arXiv:2611.28954v1 [cs.DS] 21 Nov 2026

通过严格和非严格时序游走实现精确边覆盖

Duc Thien Quach[1] 和 Manh Cuong Tran[1*]

[1]越南国家大学工程技术大学信息技术学院，越南河内。

*通讯作者。电子邮箱：tranmanhcuong@vnu.edu.vn；贡献作者：23020161@vnu.edu.vn；

摘要

精确边覆盖问题询问：是否可以将一个含有 n 个顶点和 m 条边的时序图的边划分为若干条时间尊重游走，使每个顶点出发的游走数量符合指定要求；在固定端点变体中，每个顶点结束的游走数量也须符合指定要求。对于非严格游走，我们基于 M-凸性提出了一种新方法，并证明该问题可以在多项式时间内求解；该方法也弥补了此前静态归约的证明概要中的一个漏洞。当且仅当游走计数器始终非负且每个快照连通分量都包含一条游走时，边的定向才可由游走实现；而只有所有度数和计数器均为偶数的连通分量才可能违反后一条件。移除死状态后，每个此类连通分量的状态构成一个 M-凸集。由此得到一种增广路算法，可返回游走或不可行性证书；通过路径反转重新定向，该算法至多使用 $m/2$ 次增广和 $O(n+nm^2)$ 次算术运算。我们在小型实例上验证了该实现。对于严格游走，我们证明该问题是 NP 完全的：指定终点时，即使只有六个时间标签，问题仍为 NP 完全；自由终点时，两个时间标签便已足够。

关键词： 时序图、精确边覆盖、时态游走、M-凸集、次模流、NP 完全性

MSC 分类： 05C85 , 90C27 , 90C35 , 68Q17

1 引言

时序图对可用性随时间变化的连接进行建模 [1, 2]。在弧路径问题中，边是任务；车辆调度则将按时间排序的行程组合成值勤任务 [3–5]。这些场景促使我们研究如何用遵循时间标签的游走覆盖边。我们考虑无向边，并在确定游走的同时选择其遍历方向。实验忽略记录的方向和行程时间，检验的是正确性与可扩展性，而非某项路径规划应用。

精确边覆盖将时间边划分到若干游走中，每条边恰好遍历一次。输入指定起点的数量，并在 Fix 中指定终点的数量，但不将各个起点与终点配对。在 Free中，解需要选择终点顶点。允许空游走。非严格游走使用非递减的时间标签，可以遍历同一快照中的多条边；严格游走使用严格递增的时间标签，每个快照至多遍历一条边。在记录较粗略的接触数据中，时间戳可能相同，而严格与非严格的区别可能改变复杂度 [6, 7],，包括时序探索的复杂度。

Deligkas 等人 [8] 在 AAAI 2025 上引入了时序精确边覆盖，确立了该问题及其复杂度结果。本文沿用他们提出的问题和记号。他们声称，通过静态归约可以在多项式时间内求解非严格游走情形。他们关于未指定起点时 NP 完全性的结果，讨论的是最小化游走数量。指定终端的严格游走情形则仍未解决。他们的定理 6.3 的证明概要遗漏了一个时间可用性条件：每个含有边的快照连通分量，在其对应时刻之前都必须有一条游走，而与某个终端静态连通并不能保证这一点。第 3.3 节给出了一个含五个顶点的实例：在图 3 所示的终点终端构造下，其静态图存在精确边覆盖，但其时序图不存在精确边覆盖 [8]。这一漏洞并不能推翻他们的结论。我们以不同的方法证明非严格情形可在多项式时间内求解，并解决了严格变体。

我们的方法通过非负游走计数以及每个快照连通分量中都存在一条游走，刻画可实现的定向。只有度数和计数均为偶数的连通分量才可能违反后一条件。配对计数揭示了 M-凸分量状态，而移除死状态后仍能保持 M-凸性。由此，我们得到一个 M-凸交集公式，以及一种增广路算法，可修复死连通分量或证明问题不可行。据我们所知，对死状态的处理是新的。

贡献。
1. 刻画与差距。 一个定向可实现，当且仅当计数条件成立，且每个快照连通分量都包含一条游走（定理1）。只有偶分量可能违反后一个条件（引理 2），而不含此类分量的实例可归约为一个最大流问题（推论 3）。在图 3 的终点终端构造下， [8], 一个含五个顶点的实例揭示了静态归约中的差距（命题4，引理 5）。2. *M*-凸可行性算法。我们证明，移除死状态可以保持偶分量状态的 M-凸性（引理 10(b)），并通过判定 M-凸交的可行性得到多项式时间算法（定理11）。该算法会返回游走或不可行性证书（定理13），其复杂度上界如定理 14所述。

3. 严格游走难度。 严格问题在指定起终点且有六个时间标签时，以及在端点自由、有两个时间标签且允许空游走时，均为 NP 完全（定理 16）。

2 问题表述与相关工作

2.1 问题表述

我们用 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ 表示，并用 $\mathbb{Z}$ 表示整数。无向时序图是 $G = (V, \mathcal{E}, \tau)$，其边标号为 $\tau\colon\ \mathcal{E} \to \mathbb{N}$、 $n = |V|$ 和 $m = |\mathcal{E}|$。平行边彼此不同。不允许自环。在时间 t，$G_t = (V, E_t)$，其中 $E_t = \{e \in \mathcal{E}\colon\ \tau(e) = t\}$，称为快照。快照连通分量至少包含一条边。

非严格时序行走是 $W = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_\ell, v_\ell)$，其中 e_i 将 v_{i-1} 与 v_i 相连，且 $\tau(e_1) \le \cdots \le \tau(e_\ell)$。其起点和终点分别为 v_0, v_ℓ。空行走具有 $\ell = 0$。精确边覆盖要求所有游走合起来恰好遍历每条边一次。

判定问题规定一个起点数量向量 $a \in \mathbb{N}^V$，其中 $k = \sum_v a_v$。

定义 1 • Free：判定是否存在 k 条非严格时序游走，使其合起来恰好遍历 $\mathcal{E}$ 的每条边一次，并且恰有 a_v 条游走从每个顶点出发 v。

- Fix：给定一个额外的向量 $z \in \mathbb{N}^V$，判定是否存在满足Free 的游走，并且恰有 z_v 条游走终止于每个顶点 v。

在 Fix、 a 和 z 中，规定终点数量，但不将起点与终点配对。除非另有说明，游走均为非严格时序游走。

运行时间按机器字整数上的单位成本算术运算次数计算，包括 a_v， z_v。我们返回一个压缩解（非空游走以及每个顶点的空游走数量），因为二进制表示的重数可能导致需要列出指数级数量的空游走。

2.2 相关工作

时序图中的精确边覆盖。

Deligkas 等人 [8]研究时序路径、迹和游走（定理和页码均指 AAAI 版本，扩展版本则引用为 arXiv v1）。对于具有固定终端的严格游走，推论 6.4 处理适当时序图（每个快照都是一个匹配），而定理 6.5 给出一个 $O(2^k k\, t_{\max})$算法，其中$|E_t| \in \{0, k\}$（$t_{\max}$ 是最大的时间标签。有向情形可在多项式时间内解决（定理 6.1 和 5.2）。他们的定理 6.3 提到了起始终端，但其证明和图 3 使用的是终点终端。扩展版本 [9] 同时提到了两者。第 3.3 节仅详细分析了证明和图 3 中展示的终点终端构造。此处未讨论仅使用起始终端的变体。

时序网络与覆盖问题。
时间复制表示见于 [10]。Marino 和 Silva 研究了在时序图 [11]中恰好遍历每条边一次的单条游走。对于 $k = 1$，若给定起点且每条边只有一个时间标签，根据定理 1，非严格可行性可归约为逐快照的欧拉迹检查，因此我们不比较这两种模型的复杂度结果。其他相关问题研究遍历所有边 [12] 或覆盖时序有向无环图的顶点 [13]。

离散凸性与定向。
我们使用 M-凸集 [14, 15]，次模流 [15–18]，度约束定向 [19–21] 以及增广路径 [18, 22]。我们的附加约束消除了偶分量的死状态。相关结构包括强连通定向 [23]。

3 定向、偶分量与静态归约中的一个缺口

3.1 定向与游走计数器

一条游走若沿着边 $\{u, v\}$ 从 u 到 v 定向它为 $u \to v$，则 u 称为尾端。因此，一个解会导出所有边的一个定向。对于一个定向，令 $\mathrm{out}_t(v)$ 和 $\mathrm{in}_t(v)$ 分别表示 E_t 中尾端为 v 和首端为 v的弧数。游走计数器 $c_t(v)$ 表示在时间 t之前，位于 v 的游走数。它从 a_v 开始，并按如下方式演化

$$c_{t^+}(v) = c_t(v) - \mathrm{out}_t(v) + \mathrm{in}_t(v),$$

其中 t^+ 表示 t之后的瞬间。其奇偶性由 a_v 加上 t之前与 v 相 incident 的边数决定，与定向无关。游走在其当前顶点处计数一次。在一个时间标签下，它可以连续经过多条边。

设 $t_{v,1} < \cdots < t_{v,q_v}$ 为 v 有相 incident 边的时间标签（即 v的出现次数），设 $g_{v,j}$ 为 v 在 $E_{t_{v,j}}$中的度，并设 $G_{v,j} = \sum_{i \le j} g_{v,i}$ 以及 $G_v = G_{v,q_v}$。对于一个定向，设 $b_{v,j}$ 为 $E_{t_{v,j}}$ 中尾端为 v 的弧数，以及 $B_{v,j} = \sum_{i \le j} b_{v,i}$，其中空和为零。在 Fix 中，我们令 $h_v = (a_v + G_v - z_v)/2$，表示每个解中尾端为 v 的弧数，由最终计数 z_v确定。

定理 1 *An orientation is realizable by walks that start according to a (problem* Free*) if and only if, at every time t,*

(i) 对每个顶点 v，c_t输出$v(-)_t$输入$v(\le c_t)\, v(v)$，并且 *(ii)* K 的每个快照连通分量都包含一条游走，也就是说，$\sum_{v \in K} c_t(v) \ge 1$。

For Fix *the additional condition is that the final number of walks at v equals z_v for every v, that is, $B_{v,q_v} = h_v$.*

Proof Necessity. 在时间 t，每条离开 v 的边，要么是某条游走在时间 t 使用的第一条边；此时该游走在 t 之前位于 v，因此这样的边至多有 $c_t(v)$ 条；要么它

沿着同一条游走在时间 t 进入 v 的一条边前进，而每条进入的边至多有一个后继。因此，$\text{out}_t(v) \le c_t(v) + \text{in}_t(v)$，这就是 (i)。某条游走在时间 t 使用的边构成 E_t 的某个连通分量 K 内的一条迹；在 t 之前，该游走位于这条迹的第一个顶点。因此，每个包含边的连通分量都包含一条游走。在 FIX 中，v 处游走的最终数量为 $a_v + G_v - 2B_v$，$q_v = z_v$。

