{\Bbbk} N$ 具有最大深度，当且仅当 L 和 N 都具有最大深度。

在最后一节中，我们研究 [14]（另见 [6]）中提出的关于 $L \otimes_{\Bbbk} N$ 的类似问题。更确切地说，我们证明，若 $M = L \otimes_{\Bbbk} N$ 关于 $A \otimes_{\Bbbk} J$ 是 Cohen–Macaulay、广义 Cohen–Macaulay、近似 Cohen–Macaulay 或序列 Cohen–Macaulay，则 $M/(I \otimes_{\Bbbk} B)M$ 关于 $\mathcal{I}$ 也具有相应性质。此外，若 M 关于 $A \otimes_{\Bbbk} J$ 具有极大深度，那么 $M/(I \otimes_{\Bbbk} B)M$ 关于 $\mathcal{I}$ 也具有极大深度。相较之下，戈伦斯坦性

和极大 Cohen–Macaulay 性通常不会在这种商构造下保持不变；见注释 6.10 和 6.11。作为应用，我们重新得到 [14] 的命题 6.1–6.3。

2. $L \otimes_{\Bbbk} N$的戈伦斯坦性

设 $\mathfrak{a}$ 是 R的一个理想，且 K 是一个有限生成的 R-模。 K 关于 $\mathfrak{a}$的上同调维数记为 $\operatorname{cd}(\mathfrak{a}, K)$，定义为满足$H^i_{\mathfrak{a}}(K) \neq 0$的所有整数 i 的上确界，其中 $H^i_{\mathfrak{a}}(K)$是 K 关于 $\mathfrak{a}$的第 i个局部上同调模。需要注意的是， $K = \mathfrak{a}K$ 当且仅当 $\operatorname{cd}(\mathfrak{a}, K) = -\infty$。 K 关于$\mathfrak{a}$的深度记为 $\operatorname{grade}(\mathfrak{a}, K)$，定义为满足 $H^i_{\mathfrak{a}}(K) \neq 0$的所有整数 i 的下确界。值得一提的是， $K = \mathfrak{a}K$ 当且仅当 $\operatorname{grade}(\mathfrak{a}, K) = +\infty$。注意，如果 $\mathfrak{a}K \neq K$，则 $\operatorname{grade}(\mathfrak{a}, K) \leq \operatorname{cd}(\mathfrak{a}, K)$。

定义 2.1. 我们称 K 是关于 $\mathfrak{a}$ *Gorenstein* 的，当且仅当对所有 $i \neq \operatorname{cd}(\mathfrak{a}, R)$ 都有 $\operatorname{Ext}^i_R(R/\mathfrak{a}, K) = 0$ （见 [8]）。

设 $(R, \mathfrak{m}')$ 是一个局部环。当且仅当 K 关于 $\mathfrak{m}'$是 Gorenstein 时， K 才是 Gorenstein。

设 $\Bbbk$ 是一个域，且 A 和 B 是诺特 $\Bbbk$-代数，使得 $A \otimes_{\Bbbk} B$ 是诺特的。设I 和 J 分别是 A 和 B的理想，并令 $\mathcal{I} = I \otimes_{\Bbbk} B + A \otimes_{\Bbbk} J$. 此外，设 L 和N 分别是 A 和 B上的非零有限生成模。

本节将根据 L 和 N 分别关于 I 和 J的戈伦斯坦性，刻画 $L \otimes_{\Bbbk} N$ 关于 $\mathcal{I}$ 的戈伦斯坦性。首先回顾一些后文将用到的事实。

事实 2.2. 根据 [13,定理 2.6], ，我们有

(a) 深度$(\mathcal{I}, L \otimes_{\Bbbk} N)$ =深度(I, L) +深度(J, N)。
(b) 余维$(\mathcal{I}, L \otimes_{\Bbbk} N)$ =余维(I, L) +余维(J, N)。

我们有如下事实

$$(A \otimes_{\Bbbk} B)/\mathcal{I} \cong A/I \otimes_{\Bbbk} B/J. \tag{2.2.1}$$

我们回顾 K¨unneth 公式的一个推论。

事实 2.3. 设 $\Bbbk$ 为一个域，且 A 和 B 为 $\Bbbk$-代数。设 L 和 L' 为 A-模，其中L 有限生成；设 N 和 N' 为 B-模，其中 N 有限生成。那么，对于每个$i \geq 0$，存在一个 $A \otimes_{\Bbbk} B$-模同构

$$\operatorname{Ext}^i_{A \otimes_{\Bbbk} B}(L \otimes_{\Bbbk} N, L' \otimes_{\Bbbk} N') \cong \bigoplus_{s+t=i} \operatorname{Ext}^s_A(L, L') \otimes_{\Bbbk} \operatorname{Ext}^t_B(N, N').$$

例如，参见 [17,命题 A.1.5]。

定理 2.4。 沿用上述记号和假设。则以下条件等价：

(a) $L \otimes_{\Bbbk} N$ 关于 $\mathcal{I}$是 *Gorenstein*；(b) L 和 N 分别关于 I 和 J 是 *Gorenstein*。

证明。 (a) $\Rightarrow$ (b)：假设 $L \otimes_{\Bbbk} N$ 关于 $\mathcal{I}$是 Gorenstein。那么

$$\operatorname{Ext}^i_{A\otimes_{\Bbbk} B}\big((A\otimes_{\Bbbk} B)/\mathcal{I}, L\otimes_{\Bbbk} N\big) = 0 \quad \text{for all} \quad i \neq \operatorname{cd}(\mathcal{I}, A\otimes_{\Bbbk} B).$$

因此，

$$\operatorname{grade}(\mathcal{I}, L\otimes_{\Bbbk} N) = \operatorname{cd}(\mathcal{I}, A\otimes_{\Bbbk} B) = \operatorname{cd}(I, A) + \operatorname{cd}(J, B).$$

第二个等式由事实 2.2(b) 得出。根据事实 2.2(a)，我们还有 $\operatorname{grade}(\mathcal{I},\ L\otimes_{\Bbbk} N) = \operatorname{grade}(I,\ L) + \operatorname{grade}(J,\ N)$。因此

$$\operatorname{grade}(I, L) + \operatorname{grade}(J, N) = \operatorname{cd}(I, A) + \operatorname{cd}(J, B).$$

由于 $\operatorname{grade}(I,\ L) \leq \operatorname{cd}(I,\ A)$ 且 $\operatorname{grade}(J,\ N) \leq \operatorname{cd}(J,\ B)$，我们得到

$$\operatorname{grade}(I, L) = \operatorname{cd}(I, A) \quad \text{and} \quad \operatorname{grade}(J, N) = \operatorname{cd}(J, B).$$

由此可得

$$\operatorname{Ext}^s_A(A/I, L) = 0 \quad \text{for all } s < \operatorname{cd}(I, A) \quad (*),$$

and

$$\operatorname{Ext}^t_B(B/J, N) = 0 \quad \text{for all } t < \operatorname{cd}(J, B) \quad (**).$$

另一方面，根据方程 (2.2.1) 和事实 2.3，我们有

$$\operatorname{Ext}^i_{A\otimes_{\Bbbk} B}\big((A\otimes_{\Bbbk} B)/\mathcal{I}, L\otimes_{\Bbbk} N\big) \cong \bigoplus_{p+q=i} \operatorname{Ext}^p_A(A/I, L)\otimes_{\Bbbk} \operatorname{Ext}^q_B(B/J, N).$$

由于当 $i \neq \operatorname{cd}(I, A) + \operatorname{cd}(J, B)$ 时左侧为零，由（$*$）和（$**$）可得，对于所有 $s > \operatorname{cd}(I, A)$，$\operatorname{Ext}^s_A(A/I, L) = 0$；并且对于所有 $t > \operatorname{cd}(J, B)$，$\operatorname{Ext}^t_B(B/J, N) = 0$。因此，

$$\operatorname{Ext}^s_A(A/I, L) = 0 \quad \text{for all } s \neq \operatorname{cd}(I, A),$$

and

$$\operatorname{Ext}^t_B(B/J, N) = 0 \quad \text{for all } t \neq \operatorname{cd}(J, B).$$

因此， L和 N 分别相对于 I 和 J是 Gorenstein 的。

（b）$\Rightarrow$（a）：假设 L 和 N 分别相对于 I 和 J 是 Gorenstein 的。则对于所有 $p \neq \operatorname{cd}(I, A)$，$\operatorname{Ext}^p_A(A/I, L) = 0$；并且对于所有 $q \neq \operatorname{cd}(J, B)$，$\operatorname{Ext}^q_B(B/J, N) = 0$。由等式（2.2.1）和事实 2.3，可得

$$\operatorname{Ext}^i_{A\otimes_{\Bbbk} B}\big((A\otimes_{\Bbbk} B)/\mathcal{I}, L\otimes_{\Bbbk} N\big) = 0 \quad \text{for all} \quad i \neq \operatorname{cd}(I, A) + \operatorname{cd}(J, B) = \operatorname{cd}(\mathcal{I}, A\otimes_{\Bbbk} B),$$

w这里最后一个等式由事实 2.2(b) 得出。因此， $L\otimes_{\Bbbk} N$相对于 $\mathcal{I}$是 Gorenstein 的 . □

