arXiv:2611.28956v1 [math.SG] 21 Nov 2026

来自 Cartwright-Steger 曲面的奇异万有覆盖与自由循环作用

ANAR AKHMEDOV、B. DOUG PARK、SÜMEYRA SAKALLI 和 SAI-KEE YEUNG

摘要。对于每个 $m \geq 2$，我们构造了一个基本群为 $\mathbb{Z}/m$、欧拉示性数为 35、符号为 1 的闭极小辛四维流形。该构造是正则四重 Cartwright-Steger 覆盖的一个爆破与一个 Akhmedov-Park 循环流形的亏格五辛和。粘合将两个曲面群到 $\mathbb{Z}/m$ 的同态识别起来。其万有覆盖是极小辛的，并且与 $(18m-1)\mathbb{CP}^2\#(17m-1)\mathbb{CP}^2$ 同胚但不同胚。它承认 $\mathbb{Z}/m$ 的自由辛作用。中间商空间给出了基本群为 $\mathbb{Z}/n$、特征数为 $(e,\ \sigma) = (35k,\ k)$ 的例子，其中每个 $n \geq 2$ 和 $k \geq 1$ 均成立。利用同一个 Cartwright-Steger 和项，我们还构造了对每个 $m \geq 2$ 都成立的一个基本群为 $\mathbb{Z}/m$、欧拉示性数为 31、符号为 1 的极小辛四维流形；其极小辛万有覆盖是 $(16m-1)\mathbb{CP}^2\#(15m-1)\mathbb{CP}^2$ 的一个异乎寻常的副本，并带有自由辛 $\mathbb{Z}/m$-作用。

1. 引言

我们构造了具有任意非平凡有限循环基本群以及固定欧拉示性数和符号的极小辛四维流形。我们的第一个构造利用 Cartwright-Steger 曲面上的一条节点曲线和 Akhmedov-Park 的循环流形 [1, 第 9]节。我们选择亏格为五的粘合，使得从两个曲面群到 $\mathbb{Z}/m$ 的同态相一致。

定理 1.1。对于每个整数 $m \geq 2$，存在一个闭极小辛四流形 Z_m使得

$$\pi_1(Z_m) \cong \mathbb{Z}/m, \qquad (e(Z_m), \sigma(Z_m), \chi_h(Z_m), c_1^2(Z_m)) = (35, 1, 9, 73).$$

其万有覆盖 $\widetilde{Z}_m$ 是极小辛的，并且同胚但不同胚于

$$(18m-1)\mathbb{CP}^2\#(17m-1)\overline{\mathbb{CP}}^2.$$

$\widetilde{Z}_m$覆盖变换群在 Z_m上自由且辛地作用。Z_m 和 $\widetilde{Z}_m$ 的整数系数二阶同调群模挠元上的交叉形式均为奇形式，且均为非自旋。

此处 $\chi_h = (e+\sigma)/4$ 以及 $c_1^2 = 2e + 3\sigma$。记号 $\mathbb{CP}^2$ 表示带相反方向定向的复射影平面。全文均采用辛定向。

Akhmedov、Sakallı 和 Yeung 利用复球商空间 [3] 构造了具有（e，σ）=（35，1）的单连通辛四流形。我们采用他们构造的亏格五曲面，并使用 Akhmedov-Park 循环流形 B_m。另一个求和项来自 Cartwright-Steger 曲面的正则四重阿尔巴内塞覆盖。其曲面子群在 [4、命题 6.3–6.4 和引理 6。8]。所选的粘合方式保留了群 $\mathbb{Z}/m$。

我们的 [2] 早期论文通过先进行亏格二和、再进行环面丛求和，给出了具有（e，σ）=（43，1）的循环商空间。本文的构造给出了（e，σ）=（35，1）。具有指定基本群的一般辛构造归功于 Gompf [11]；关于循环群的相关结果见 [6, 14]。