Sufficiency. 我们按时间递增顺序处理，并分别处理各个 E_t 连通分量。设 $\vec{K}$ 为 K 的有向图，并令 $r = \sum_{v \in K} \max(0, \text{out}_t(v) - \text{in}_t(v))$. 若 $r > 0$，则添加 r 条虚拟弧，从入度小于出度的顶点连向出度小于入度的顶点，将每单位亏缺与每单位盈余配对。两者总量相等，因为$_t$ –上 out_t –in_t 的和为零。这使每个顶点都达到平衡。增广后的图是弱连通的，因为 K 是连通的，且新增的弧将 K 的顶点连接起来。因此它存在一条欧拉回路。按循环顺序删除 r 条虚拟弧后，恰好留下 r 条迹（图 1），每条迹都从一条虚拟弧的头端（盈余顶点）开始，并在下一条虚拟弧的尾端结束。具有盈余的顶点 v 恰好是 $\text{out}_t(v)$ –$\text{in}_t(v)$ 条虚拟弧的头端，因此有同样数量的迹从该处开始。根据(i)，v 拥有足够的游走来承接这些迹。若 $r = 0$，则 $\vec{K}$ 是欧拉图。根据(ii)，K 的某个顶点拥有一条游走，而这条游走沿着一条从该顶点出发的欧拉回路前进。所有其他游走都等待。经过 t 后，每个顶点上的游走数量都等于c_{t+}，因此归纳过程得以继续。在 FIX 中，最终数量为 z。□

充分性证明给出了一个 $O(n+m)$ 算法（在对边排序之后），该算法使用 Hierholzer 算法 [24]，根据满足 (i) 和 (ii) 的定向构造游走。给定边的方向，FREE 和 FIX 因此可在 $O(n+m\log(m+1))$ 时间内确定。

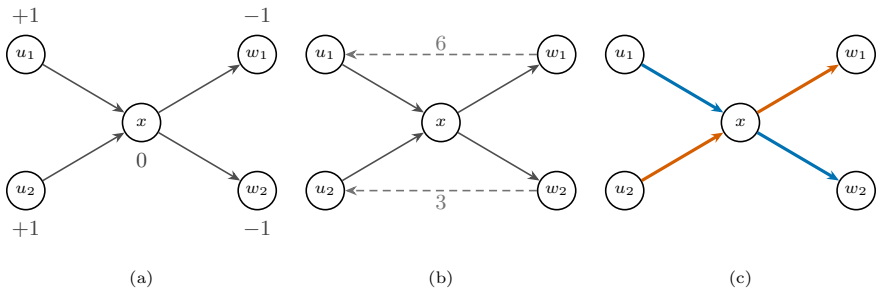


图1 定理 1证明中的虚拟弧，以包含两个盈余顶点的连通分量为例 u_1，u_2 以及两个亏缺顶点 w_1，w_2。（a）定向后的连通分量，每个顶点处标出了出$_t$ − 入$_t$ 度。（b）虚线虚拟弧将每个亏缺顶点连接到一个盈余顶点。数字 1–6 表示一条欧拉回路。（c）删除虚拟弧后，剩下两条迹，分别从 u_1 到 w_2 以及从 u_2 到 w_1。

3.2 偶分量与链网络

定义2 如果快照连通分量 K 的 E_t 满足：K 中的每个顶点在 E_t 中的度以及偶游走计数器 c_t均为偶数，则称其为 *even*。在某个定向下，如果对于所有 $v \in K$均有 $c_t(v) = 0$，则偶分量是 *dead*。

一对平行边和一个带有偶游走计数器的三角形都是偶分量。路径则不是。

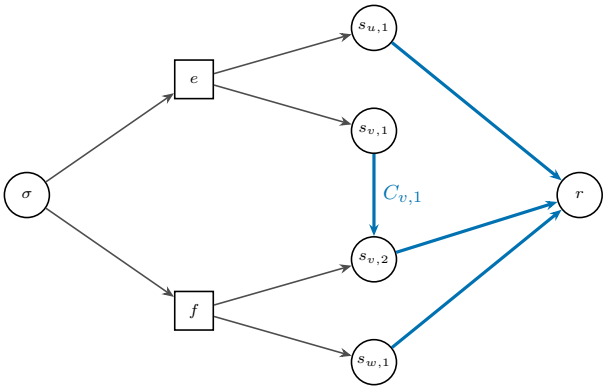


图2 两条连续时间边的链网络。

引理 2 *If an orientation satisfies (i) and the snapshot component K of E_t is not even, then K satisfies (ii).*

*Proof*如果 K 中某个顶点在 E_t 中的度为奇数，那么该顶点处的 $\mathrm{out}_t - \mathrm{in}_t$ 为奇数，因此非零。由于 $\mathrm{out}_t - \mathrm{in}_t$ 在 K 上的和为 0，因此存在某个顶点使得 $\mathrm{out}_t - \mathrm{in}_t > 0$，并且根据 (i)，该顶点具有 $c_t \geq 1$。如果某个计数器 $c_t(v)$ 为奇数，那么它就是一个非负奇数，因此至少为一：$c_t(v)$ 在 v 首次出现时等于 $a_v \geq 0$，否则等于上次出现 t' 后的计数器 $c_{t'+}(v)$；根据 (i)，该计数器在 t' 处非负。□

条件 (i) 要求在第 j 次出现 v 后，游走计数器$a_v + G_{v,\,j} - 2B_{v,\,j}$为非负数，这等价于 $B_{v,\,j} \leq \lfloor (a_v + G_{v,\,j})/2 \rfloor$。

我们将这些界限设为一个链网络 中的容量，该网络包含一个源点和一个汇点 r。对于每次出现 $(v,\ j)$，都有一个节点 $s_{v,\,j}$，这些节点构成一条链$s_{v,\,1} \to \cdots \to s_{v,\,q_v} \to r$。离开 $s_{v,\,j}$的弧在 FREE 中的容量为 $C_{v,\,j} = \lfloor (a_v + G_{v,\,j})/2 \rfloor$，在 FIX中的容量为 $C_{v,\,j} = \min(\lfloor (a_v + G_{v,\,j})/2 \rfloor,\ h_v)$。对于每条时间标签为 t 的边 $e = \{u, v\}$，都有一个节点从源点接收一个单位，并有两条容量为 1 的弧，分别连接到时间为 t 的 u 和 v 的出现节点。

e 的单位流流向选定为其尾端的端点，因此离开$s_{v,\,j}$ 的弧上的流等于 $B_{v,\,j}$。该网络有 $O(m)$ 个节点和弧，并且对于 FREE，值为 m 的流恰好对应于满足条件 (i) 的一种定向。出现 j后，计数器为 $a_v + G_{v,\,j} - 2B_{v,\,j}$，因此每条出链弧上的容量都保证了其非负性。

图 2展示了 $e = \{u, v\}$，随后是 $f = \{v, w\}$：来自 σ的单位流选择边的尾端，而粗链弧的容量为 $C_{v,\,j}$。

推论 3 *If no snapshot has an even component then* FREE *and* FIX *are decided by one ,, maximum flow in the chain network. On every instance a maximum flow of value less than m certifies infeasibility.*

Proof 由定理 1 和引理 2可知，当不存在偶数分量时，定向可实现当且仅当它满足条件 (i)。对于 Fix，检查所有 v的 $\sum_v a_v = \sum_v z_v$ 和 $h_v \in \mathbb{N}$ 后，我们得到 $\sum_v h_v = m$，因此，值为 m 的流会饱和每条末端链弧，从而得到 $B_{v,q_v} = h_v$。第二个结论成立，因为条件 (i) 是必要条件。□

适当的时序图没有偶分量，因此严格游走与非严格游走在其中等价，所以推论 3 通过一次最大流恢复了 [8] 中的推论 6.4，并将其推广到 Free。

3.3 静态归约中的一个缺口

归约。

对于顶点 v，令 $\delta_{\le t}(v)$ 和 $\delta_{>t}(v)$ 分别表示其时间标签小于等于t 和大于 t 的关联边数。上标 G 表示这些计数仅针对时序图 G 中不含终端边的边。Deligkas 等人将每个顶点 v扩展为多个副本 v_t，每个副本对应于 v 具有边的一个时间点，并设置一个起始终端 s 和一个结束终端 e。在 [8], 图 3 所示的终点终端构造中，起始终端边连接到时间 0 处的一个额外副本，而结束终端边连接到最后一个时间标签之后的一个额外副本（即图 3(b) 中的副本 x_0 和 y_3 ）。相邻副本之间由 $\alpha = \min(\delta_{\le t}(v)\ \delta_{>t}(v))$ 条边连接；在 [8] 定理 6.3 的证明中所示的终点终端构造里， δ 表示静态图 S 中的边数，其中包括位于 v 处的 a_v 起始终端边和 z_v 结束终端边（因此按下文记法有$\alpha = \min(a_v + \delta^G_{\le t}(v)\ \ z_v + \delta^G_{>t}(v))$），其中 $\lceil \alpha/2 \rceil$ 条边指向较晚的副本，其余则为无向 [8, 边 26503]p。无向边允许静态游走回到过去。证明概要通过与另一条游走 W_2 交换后缀，修正一条 W_1 回到过去的游走；另一条游走“从v_{t_i} 左侧进入并从右侧离开” [8, p。 26503]。该论证假设 $W_2 \neq W_1$。

在图 3(a) 中，规定的游走从 x 出发并终止于 y。绿色实线边的时间为 1，橙色虚线边的时间为 2。在子图 (b) 中，数字表示静态覆盖游走的步序。橙色虚线边对应的第 8 步回到了过去。

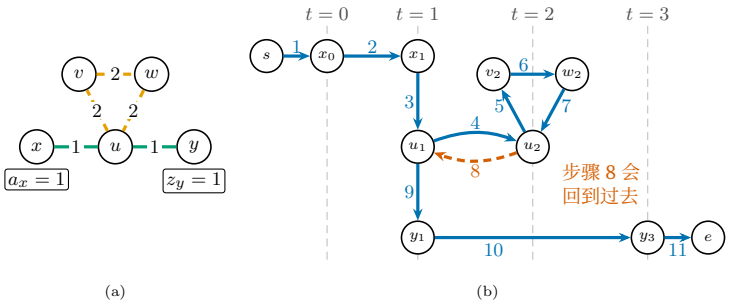


图 3 时序实例 (a) 及其静态归约的覆盖游走 (b)

命题 4 *The instance of Fig. 3(a) is infeasible, but the static graph S of the reduction has an exact edge cover with the same number of walks and the same terminals.*

Proof 这条游走从 x 出发，到达 y，因此在时间 1 遍历了 $x \to u \to y$。此后，没有游走位于 u、v 或 w，而该三角形违反了定理 1 的条件 (ii)。在 S中，按 [8] 的定理 6.3 的证明概要构造，并在时间 0 将终端 s 连接到 x，在时间 3 将 e 连接到 y（图 3(b)），u 的构件在 u_1 和 u_2之间有 $\alpha = \min(2, 2) = 2$ 条边，其中一条是有向边（u_1，u_2），另一条是无向边。x 和 y 的构件各有一条有向边。静态游走

$$s \to x_0 \to x_1 \to u_1 \to u_2 \to v_2 \to w_2 \to u_2 \to u_1 \to y_1 \to y_3 \to e$$