设 $(A, \mathfrak{m})$ 和 $(B, \mathfrak{n})$ 是域 $\Bbbk$ 上的两个局部代数，并且以 $\Bbbk$ 作为公共剩余域。我们还假设 A 或 B 在 $\Bbbk$ 上是代数的。于是 $A\otimes_{\Bbbk} B$ 是一个局部环，其唯一的极大理想为 $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}\otimes_{\Bbbk} B + A\otimes_{\Bbbk} \mathfrak{n}$，参见 [13, 备注 2.8]。作为定理 2.4 的推论，我们得到以下推论。

推论 2.5。 在上述假设下，以下条件等价：

(a) $L\otimes_{\Bbbk} N$ 是 *Gorenstein*；(b)
L 和 N 都是 *Gorenstein*。

定义 2.6. 设 $\mathfrak{a}$ 是 R的一个理想，且 K 是一个有限生成的 R-模。若K 满足相对于 $\mathfrak{a}$是极大 *Cohen–Macaulay*的条件，即 $\operatorname{grade}(\mathfrak{a}, K) = \operatorname{cd}(\mathfrak{a}, R)$（参见 [8]），则称$K$ 为相对于 $\mathfrak{a}$的极大 Cohen–Macaulay 模。

设$(R, \mathfrak{m}')$是一个局部环。当且仅当 K 是相对于 $\mathfrak{m}'$的极大 Cohen–Macaulay 模时， K 才是极大 Cohen–Macaulay 模。值得注意的是，若 K 相对于 $\mathfrak{a}$和 $\mathfrak{a}K \neq K$是 Gorenstein 的，则 K 相对于 $\mathfrak{a}$是极大 Cohen–Macaulay 模；另见 [8, 定理 2.19(c)]。然而，反过来一般并不成立。

注 2.7. 根据事实 2.2，容易刻画 $L \otimes_{\Bbbk} N$ 关于$\mathcal{I}$ 的极大 Cohen–Macaulay 性： $L \otimes_{\Bbbk} N$ 关于 $\mathcal{I}$ 是极大 Cohen–Macaulay，当且仅当 L和 N 分别关于 I 和 J是极大 Cohen–Macaulay。

$L \otimes_{\Bbbk} N$的 3. 算术秩

设 $\mathfrak{a}$ 是 R 的一个理想， K 是一个有限生成的 R-模，且 $\mathfrak{a}K \neq K$。我们用 $\operatorname{ara}(\mathfrak{a}, K)$ 表示 $\mathfrak{a}$ 关于 K的算术秩，定义为满足存在 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in R$的整数 $n \in \mathbb{N}_0$的下确界

$$\operatorname{Rad}\left(\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle + \operatorname{Ann}_R K\right) = \operatorname{Rad}\left(\mathfrak{a} + \operatorname{Ann}_R K\right).$$

容易验证 $\operatorname{cd}(\mathfrak{a}, K) \leq \operatorname{ara}(\mathfrak{a}, K)$。显然， $\operatorname{ara}(\mathfrak{a}, R) = \operatorname{ara}(\mathfrak{a})$。如果 $(R, \mathfrak{m}')$ 是一个局部环，那么 $\operatorname{ara}(\mathfrak{m}') = \operatorname{ara}(\mathfrak{m}', R) = \dim(R)$，且 $\operatorname{ara}(\mathfrak{m}', K) = \dim_R(K)$。更多细节和补充信息，请参见 [1]和 [4]。

在本节中，我们沿用上一节的记号和假设。更确切地说，设$\Bbbk$ 是一个域， A 和 B 是诺特 $\Bbbk$-代数，且 $A \otimes_{\Bbbk} B$ 是诺特的。设 I 和J 分别是 A 和 B的理想，并令 $\mathcal{I} = I \otimes_{\Bbbk} B + A \otimes_{\Bbbk} J$。此外，设 L 和 N 分别是 A 和 B上的非零有限生成模。

事实 3.1. 设 $\Bbbk$ 是代数闭域。则

$$\operatorname{Ass}_{A\otimes_{\Bbbk} B}(L \otimes_{\Bbbk} N) = \{\mathfrak{p} \otimes_{\Bbbk} B + A \otimes_{\Bbbk} \mathfrak{q} : \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_A L \quad \text{and} \quad \mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}_B N\},$$

参见 [7, 推论 2.8]。

回忆一下，若环 R 没有非零幂零元，则称其为约化的。设 $\mathfrak{a}$ 是环 R的一个理想。容易看出，商环 $R/\mathfrak{a}$ 是约化的，当且仅当 $\mathfrak{a}$ 是一个根理想，也就是说，$\operatorname{Rad}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$. A 域 $\Bbbk$ 称为完美的，若 $\operatorname{char}(\Bbbk) = 0$，或 $\operatorname{char}(\Bbbk) = p > 0$ 且 $\Bbbk$ 中的每个元素都有一个 p次根。特别地，每个代数闭域都是完美的。事实上，若 $\operatorname{char}(\Bbbk) = 0$，则 $\Bbbk$ 是完美的。若 $\operatorname{char}(\Bbbk) = p > 0$，则对每个 $a \in \Bbbk$，多项式 $x^p - a$在 $\Bbbk$中都有根，因为 $\Bbbk$ 是代数闭的。因此， $\Bbbk$中的每个元素都有一个 p次根，从而 $\Bbbk$ 是完美的。最后，若 $\Bbbk$ 是完美域，且 A 和 B 是约化的 $\Bbbk$-代数，则 $A \otimes_{\Bbbk} B$ 是约化的，参见 [2]。

引理 3.2. 设 $\Bbbk$ 为代数闭域。则

$$\operatorname{Rad}(\mathcal{I}) = \operatorname{Rad}(I) \otimes_{\Bbbk} B + A \otimes_{\Bbbk} \operatorname{Rad}(J).$$

证明。 我们设 $H =$ 根基$(I) \otimes_{\Bbbk} B + A \otimes_{\Bbbk}$ 根基(J)。 令 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_A(A/I)$ 和 $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}_B(B/J)$。于是 $I \subseteq \mathfrak{p}$且 $J \subseteq \mathfrak{q}$，这意味着根基$(I) \subseteq \mathfrak{p}$ 以及根基$(J) \subseteq \mathfrak{q}$。因此， $H \subseteq \mathfrak{p}\otimes_{\Bbbk} B + A \otimes_{\Bbbk} \mathfrak{q}$.对所有这样的 $\mathfrak{p}$ 和 $\mathfrak{q}$取交，并利用事实 3.1，我们得到

$$H \subseteq \bigcap_{\substack{\mathfrak{p}\in \operatorname{Ass}_A(A/I)\\ \mathfrak{q}\in \operatorname{Ass}_B(B/J)}} \left(\mathfrak{p} \otimes_{\Bbbk} B + A \otimes_{\Bbbk} \mathfrak{q}\right) = \operatorname{Rad}(\mathcal{I}).$$

另一方面，由于 $\mathcal{I} \subseteq H$，我们有根基($\mathcal{I}$) $\subset$根基(H)。 因此，剩下要证明H 是一个根理想。注意到

$$(A \otimes_{\Bbbk} B)/H \cong (A/\operatorname{Rad}(I)) \otimes_{\Bbbk} (B/\operatorname{Rad}(J)).$$

由于 Rad(I) 和 Rad(J) 是根理想，商环 A/Rad(I) 和 B/Rad(J) 是约化的。此外， $\Bbbk$ 是完美的，因为它是代数闭的。根据标准定理，完美域上两个约化代数的张量积是约化的（见 [2]），可知 (A/Rad(I)) $\otimes_{\Bbbk}$ (B/Rad(J)) 是约化的。因此，($A \otimes_{\Bbbk} B$)/H 是约化的，这意味着 H 是根理想。因此，Rad(H) $= H$，进而 Rad($\mathcal{I}$) $\subseteq H$. 。结合这两个包含关系，我们得出 Rad($\mathcal{I}$) $=$ Rad(I) $\otimes_{\Bbbk} B + A \otimes_{\Bbbk}$ Rad(J)。 证明完毕。□

引理 3.3。 设 $I \subseteq I'$ 是 A 的真理想，且 $J \subseteq J'$ 是 B 的真理想。假设 $I \otimes_{\Bbbk} B + A \otimes_{\Bbbk} J = I' \otimes_{\Bbbk} B + A \otimes_{\Bbbk} J'.$，则 $I = I'$ 且 $J = J'$。