日期：2026年10月25日。2020 数学主题分类。主要分类 57K43；次要分类 57R55、57M10、14J29。关键词和短语。辛四维流形、有限循环基本群、奇异光滑结构、Cartwright-Steger 曲面、辛和。

对于 $m = 2$，万有覆盖的同胚类型早已出现在 [3]中。我们的构造给出了一个自由辛 involution，其商空间的符号为一。我们无法确定其万有覆盖上的光滑结构是否与那些早期例子中的任何一个相同。

推论 1.2。 对于每个 $n \geq 2$ 和 $k \geq 1$，都存在一个闭极小辛四流形$W_{n,\,k}$ 满足

$$\pi_1(W_{n,k}) \cong \mathbb{Z}/n, \qquad (e, \sigma, \chi_h, c_1^2)(W_{n,k}) = (35k, k, 9k, 73k).$$

其万有覆盖与$(18nk-1)\mathbb{CP}^2\#(17nk-1)\mathbb{CP}^2$同胚，但不同胚。

在定理 7.1 中，我们保留 Cartwright-Steger 和项，并将 B_m 替换为 $\Sigma_2 \times T^2$的爆破。五亏格和之后，我们进行四次 Luttinger手术。对于每个 $m \geq 2$，这给出一个基本群为 $\mathbb{Z}/m$ 且 $(e,\ \sigma) = (31,\ 1)$ 的闭极小辛四维流形。其极小辛万有覆盖与 $(16m-1)\mathbb{CP}^2\#(15m-1)\mathbb{CP}^2$同胚，但不同胚。

本文组织如下。第2 节和3 节构造两个辛和项。第4 节描述粘合过程，并计算所得流形的基本群；第5 节研究它们的万有覆盖。第6 节证明推论1.2 ，并记录商空间的整数同调和不可约性。最后，第7 节介绍一个欧拉示性数为31的较小构造。

我们用 Σ_g 表示亏格为 g 的闭定向曲面，用 νF 表示嵌入曲面 F的管状邻域。我们的换位子约定为 $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$。符号 $\#_F$表示沿 F 进行、带有指定正规丛粘合的辛和。

致谢。第二作者获得了 NSERC Discovery 资助 RGPIN–2024–04401 的部分支持。作者感谢使用 ChatGPT（OpenAI）协助修订行文、完善部分论证、检查计算结果以及查找参考文献。作者对本文的数学内容和参考文献承担全部责任。

2. Cartwright-Steger 对

设 X 为 Cartwright-Steger 曲面，设 $\Gamma = \pi_1(X)$，且设 $\alpha\colon X \to E$ 为其 Albanese 映射。 [9]中的表示和阿贝尔化给出

$$H_1(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2, \qquad \alpha_* : \Gamma \twoheadrightarrow \mathbb{Z}^2, \qquad (e(X), \sigma(X)) = (3, 1).$$

我们记

$$N_2 = \ker\big(\Gamma \xrightarrow{\alpha_*} \mathbb{Z}^2 \longrightarrow (\mathbb{Z}/2)^2\big).$$

相应的正规无分歧覆盖 $p : X_4 \to X$ 的次数为四，覆盖变换群为 $(\mathbb{Z}/2)^2$, ，并且

$$\pi_1(X_4) = N_2, \qquad (e(X_4), \sigma(X_4)) = (12, 4).$$

它是一个复球商，因此是非球面的且极小。这就是 [5]中所考察的正规四次 Albanese 基底覆盖。

我们使用 [9, 3]的 A 型节点曲线 $D \subset X$ 。其正规化的亏格为四，具有一个普通正节点，并且 $D^2 = -1$。 [4, 命题 6.3]中的几何子群计算确定了

$$\operatorname{im}(\pi_1(D) \longrightarrow \Gamma) = N_2. \tag{1}$$

这里 $\pi_1(D)$ 是奇异曲线的群，其中包括其分支连接环。方程（1）确定了它在 Γ中的像子群。分支连接生成元和精确的指标计算见 [4, 引理6.1和命题6。3]的四个连通分支 $p^{-1}(D) \subset X_4$ 在[4, 命题64]中有描述。我们回顾光滑化论证。