恰好覆盖 S 的每条边一次，其第 $u_2 \to u_1$ 步（图 3(b) 中的第 8 步）从时间 2 返回到时间 1。它是唯一的游走，因此使用有向边（u_1，u_2）的游走就是W_1 它自身，而与自身交换后缀只会将三角形分离成一个环，不再形成游走。□

引理 5 *In* FIX, *the undirected edges of S can be oriented so that every non-terminal node is balanced, with start terminal edges directed outwards and end terminal edges directed inwards if and only if some orientation of G satisfies condition (i) of Theorem 1 together , , with the end condition $B_{v\,q_v} = h_v$.*

Proof 固定 G 的一个定向。它也为 S 的边 $\{u_t, v_t\}$ 确定了定向。在顶点 v 处，起始终端边在第一个时间标签之前贡献 a_v 条入边，终止终端边在最后一个时间标签之后贡献 z_v 条出边。令 n_t 表示复制 v_t 之后链边上的向右净流量。在 v_t 处的平衡条件给出 $n_t = n_{t^-} + \mathsf{in}_t(v) - \mathsf{out}_t(v)$，其中$n_{t^-} = a_v$ 在第一个复制处成立，因为 a_v 条起始终端边从那里进入链，因此由归纳法得 $n_t = c_{t^+}(v)$；在最后一个复制处的平衡条件给出最终计数器 z_v。两个连续时间标签之间有 $\alpha_t =$ 条边，其中 before_t 条在前、after_t 条在后，且 $\mathsf{before}_t = a_v + \delta^G_{\le t}(v)$、$\mathsf{after}_t = z_v + \delta^G_{>t}(v)$；其中 $\lceil \alpha_t/2 \rceil$ 条指向右侧，其余每条 $\lfloor \alpha_t/2 \rfloor$ 都会使净流量改变 ± 1。可实现的净流量恰好是满足 $n \equiv \alpha_t$（模 2）且满足 α_t 模 $2 \le n \le \alpha_t$ 的整数 n。对于 $n = c_{t^+}(v)$，奇偶性条件总是成立，因为 $c_{t^+}(v)$ 的奇偶性与 before_t 和 after_t 相同（终止条件）。上界总是成立，因为 $c_{t^+}(v)$ 不超过截至 t 的入边数，也不超过 t 之后的出边数。下界即条件 (i)。反过来，给定一个满足 (i) 的定向，选择指向右侧的自由边数量，使得 $n_t = c_{t^+}(v)$；由于该值位于可行范围内，这总是可行的。□

因此，对于 FIX，S 的平衡可定向性满足条件 (i) 和终点条件（引理 5）。此外，S 还要求静态连通性（每个含边的连通分量都包含一个终端），这一要求与定向无关，且弱于 (ii)。时序解可生成 S的覆盖，但反过来未必成立（命题 4）。去掉终点计数后（FREE，$a_x = 1$，$k = 1$），图 3(a) 中的实例仍然不可行，因为唯一的游走必须在时间 1 遍历 $x \to u \to y$。命题 S 4中的静态图在最后一个时间标签之后附加终点终端，如证明概要和 的图 3所示的终点终端构造。仅含起始终端的变体不在此实例讨论范围内，而 [8] 的定理 6.3 中的可解性结论由另一种论证得出（定理 11）。

4 M-凸可行性算法

M-凸性的交换性质使我们能够在顶点之间重新路由游走对，同时不破坏有效定向。次模流提供了标准的增广路径方案 [18, 22]。图 5 展示了算法在第 4.2 节运行示例上的执行过程。

4.1 M-凸性

集合 $B \subseteq \mathbb{Z}^N$ 是 *M*-凸 [14, 15]，如果对于所有 x，$y \in B$ 以及每个满足 $x_i > y_i$ 的 i，都存在满足 $x_j < y_j$ 的 j，使得 $x - \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j \in B$ 且 $y + \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j \in B$。这里，$\mathbf{e}_i$ 是第 i 个单位向量。

配对计数。

记 $c_t(v) = 2q_t(v) + p_t(v)$，其中 $p_t(v)$ 固定，而 $q_t(v)$ 表示在 v 处游走的配对数量。对于 E_t 和 $v \in K$ 的连通分量 K，令 $p_v^{\text{in}} = p_t(v)$、$p_v^{\text{out}} = p_{t^+}(v)$、$\alpha_v = q_t(v)$（入向配对）以及 $\beta_v = q_{t^+}(v)$（出向配对）。K 的一个定向决定了差值 $\beta - \alpha$，其定义如下：

$$\text{in}_t(v) - \text{out}_t(v) = 2(\beta_v - \alpha_v) + p_v^{\text{out}} - p_v^{\text{in}} \qquad (v \in K). \tag{1}$$

我们称 $g \in \mathbb{Z}^K$ 是可实现的，如果 的某种定向满足（1），其中 $g = \beta - \alpha$。

定义3 令 $\Gamma_K \subseteq \mathbb{Z}^K \times \mathbb{Z}^K$ 为由向量 $(-\alpha, \beta)$ 构成的集合，其中 $\alpha, \beta \geq 0$ 满足 $\beta - \alpha$ 可实现。若 K 为偶数，令 $\Gamma'_K = \Gamma_K \setminus \{0\}$。

若 K 为偶数，则在 K 中，所有游走计数器在 t 之前和之后均为偶数，因此 $c_t = 2\alpha$ 在 K 上。对 K 求和（1），得到 $\beta(K) = \alpha(K)$，其中 $x(X) = \sum_{i \in X} x_i$。因此，$K$ 处的条件 (ii) 恰好是 $(-\alpha, \beta) \neq 0$。

Example 1 设 K 为连接 u 和 w 的两条平行边，所有奇偶性均为 0。则 Γ_K 包含 $(-\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_w)$、$(-\mathbf{e}_w, \mathbf{e}_u)$，以及所有 $\alpha \geq 0$ 对应的 $(-\alpha, \alpha)$；而 Γ'_K 仅移除 $\alpha = 0$，且前两个点仍会交换为非零点 $(-\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_u)$ 和 $(-\mathbf{e}_w, \mathbf{e}_w)$。

离散凸性的工具。

以下引理是定向理论 [19–21] 和离散凸分析 [15, 18]中的标准结果。引理 6 和 7 给出了引用来源。引理 8 和 9 之所以简要证明，是因为下文正是以其形式使用它们。

引理

6 *Let O be an orientation of K that realizes g and let $v \neq w$ be vertices of K. Then $g + \mathbf{e}_v - \mathbf{e}_w$ is realizable if and only if O has a directed path from v to w.*

这是具有指定入度 [19–21] 的定向所具有的经典路径反转性质：将一条从 v 到 w 的有向路径反向后，入度将变为

$+\mathbf{e}_v - \mathbf{e}_w$；反过来，任何两个具有这些入度的定向，其反向弧中都包含这样一条路径。

引理 7 *Let N be a directed network with integer or infinite capacities a set P of terminal nodes and integer supplies at all non-terminal nodes. The set of net inflow vectors at P of integral feasible flows in N is M-convex when it is non-empty. A direct sum of M-convex sets is M-convex.*

这是一个标准事实：整数流的终端净流入向量构成一个 M-凸集 [15, 18]。对于无限容量，将所有容量截断为一个大于产生 x, y 的两个流的所有取值的上界。关于直和的结论直接由定义得到，因为在一个加项中的交换不会改变其他加项。

引理 8 *Let B be M-convex $x \in B$ and let $x + \quad_{i_l} - \quad_{j_l} \in B$ for $l = 1 \quad r$ where the i_l are , , ee, 。。。, pairwise distinct and the j_l are pairwise distinct. If there are no $l < l'$ with $x + \quad_{i_l} - \quad_{j_{l'}} \in B$ e e, then $x + \sum_l \quad_{i_l} - \quad_{j_l}$ (e e) $\in B$.*

Proof 这就是这里所采用形式下，次模流最短增广路背后的同步交换论证。可以舍弃带有 $i_l = j_l$ 的对，而假设给出了 $i_l \neq j_{l'}$，对于 $l < l'$。我们对 r 使用归纳法，$r \leq 1$ 的情形是平凡的。令 $x' = x + \mathbf{e}_{i_r} - \mathbf{e}_{j_r} \in B$。

首先令 $l < r$，并在坐标 i_l 处对 $x + \mathbf{e}_{i_l} - \mathbf{e}_{j_l}$ 和 x' 应用交换公理，其中第一个点较大。由此得到 $k \in \{j_l, i_r\}$，其中第一个点较小，并且有 $x' + \mathbf{e}_{i_l} - \mathbf{e}_k \in B$。若 $k = i_r \neq j_l$，则 $x + \mathbf{e}_{i_l} - \mathbf{e}_{j_r} \in B$，这与假设不符。因此 $x' + \mathbf{e}_{i_l} - \mathbf{e}_{j_l} \in B$。

接下来令 $l < l' < r$，并假设 $u = x' + \mathbf{e}_{i_l} - \mathbf{e}_{j_{l'}} \in B$。在坐标 i_l 处对 u 和 x 应用交换公理。由此得到 $k \in \{j_{l'}, j_r\}$，并且有 $x + \mathbf{e}_{i_l} - \mathbf{e}_k \in B$，这两种情形都与假设不符。因此 $x' + \mathbf{e}_{i_l} - \mathbf{e}_{j_{l'}} \notin B$。

因此，这些对 $l < r$ 满足在 x' 处的假设，由归纳法可得结论。 □

引理 9 *Let B be M-convex $x \in B$ and R a set of coordinates. If there are no $i \in R$ and ,e e,() () $j \notin R$ with $x + \quad_i - \quad_j \in B$ then $x \quad R \geq y \quad R$ for every $y \in B$.*

Proof 这是在 M-凸集 [15] 上最大化线性函数的局部最优性判据。假设某个 $y \in B$ 满足 $y(R) > x(R)$，并选择满足此条件且 $\|y - x\|_1$ 最小的 y。某个 $i \in R$ 满足 $y_i > x_i$。根据交换公理，存在 j，使得 $y_j < x_j$, $y - \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j \in B$ 且 $x + \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j \in B$。由假设可得 $j \in R$，因此 $y' = y - \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$ 满足 $y'(R) = y(R)$，且更接近 x，这就产生了矛盾。□