证明。考虑典范满射 $\pi\colon A \otimes_{\Bbbk} B \longrightarrow (A/I) \otimes_{\Bbbk} (B/J)$，其定义为 $\pi(a \otimes_{\Bbbk} b) = (a + I) \otimes_{\Bbbk} (b + J)$。根据张量积的泛性质， π 定义良好，且 ker $\pi = I \otimes_{\Bbbk} B + A \otimes_{\Bbbk} J$. 。由假设的等式，
$I' \otimes_{\Bbbk} B + A \otimes_{\Bbbk} J' =$ ker π. 。因此， $I' \otimes_{\Bbbk} B \subseteq$ ker π且 $A \otimes_{\Bbbk} J' \subseteq$ ker π。于是，$(I'/I) \otimes_{\Bbbk} (B/J)$ $= 0$ 且 $(A/I) \otimes_{\Bbbk} (J'/J) = 0$。由于 I 和 J 是真理想， $\Bbbk$- 向量空间 A/I 和 B/J 非零。由于域上两个非零向量空间的张量积非零，我们得到 $I'/I = 0$ 和 $J'/J = 0$。因此， $I = I'$和 $J = J'$。
□

定理 3.4. 设 $\Bbbk$ 是一个代数闭域。那么

$$\operatorname{ara}(\mathcal{I}, L \otimes_{\Bbbk} N) = \operatorname{ara}(I, L) + \operatorname{ara}(J, N).$$

证明。 设 ara(I, L) $= r$ 且 ara(J, N) $= s$。那么存在 $x_1, \ldots, x_r \in A$和 $y_1, \ldots, y_s \in B$，使得

$$\operatorname{Rad}(\langle x_1, \ldots, x_r\rangle + \operatorname{Ann}_A L) = \operatorname{Rad}(I + \operatorname{Ann}_A L),$$

and

$$\operatorname{Rad}(\langle y_1, \ldots, y_s\rangle + \operatorname{Ann}_B N) = \operatorname{Rad}(J + \operatorname{Ann}_B N).$$

令 $x = x_1, \ldots, x_r$和 $y = y_1, \ldots, y_s$。 我们断言

$$\operatorname{Rad}\Big(\langle x\rangle \otimes_{\Bbbk} B + A \otimes_{\Bbbk} \langle y\rangle + \operatorname{Ann}_{A\otimes_{\Bbbk} B}(L \otimes_{\Bbbk} N)\Big) = \operatorname{Rad}\Big(\mathcal{I} + \operatorname{Ann}_{A\otimes_{\Bbbk} B}(L \otimes_{\Bbbk} N)\Big).$$

注意到

$$\operatorname{Ann}_{A\otimes_{\Bbbk} B}(L \otimes_{\Bbbk} N) = (\operatorname{Ann}_A L) \otimes_{\Bbbk} B + A \otimes_{\Bbbk} \operatorname{Ann}_B N \quad (*).$$

我们定义 Ann$^{A\otimes_{\Bbbk} B}$($L \otimes_{\Bbbk} N$) $= K$。注意到

$$\begin{aligned}
\operatorname{Rad}\Big(\langle x\rangle \otimes_{\Bbbk} B + A \otimes_{\Bbbk} \langle y\rangle + K\Big) &= \operatorname{Rad}\Big((\langle x\rangle + \operatorname{Ann}_A L) \otimes_{\Bbbk} B + A \otimes_{\Bbbk} (\langle y\rangle + \operatorname{Ann}_B N)\Big) \\
&= \operatorname{Rad}(\langle x\rangle + \operatorname{Ann}_A L) \otimes_{\Bbbk} B + A \otimes_{\Bbbk} \operatorname{Rad}(\langle y\rangle + \operatorname{Ann}_B N) \\
&= \operatorname{Rad}(I + \operatorname{Ann}_A L) \otimes_{\Bbbk} B + A \otimes_{\Bbbk} \operatorname{Rad}(J + \operatorname{Ann}_B N) \\
&= \operatorname{Rad}\Big(I \otimes_{\Bbbk} B + (\operatorname{Ann}_A L) \otimes_{\Bbbk} B + A \otimes_{\Bbbk} J + A \otimes_{\Bbbk} \operatorname{Ann}_B N\Big) \\
&= \operatorname{Rad}\Big(\mathcal{I} + \operatorname{Ann}_{A\otimes_{\Bbbk} B}(L \otimes_{\Bbbk} N)\Big).
\end{aligned}$$

因此，

$$\operatorname{ara}(\mathcal{I}, L \otimes_{\Bbbk} N) \leq r + s.$$

这里，第二个等式由引理 3.2 得出，其余步骤是标准的 d.

现在令 ara($\mathcal{I}, L \otimes_{\Bbbk} N$) $= t$。则存在元素 $x_1, \ldots, x_r \in A$和 $y_1, \ldots, y_s \in B$，满足$r + s = t$，使得

$$\operatorname{Rad}\Big(\langle x\rangle \otimes_{\Bbbk} B + A \otimes_{\Bbbk} \langle y\rangle + \operatorname{Ann}_{A\otimes_{\Bbbk} B}(L \otimes_{\Bbbk} N)\Big) = \operatorname{Rad}\Big(\mathcal{I} + \operatorname{Ann}_{A\otimes_{\Bbbk} B}(L \otimes_{\Bbbk} N)\Big).$$

因此，根据（$*$）和引理 3.2，我们有

Rad($\langle x\rangle$+Ann$_A$ L)$\otimes_{\Bbbk} B$+$A\otimes_{\Bbbk}$Rad($\langle y\rangle$+Ann$_B$ N) =Rad(I+Ann$_A$ L)$\otimes_{\Bbbk} B$+$A\otimes_{\Bbbk}$Rad(J+Ann$_B$ N).

由引理 3.3 可得

$$\operatorname{Rad}(\langle x\rangle + \operatorname{Ann}_A L) = \operatorname{Rad}(I + \operatorname{Ann}_A L),$$

and

$$\operatorname{Rad}(\langle y\rangle + \operatorname{Ann}_B N) = \operatorname{Rad}(J + \operatorname{Ann}_B N).$$

因此 ara(I, L) $\leq r$ 且 ara(J, N) $\leq s$，于是

$$\operatorname{ara}(I, L) + \operatorname{ara}(J, N) \leq r + s = t = \operatorname{ara}(\mathcal{I}, L \otimes_{\Bbbk} N),$$

如所需。 □

4. $L \otimes_{\Bbbk} N$的近似 Cohen–Macaulay 性质

本节中，设 $\mathfrak{a}$ 为 R 的一个理想，且设 K 为一个有限生成的 R-模。此外，我们沿用前几节引入的记号和假设。

定义 4.1. 如果满足以下条件之一： K 要么满足 $K = \mathfrak{a}K$，要么满足 $K \neq \mathfrak{a}K$ 且 grade($\mathfrak{a}$, K) = cd($\mathfrak{a}$, K)（见 [10]），则称 K 关于 $\mathfrak{a}$ 是 *Cohen–Macaulay*。

注意，如果 (R, $\mathfrak{m}'$) 是一个局部环，那么 K 是 Cohen–Macaulay，当且仅当 K 关于 $\mathfrak{m}'$是 Cohen–Macaulay。

定义 4.2. 我们称 K 是关于 $\mathfrak{a}$ 的近似科恩–麦考利模，如果余维($\mathfrak{a}, K$) $= 0$，或者存在一个元素 $a \in \mathfrak{a}$，使得 K/a^nK 关于 $\mathfrak{a}$是 Cohen–Macaulay，且对于每个整数 $n \geq 1$，余维($\mathfrak{a}, K/a^nK$) = 余维($\mathfrak{a}, K$) $- 1$（见 [5]）。

注意，如果 ($R, \mathfrak{m}'$) 是一个局部环，那么 K 是近似 Cohen–Macaulay，当且仅当K 是关于 $\mathfrak{m}'$近似 Cohen–Macaulay；见 [9, 16]。可以观察到，如果 K 关于 $\mathfrak{a}$是 Cohen–Macaulay，那么 K 关于 $\mathfrak{a}$是近似 Cohen–Macaulay；见 [5,命题 2.4]。

定义 4.3。滤过 $\mathscr{D}$: $0 = D_0 \subsetneq D_1 \subsetneq \cdots \subsetneq D_r = K$ 由 K 的子模 D_i 组成，称为 K 相对于 $\mathfrak{a}$ 的维数滤过，如果对于所有 $i = 1$、.....、 r， D_{i-1} 是 D_i 中满足余维($\mathfrak{a}$、 D_{i-1}) $<$余维($\mathfrak{a}$、 D_i) 的最大子模。