引理 2.1。 存在一个亏格为五且自交数为 -1 的嵌入的辛曲面 $D_4 \subset X_4$，满足

$$\pi_1(D_4) \longrightarrow \pi_1(X_4) = N_2$$

是满射。

证明。 定义该覆盖的同态 $\Gamma \to (\mathbb{Z}/2)^2$ 在 $\pi_1(D)$ 上由 (1 可知是平凡的。因此，该覆盖在 D 上的限制是平凡的： $p^{-1}(D)$ 是该节点曲线的四个互不相交的次数为一的副本。任选其中一个，记为 D'。包含映射 $D' \subset X_4$ 诱导出的同态的像为 N_2，这取决于基路径的选择。 N_2 正规性保证这一点与所选分支无关。

对 D' 的正节点作辛消解。在一个复坐标球中，用通常的环带 $uv = \varepsilon$ 替换 $uv = 0$，并在边界附近作相应调整。此操作保持同调类，因而保持自交数。它给亏格为四的正规化曲面增加一个把手，因此所得曲面 D_4 的亏格为五，自交数为 -1。

令 q_1， q_2 为映射到节点的正规化上的两个点。平滑化会移除 q_1， q_2 周围的小圆盘，并用一个环带连接它们的边界圆。表示正规化基本群的环路可以选取为避开这些圆盘，并保留在 D_4上。添加的把手有两个标准生成元。第一个生成元沿着穿孔正规化中的一条路径，从一个边界圆到达另一个边界圆，再经由环带返回。在 X_4中的包含映射下，它表示与 D' 中的环路相同的元素，该环路从节点的一个分支经过到另一个分支。第二个生成元是环带的核心圆。它位于坐标球中，因此在 X_4中是零伦的。这些环路与正规化环路一起生成 D_4 的基本群。因此

$$\operatorname{im}\big(\pi_1(D_4) \to \pi_1(X_4)\big) = \operatorname{im}\big(\pi_1(D') \to \pi_1(X_4)\big) = N_2. \qquad \square$$

引理 2.2。 吹起 D_4 的两个不同正则点，并令

$$A = X_4 \# 2\overline{\mathbb{CP}}^2, \qquad F_- \subset A$$

为其严格变换。那么

$$g(F_-) = 5, \quad F_-^2 = -3, \quad (e(A), \sigma(A)) = (14, 2),$$

且包含映射诱导出一个同构

$$\pi_1(A \setminus \operatorname{int} \nu F_-) \cong \pi_1(A) = N_2.$$

映射 $\pi_1(F_-) \to N_2$ 是满射。

证明。 每次爆破都会使自交数减一，同时保持亏格和环境基本群不变。每个例外球面与 F_- 相交于一点。从中移去小的交圆盘后，会在补空间中留下一个圆盘，其边界是 F_-的子午线。因此，该子午线是平凡的。补空间到环境空间的基本群映射的核由一个子午线正规生成；这是通过填充管状邻域并应用 Seifert–Van Kampen定理得到的。因此，该映射是同构。引理2.1 给出了最后的满射性结论。 $\square$

3. 循环正配对

固定一个整数 $m \geq 2$。令 a_i， b_i $(i = 1, 2)$ 为 $\pi_1(\Sigma_2)$ 的标准生成元，并令 c， d 生成 $\Sigma_2 \times T^2$ 的环面因子。令 α_1，……， α_4 为 $\pi_1(T^4)$ 的标准生成元。撇号表示在 [1]中固定的互不相交的平行副本。

我们采用 [1, 第9节]方程（17）]中的记号和亏格二粘合。乘积侧的求和曲面为 $\Sigma_2 \times \{\mathrm{pt}\} \subset \Sigma_2 \times T^2$。另一侧， $\Sigma_2 \subset T^4 \# \mathbb{CP}^2$ 是 [1, 第 3]节中构造的嵌入的自交数为零的辛亏格二曲面。它的例外球面与