主要引理。

（a）部分和引理 6 是经典结果 [19–21]：图的定向所形成的入度向量构成一个 M-凸集，这里用成对坐标重新表述。（b）部分指出

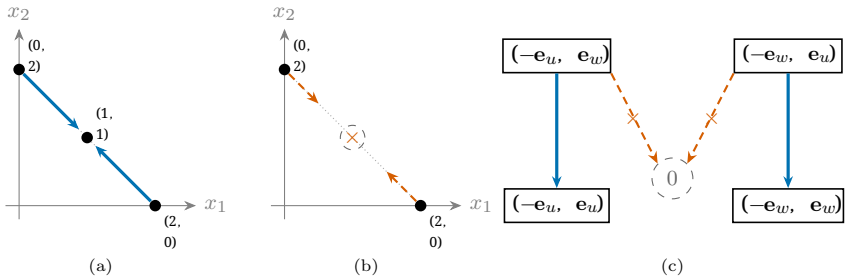


图4 M-凸集中的交换与死状态的移除。(a) 集合 {(2, 0), (1, 1), (0, 2)} 是 M-凸集。其极点通过交换趋向 (1, 1)。(b) 删除 (1, 1) 后，不再存在交换。(c) 对于例1中的二边形，原本会以死状态 0 结束的交换（虚线）被替换为从 $(-\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_w)$ 和 $(-\mathbf{e}_w, \mathbf{e}_u)$ 到非零状态 $(-\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_u)$ 和 $(-\mathbf{e}_w, \mathbf{e}_w)$ 的交换。

当 K 连通且为欧拉图时，删除单个点 0 仍能保持 M-凸性。从 M-凸集中删除一个点通常无法保持 M-凸性：{（2，0），（1，1），（0，2）} 是 M-凸的，但 {（2，0），（0，2）} 则不是。据我们所知，（b）部分并未见于标准定向理论 [20, 21]中。次模流框架本身是标准的 [16–18, 22]。新的要点是对死状态的处理，其证明也构成了下文证书的基础。图 4（a）、（b）展示了上述例子，图4（c）展示了二边形交换。

对于 $X \subseteq K$ let $\delta_K(X)$，它表示 K 中恰有一个端点位于 X 内的边集。删除 0 后唯一可能出现的失败是：Γ_K 中保证存在的交换会使其中一个状态变为零。

引理10*(a)* Γ_K 是 *M*-凸。
(b) 如果 K 是一个（连通）偶分量，那么 $\Gamma'_K = \Gamma_K \setminus \{0\}$ 是 *M*-凸。

Proof (a) 该结论是经典结果 [19–21]。我们只需将其归结为引理 7。固定图 K 的一个参考定向 R，使得 $d_R =$ 出度为 $-$ 入度。反向弧 $x \to y$ 会将一对从 y 移至x，因此每个定向都给出 $\beta - \alpha = \sigma + \partial\varphi$，其中 $\sigma(v) = (p_v^{\text{in}} - p_v^{\text{out}} - d_R(v))/2 \in \mathbb{Z}$，且$\varphi \in \{0,1\}$ 是通过反向有向图 R^- 的每条弧得到的反向弧的指示向量。构造一个以 K 为基础的网络，令 R^- 中的弧容量为 1，在每个v处固定供给 $\sigma(v)$，并为每个 v 终端 v_{in} 和 v_{out} 添加无容量限制的弧 $v_{\text{in}} \to v \to v_{\text{out}}$。该网络的终端净流入向量恰好是 Γ_K中的点 $(-\alpha, \beta)$；根据引理 7，Γ_K是 M-凸的。

(b) *Idea.* 根据 (a)，只有产生点 0 的交换才会造成问题。我们将说明此时存在另一个交换指标，方法是利用 g 的一个定向中的可达性以及一个强连通欧拉定向。偶分量中的所有奇偶性都为 0，因此 (1) 表示为 $\text{in}_t - \text{out}_t = 2g$，其中 $g = \beta - \alpha$。我们使用两个推论。首先，设 O 可实现 g，且设$\emptyset \neq X \subsetneq K$。由于 $2g(v) = \text{in}_t(v) - \text{out}_t(v)$，对 X 求和会抵消内部边，得到 $2g(X) = |\{\text{条进入 } X\}| - |\{\text{的割边与离开 } X\}|$的割边。于是，若 $\delta_K(X)$ 的每条边都进入 X，则 $g_K(X) = |\delta_K(X)| - |\delta_K(X)|/2 < 0$；若每条这样的边都离开，则 $g_K(X) > 0$。严格性由连通性得出。其次，K 中所有度均为偶数，因此 K 有一条欧拉回路 [24]。所得定向可实现 0 且为强连通，因此根据引理 6，对于所有 v、$w \in K$，$\mathbf{e}_v - \mathbf{e}_w$ 都可实现。

设 x，$y \in \Gamma'_K$，并设 i 是满足 $x_i > y_i$ 的一个坐标。根据 (a)，存在 j，满足 $x_j < y_j$，使得 $x' = x - \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j \in \Gamma_K$ 且 $y' = y + \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j \in \Gamma_K$。若二者均非零，则结论成立。二者不可能同时为零，否则 $x = \mathbf{e}_i - \mathbf{e}j = -y$；而入向坐标非正、出向坐标非负，因此 i 将同时是出向坐标（$x_i = 1$）和入向坐标（$y_i = -1$）。Γ_K 的点满足 $\alpha(K) = \beta(K)$，因此 Γ'_K 的一个点具有 $\alpha \neq 0$ 和 $\beta \neq 0$。

Case $x' = 0$. 于是 $x = (-\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_w)$，$i = w_{\text{out}}$ 以及 $j = u_{\text{in}}$。记 $y = (-\alpha, \beta)$，令 $g = \beta - \alpha$，并令 O 实现 g。由于 $y_i < 1$，我们有 $\beta_w = 0$。令 M 为在 O 中从 w 可达的顶点集合。若 $M \neq K$，则 $\delta_K(M)$ 的每条边都进入 M，因此 $\beta(M) \geq g(M) > 0$。若 $M = K$，则 $\beta(K) \geq 1$。因此存在 $z \in M \setminus \{w\}$ 满足 $\beta_z \geq 1$，因为 $\beta_w = 0$，而正的总量 $\beta(M)$ 必定出现在另一个顶点处。并且根据引理 6，$g + \mathbf{e}_w - \mathbf{e}_z$ 可实现。改取 $j = z_{\text{out}}$，它满足 $x_j = 0 < y_j$。那么根据第二个推论，$x - \mathbf{e}_i + \mathbf{e}j = (-\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_z) \in \Gamma'_K$；并且 $y + \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j \in \Gamma'_K$，因为其差为 $g + \mathbf{e}_w - \mathbf{e}_z$，且 $\alpha \neq 0$。

Case $y' = 0$. 那么 $y = (-\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_w)$，$i = u_{\text{in}}$ 和 $j = w_{\text{out}}$。记 $x = (-\alpha, \beta)$，令 $g = \beta - \alpha$，并令 O 实现 g。由于 $x_i > -1$，我们有 $\alpha_u = 0$。令 Λ 为在 O 中能够到达 u 的顶点集合。若 $\Lambda \neq K$，则 $\delta_K(\Lambda)$ 的每条边都从 Λ 离开，因此 $\alpha(\Lambda) \geq -g(\Lambda) > 0$。若 $\Lambda = K$，则 $\alpha(K) \geq 1$。因此存在 $v \in \Lambda \setminus \{u\}$ 满足 $\alpha_v \geq 1$，因为 $\alpha_u = 0$，而正总量 $\alpha(\Lambda)$ 必须出现在另一个顶点处。并且根据引理 6，$g + \mathbf{e}_v - \mathbf{e}_u$ 是可实现的。改取 $j = v_{\text{in}}$，它满足 $x_j = -\alpha_v < 0 = y_j$。那么 $x - \mathbf{e}_i + \mathbf{e}j$ 将一个入向对从 v 移至 u，其差为 $g + \mathbf{e}_v - \mathbf{e}_u$，且它属于 Γ'_K（它非零，因为其在 u_{in} 处的坐标为 -1）。最后，根据第二个推论，$y + \mathbf{e}_i - \mathbf{e}j = (-\mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w) \in \Gamma'_K$。□

Remark 1 连通性是引理 10(b) 中的必要条件：将两个不相交三角形视为一个连通分量时，相应集合不是 M-凸的。如果 $g = \beta - \alpha$ 先固定，再移除点 0，那么对于由两条平行边连接的两个顶点，交换公理就会失效，因此引理表述为 Γ'_K，其中 g 为 Free。

4.2 端口网络

每个顶点 v 都变为一条由端口组成的时间线。设 K_1、...、K_{q_v} 为包含 v 各次出现的连通分量。v 的端口为 S_v（开始）、IN(K_j, v) 和 OUT(K_j, v)（其中 $j = 1$、...、q_v），以及 Z_v（结束）。等待弧按时间顺序连接这些端口，即 $S_v \to$IN(K_1, v)、OUT(K_j, v) $\to$ IN(K_{j+1}, v) 和 OUT(K_{q_v}, v) $\to Z_v$。没有边的顶点只有弧 $S_v \to Z_v$。等待弧上的流 $\xi \geq 0$ 是 v 在两次出现之间等待的配对数量（图 6）。对于端口 P，令 $\partial\xi(P)$ 为流出 P 的流减去流入 P 的流，其符号与引理 10(a) 证明中的净流入 $\partial\varphi$ 相反。在某个连通分量的端口处，$\partial\xi = (-\alpha, \beta)$。

令 $p_{\text{end}}(v)$ 为 $a_v + G_v$ 的奇偶性。约束集 $\mathcal{B}$ 是以下集合的直和。

- 在 S_v 处，单个点 $\lfloor a_v/2 \rfloor$。
- 在每个连通分量 K 的端口处，若 K 为偶数，则集合为 Γ'_K，否则为 Γ_K。
- 在端口 Z_v 处，对于 FIX，单个点 $-(z_v - p_{\text{结束}}(v))/2$ 在每个 v 处，在检查 $z_v \equiv a_v + G_v$（模 2）和 $z_v \geq p_{\text{结束}}(v)$ 后。对于 FREE，单纯形 $\{-\gamma : \gamma \in \mathbb{N}^V, \gamma(V) = (k - \sum_v p_{\text{结束}}(v))/2\}$，它只固定最终配对的总数。

单点集和 FREE 的终端单纯形，一致基多面体 $\{-\gamma$ 的整数点：$\gamma \geq 0, \gamma(V) = c\}$，均为 M-凸 [15]。根据引理 7 和 10，$\mathcal{B}$，它们的

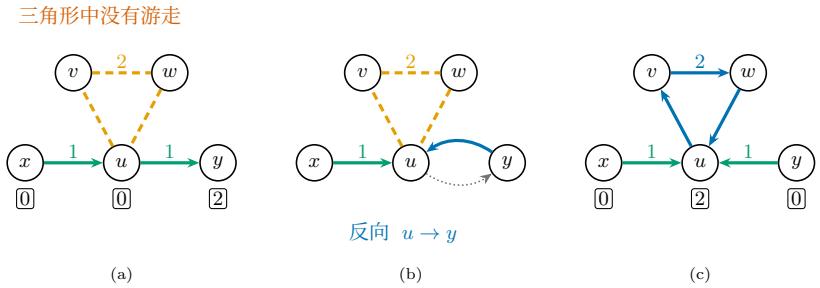


图 5 运行示例中算法的概览。方框显示时间 1 后各顶点处的游走数量：(a) 中 $x:0, u:0, y:2$；(c) 中 $x:0, u:2, y:0$。(a) 最大流完成后，时间 1 的边使 u 处没有游走，因此时间 2 的三角形失效。(b) 一条增广路径反转了 $u \to y$ 的定向。(c) 增广后，u 有两条游走：$x \to u \to v \to w \to u$ 和 $y \to u$。