有限滤链 $\mathcal{F}$： $0 = K_0 \subsetneq K_1 \subsetneq \cdots \subsetneq K_r = K$ 由 K 的子模 K_i 组成，称为相对于 $\mathfrak{a}$ 的 ***Cohen–Macaulay*** 滤链，如果每个商模 K_i/K_{i-1} 都相对于$\mathfrak{a}$ 是 Cohen–Macaulay 的，并且 $0 \leq$ 余维($\mathfrak{a}$、 K_1/K_0) $<$余维($\mathfrak{a}$、 K_2/K_1) $< \cdots <$余维($\mathfrak{a}$、 K_r/K_{r-1})。如果 K相对于 $\mathfrak{a}$具有 Cohen–Macaulay 滤链，则称 K 是相对于 $\mathfrak{a}$的序列*Cohen–Macaulay*。注意，如果 K 相对于 $\mathfrak{a}$是序列Cohen–Macaulay 的，则滤过 $\mathscr{F}$ 唯一确定，并且它正是 K 相对于 $\mathfrak{a}$的维数滤过，即 $\mathscr{F} = \mathscr{D}$，参见 [13]的第 4 节。

事实 4.4. 设 $\mathfrak{a}$是 R的 Jacobson根中包含的一个理想，且 $\operatorname{cd}(\mathfrak{a}, K) = \operatorname{ara}(\mathfrak{a}, K)$。假设 K 关于 $\mathfrak{a}$ 不是 Cohen–Macaulay 的。则以下陈述等价:

(a) K 关于 $\mathfrak{a}$是近似 Cohen–Macaulay 的；(b) K 关于 $\mathfrak{a}$ 是序列 Cohen–Macaulay 的，其维数滤过为 $\mathcal{F}$:$0 = D_0 \subsetneq D_1 \subsetneq D_2 = K$ 关于 $\mathfrak{a}$，其中 $\operatorname{cd}(\mathfrak{a}, D_1) = \operatorname{cd}(\mathfrak{a}, K) - 1$，见 [5, 定理 3.2]。

特别地，设 $(R, \mathfrak{m}')$ 是一个局部环，且 K 是一个非 Cohen–Macaulay 的 R-模。那么， K 是近似 Cohen–Macaulay 的，当且仅当 K 是序列 Cohen–Macaulay 的，其维数滤过为 $\mathcal{F}$: $0 = D_0 \subsetneq D_1 \subsetneq D_2 = K$，其中 $\dim D_1 = \dim_R K - 1$。

例4.5. 回想一下， L是一个序列 Cohen–Macaulay A-模，且 N 是一个序列 Cohen–Macaulay B-模，当且仅当 $L \otimes_{\Bbbk} N$ 是一个序列 Cohen–Macaulay $A \otimes_{\Bbbk} B$-模，见 [13, 定理 4.6]。然而，对于近似 Cohen–Macaulay 模，这种等价关系并不成立。事实上，令

$$L = \Bbbk[x_1, x_2, x_3] / \Big(\langle x_1 \rangle \cap \langle x_2, x_3 \rangle \Big),$$

视为一个 $\Bbbk[x] = \Bbbk[x_1, x_2, x_3]$-模。容易验证，$\dim L = 2$ 且深度 $L = 1$。我们断言 L 是一个近似 Cohen–Macaulay $\Bbbk[x]$-模。考虑维数滤过$0 \subsetneq L_1 \subsetneq L$，其中

$$L_1 = \langle x_1 \rangle / \Big(\langle x_1 \rangle \cap \langle x_2, x_3 \rangle \Big).$$

那么 $L/L_1 \cong \Bbbk[x]/\langle x_1 \rangle$ 是维数为 2 的 Cohen–Macaulay 模。此外,

$$\operatorname{Ass}_{\Bbbk[x]}(L_1) = \{ \langle x_2, x_3 \rangle \},$$

因此 L_1 是维数为 1 的 Cohen–Macaulay 模。同样,

$$N = \Bbbk[y_1, y_2, y_3] / \Big(\langle y_1 \rangle \cap \langle y_2, y_3 \rangle \Big)$$

是一个近似 Cohen–Macaulay $\Bbbk[y]$-模。另一方面， $L \otimes_{\Bbbk} N$ 作为 $\Bbbk[x, y]$-模并非近似 Cohen–Macaulay，因为

$$\dim(L \otimes_{\Bbbk} N) = \dim L + \dim N = 2 + 2 = 4,$$

而

$$\operatorname{depth}(L \otimes_{\Bbbk} N) = \operatorname{depth} L + \operatorname{depth} N = 1 + 1 = 2.$$

因此，$\dim(L \otimes_{\Bbbk} N) - \operatorname{depth}(L \otimes_{\Bbbk} N) = 2$，这与近似 Cohen–Macaulay 性相矛盾。

注 4.6。 根据事实 2.2， $L \otimes_{\Bbbk} N$ 关于 $\mathcal{I}$ 是 Cohen–Macaulay 的，当且仅当 L和 N 分别关于 I 和 J是 Cohen–Macaulay 的。

定理 4.7。 设 $\Bbbk$ 为代数闭域。假设 余维$(I, L) = \operatorname{ara}(I, L)$ 且 余维$(J, N) = \operatorname{ara}(J, N)$。以下陈述等价:

(a) $L \otimes_{\Bbbk} N$ 关于 $\mathcal{I}$ 是近似 *Cohen–Macaulay* 的，但关于 $\mathcal{I}$不是 *Cohen–Macaulay* 的。(b) L 关于 I 是近似 *Cohen–Macaulay* 的，但关于 I不是 *Cohen–Macaulay* 的，并且 N 关于 J是 *Cohen–Macaulay* 的。

证明。 $(a) \Rightarrow (b)$: 假设 $L \otimes_{\Bbbk} N$ 关于 $\mathcal{I}$ 是近似 Cohen–Macaulay 的，但关于 $\mathcal{I}$不是 Cohen–Macaulay 的。令 $\mathscr{F}$: $0 = L_0 \subsetneq L_1 \subsetneq \cdots \subsetneq L_r = L$为 L 关于 I的维数滤过。类似于 [13,引理 4.5]的证明可得

$$\mathscr{F} \otimes_{\Bbbk} N: \quad 0 = L_0 \otimes_{\Bbbk} N \subsetneq L_1 \otimes_{\Bbbk} N \subsetneq \cdots \subsetneq L_r \otimes_{\Bbbk} N = L \otimes_{\Bbbk} N$$

是 $L \otimes_{\Bbbk} N$关于 $\mathcal{I}$的维数滤过。根据我们的假设， $L \otimes_{\Bbbk} N$关于 $\mathcal{I}$ 是序列 Cohen–Macaulay 的，其 Cohen–Macaulay 过滤的长度为 2，见事实 4.4。注意，Cohen–Macaulay 过滤与维数滤过相同。因此， $0 \subsetneq L_1 \otimes_{\Bbbk} N \subsetneq L \otimes_{\Bbbk} N$是 $L \otimes_{\Bbbk} N$关于 $\mathcal{I}$的 Cohen–Macaulay 过滤，且 cd($\mathcal{I}$, $L_1 \otimes_{\Bbbk} N$) =cd($\mathcal{I}$, $L \otimes_{\Bbbk} N$) -1。由此可得， $0 \subsetneq L_1 \subsetneq L$是 L的 Cohen–Macaulay 过滤，且 cd(I, L_1) =cd(I, L)-1，并且 N关于 J是 Cohen–Macaulay 的。事实上，由于 $L_1 \otimes_{\Bbbk} N$关于 $\mathcal{I}$是 Cohen–Macaulay 的，由注 4.6 可知， L_1 关于 I是 Cohen–Macaulay 的，并且 N关于 J是 Cohen–Macaulay 的。此外，由于

$$(L \otimes_{\Bbbk} N)/(L_1 \otimes_{\Bbbk} N) \cong L/L_1 \otimes_{\Bbbk} N$$

相对于 $\mathcal{I}$ 是 Cohen–Macaulay，再次由注 4.6 可知， L_2/L_1 相对于 I 是 Cohen–Macaulay。最后，由事实 2.2(b)，cd($\mathcal{I}, L_1 \otimes_{\Bbbk} N$) =cd($\mathcal{I}, L \otimes_{\Bbbk} N$)$-1$ 这一等式意味着 cd(I, L_1) =cd(I, L)-1。因此，由事实 4.4， L 相对于 I 是近似 Cohen–Macaulay，而 N 相对于 J 是 Cohen–Macaulay。还需注意， L 相对于 I 不是 Cohen–Macaulay。事实上，若 L 相对于 I 是 Cohen–Macaulay，则 grade(I, L) =cd(I, L)。由于 N 相对于 J 是 Cohen–Macaulay，事实 2.2 将推出 grade($\mathcal{I}, L \otimes_{\Bbbk} N$) =cd($\mathcal{I}, L \otimes_{\Bbbk} N$)，从而产生矛盾。