它相交两次。按照 [1, 方程（17）], 的标记，曲面生成元在包含映射下到两个和项中的像彼此对应：

$$a_1 \mapsto \alpha_1, \qquad b_1 \mapsto \alpha_2, \qquad a_2 \mapsto \alpha_3^2, \qquad b_2 \mapsto \alpha_4.$$

边界粘合反转了求和曲面中每个法圆纤维的定向。记作

$$B_m = \widetilde{X}_1(m,1) = Y_1(1/m,1) \#_{\Sigma_2=\overline{\Sigma}_2} Z''(1,1).$$

$\Sigma_2 \times T^2$ 求和项中的四个手术为

$$(a_1' \times c', a_1', -1), \qquad (b_1' \times c'', b_1', -1),$$
$$(a_2' \times c', c', +1/m), \qquad (a_2'' \times d', d', +1).$$

$T^4\#\mathbb{CP}^2$中的另外两个手术为

$$(\alpha_2' \times \alpha_3', \alpha_3', -1), \qquad (\alpha_2'' \times \alpha_4', \alpha_4', -1),$$

其中使用了 [1, 方程（6）]中所指定的不相交推动副本。这些定义了 Z''(1,1)。这六个手术全都是Luttinger手术。闭流形 B_m 是辛的，并且具有

$$e(B_m) = 5, \qquad \sigma(B_m) = -1, \qquad \pi_1(B_m) = \langle c \mid c^m = 1 \rangle.$$

引理 3.1。 流形 B_m 是极小的，并包含一个嵌入的辛曲面 F_+，其满足g（F_+） $= 5$ 以及 $F_+^2 = 3$。由包含映射诱导的同态 π_1（F_+） $\to \pi_1$（B_m） $= \mathbb{Z}/m$ 是满射。

证明。 手术之前，根据 Usher 定理 [18]，亏格二和是极小的。加项$\Sigma_2 \times T^2$是极小的。 T^4的渐近性意味着， $T^4\#\mathbb{CP}^2$中的每个例外类都是带符号爆破类，而它与 Σ_2的交非零。因此，另一个加项是相对极小的。两个加项都不是纤维化的。Luttinger 手术保持极小性 [13, 命题 3.1], ，因此 B_m 是极小的。

我们通过将打孔的例外球面与辛和中的两个打孔乘积环面连接起来，构造一个亏格二曲面 S。设 $E \subset T^4\#\mathbb{CP}^2$ 为例外球面。我们将手术邻域选在爆破球之外，使得 E 保持不变。设 x_1， x_2 为乘积求和曲面 Σ_2上两点 $E \cap \Sigma_2$ 的像。通过对粘合进行同伦，使这两个点 x_1， x_2都位于 Σ_2中的一个小圆盘内，并避开曲线 a_1'， b_1'， a_2'， a_2''；同时令它们通过路径连接到非手术区域中的标准乘积基点。这一同伦不会改变基本群上诱导的粘合。选择乘积侧手术邻域，使其在 $\Sigma_2 \times T^2 \to \Sigma_2$下的投影也避开 x_1， x_2。因此，两个乘积环面 $P_i = \{x_i\} \times T^2$都与所有四个乘积侧手术邻域不相交。

对每个 i，在 $E \cap \Sigma_2$ 上相应点周围选取一个小圆盘 $\Delta_i^- \subset \Sigma_2$，并在 x_i周围选取一个圆盘 $\Delta_i^+ \subset \Sigma_2 \times\{\text{pt}\}$。粘合将 Δ_i^-与 Δ_i^+识别。安排使 E 与 Σ_2相交，并使每个 P_i 与 $\Sigma_2 \times\{\text{pt}\}$辛正交相交。在这些圆盘上选择法丛的局部平凡化，使得法向圆周的粘合是先作复共轭，再作固定旋转。我们通过对圆盘上的正规丛粘合进行同痕来作出这些选择。从 E 中去掉两个交圆盘，并从每个 P_i中去掉一个。在第 i 次粘合处，用局部和模型 $zw = \varepsilon$中的辛环带将带孔的E 与带孔的 P_i 连接起来。由此得到的连通辛曲面 S 具有