直和是 M-凸的。经过算法 1第 1 行的检查后，它非空：任意定向都会在每个 Γ_K中给出状态；如果某个偶分量会出现零状态，则在两侧同一顶点处添加一个等待对，就能在 Γ'_K中得到非零状态。起始集和终止集根据奇偶性和总数检查均非空。由于 $\sum_v (a_v + G_v) = k + 2m$，数值 $k - \sum_v p_{\mathrm{end}}(v)$ 始终为偶数。

运行示例。取图 3(a)，其中每个 x 和 y 各有一条游走从其出发，且末端自由。图5 展示了它的三个阶段。图 6 展示了此FREE 实例的端口网络，以及一条增广路径（粗蓝色箭头 1–5），它修复了其中的死三角形；$+1$ 和 -1 标记非零偏差，而 η 则实现了端端口之间的交换。

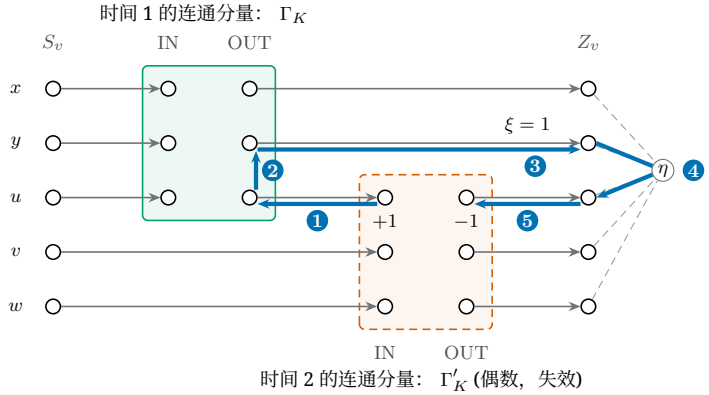


图 6 运行示例中的端口网络和一条增广路径。

定理

11 *An instance of* FREE *or* FIX *is feasible if and only if there is a pair flow* $\xi \geq 0$ *on the waiting arcs with* $\partial\xi \in \mathcal{B}$.

Proof(⇒) 取游走的定向，并令每条等待弧上的 $\xi = q$。在 S_v，$\partial\xi = \lfloor a_v/2 \rfloor$ $\partial\xi = -\alpha$ β $\beta \geq 0$ $\beta - \alpha$ 。对于每个连通分量，(,) 根据 (i)，差值由定向本身实现；而 $(-\alpha,\ \beta) \neq 0$ 在偶分量上由 (ii) 实现。在 Z_v，值 $-\partial\xi$ 是 v处最终配对的数量。在 Fix中，它等于 $(z_v - p_{\text{end}}(v))/2$；而在 Free 中，这些值之和为 $(k - \sum_v p_{\text{end}}(v))/2$，因为游走的数量保持不变。

（⇐）对于每个 K 选择一个能够实现 $\beta - \alpha$的定向。根据（1），在组合定向下，v两个出现次数之间的游走数量等于相应等待弧上的 $2\xi + p$。条件 (i) 成立，因为 $\beta \geq 0$。对于根据引理 2 非偶的连通分量，条件 (ii) 成立；对于偶分量，因为（$-\alpha$，β）$\neq 0$，条件 (ii) 也成立。在 Fix 中，v处游走的最终数量为 z_v。定理1 完成证明。□

等价地，定理11 询问 M-凸集 $\{\partial\xi :\ \xi \geq 0\}$ 非负等待流的边界集合（根据引理7，除符号外为 M-凸集）是否与 M-凸集 $\mathcal{B}$相交。这是一个 M-凸交的可行性实例 [15–17]。

4.3 增广路算法

该算法根据链流定向初始化 ξ：在每条等待弧上放置成对数量（游走计数器的一半，根据固定的奇偶性为整数）。 x 中每个连通分量的输入和输出坐标分别是该定向下的 $-\alpha$ 和 β，$x(S_v) = \lfloor a_v/2 \rfloor$，而末端坐标是最终成对数量的负值。对于每个最初处于零状态的死偶分量，第 3 行将其零状态替换为在所选顶点处的一对输入和输出。该算法维护一个流 $\xi \geq 0$ 和一个点 $x \in \mathcal{B}$。它们的偏差为 $d = \partial\xi - x$。当 $d = 0$时，即可得到一个解。辅助图以端口为节点，并包含三类弧，每条弧都将一个单位的偏差从其尾端移至头端。

(1) 每条等待弧的反向弧。使用它会使该弧上的 ξ 增加 1。(2) 所有带有 $\xi > 0$ 的等待弧。使用它会使 ξ 减少 1。(3) 当 $x + \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j \in \mathcal{B}$ 时的交换弧 $i \to j$。使用它会将 x 替换为 $x + \mathbf{e}_i - \mathbf{e}j$。

设 i 是 v 的一个端口，j 是 w 在同一连通分量 K 中的一个端口。当 i 是输入端口时，如果 $\alpha_v \geq 1$；当 j 是输出端口时，如果 $\beta_w \geq 1$；或者当前 K 的定向中存在一条从 v 到 w 的有向路径（引理 6）时，交换弧 $i \to j$ 存在；此外，如果 K 为偶数，则新点必须非零。当 i 是输出端口或 j 是输入端口时，不需要可用性条件，因为这些变化会增加相应的成对计数。在 Free 的单纯形中，只要 $\gamma_i \geq 1$，$x + \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j \in \mathcal{B}$。辅助图不使用这些 $\Theta(n^2)$ 弧，而是包含一个节点 η；对于每个满足 $\gamma_i \geq 1$ 的 i，都有弧 $Z_i \to \eta$，对于每个 j，都有弧 $\eta \to Z_j$。经过 η 的路径执行一次单纯形交换。可以使用任意最短路，以及第 3 行中选取的任意顶点。图 7 展示了三类弧，以及定理 13 中使用的证书。

在定理界定的重新定向过程中，反复将一条有向路径反向：路径从目标入度大于当前入度的顶点出发，终止于当前入度大于目标入度的顶点。这样可使到目标的 L_1 距离减少二；每个连通分量 K 只需 $O(m_K)$ 条长度为 $O(|K|)$ 的路径。

4.4 正确性与不可行性证书

引理 12 *After every augmentation,* $\xi \geq 0$ *and* $x \in \mathcal{B}$.

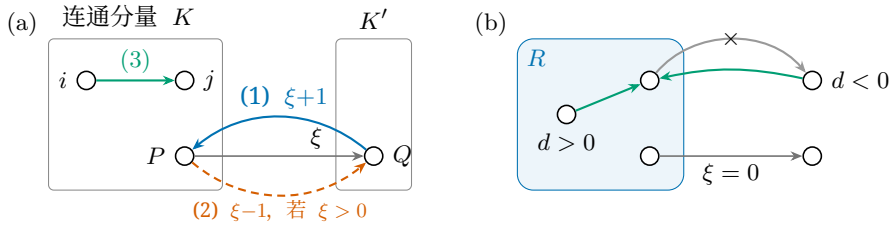


图 7 辅助图。(a) 等待弧 $P \to Q$ 上的三种弧，流量为 ξ，以及同一连通分量中两个端口 i、j 上的三种弧，其中第 (3) 种要求 $x + \mathsf{e}_i - \mathsf{e}_j \in \mathcal{B}$；每条弧都将一个单位的偏差从其尾端移至头端。(b) 定理 13 的证书：从 $\{d > 0\}$ 可达的端口集合 R 中不含满足 $d < 0$的端口，且没有弧离开 R。于是 $x(R) = -d(R) < 0$，而引理 9 则表明，对于任意解 (ξ', x')，都有 $x(R) \geq x'(R) \geq 0$。

算法 1 针对 FIX 和 FREE的增广路算法

1：检查计数条件（$\sum a = \sum z$ 和 $h_v \in \mathbb{N}$ 对于 FIX、$k \geq \sum_v p_{\text{end}}(v)$ 对于 FREE）。如果检查失败，则返回否。2：在链网络中求最大流。如果其值小于 m，则返回否，并给出最小割。3：采用最大流的定向以及所诱导的 ξ 和 x。对于每个死偶分量 K，选取 $v \in K$，在 (IN(K, v)，OUT(K, v)) 处设置 $x = (-\mathsf{e}_v, \mathsf{e}_v)$，使得 $d = +1$ 位于 IN(K, v)，而 $d = -1$ 位于 OUT(K, v)。4：当某个端口具有 $d > 0$ 时，执行 5：通过广度优先搜索，在辅助图中寻找从 $\{d > 0\}$ 到 $\{d < 0\}$ 的最短路。6：如果不存在这样的路径，则执行 7：返回否，并附带从 $\{d > 0\}$可达的端口集合 R。8：结束 if。9：一次性将该路径的所有弧应用于 ξ 和 x，并重新定向点发生变化的连通分量（见下文）。10：结束 while。11：返回是，并按照定理 1 的证明构建游走。

Proof 路径上的所有弧都在增广前进行评估，并一并应用。最短路是简单路径，因此每条等待弧最多使用一次，且只有在 $\xi > 0$ 时才会使用类型 (2) 的弧。因此 $\xi \geq 0$。简单路径至多访问 η 一次，所以 FREE 的单纯形至多进行一次交换；根据弧的定义，这种交换是有效的。考虑 $\mathcal{B}$ 的任意其他加项 Γ，以及它沿路径顺序发生的交换 $(i_1, j_1) \ldots, (i_r, j_r)$。最短路上的节点到集合 $\{d > 0\}$ 的广度优先距离两两不同且依次递增，因此 i_l 两两不同，且 j_l 两两不同。如果存在 $l < l'$ 使得有一条弧 $i_l \to j_{l'}$，那么 dist($j_{l'}$) $\leq$ dist(i_l) $+ 1 <$ dist($i_{l'}$) $+ 1 =$ dist($j_{l'}$)，矛盾。因此引理 8 的假设成立。此论证只利用距离的顺序，所以即使路径多次进入和离开某个连通分量，也不受影响；并且引理应用于 Γ'_K 本身，它由引理10可知是 M-凸的。根据引理 8，新点仍属于该集合。□

定理 13 *Algorithm 1 answers correctly. When it answers* YES*, the returned walks form a solution. When it answers* NO *in the loop , the set R of ports reachable from $\{d > 0\}$ certifies infeasibility.*