$(b) \Rightarrow (a)$: 假设 L 关于 I 是近似 Cohen–Macaulay 的，但关于 I 不是 Cohen–Macaulay 的，并且 N 关于 J 是 Cohen–Macaulay 的。因此，存在 $0 \subsetneq L_1 \subsetneq L$ 关于 I 的 Cohen–Macaulay 过滤，使得 cd(I, L_1) = cd(I, L) -1。由我们的假设、事实 2.2 和定理 3.4 可得

$$\operatorname{cd}(\mathcal{I}, L \otimes_{\Bbbk} N) = \operatorname{cd}(I, L) + \operatorname{cd}(J, N) = \operatorname{ara}(I, L) + \operatorname{ara}(J, N) = \operatorname{ara}(\mathcal{I}, L \otimes_{\Bbbk} N).$$

我们断言， $0 \subsetneq L_1 \otimes_{\Bbbk} N \subsetneq L \otimes_{\Bbbk} N$ 是 $L \otimes_{\Bbbk} N$ 的 Cohen–Macaulay 过滤，且 cd($\mathcal{I}$, $L_1 \otimes_{\Bbbk} N$) = cd($\mathcal{I}$, $L \otimes_{\Bbbk} N$) -1。事实上，由于 L_1 关于 I 是 Cohen–Macaulay 的，且 N 关于 J 是 Cohen–Macaulay 的，根据注 4.6 可知 $L_1 \otimes_{\Bbbk} N$ 关于 $\mathcal{I}$ 是 Cohen–Macaulay 的。此外，

$$(L \otimes_{\Bbbk} N)/(L_1 \otimes_{\Bbbk} N) \cong L/L_1 \otimes_{\Bbbk} N$$

根据注 4.6，关于 $\mathcal{I}$ 再次是 Cohen–Macaulay。最后，cd(I, L_1) =cd(I, L) -1蕴含 cd($\mathcal{I}$, $L_1 \otimes_{\Bbbk} N$) =cd($\mathcal{I}, L \otimes_{\Bbbk} N$) -1。因此，根据事实 4.4， $L \otimes_{\Bbbk} N$关于 $\mathcal{I}$ 是近似 Cohen–Macaulay。还要注意， $L \otimes_{\Bbbk} N$ 不是 Cohen–Macaulay

关于 $\mathcal{I}$。否则，根据事实 2.2， L 将关于 I是 Cohen–Macaulay，这就产生了矛盾。□

设 $(A, \mathfrak{m})$ 和 $(B, \mathfrak{n})$ 是域 $\Bbbk$ 上的两个局部代数，且共有剩余域 $\Bbbk$。我们还假设 A 或 B 至少有一个在 $\Bbbk$ 上是代数的。那么 $A \otimes_\Bbbk B$ 是一个局部环，其唯一的极大理想为 $\mathfrak{M} = \mathfrak{m} \otimes_\Bbbk B + A \otimes_\Bbbk \mathfrak{n}$，见 [13]。注意，$\operatorname{cd}(\mathfrak{m}, L) = \operatorname{ara}(\mathfrak{m}, L) = \dim_A L$，且 $\operatorname{cd}(\mathfrak{n}, N) = \operatorname{ara}(\mathfrak{n}, N) = \dim_B N$。因此，定理 4.7 得出以下推论。

推论 4.8。设 $\Bbbk$ 是代数闭域。在上述假设下，以下条件等价：

(a) $L \otimes_\Bbbk N$ 是近似 *Cohen–Macaulay* 的，但不是 *Cohen–Macaulay* 的。
(b) L 是近似 *Cohen–Macaulay* 的，且 N 是 *Cohen–Macaulay* 的。

在定理 4.7 中取 $I = 0$，可得到以下推论。

推论 4.9。设 $\Bbbk$ 是代数闭域，并假设 $\operatorname{cd}(J, N) = \operatorname{ara}(J, N)$。以下条件等价：

(a) $L \otimes_\Bbbk N$ 关于 $A \otimes_\Bbbk J$ 是近似 *Cohen–Macaulay*，但不是 *Cohen–Macaulay*。(b) N 关于 J 是近似 *Cohen–Macaulay*，但不是 *Cohen–Macaulay*。

5. $L \otimes_\Bbbk N$ 的最大深度性质

设 $\mathfrak{a}$ 是 R 的一个理想， K 是一个有限生成的 R-模。注意到

$$\operatorname{grade}(\mathfrak{a}, K) \leq \min\{\operatorname{cd}(\mathfrak{a}, R/\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R K\},$$

见命题 2.2]。受这个不等式的启发，我们定义

$$\operatorname{mcd}(\mathfrak{a}, K) = \min\{\operatorname{cd}(\mathfrak{a}, R/\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R K\}.$$

因此，$\operatorname{grade}(\mathfrak{a}, K) \leq \operatorname{mcd}(\mathfrak{a}, K)$。我们称 K 关于 $\mathfrak{a}$ 具有极大深度，如果 $\operatorname{grade}(\mathfrak{a}, K) = \operatorname{mcd}(\mathfrak{a}, K)$。等价地，如果存在 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R K$ 使得 $\operatorname{grade}(\mathfrak{a}, K) = \operatorname{cd}(\mathfrak{a}, R/\mathfrak{p})$，则称 K 关于 $\mathfrak{a}$ 具有极大深度。如果 $(R, \mathfrak{m}')$ 是一个局部环，那么

$$\operatorname{grade}(\mathfrak{m}', K) = \operatorname{depth}_R K \quad \text{and} \quad \operatorname{mcd}(\mathfrak{m}', K) = \operatorname{mcd}_R K.$$

因此， K 具有极大深度当且仅当它关于 $\mathfrak{m}'$ 具有极大深度，即 $\operatorname{depth}_R K = \operatorname{mcd}_R K$。等价地， K 具有极大深度当且仅当存在 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R K$ 使得 $\operatorname{depth}_R K = \dim R/\mathfrak{p}$。注意，

$$\operatorname{grade}(\mathfrak{a}, K) = 0 \iff \operatorname{mcd}(\mathfrak{a}, K) = 0.$$

此外，如果 $\mathfrak{a}K \neq K$，那么

$$\operatorname{grade}(\mathfrak{a}, K) \leq \operatorname{mcd}(\mathfrak{a}, K) \leq \max\{\operatorname{cd}(\mathfrak{a}, R/\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R K\} = \operatorname{cd}(\mathfrak{a}, K)。 \quad (5.0.1)$$

最后一个等式由 [3, 推论 4.6]得出。类似于 [12, 命题 1.6]的证明可知，若 K 关于 $\mathfrak{a}$是序列 Cohen–Macaulay 的，则 K 关于 $\mathfrak{a}$具有极大深度。特别地，由事实 4.4 可知，若 K 关于 $\mathfrak{a}$是近似 Cohen–Macaulay 的，则 K 关于 $\mathfrak{a}$具有极大深度。我们沿用前几节中引入的记号和假设。

命题 5.1. 设 $\mathbb{k}$ 是一个代数闭域。那么

$$\operatorname{mcd}(\mathcal{I}, L \otimes_{\mathbb{k}} N) = \operatorname{mcd}(I, L) + \operatorname{mcd}(J, N).$$

证明。 设 $\operatorname{mcd}(I, L) = s$ 且 $\operatorname{mcd}(J, N) = t$。那么存在 $\mathfrak{p}_1 \in \operatorname{Ass}_A L$ 和 $\mathfrak{p}_2 \in \operatorname{Ass}_B N$，使得

$$\operatorname{cd}(I, A/\mathfrak{p}_1) = s \quad \text{and} \quad \operatorname{cd}(J, B/\mathfrak{p}_2) = t.$$

根据事实 3.1，$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \otimes_{\mathbb{k}} B + A \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{p}_2$ 属于 $\operatorname{Ass}^{A \otimes_{\mathbb{k}} B}(L \otimes_{\mathbb{k}} N)$。此外，

$$\operatorname{cd}(\mathcal{I}, (A \otimes_{\mathbb{k}} B)/\mathfrak{p}) = \operatorname{cd}(I, A/\mathfrak{p}_1) + \operatorname{cd}(J, B/\mathfrak{p}_2) = s + t.$$

因此，$\operatorname{mcd}(\mathcal{I}, L \otimes_{\mathbb{k}} N) \leq s + t$.