$$g(S) = 2, \qquad S^2 = -1.$$

对于法向欧拉数，在每个粘接圆盘上将切于求和曲面的复法向方向平凡化。在局部模型 $zw = \varepsilon$ 中，边界法向标架以零绕数相匹配。因此，相对欧拉数相加得到 $E^2 + P_1^2 + P_2^2 = -1$。亏格二粘合中的法丛扭转在这些可缩的粘接圆周上的绕数为零。这就是 [3] 的亏格五构造中所使用的曲面。

当平行乘积截面 Σ_2' 的 T^2 坐标选取在求和点和所有手术曲线之外时，它在求和与手术后仍然存在。它与 S 相交于两个正横截交点，分别位于每个 P_i 中。对它们进行辛消解后得到曲面 F_+。因此

$$g(F_+) = 2 + 2 + 2 - 1 = 5, \qquad F_+^2 = -1 + 0 + 2 \cdot 2 = 3.$$

在 P_1 中选择一个避开删去的圆盘和消解圆盘的 c-环。利用非手术区域中的路径，它表示 $\pi_1(B_m) = \mathbb{Z}/m$ 中标准生成元 c 的一个共轭元。因此，由包含映射诱导的同态 $\pi_1(F_+) \to \mathbb{Z}/m$ 是满射的。将系数从 $+1$ 改为 $+1/m$ 只会改变在该环面手术中用于重新粘接 $T^2 \times D^2$ 的边界识别；刚刚构造的曲面与该邻域不相交。□

4. 辛和及其基本群

我们使用引理 $(A,\ F_-)$ 中的 2.2 对，并记 $q_-:\ \pi_1(F_-) \twoheadrightarrow N_2$ 为其曲面同态。根据定义，$N_2 = \alpha_*^{-1}(2\mathbb{Z}^2)$。因此，$\alpha_*:\ \Gamma \to \mathbb{Z}^2$ 的满射性给出 $\alpha_*(N_2) = 2\mathbb{Z}^2$。因此，同态

$$\vartheta : N_2 \longrightarrow \mathbb{Z}, \qquad \vartheta(h) = \frac{\alpha_{*,1}(h)}{2}$$

是良定义的且为满射；$\alpha_{*,\,1}$ 表示 α_* 的第一坐标。令 ϑ_m 为其模 m 的约化，并令 $r_m : \pi_1(F_+) \to \mathbb{Z}/m$ 为由包含映射诱导的同态。复合映射$\vartheta \circ q_-$ 是满射，因此在 $H^1(F_-;\mathbb{Z})$ 中表示一个本原类。同态 r_m 也有一个本原整提升。事实上，保留下来的嵌入的 c-环在 r_m 下映射为 1，因而是非分离的：分离环是零调的，并映射为零。将其扩充为 $H_1(F_+;\mathbb{Z})$ 的一个辛基，在该基元素上赋予系数 1，并将 r_m 的其余系数提升为整数。

映射类群在第一同调群上的作用满射到 $\mathrm{Sp}(10,\ \mathbb{Z})$。由于该群在本原整协向量上传递作用，存在一个保定向微分同胚$\phi_m : F_- \to F_+$，使两个整提升相匹配。特别地，

$$r_m \circ (\phi_m)_* = \vartheta_m \circ q_-.$$

对辛形式重新缩放并应用Moser定理后，我们可以令 ϕ_m 保持诱导的面积形式不变。相反的法向欧拉数给出了保纤维反向的法丛粘合。我们构造辛和

$$Z_m = A \#_{\phi_m} B_m.$$

引理 4.1。设 $q:\ G \to H$ 是满射同态，设 $\vartheta:\ H \to C$ 是同态，并令 $r = \vartheta \circ q$。则典范同态