Proof 第 2 行中的 NO 是正确的，因为 (i) 是必要条件。第 3 行执行后，所有端口上的 d 之和为 0（唯一非零的项是修复后的死连通分量的 $+1$ 和 -1 ），且之后始终保持为 0，因为辅助图的每条弧都会在两个端口之间移动一个单位。因此，如果循环结束，那么 $d = 0$, $\partial\xi = x \in \mathcal{B}$ 满足 $\xi \geq 0$（根据引理 12），并且这些游走是通过定理 11 构造的。假设算法停止时集合为 R。该集合包含所有满足 $d > 0$ 的端口，且不包含任何满足 $d < 0$ 的端口，因此 $d(R) > 0$。辅助图中没有弧离开 R。根据类型 (1)，没有等待弧进入 R；根据类型 (2)，每条离开 R 的等待弧都满足 $\xi = 0$。因此 $\partial\xi(R) = 0$，且 $x(R) = -d(R) < 0$。由于 $x \in \mathcal{B}$ 和 $\xi \geq 0$ 始终成立（引理 12），不妨假设存在一个解 (ξ', x')，满足 $\xi' \geq 0$ 和 $x' = \partial\xi' \in \mathcal{B}$。由于没有等待弧进入 R，$x'(R)$ 等于离开 R 的等待弧上 ξ' 的总和，因此 $x'(R) \geq 0$。没有交换弧离开 R。对于单纯形，这是因为一个满足 $\gamma_i \geq 1$ 的端口 $Z_i \in R$ 会将 η 和每个 Z_j 都置于 R 中。将引理 9 应用于直和中的每个加项，得到 $x(R) \geq x'(R) \geq 0$，矛盾。□

对于每个 是 答案，程序都会构造这些游走，并依据问题定义对其进行检查。第 2 行给出的 否 答案包含一个链网络割证书，仅凭实例数据即可验证。对于一个回路的 否，检查器会验证 ξ, x，计算 $d = \partial\xi - x$，检查 $d(R) > 0$，并确认没有有效的等待弧或交换弧离开 R。这不依赖引理 8，因为 $x \in \mathcal{B}$ 会在运行时检查，但它依赖引理 10 和 9，因此其验证依赖于理论。

4.5 复杂度

定理 14 *Let D be the number of dead even components after the maximum flow and s the largest number of vertices of a snapshot component. Algorithm 1 performs at most D augmentations and uses*

$$O\big(n + m\log(m+1) + m^2 + D\,(n + s\,m)\big) \subseteq O(n + n\,m^2)$$

arithmetic operations, since $D \leq m/2$ and $s \leq n$.

Proof 每次增广都会使正偏差之和恰好减少一，而第 3 行之后，该总和为 D。不同的死偶分量彼此边不相交，且每个至少有两条边，因此 $D \leq m/2$。第 1 至第 3 行需要 $O(n+m^2)$ 次算术运算，其开销由初始最大流主导：链网络有 $O(m)$ 个节点和弧，流值至多为 m，因此至多需要 m 条增广路径，每条耗时 $O(m)$。一次增广的开销为 $O(n + sm)$。端口数为 $O(n + m)$，因此在交换测试之外，辅助图上的广度优先搜索需要 $O(n+m)$ 时间。对于一个有 m_K 条边的连通分量 K，从 K 的每个顶点进行深度优先搜索需要 $O(|K|\,m_K)$ 时间；而 $O(|K|^2)$ 个候选交换对的开销也相同，因为 $|K| \leq m_K + 1$。重新定向发生变化的连通分量 K 需要$O(|K|)$ 次路径反转，每次耗时 $O(m_K)$，因为 K 内部的交换使用互不相同的端口，且 K 有 $2|K|$ 个端口：将一条从盈余到亏缺的路径反转，会使其到目标边界的距离缩短两步（引理 6）。对各连通分量求和，$\sum_K |K|\,m_K \leq sm$。 □

该界限不取决于 a 和 z的大小：处理的每个数都是绝对值为 $O(k+m)$ 的整数，因此其关于输入的位数也呈多项式。当 $D=0$ 时，该算法就是一次最大流计算。 D 的值取决于初始最大流，因为任意解的定向本身就是一个最大流，且具有 $D=0$。

5 严格游走是 NP 完全的

一条严格游走的时间标签严格递增，并且每个快照至多使用一条边。令 Strict-Fix 和 Strict-Free 分别表示 Fix和Free的严格变体。对于端点已指定的情形，Deligkas 等人尚未解决。 [8,第 26504],节的特殊情形之外2.2。

5.1 可实现的定向

一条严格游走在时间 t 到达某个顶点后，不能在时间 t离开该顶点。

15 *An orientation is realizable by strict walks that start according to a if and only*
引理*if* $_t\ v\ \leq c_t\ v$ out( )
( ) *for every vertex v and every time t. For* Strict-Fix *the final number of walks at v must in addition equal z_v for every v.*

Proof Necessity. 一条严格游走在时间 t至多使用一条边。因此，在时间 t 离开 v的 $\text{out}_t(v)$ 条弧由两两不同的游走经过，而这些游走在 t之前都位于 v 。 *Sufficiency.* 按时间递增的顺序处理各个时刻。在时间 t，为离开 v 的弧分配两两不同且位于 v的游走；这些游走确实存在，因为 $\text{out}_t(v)\ \leq c_t(v)$。每条这样的游走都会经过其对应的弧，其他游走则等待。在 t 之后，每个顶点上的游走数量都等于 c_{t+}，因此归纳过程得以继续。□

与定理 1 相比，条件 (i) 被更强的条件 $\text{out}_t(v)\ \leq c_t(v)$ 取代，而条件 (ii) 则不再需要，因为每条边都由此前位于其尾端的游走经过。因此，满足严格条件的定向不存在死偶分量。用第 3 节的记号表示，新条件为$2B_{v,\ j-1}+b_{v,\ j}\leq a_v+G_{v,\ j-1}$。对当前离开和先前离开赋予不同权重，使其无法表示为链网络的容量约束。

5.2 归约

我们从一个可满足性问题归约而来：公式中的子句包含两个或三个文字，且每个变量最多出现三次。根据 Tovey [25]，该问题是 NP 完全的。我们可以假设每个子句中的文字属于不同变量（删除重言子句、合并重复文字并传播单元子句），且每个文字最多出现两次：若某个文字出现三次，则它是纯文字，因为其变量最多出现三次，因此相反的文字不会出现；于是我们将其设为真并删除包含它的子句。这不会产生新的出现次数，也不会产生大小为 1 的子句。令 φ 为具有变量 $x_1,\ldots,x_{n_\varphi}$ 和子句 $C_1,\ldots,C_{m_\varphi}$ 的此类公式。令 $s_j\in\{2,3\}$ 为 C_j 中文字的数量，并令 $d(\ell)\ \leq 2$ 为包含该

文字 ℓ。由于 $\sum_j s_j = \sum_\ell d(\ell) \le 4n_\varphi$ 且 $s_j \ge 2$，因此有 $m_\varphi \le 2n_\varphi$。时序图 G_φ 为每个 $2n_\varphi$ 文字各设一个顶点，为每个子句各设一个顶点，另设一个枢纽h，以及称为叶节点的度为一的顶点。其边如下（图 8）。

- 时间1。一个起始叶节点与每个文字顶点相连，$s_j - 1$ 个起始叶节点与 C_j相连，$4n_\varphi$ 个起始叶节点与 h相连。
- 时间2。对于每个变量 x_i，对应的边为 $\{x_i, \neg x_i\}$。
- 时间3。对于每个子句 C_j 及其每个文字 ℓ，边 $\{C_j, \ell\}$ 对应于 C_j。
- 时刻 4 和 5。对于每个文字顶点 ℓ，在时刻 4 和时刻 5 各有一条边 $\{\ell, h\}$。
- 时刻 6。$d(\ell)$ 末端叶节点 与每个文字顶点 ℓ相连，一个末端叶节点与每个 C_j相连，而 $6n_\varphi - 2m_\varphi$ 个末端叶节点与 h 相连。

我们在每个起始叶节点处设为 $a_v = 1$，在每个末端叶节点处设为 $z_v = 1$，其他位置则设为 $a_v = z_v = 0$。共有 $6n_\varphi + \sum_j s_j - m_\varphi$ 个起始叶节点，末端叶节点的数量相同。图 G_φ 在同一快照内没有平行边，其规模与 φ的规模呈线性关系。

图 8中，边的标号为时刻，叶节点旁的数字表示重数。白色叶节点是起始叶节点，阴影叶节点是末端叶节点。其他子句关联以及 $\neg x_i$ 的末端叶节点均省略。

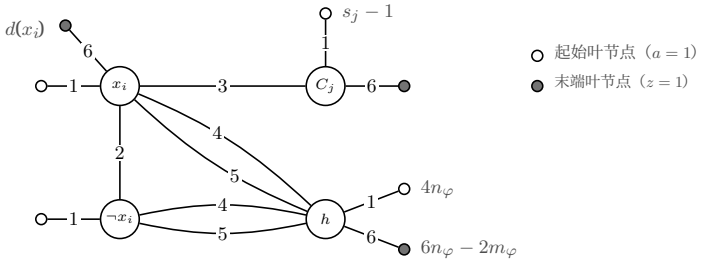


图 8 变量及其关联子句周围的严格游走归约。

定理 16 Strict-Fix *is NP-complete. It remains NP-complete when the temporal graph has six time labels and no parallel edges within a snapshot and when every vertex with ,, $a_v + z_v > 0$ is a leaf with $a_v + z_v = 1$ so that every walk of every solution is non-empty.* Strict-Free *is NP-complete even for temporal graphs with two time labels and with three , time labels if empty walks are not allowed.*

Proof 这两个问题都属于 NP：定向是一个可由引理15在多项式时间内验证的证书；当不允许使用空游走时，证书还会列出至多 m 条非空游走。我们证明，φ 可满足，当且仅当 G_φ 带有向量 a 和 z 上述内容是 Strict-Fix的一个可行实例。

A solution yields a satisfying assignment. 对解进行定向。在时间 1 之前，只有起始叶节点持有游走，因此引理 $_1(v) \le c_1(v)$ 的条件15 迫使时间 1 的每条边都从其叶节点指向外侧，因为另一端没有游走。于是，在时间 2 之前，每个文字顶点都持有一条游走，C_j 持有 $s_j - 1$ 条游走，而 h 持有 $4n_\varphi$ 条游走。时间 2 时，边 $\{x_i, \neg x_i\}$ 移动一条游走，因此在时间 3 之前，两个顶点 x_i 和

$\neg x_i$ 持有两条游走，另一个则一条也没有。若某个文字 *true* 对应的顶点持有两条游走，就称该文字为 x_i。 $\neg x_i$ 和恰有一个为真，因此这构成一个真值赋值。在时间 3，顶点 C_j 有s_j 条边，但只持有 s_j-1 条游走。根据引理 15，这些边中至少有一条从文字顶点 ℓ 指向 C_j，且 ℓ 在时间 3 之前持有一条游走。因此 ℓ 为真，且 C_j 得到满足。