反之，设 $\operatorname{mcd}(\mathcal{I}, L \otimes_{\mathbb{k}} N) = k.$。那么存在 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}^{A \otimes_{\mathbb{k}} B}(L \otimes_{\mathbb{k}} N)$，使得 $\operatorname{cd}(\mathcal{I}, (A \otimes_{\mathbb{k}} B)/\mathfrak{p}) = k$. 根据事实 3.1，$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \otimes_{\mathbb{k}} B + A \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{p}_2$ 对于某个 $\mathfrak{p}_1 \in \operatorname{Ass}_A L$ 和 $\mathfrak{p}_2 \in \operatorname{Ass}_B N$成立。因此，

$$\operatorname{cd}(I, A/\mathfrak{p}_1) + \operatorname{cd}(J, B/\mathfrak{p}_2) = k.$$

根据 mcd 的定义，我们有

$$\operatorname{mcd}(I, L) \leq \operatorname{cd}(I, A/\mathfrak{p}_1) \quad \text{and} \quad \operatorname{mcd}(J, N) \leq \operatorname{cd}(J, B/\mathfrak{p}_2).$$

因此，

$$\operatorname{mcd}(I, L) + \operatorname{mcd}(J, N) \leq \operatorname{cd}(I, A/\mathfrak{p}_1) + \operatorname{cd}(J, B/\mathfrak{p}_2) = k.$$

于是，

$$\operatorname{mcd}(I, L) + \operatorname{mcd}(J, N) \leq \operatorname{mcd}(\mathcal{I}, L \otimes_{\mathbb{k}} N).$$

结合这两个不等式，得到所需的等式。 □

The定理 5.2. 设 $\mathbb{k}$ 是代数闭域。则以下条件等价: *t:*

(a) $L \otimes_{\mathbb{k}} N$ 关于 $\mathcal{I}$ 具有极大深度；(b) L 和 N 分别关于 I 和 J 具有极大深度。

证明。 (a) $\Rightarrow$ (b)：假设 $L \otimes_{\mathbb{k}} N$ 相对于 $\mathcal{I}$具有极大深度。于是

$$\operatorname{grade}(\mathcal{I}, L \otimes_{\mathbb{k}} N) = \operatorname{mcd}(\mathcal{I}, L \otimes_{\mathbb{k}} N).$$

由于 $\operatorname{grade}(\mathcal{I}, L \otimes_{\mathbb{k}} N) = \operatorname{grade}(I, L) + \operatorname{grade}(J, N)$，根据命题 5.1，

$$\operatorname{mcd}(\mathcal{I}, L \otimes_{\mathbb{k}} N) = \operatorname{mcd}(I, L) + \operatorname{mcd}(J, N),$$

我们得到

$$\operatorname{grade}(I, L) + \operatorname{grade}(J, N) = \operatorname{mcd}(I, L) + \operatorname{mcd}(J, N).$$

由于

$$\operatorname{grade}(I, L) \leq \operatorname{mcd}(I, L) \quad \text{and} \quad \operatorname{grade}(J, N) \leq \operatorname{mcd}(J, N),$$

因此

$$\operatorname{grade}(I, L) = \operatorname{mcd}(I, L) \quad \text{and} \quad \operatorname{grade}(J, N) = \operatorname{mcd}(J, N).$$

因此，L 和 N 分别相对于 I 和 J具有极大深度。

(b) $\Rightarrow$(a)：假设 L 和 N 分别相对于 I 和 J 具有极大深度。那么

$$\operatorname{grade}(I, L) = \operatorname{mcd}(I, L) \quad \text{and} \quad \operatorname{grade}(J, N) = \operatorname{mcd}(J, N).$$

因此，

$$\begin{aligned}\operatorname{grade}(\mathcal{I}, L \otimes_{\Bbbk} N) &= \operatorname{grade}(I, L) + \operatorname{grade}(J, N)\\ &= \operatorname{mcd}(I, L) + \operatorname{mcd}(J, N)\\ &= \operatorname{mcd}(\mathcal{I}, L \otimes_{\Bbbk} N),\end{aligned}$$

其中，最后一个等式由命题 5.1 得出。因此， $L \otimes_{\Bbbk} N$ 相对于 $\mathcal{I}$具有极大深度。□

设 $(A, \mathfrak{m})$ 和 $(B, \mathfrak{n})$ 是域 $\Bbbk$ 上的两个诺特局部代数，并且 $A \otimes_{\Bbbk} B$ 是诺特的。我们还假设 $\Bbbk$ 是 A 和 B 的公共剩余域，并且 A 或 B 是 $\Bbbk$ 上的代数的。由定理 5.2 可得以下结果。

推论 5.3。在上述假设下，进一步假设 $\Bbbk$ 是代数闭的。以下条件等价：

(a) $L \otimes_{\Bbbk} N$ 具有极大深度；(b)
L 和 N 具有极大深度。

证明。令 $\mathfrak{M} = \mathfrak{m} \otimes_{\Bbbk} B + A \otimes_{\Bbbk} \mathfrak{n}$.。则 $\mathfrak{M}$ 是 $A \otimes_{\Bbbk} B$ 的唯一极大理想。(a) 部分表示 $L \otimes_{\Bbbk} N$ 相对于 $\mathfrak{M}$ 具有极大深度，而 (b) 部分表示 L 和 N 分别相对于 $\mathfrak{m}$ 和 $\mathfrak{n}$ 具有极大深度。因此，结论由定理 5.2 立即得出。□

6. $M/(I \otimes_{\Bbbk} B)M$的同调性质

本节沿用前几节引入的记号和假设。下面，我们研究关于 $L \otimes_{\Bbbk} N$的类似问题，这些问题见 [14, 问题 6.4]（另见 [6, 问题 1.2]）。事实上，我们证明：若 $M = L \otimes_{\Bbbk} N$ 相对于 $A \otimes_{\Bbbk} J$是 Cohen–Macaulay、广义 Cohen–Macaulay、近似 Cohen–Macaulay 或序列 Cohen–Macaulay，则 $M/(I \otimes_{\Bbbk} B)M$ 相对于 $\mathcal{I}$也具有相应性质。此外，若 M相对于 $A \otimes_{\Bbbk} J$具有极大深度，则 $M/(I \otimes_{\Bbbk} B)M$ 相对于 $\mathcal{I}$也具有极大深度。相比之下，在这一商构造下，戈伦斯坦性和极大 Cohen–Macaulay 性通常不能保持。

作为一项应用，我们重新得到 [14] 的命题 6.1–6.3。事实上，令 $S = \Bbbk[x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n]$ 为域 $\Bbbk$ 上的标准双分次多项式环，并设 $P = \langle x_1, \ldots, x_m \rangle$ 和 $Q = \langle y_1, \ldots, y_n \rangle$。令 $A = \Bbbk[x_1, \ldots, x_m]$ 和 $B = \Bbbk[y_1, \ldots, y_n]$，于是 $S = A \otimes_{\Bbbk} B$。我们证明，S-模 M 关于 Q 是 Cohen–Macaulay（分别为广义 Cohen–Macaulay 或序列 Cohen–Macaulay），当且仅当 M/PM 关于 $P + Q$ 具有相应的性质。

我们首先考虑科恩–麦考利性。

科恩–麦考利性：

事实 6.1. 在事实 2.2 中令 $I = 0$，并对每个非零R-模 K利用 $\operatorname{grade}(0, K) = \operatorname{cd}(0, K) = 0$，我们得到以下等式。

(a) 深度$(A \otimes_{\Bbbk} J, L \otimes_{\Bbbk} N)$ =深度(J, N)。
(b) 余维$(A \otimes_{\Bbbk} J, L \otimes_{\Bbbk} N)$ =余维(J, N)。

命题 6.2。 令 $M = L \otimes_{\Bbbk} N$。以下陈述等价:

(a) M 关于 $A \otimes_{\Bbbk} J$是 *Cohen–Macaulay*; (b) $M/($
$I \otimes_{\Bbbk} B)M$ 关于 $\mathcal{I}$是 *Cohen–Macaulay*。

证明。 注意到

$$\begin{aligned} M/(I \otimes_{\Bbbk} B)M &\cong ((A \otimes_{\Bbbk} B)/(I \otimes_{\Bbbk} B)) \otimes_{A\otimes_{\Bbbk}B} (L \otimes_{\Bbbk} N) \\ &\cong (A/I \otimes_{\Bbbk} B/0) \otimes_{A\otimes_{\Bbbk}B} (L \otimes_{\Bbbk} N) \\ &\cong (A/I \otimes_A L) \otimes_{\Bbbk} (B \otimes_B N) \\ &\cong (L/IL) \otimes_{\Bbbk} N. \end{aligned}$$

因此,

$$M/(I \otimes_{\Bbbk} B)M \cong (L/IL) \otimes_{\Bbbk} N. \tag{6.2.1}$$

Since L/IL 是 I-挠的，由此可得 $\mathrm{cd}(I, L/IL) = 0$。因此，根据事实 2.2 和事实 6.1，我们有 e

$$\begin{aligned} \operatorname{grade}(\mathcal{I}, M/(I \otimes_{\Bbbk} B)M) &= \operatorname{grade}(\mathcal{I}, (L/IL) \otimes_{\Bbbk} N) \\ &= \operatorname{grade}(I, L/IL) + \operatorname{grade}(J, N) \\ &= \operatorname{grade}(J, N) \\ &= \operatorname{grade}(A \otimes_{\Bbbk} J, M) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \operatorname{cd}(\mathcal{I}, M/(I \otimes_{\Bbbk} B)M) &= \operatorname{cd}(\mathcal{I}, (L/IL) \otimes_{\Bbbk} N) \\ &= \operatorname{cd}(I, L/IL) + \operatorname{cd}(J, N) \\ &= \operatorname{cd}(J, N) \\ &= \operatorname{cd}(A \otimes_{\Bbbk} J, M). \end{aligned}$$