$$j_C : C \longrightarrow H *_G C$$

是一个同构。在此识别下，从 H 到推出的典范同态为 ϑ。

证明。记推出为 $P = H *_G C$，并令 $j_H:\ H \to P$ 和 $j_C:\ C \to P$ 为典范同态。定义关系

$$j_H \circ q = j_C \circ r = j_C \circ \vartheta \circ q$$

以及 q 的满射性推出

$$j_H = j_C \circ \vartheta.$$

因此$j_H(H) \subseteq j_C(C)$。由于这两个像生成了 P，同态 j_C是满射。

同态 $\vartheta:\ H \to C$ 和 $\mathrm{id}_C:\ C \to C$ 分别与 q 和 r复合后相等。根据推出的泛性质，它们诱导出一个同态 $f : P \to C$，满足

$$f \circ j_H = \vartheta, \qquad f \circ j_C = \mathrm{id}_C\,.$$

第二个等式说明 j_C 是单射，因此 j_C 是一个同构，其逆为 f。第一个等式给出了从 H出发的典范映射的所述识别。□

命题 4.2。 对于每个 $m \geq 2$，刚刚选定的粘合给出一个极小辛四维流形Z_m ，其满足

$$\pi_1(Z_m) = \mathbb{Z}/m, \qquad (e(Z_m), \sigma(Z_m), \chi_h(Z_m), c_1^2(Z_m)) = (35, 1, 9, 73).$$

其模去挠元后的交叉形式是奇的；因此它不是自旋流形。

证明。 引理 2.2 表明 F_- 的子午线是平凡的。粘合将F_+ 的一个子午线与 F_-的一个子午线的逆元识别起来。因此，它消去了 μ_+ 的 F_+子午线，正侧的群变为

$$\pi_1(B_m \setminus \operatorname{int} \nu F_+)/\langle\langle \mu_+ \rangle\rangle \cong \pi_1(B_m) \cong \mathbb{Z}/m.$$

公共边界是 Σ_5 上的一个圆丛。其群由标准曲面生成元的提升 a_i、b_i 以及一个中心纤维子午线 μ生成，并满足关系

$$\prod_{i=1}^{5} [a_i, b_i] = \mu^{\pm 3}.$$

指数的绝对值为三，因为 F_- 和 F_+ 的法向圆丛的欧拉数分别为 -3 和 $+3$；其符号取决于边界和子午线的约定。该指数与所选择的正规丛粘合无关。子午线被消去后，该关系变为曲面关系。其余关系给出推出

$$\pi_1(Z_m) = N_2 *_{\pi_1(\Sigma_5)} \mathbb{Z}/m.$$

通过$(\phi_m)_*$识别曲面群后，匹配条件为 $r_m = \vartheta_m \circ q_-$，引理4.1证明了关于群的断言。选择不同的正规丛粘合，可能会使提升后的曲面生成元的像乘上子午线的幂。子午线是平凡的，因此这些因子不会改变群。

辛和公式给出

$$e(Z_m) = 14 + 5 + 4(5-1) = 35, \qquad \sigma(Z_m) = 2 - 1 = 1.$$

因此 $\chi_h(Z_m) = 9$ 和 $c_1^2(Z_m) = 2(35) + 3 = 73$。

正块是极小的。在吹下 $A \to X_4$ 后，由于渐近性，每个球面在X_4 中都是零伦的。因此，例外球面的类属于核格 $\langle -1 \rangle^2$。其自交数为 -1，所以其类为 $\pm E_1$ 或 $\pm E_2$，其中 E_1, E_2 是吹起类。这样的类与 F_-有非零交。两个求和项都不是以求和曲面为截面的有理曲面。 [18]中的 Usher 定理给出了极小性。