A satisfying assignment yields a solution. 我们给出一种定向，并验证引理15。将时间1的边定向为背离叶节点，并将边 $\{x_i, \neg x_i\}$ 从假文字指向真文字。对于每个子句 C_j，选择一个真文字 ℓ_j，来自 C_j，将 $\{C_j, \ell_j\}$ 从 ℓ_j 定向至 C_j，并将 C_j 的其他 s_j-1 条边定向为背离 C_j。令 $\theta_\ell \le d(\ell) \le 2$ 表示选择了真文字 ℓ的子句数量。一个真文字持有两条游走，足以应对其在时间3至多有两条出边的情况，而假文字没有游走。时间3之后，顶点C_j持有一条游走，假文字 ℓ持有 $d(\ell)$条游走，真文字 ℓ持有 $d(\ell)+2-2\theta_\ell$条游走，而 h持有 $4n_\varphi$条游走。时间4和5的边使每个文字顶点 ℓ恰好拥有 $d(\ell)$条游走。

- 如果 ℓ为真且 $\theta_\ell = 0$，则将两条边都从 ℓ指向 h。顶点 ℓ在时间 4 之前有 $d(\ell)$ 条游走。
- 如果 ℓ 为假，或为真且 $\theta_\ell = 1$，则将时间 4 的边从 h 指向 ℓ，并将时间 5 的边从 ℓ 指向 h。顶点 ℓ 在时间 5 之前至少有一条游走。
- 如果 ℓ 为真且 $\theta_\ell = 2$，则将两条边都从 h 指向 ℓ。

在时间 4 和 5，至多有 $2n_\varphi$ 条边离开 h； h 在时间 4 之前有 $4n_\varphi$ 条游走，在时间 5 之前至少有 $2n_\varphi$ 条游走。 h 处的游走总数变化了 $\sum_{\ell\text{真}}(2-2\theta_\ell) = 2n_\varphi - 2m_\varphi$，因为有 n_φ 个真文字且 $\sum_\ell \theta_\ell = m_\varphi$。因此， h 在时间 6 之前有 $6n_\varphi - 2m_\varphi \ge 0$ 条游走（使用 $m_\varphi \le 2n_\varphi$）。所以在时间 6 之前，每个非叶节点的游走数都恰好等于其末端叶节点数，并且时间 6 的边都指向末端叶节点。最终的游走数为 z。

Free end vertices. 仅保留文字顶点和子句顶点，以及时间为 2 和 3 的边，并在每个文字顶点处设置 $a_v = 1$，在其他位置设置 $a_{C_j} = s_j - 1$。这样，每个顶点在时间 2 之前所持有的游走数量与之前相同，因此关于时间 2 和 3 的论证无需修改即可适用，并且该 Strict-Free 实例可行，当且仅当 φ 可满足。在一个解中，没有被任何子句选择的真文字保留一条空游走。如果不允许空游走，则还要保留起始叶节点和时间为 1 的边，在每个起始叶节点处设置 $a_v = 1$，在其他位置设置 $a_v = 0$。这样，每条游走都以一条边开始，同样的论证在三个时间标签下仍然适用。□

图 G_φ 并非正规图，其快照中的边数也各不相同，因此 [8] 的推论 6.4 和定理 6.5 均不适用。后者关于 k是指数级的，而这里该数值随 n_φ 增长。 [8] 的定理 5.4 涉及未指定起始顶点的问题，并不能推出定理 16。当每个顶点在每个快照中至多关联两条边时， Strict-Fix 是否仍为 NP 完全问题，尚待解决。

6 计算实验

我们将配对流（**PF**，算法 1）与穷举预言机、整数规划（**ILP**）、重启式分支定界（**BB**；它在死偶分量处添加两条游走并重新运行最大流），以及第 3.3 节重构的静态规则进行比较。

表 1 验证检查。

检查	实例/运行次数	结果
穷举判定器	102，476 实例；204,952 次运行	全部符合操作性定义
PF–BB 一致性	105，182 次运行	答案一致
匹配比较	10,813 对；4,000 次随机域比较	答案一致
偶数丰富测试套件	1,176 次预言机运行；2,918 已完成的 BB 运行（42 已停止）	答案一致
Python–C++	8，000 个实例	答案一致
严格归约	1，967 个公式	可行性与可满足性相匹配
引理 10枚举	119,040 带标记的 sets (a) 为 153，(b) 为 153	未发现违反，适用于连通 多图，其中 $n \le 5$、 $m \le 6$
证书复核	13,028 个证书	78.85%–99.27% 的 NO 个证书可验证来自三个已检查集合中的实例数据

6.1 验证

我们根据定义检查了 PF 判定为是时对应的游走。Python 使用临时重新定向（默认设置，界限为 $O(D(n+m^2))$）或反向有向路径（定理 14）；规模扩展运行和配对比较两种方法都使用。BB 限制为 10 秒，或每次偶分量较多的运行最多进行 2，000 次最大流计算（名义值为 5 秒时最多进行 2 $m = 1$，000 次），普查窗口上最多进行 200 次最大流计算，图尔库上限为 150 秒，整数规划比较上限为 60 秒。穷举判定器逐个搜索快照边遍历的令牌序列，既不使用定向，也不使用定理 1，因此它检验的是该刻画是否符合操作性定义。整数规划直接对定理1进行编码，使用二元定向变量和非负计数器。在偶分量较多和短缺这两类实例中，每个 否的结果都来自增广，因此其证书依据引理10(b) 和引理 9 ，无法通过实例数据验证。

验证的局限性。

预言机和整数线性规划由作者在 AI 协助下编写（参见声明）。整数线性规划和 PF 共享定理 1，因此它们的一致性测试的是内部一致性，而不是独立验证。引理 10 枚举涵盖了部分 (a) 的 4,065 个带标号图，但对于部分 (b) 仅涵盖其中的 153 个偶数图，每个集合各一个；这只是一个小规模的合理性检查。

6.2 基准测试与规模扩展

偶数丰富基准将增广单独隔离出来。边数名义值为m 的图包含 max(1,round($\sqrt{m}/2$)) 对 游走，每对游走都从同一个随机顶点出发；图中有 max(8, $\lfloor m/3 \rfloor$) 个（稀疏）或 max(8,$\lfloor 2\sqrt{m} \rfloor$) 个（稠密）顶点。在每个时刻$t = 1$，2，...，直到图中至少有 m 条边，每对游走都会以 0.3 的概率跳过，或在其当前顶点 u 处以 0.25 的概率添加一条通往随机顶点 v 的重边、以 0.30 的概率添加一条经过 u 、长度为 3–6 的环，或以 0.45 的概率添加两条内部不相交的 u–v 路径（每条路径长一到三条边）；随后该对游走移动到 v，但形成环后除外。因此，每个快照中的度、游走计数器和连通分量均为偶数，仅凭计数就会接受每个 FREE 实例。标号和边序均经过打乱，且每对游走最终顶点处的结束计数为 2。每张图（种子 20261113）都会产生植入的 FIX 和 FREE

表2 偶数丰富基准（Python，未使用 SciPy 的默认后端，从头开始）。 m：名义边数。偶数：所有时刻偶数快照分量的平均数量。死亡：初始流之后死亡偶数分量的平均数/最大数。割：由 PF 回答的移除成对元素的实例数 YES/NO 。PF：秒数的中位数/最大值。BB：停止的运行数/全部运行数。静态：PF-NO FIX 实例中，重构的静态规则给出的错误 YES 答案数。短横线：未运行。

族	m	图	Even	Dead	Cut	PF	BB 静态
稀疏	12	200	3.0	0。3/4	265/135	$< 0.001/< 0.001$	0/800 77/78
稠密	12	200	2.7	0。3/4	280/120	$< 0.001/< 0.001$	0/800 72/72
稀疏	50	100	7.4	0.7/5	165/35	< 0.001/0.002	0/400 23/23
稠密	50	100	7.1	0.6/4	172/28	< 0.001/0。002	0/400 19/19
稀疏	200	50	35.9	10.0/24	50/50	0.007/0.014	10/200 28/28
稠密	200	50	21.9	3.4/12	83/17	0.004/0.011	2/200 11/11
稀疏	1，000	20	218.8	90。8/117	3/37	0.157/0.215	30/80 20/20
稠密	1,000	20	78.4	16。1/27	40/0	0.079/0.132	0/80 0/0
稀疏	5，000	10	1242。1	682。3/733	0/20	4.81/7.29	– –
稠密	5，000	10	305.1	77。5/94	19/1	1.74/2.20	– –
稀疏	20，000	2	5183.5	3277.6/3,310	0/4	154.8/170.5	– –
稠密	20,000	2	1098。5	309.5/315	2/2	51.3/56.8	– –

实例以及移除一对起始游走后的版本（对于 FIX，也移除对应的结束游走对）：3，056 个实例，来自 764 张图，包含 $12 \le m \le 20$，000 个（表 2），使用 Python 3.13.12 在 Linux 系统下的 Intel Core i9-9980HK 上运行。初始流在 1，349 个实例中留下了死偶分量（D 最多达 3，310 个），所有 否 答案都源于增广而非计数。在表2前八行的 1，480 FIX 个实例中，PF 接受了 1，229 个、拒绝了 251 个；我们对静态规则的重建错误地接受了 250 个，却没有拒绝任何一个 PF 接受的实例。

两种重新定向的规模增长。

在短缺族中，一个拥有 2($e-1$) 条游走的枢纽必须服务于需要 $2e$ 的 e 个构件，因此每个 FREE 实例都是 否；这里 $m = 7e$，连通分量大小恒定，而 D 与 m 成正比（从 $e = 250$ 到 2，000 次增广，共 62 到 499 次）。在共享机器上使用 SciPy 辅助后端、每种规模重复两次时，scratch 运行时间从 $m = 1$，750 时的 0.84–1.08 秒增长到 $m = 14$，000 时的 98.0–99.9 秒；增量运行时间则从 0.74–0.85 秒增长到 64.6–66.1 秒。每次重复中，相邻规模之间的双对数斜率为 1.81–2.84，而从 $e = 250$ 到 $e = 2$，000 时为 2.08–2.30，与 $O(D(n+sm))$预测的近似-m^2 增长一致；两次重复不足以验证定理 14。增量变体在全部八组配对重复中都更快（快 1.04 到 1.5 倍），而配对偶数充足实例上的平均比率为 1.03–1.17。

整数规划基线。

由 HiGHS [26]（SciPy 1.16.3）求解的整数线性规划，在 3，000 个随机实例（最多 10 条边，其中 484 个含有偶分量）上与 PF 和预言机结果一致，并在 82 个基准测试用例（ 10 个短缺型和 72 个偶富集型）上与 PF 一致；其中 BB 在 8 个用例中达到 60 秒时限后停止。在共享机器上使用 SciPy 辅助后端（与表2不同），对于含有 $m = 1$，000 条边的偶富集图，整数线性规划/PF/BB 的中位耗时分别为 $0.110/0.252/0.610$ 秒（稀疏）和 $0.373/0.154/0.220$ 秒（稠密）；边数超过 $m = 1$，400 时未运行整数线性规划。