因此，断言得证。 □

广义科恩–麦考利性:

事实 6.3. 由 [13,定理 3.2],可得

$$\mathrm{f}_{\mathcal{I}}(L \otimes_{\Bbbk} N) = \min\Big\{\operatorname{grade}(I, L) + \mathrm{f}_J(N),\ \mathrm{f}_I(L) + \operatorname{grade}(J, N)\Big\}.$$

特别地，令 $I = 0$，我们有 $\operatorname{grade}(I, L) = 0$且 $\mathrm{f}_I(L) = +\infty$。因此，$\mathrm{f}_{A\otimes_{\Bbbk}J}(L \otimes_{\Bbbk} N) = \mathrm{f}_J(N)$。

命题 6.4. 令 $M = L \otimes_{\Bbbk} N$。以下命题等价:

(a) M 关于 $A \otimes_{\Bbbk} J$ 是广义 *Cohen–Macaulay*; (b) $M/(I \otimes_{\Bbbk} B)$
M 关于 $\mathcal{I}$ 是广义 *Cohen–Macaulay*。

证明。 注意到

$$\begin{aligned} \mathrm{f}_{\mathcal{I}}\Big(M/(I \otimes_{\Bbbk} B)M\Big) &= \mathrm{f}_{\mathcal{I}}\Big((L/IL) \otimes_{\Bbbk} N\Big) \\ &= \min\Big\{\operatorname{grade}(I, L/IL) + \mathrm{f}_J(N), \mathrm{f}_I(L/IL) + \operatorname{grade}(J, N)\Big\} \\ &= \mathrm{f}_J(N) \\ &= \mathrm{f}_{A\otimes_{\Bbbk}J}(L \otimes_{\Bbbk} N) = \mathrm{f}_{A\otimes_{\Bbbk}J}(M). \end{aligned}$$

第一个等式由方程 (6.2.1) 得出。其余等式由事实 6.3 得出。另请注意，$\operatorname{grade}(I, L/IL) = 0$ and $\mathrm{f}_I(L/IL) = +\infty$。

此外，由事实 2.2(b) 和事实 6.1，我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{cd}\left(\mathcal{I}, M/(I \otimes_{\Bbbk} B)M\right) &= \operatorname{cd}\left(\mathcal{I}, (L/IL) \otimes_{\Bbbk} N\right) \\ &= \operatorname{cd}(J, N) \\ &= \operatorname{cd}(A \otimes_{\Bbbk} J, L \otimes_{\Bbbk} N) = \operatorname{cd}(A \otimes_{\Bbbk} J, M).\end{aligned}$$

因此 ，断言得证。 □

序贯 Cohen–Macaulay 性：

事实 6.5。 设 $\Bbbk$ 为代数闭域。则以下条件等价：

(a) $L \otimes_{\Bbbk} N$ 关于 $\mathcal{I}$是序列 Cohen–Macaulay 的；(b) L 和 N 分别关于 I 和 J是序列 Cohen–Macaulay 的。

参见 [13, 定理 4.6]。特别地，根据 [13, 推论 4.7]， $L \otimes_{\Bbbk} N$关于 $A \otimes_{\Bbbk} J$ 是序列 Cohen–Macaulay 的，当且仅当 N 关于 J是序列 Cohen–Macaulay 的。

命题 6.6。 令 $M = L \otimes_{\Bbbk} N$。设 $\Bbbk$ 为代数闭域。则以下陈述等价：

(a) M 关于 $A \otimes_{\Bbbk} J$是序列 *Cohen–Macaulay* 的；(b) $M/(I \otimes_{\Bbbk} B)$ M 关于 $\mathcal{I}$是序列 *Cohen–Macaulay* 的。

证明。 由方程 (6.2.1)，有 $M/(I \otimes_{\Bbbk} B)M \cong L/IL \otimes_{\Bbbk} N$。由于 $\operatorname{cd}(I, L/IL) = 0$，模 L/IL关于 I 是 Cohen–Macaulay 的，因此关于 I是序列 Cohen–Macaulay 的。所以，所需等价性由事实 6.5 得出。□

近似 Cohen–Macaulay 性：

命题 6.7。 令 $M = L \otimes_{\Bbbk} N$。设 $\Bbbk$ 为代数闭域，并假设$\operatorname{cd}(J, N) = \operatorname{ara}(J, N)$。以下陈述等价：

(a) M关于 $A \otimes_{\Bbbk} J$是近似 *Cohen–Macaulay* 的，而关于 $A \otimes_{\Bbbk} J$不是 *Cohen–Macaulay* 的；(b) $M/(I \otimes_{\Bbbk} B)M$ 关于 $\mathcal{I}$ 是近似 *Cohen–Macaulay* 的，而关于 $\mathcal{I}$不是 *Cohen-Macaulay* 的。

证明。 设 M关于 $A \otimes_{\Bbbk} J$是近似 Cohen–Macaulay 但非 Cohen–Macaulay。根据推论 4.9，这等价于说 N 关于 J是近似 Cohen–Macaulay 但非 Cohen–Macaulay。注意， $M/(I \otimes_{\Bbbk} B)$ $M \cong L/IL \otimes_{\Bbbk} N$，且 L/IL 关于 I是 Cohen–Macaulay，其中 $\operatorname{cd}(I,\ L/IL) = \operatorname{ara}(I,\ L/IL) = 0$。因此，根据定理 4.7，这等价于说 $M/(I \otimes_{\Bbbk} B)M$ 关于 $\mathcal{I}$是近似 Cohen–Macaulay 但非 Cohen–Macaulay。□

最大深度性质：

事实 6.8。 在命题 5.1 中令 $I = 0$，并利用对于每个非零 R-模K，mcd(0，K) $= 0$，可得 mcd($A \otimes_{\Bbbk} J$，$L \otimes_{\Bbbk} N$) $=$mcd(J，N)。

命题 6.9。 设 $M = L \otimes_{\Bbbk} N$。则以下陈述等价：

(a) M 关于 $A \otimes_{\Bbbk} J$具有极大深度；(b) $M/(I \otimes_{\Bbbk} B)$
M 关于 $\mathcal{I}$具有极大深度。

证明。 首先，假设 M 关于 $A \otimes_{\Bbbk} J$具有极大深度。于是 grade($A \otimes_{\Bbbk} J, M$) $=$mcd($A \otimes_{\Bbbk} J, M$)。根据事实 6.1 和事实 6.8，可得 grade(J, N) $=$mcd(J, N)。注意到 $M/(I \otimes_{\Bbbk} B)M \cong (L/IL) \otimes_{\Bbbk} N$。此外，grade($I, L/IL$) $=$mcd($I, L/IL$) $= 0$，因为 cd($I, L/IL$) $= 0$，见方程 (5.0.1)。因此，我们得到

$$\begin{aligned}\operatorname{grade}\left(\mathcal{I}, M/(I \otimes_{\Bbbk} B)M\right) &= \operatorname{grade}(I, L/IL) + \operatorname{grade}(J, N)\\ &= \operatorname{grade}(J, N)\\ &= \operatorname{mcd}(J, N)\\ &= \operatorname{mcd}(I, L/IL) + \operatorname{mcd}(J, N)\\ &= \operatorname{mcd}\left(\mathcal{I}, M/(I \otimes_{\Bbbk} B)M\right).\end{aligned}$$

最后一个等式由命题 5.1 得出。因此， $M/(I \otimes_{\Bbbk} B)M$ 相对于 $\mathcal{I}$具有极大深度。

反过来，假设 $M/(I \otimes_{\Bbbk} B)M$ 相对于 $\mathcal{I}$具有极大深度。那么

$$\operatorname{grade}\left(\mathcal{I}, M/(I \otimes_{\Bbbk} B)M\right) = \operatorname{mcd}\left(\mathcal{I}, M/(I \otimes_{\Bbbk} B)M\right).$$

利用 grade($I, L/IL$) $=$mcd($I, L/IL$) $= 0,$我们得到 grade(J, N) $=$mcd(J, N)。 因此

$$\operatorname{grade}(A \otimes_{\Bbbk} J, M) = \operatorname{mcd}(A \otimes_{\Bbbk} J, M),$$

因此， M相对于 $A \otimes_{\Bbbk} J$具有极大深度。所以，(a) 和 (b) 等价。 □

戈伦斯坦性：

注 6.10. 设 cd(I, A) > 0且 $IL \neq L$。记 $M = L \otimes_{\Bbbk} N$。鉴于本节中的讨论，我们可以问：当 M 相对于 $A \otimes_{\Bbbk} J$是 Gorenstein 时， $M/(I \otimes_{\Bbbk} B)M$ 是否也相对于 $\mathcal{I}$ 是 Gorenstein。我们将证明，一般而言，答案是否定的。

事实上，假设 M 关于 $A \otimes_{\Bbbk} J$ 是 Gorenstein 的。那么

$$\operatorname{Ext}^i_{A \otimes_{\Bbbk} B}\left((A \otimes_{\Bbbk} B)/(A \otimes_{\Bbbk} J), M\right) \cong L \otimes_{\Bbbk} \operatorname{Ext}^i_B(B/J, N) = 0$$

对于所有 $i \neq$，$A \otimes_{\Bbbk} J$，$A \otimes_{\Bbbk} B$ 的余维 $=$ 等于 J，B 的余维。此外， $L \otimes_{\Bbbk} \operatorname{Ext}^{\operatorname{cd}(J,B)}_B(B/J,$ $N) \neq 0$。特别地，$\operatorname{Ext}^{\operatorname{cd}(J,B)}_B(B/J,\ N) \neq 0$。另一方面， $M/(I \otimes_{\Bbbk} B)M \cong (L/IL) \otimes_{\Bbbk} N$。根据 K¨unneth 公式的一个推论，我们有

$$\operatorname{Ext}^i_{A \otimes_{\Bbbk} B}\left((A \otimes_{\Bbbk} B)/\mathcal{I}, M/(I \otimes_{\Bbbk} B)M\right) \cong \bigoplus_{p+q=i} \operatorname{Ext}^p_A(A/I, L/IL) \otimes_{\Bbbk} \operatorname{Ext}^q_B(B/J, N).$$

由于 L/IL 是一个 A/I-模，我们有

$$\operatorname{Ext}^p_A(A/I, L/IL) \cong \operatorname{Ext}^p_{A/I}(A/I, L/IL) = 0 \quad \text{for all } p > 0,$$

而 $\mathrm{Ext}^0_A(A/I,\ L/IL) \cong L/IL$. 因此,

$$\mathrm{Ext}^i_{A\otimes_{\Bbbk}B}\left((A\otimes_{\Bbbk}B)/\mathcal{I}, M/(I\otimes_{\Bbbk}B)M\right) \cong (L/IL)\otimes_{\Bbbk}\mathrm{Ext}^i_B(B/J,N).$$

特别地,

$$\mathrm{Ext}^{\mathrm{cd}(J,B)}_{A\otimes_{\Bbbk}B}\left((A\otimes_{\Bbbk}B)/\mathcal{I}, M/(I\otimes_{\Bbbk}B)M\right) \cong (L/IL)\otimes_{\Bbbk}\mathrm{Ext}^{\mathrm{cd}(J,B)}_B(B/J,N)\neq 0.$$

因此, $M/(I\otimes_{\Bbbk}B)M$ 不可能关于 $\mathcal{I}$是 Gorenstein 的。事实上,如果 $M/(I\otimes_{\Bbbk}B)M$ 关于 $\mathcal{I}$是 Gorenstein 的,那么根据关于一个理想的戈伦斯坦性的定义,我们将有

$$\mathrm{Ext}^i_{A\otimes_{\Bbbk}B}\left((A\otimes_{\Bbbk}B)/\mathcal{I}, M/(I\otimes_{\Bbbk}B)M\right)=0 \quad \text{for all} \quad i\neq \mathrm{cd}(\mathcal{I}, A\otimes_{\Bbbk}B)=\mathrm{cd}(I,A)+\mathrm{cd}(J,B),$$

然而,上述计算表明,对于 $i=$ 余维$(J,\ B)$以及余维$(J,\ B)<$余维$(I,\ A)+$余维$(J,\ B)$,这个 Ext模 非零,矛盾。因此, [14] 或 [6] 中的问题对于 Gorenstein性质的答案是否定的。

极大 Cohen–Macaulay性:

注6.11。假设余维$(I,\ A)>0$且 $IL\neq L$。令 $M=L\otimes_{\Bbbk}N$。鉴于前面的讨论,自然会问:当 M 关于 $A\otimes_{\Bbbk}J$是极大 Cohen–Macaulay时, $M/(I\otimes_{\Bbbk}B)M$ 是否关于 $\mathcal{I}$ 是极大 Cohen–Macaulay。一般而言,答案是否定的。

事实上,假设 M 关于 $A\otimes_{\Bbbk}J$是极大 Cohen–Macaulay 的。那么

$$\mathrm{grade}(A\otimes_{\Bbbk}J, M)=\mathrm{cd}(A\otimes_{\Bbbk}J, A\otimes_{\Bbbk}B).$$

由事实 6.1 可知, grade$(J,\ N)=$cd$(J,\ B)$。另一方面, $M/(I\otimes_{\Bbbk}B)M\cong(L/IL)\otimes_{\Bbbk}N$. 因此,

$$\begin{aligned}\mathrm{grade}\left(\mathcal{I}, M/(I\otimes_{\Bbbk}B)M\right) &= \mathrm{grade}(I, L/IL)+\mathrm{grade}(J,N)\\ &= \mathrm{grade}(I,L/IL)+\mathrm{cd}(J,B).\end{aligned}$$

由于 $IL\neq L$, 我们有 $L/IL\neq 0$。此外, cd$(I,\ L/IL)=0$, 因此 grade$(I,\ L/IL)=0$。于是,

$$\mathrm{grade}\left(\mathcal{I}, M/(I\otimes_{\Bbbk}B)M\right)=\mathrm{cd}(J,B).$$

然而, cd$(\mathcal{I},\ A\otimes_{\Bbbk}B)=cd(I,\ A)+cd(J,\ B)$。由于 cd$(I,\ A)>0$, 我们得到 grade $\left(\mathcal{I},\ M/(I\otimes_{\Bbbk}B)M\right)\neq$cd$(\mathcal{I},\ A\otimes_{\Bbbk}B)$。因此, $M/(I\otimes_{\Bbbk}B)M$ 关于 $\mathcal{I}$不是极大 Cohen–Macaulay 的。因此, [14] 或 [6] 中的相应断言并非一般成立。

参考文献

[1] M. Ahmadi 和 A. Rahimi, *Buchsbuamness of Nagata idealization*, 《巴勒莫数学学会报告》, II. Ser **74**(4), 132 (2025)。[2] N. Bourbaki, *Algebra, Chapters 4-7*, 法文译本, Springer-Verlag, 柏林, 1990 年, 第五章 §15, 定理 3(d), 第 119 页。[3] M. Chardin、J. P. Jouanolou 和 A.Rahimi, *The eventual stability of depth, associated primes and cohomologyof a graded module*, 《交换代数杂志》**5**(1)(2013), 63-92。[4] K. Divaani-Aazar、A. Ghanbari Doust、M. Tousi 和 H. Zakeri, *Cohomological dimension and relative Cohen–Macaulayness*, 《交换代数》, **47**(12)(2019), 5417-5427。

[5] G. Faramarzi 和 A. Rahimi, *Relative approximately Cohen–Macaulay modules*, 《代数杂志》, **711**(2027), 676- 700。[6] H. Noormohammadi 和 A. Rahimi, *Cohen-Macaulayness and sequentially Cohen-Macaulayness of monomialideals*, 《帕多瓦大学数学研讨会报告》 **140** (2018), 221–236。[7] H. T. Ha、H. D. Nguyen、N. V. Trung 和 T. N. Turng, *Symbolic powers of sums of ideals*, 《数学杂志》, **294**(2020), 1499–1520。[8] P. Pourghobadian、K. Divaani-Aazar 和 A. Rahimi, *Relative homological rings and modules*, 《落基山数学杂志》**55**(3)(2025), 803–821。[9] S. Goto, *Approximately Cohen-Macaulay rings*, 《代数杂志》**76** (1982), 214–225。[10] A. Rahimi, *Relative Cohen-Macaulayness of bigraded modules*, 《代数杂志》**323**(2010), 1745-1757。[11] A. Rahimi, *Sequentially Cohen-Macaulayness of bigraded modules*, 《落基山数学杂志》, **47**(2)(2017), 621-635。[12] A. Rahimi, *Maximal depth property of bigraded modules*, 《巴勒莫数学学会报告》, **70**(2021), 947–958。[13] A. Rahimi, *Algebraic properties of tensor product of modules over a field*, 《交换代数杂志》, **17**(2)(2025), 183-198。[14] A.Rahimi, *Cohen–Macaulayness of bigraded modules and their graded components*, RicercheMat.**75**(1)(2026), 209-222。[15] A. Rahimi, *On cohomological dimension and height relative to bigraded modules*, 《代数及其应用杂志》, 即将出版。[16] P. Schenzel, *On the dimension filtration and Cohen–Macaulay filtered modules*。载于：《交换代数与代数几何》（费拉拉），第 206 卷。载于：《纯粹与应用数学讲义》，第 245–264 页。Dekker，纽约（1999）。[17] K. A. Sather-Wagstaff, *Semidualizing modules*, 讲义，2010 年，可访问 https://ssather.people.clemson.edu/DOCS/sdmhist.html。

A. Rahimi、Department of Mathematics、Razi University、Kermanshah、Iran.*Email address*: ahad.rahimi@razi.ac.ir