6.3 真实数据

接触数据 [27–31] 按无向数据处理，并移除了重复联系人和自我联系人（哥本哈根蓝牙：5 分钟时间段，接收信号强度指示 ≥ -75）。起始向量是预先植入的：贪心 方案按时间顺序扫描快照；端点游走会遍历每条边，若没有边则创建一条。紧缩 变体会删除末尾向量，并移除一条游走或百分之十的起始向量，以检验否定 答案。在公共交通时刻表中， [32], 每趟车辆行程都是从首站到末站的一次游走，每个区段在出发时刻对应一条边。我们使用了 304 个一小时窗口（四座城市、四种方案）、12 个全天实例（三座城市），以及覆盖 25 座城市的 50 个更大规模的 Fix 和 Free 实例；对于每日行程区段超过 250，000 的 12 座城市，采用其最繁忙的三小时区间。

在 50 个较大型公共交通实例和 12 个全天公共交通实例中，分别有 48 个和 6 个出现了死亡偶数分量；其他实例中则很少出现。真实数据中的每个 `NO`答案都是通过计算最大流得到的，因此这些运行测试的是可扩展性，而非 M-凸理论工具。在图尔库全天时刻表（125,779 条边，Python）上，PF 在 70.3 秒内求解了 Fix ， Free 则用时 33.7 秒，而 BB 在 150 秒内未能完成。C++17 求解了全部 50 个较大型实例；规模最大的巴黎实例有 387,467 条边，且包含 $D = 287$，单次运行耗时 68.7 秒。这些运行使用英特尔酷睿 i5-10210U（四核，在 WSL2 下运行 Linux），并发任务数为 2 至 4 个，因此所列时间仅供参考。

7 结论

我们证明了，对于指定起始数量，移除偶分量的死状态后，基于 M-凸性可以在多项式时间内求解非严格时序游走的精确边覆盖问题；我们还证明，即使指定了终点顶点，严格变体仍是 NP 完全问题。定理 $O(D(n + sm))$ 给出的界是增长量的上界。对于短缺族，实测增长量略高于 m^2；增广循环生成的证书则依据引理10(b) 和引理 9。我们没有将结果与布尔可满足性或通用次模流求解器进行比较。未来工作包括：最小化具有自由起点的游走数量；研究每个快照中每个顶点至多有两条边的严格游走；以及探究 D 对初始流的依赖关系。

声明

- **资助**无。
- **利益冲突**无。
- **伦理审批和发表同意** 不适用。哥本哈根网络研究的数据由提供方进行了假名化处理，并按照提供方的条款以发布时的形式使用。我们未尝试识别参与者，也不会重新分发衍生的实例文件。
- **人工智能助手的使用** 作者使用了人工智能助手（Claude、Anthropic 和 Codex、OpenAI）进行语言编辑和翻译，起草和检查部分文本及证明，编写和测试代码与实验脚本，以及开展模拟同行评审。作者已核查结果，并对内容承担全部责任。

•**数据可用性** 哥本哈根网络研究的蓝牙、通话和短信数据 [27]，SocioPatterns 的小学、中学和医院接触数据 [28–31]以及公共交通时刻表 [32] 可从其提供方处获取。可以使用代码仓库中的脚本重新生成实例。

•**代码可用性** https://github.com/th1enq/exact-edge-cover-temporal-walks包含实现、实验脚本、生成器和原始结果汇总。录用后将提供与所报告结果相符的存档版本。

• **作者贡献**D.T.Q.：概念构思、方法设计、正式分析、软件、调查、验证、初稿撰写。M.C.T.：指导、审阅与编辑。通讯作者。

参考文献

[1] Holme, P., Saram¨aki, J.：时序网络。《物理学报告》519(3)，97–125（2012）https://doi.org/10.1016/j.physrep.2012.03.001[2] Michail, O.：时序图导论：算法视角。《互联网数学》12(4)，239–280（2016）https://doi.org/10.1080/15427951. 2016.1177801[3]Edmonds, J., Johnson, E.L.：匹配、欧拉回路与中国邮递员问题。《数学规划》5(1)，88–124（1973）https://doi.org/10.1007/ BF01580113[4] Corber´an, ´A., Laporte, G.（编）：弧路径问题：问题、方法与应用。MOS-SIAM 优化丛书，第20卷。SIAM，费城（2015）。https://doi.org/10.1137/1.9781611973679[5]Bunte, S., Kliewer, N.：车辆调度模型概述。《公共交通》1(4)，299–317（2009）https://doi.org/10.1007/s12469-010-0018-5[6] Casteigts, A., Corsini, T., Sarkar, W.：简单、严格、适当、愉悦：时序图中的可达性研究。《理论计算机科学》991，114434（2024）https://doi.org/10.1016/j.tcs.2024.114434[7] Erlebach, T., Spooner, J.T.：参数化时序探索问题。《计算机与系统科学杂志》135，73–88（2023）https://doi.org/10.1016/ j.jcss.2023.01.003[8] Deligkas, A., D¨oring, M., Eiben, E., Goldsmith, T.-L., Skretas, G., Tennigkeit, G.：要为城市画多少条线路：时序图中的精确边覆盖。载于：AAAI 人工智能大会论文集，第39卷，第26498–26506页（2025）。https://doi.org/10.1609/aaai.v39i25.34850[9] Deligkas, A., D¨oring, M., Eiben, E., Goldsmith, T.-L., Skretas, G., Tennigkeit, G.：要为城市画多少条线路：时序图中的精确边覆盖。

arXiv:2408.17107v1。版本1，提交于2024年8月30日（2024）。https://doi.org/10.48550/arXiv.2408.17107[10] Akrida, E.C., Czyzowicz, J., Gąsieniec, L., Kuszner，-L., Spirakis, P.G.：时序网络中的时序流。《计算机与系统科学杂志》103，46–60（2019）https://doi.org/10.1016/j.jcss.2019.02.003[11] Marino, A., Silva, A.：时序图中的欧拉游走。Algorithmica 85(3)，805–830（2023）https://doi.org/10.1007/s00453-022-01021-y[12] Bumpus, B.M., Meeks, K.：时序图的边探索。Algorithmica 85(3)，688–716（2023）https://doi.org/10.1007/s00453-022-01018-7[13] Chakraborty, D., Dailly, A., Foucaud, F., Klasing, R.：时序有向无环图路径覆盖的算法与复杂度。载于：第49届数学基础与计算机科学国际研讨会（MFCS 2024）。LIPIcs，第306卷，第38–13817页（2024）。https://doi.org/10.4230/LIPIcs.MFCS.2024.38[14] Murota, K.：凸性与 Steinitz 交换性质。《数学进展》124(2)，272–310（1996）https://doi.org/10.1006/aima.1996.0084[15] Murota, K.：离散凸分析。SIAM 离散数学与应用专著，第10卷。SIAM，费城（2003）。https://doi.org/10.1137/1.9780898718508[16] Edmonds, J., Giles, R.：图上次模函数的极小极大关系。载于：Hammer, P.L., Johnson, E.L., Korte, B.H.（编）《整数规划研究》。离散数学年刊，第1卷，第185–204页。North-Holland，阿姆斯特丹（1977）。https://doi.org/10.1016/S0167-5060(08)70734-9[17] Frank, A., Tardos, ´E.：广义多拟阵与次模流。《数学规划》42，489–563（1988）https://doi.org/10.1007/BF01589418[18]Fujishige, S.：次模函数与优化，第2版。离散数学年刊，第58卷。Elsevier，阿姆斯特丹（2005）[19] Hakimi, S.L.：有向图的顶点度。《富兰克林学会杂志》279(4)，290–308（1965）https://doi.org/10.1016/0016-0032(65) 90340-6[20] Frank, A.：图的定向。《组合论杂志 B 辑》28(3)，251–261（1980）https://doi.org/10.1016/0095-8956(80)90071-4[21] Frank, A.：组合优化中的联系。牛津数学及其应用讲座系列，第38卷。牛津大学出版社，牛津（2011）[22] Cunningham, W.H., Frank, A.：次模流的原始-对偶算法。

《运筹学数学》10(2), 251–262 (1985) https://doi.org/10.1287/moor.10.2.251[23]Abdi, A., Cornu´ejols, G., Liu, S., Silina, O.：强连通定向与整数格。《运筹学数学》(2026) https://doi.org/ 10.1287/moor.2025.1030 arXiv:2410.13665。在线发表于2026年8月3日；会议版本发表于 IPCO 2025[24] Hierholzer, C.：关于不重复且不中断地绕行一条线的可能性。《数学年刊》6, 30–32 (1873) https: //doi.org/10.1007/BF01442866[25] Tovey, C.A.：一个简化的 NP 完全可满足性问题。《离散应用数学》8(1), 85–89 (1984) https://doi.org/10.1016/0166-218X(84)90081-7[26] Huangfu, Q., Hall, J.A.J.：对偶修正单纯形法的并行化。《数学规划计算》10(1), 119–142 (2018) https://doi.org/10. 1007/s12532-017-0130-5[27] Sapiezynski, P., Stopczynski, A., Lassen, D.D., Lehmann, S.：哥本哈根网络研究的交互数据。《科学数据》6, 315 (2019) https://doi. org/10.1038/s41597-019-0325-x[28] Stehl´e, J., Voirin, N., Barrat, A., Cattuto, C., Isella, L., Pinton, J.-F., Quaggiotto, M., Broeck, W., R´egis, C., Lina, B., Vanhems, P.：小学中面对面接触模式的高分辨率测量。《公共科学图书馆·综合》6(8), 23176 (2011) https://doi.org/10.1371/journal.pone.0023176[29] Fournet, J., Barrat, A.：高中生之间的接触模式。《公共科学图书馆·综合》9(9), 107878 (2014) https://doi.org/10.1371/journal.pone.0107878[30] Mastrandrea, R., Fournet, J., Barrat, A.：高中中的接触模式：使用可穿戴传感器、接触日记和友谊调查收集的数据之比较。《公共科学图书馆·综合》10(9), 0136497 (2015) https://doi.org/10.1371/ journal.pone.0136497[31] Vanhems, P., Barrat, A., Cattuto, C., Pinton, J.-F., Khanafer, N., R´egis, C., Kim, B.-a., Comte, B., Voirin, N.：利用可穿戴近距离传感器估算医院病房中的潜在感染传播途径。《公共科学图书馆·综合》8(9), 73970 (2013) https://doi.org/10.1371/journal.pone.0073970[32] Kujala, R., Weckstr¨om, C., Darst, R.K., Mladenovi´c, M.N., Saram¨aki, J.：25个城市的公共交通网络数据集汇编。《科学数据》5, 180089 (2018) https://doi.org/10.1038/sdata.2018.89