偶幺模交叉形式的符号能被八整除。 Z_m 的自由交叉形式是幺模的，且符号为一，因此它是奇的。自旋流形具有偶交叉形式，因此 Z_m 不是自旋的。□

5. 万有覆盖

引理 5.1. 万有循环覆盖 $B_m \to B_m$ 是极小辛的。

证明。 在六次手术之前，定义一个到 $\mathbb{Z}/m$ 的同态：将 c 发送到 1，将所有其他乘积生成元和 T^4 生成元发送到 0。它在两个和项上的限制在求和曲面上一致，因此定义了未手术的和的一个 m 重覆盖。乘积侧覆盖是连通覆盖 $\Sigma_2 \times \widehat{T}^2$，其中 c- 圆以次数 m 被覆盖。另一侧由 m 个 $T^4 \# \mathbb{CP}^2$ 的副本组成。求和曲面提升为 m 个互不相交的乘积截面。沿这些截面依次进行求和。每个例外球面与其求和曲面相交两次。乘积块不是纤维化的。第一次求和之后

$$(\Sigma_2 \times \widehat{T}^2) \#_{\Sigma_2 = \overline{\Sigma}_2} (T^4 \# \overline{\mathbb{CP}^2}),$$

所得流形是极小的，并且具有 $e = 5$ 和 $\sigma = -1$。因此它不是纤维化的，因为每个极小有理曲面的符号都为零。Usher 定理在 [18] 上依次适用，并证明了未手术的次数为m覆盖的极小性。

手术邻域及其原像均与亏格二求和曲面不相交。连续求和之后，我们再进行提升手术：移除这些邻域，并沿提升后的边界映射重新粘合 $T^2 \times D^2$ 的副本。由于到 $\mathbb{Z}/m$ 的同态将预定的手术斜率（即重新粘合的 $T^2 \times D^2$ 的子午线的像）映为零，因此该同态可延拓到下方的每个手术上。乘积侧的 c 手术的手术斜率为 $\mu + mc$。在连通边界覆盖上，

$$\widehat{\mu} \longmapsto \mu, \qquad \widehat{c} \longmapsto mc,$$

因此，提升斜率为 $\widehat{\mu} + \widehat{c}$。下表列出了提升手术。系数按照拉回的拉格朗日框架进行测量，采用 [1]中的约定。

基底手术	提升数	上方的系数
$(a_1' \times c', a_1', -1)$	one	-1
$(b_1' \times c'', b_1', -1)$	one	-1
$(a_2' \times c', \ c', \ +1/m)$	one	$+1$
$(a_2'' \times d', d', +1)$	m	$+1$ 在每个
Z''中的每次手术(1,1)	m	-1 在每个

在前两行中，分别写入 $\lambda = a_1'$ 或 b_1'。沿另一条 $\widehat{\ }$经度，即 c 方向，覆盖的次数为 m，而 $\lambda \mapsto \lambda$ 和 $\widehat{\mu} \mapsto \mu$。因此，手术斜率 $\mu - \lambda$ 提升为 $\widehat{\mu} - \lambda$，系数仍为 -1。在最后两行中，到 $\mathbb{Z}/m$ 的同态在每个手术邻域上都是平凡的；其逆像由 m 个拷贝组成，并微分同胚地映射到该邻域，因此系数不变。所有 $3m + 3$ 个提升环面手术都是在拉回的拉格朗日框架下进行的 Luttinger手术。因此，Ho-Li 最小性定理在 [13] 中证明了提升手术后的极小性。扩展同态 $\pi_1(B_m) \to \mathbb{Z}/m$ 将$\widehat{\ }$生成元 c 映射到 1，因而是一个同构。因此，该覆盖就是万有覆盖 B_m。□

引理 5.2。设 V 是一个具有有限循环基本群且在 $H_2(V;\ \mathbb{Z})/\mathrm{Tor}$ 上具有奇$\widetilde{\ }$交叉形式的闭定向四维流形。其万有覆盖 V是非自旋的。

$\widetilde{\ }$证明。记 $G = \pi_1(V)$ 和 $p:\ V \to V$。Hopf 正合列（参见 [8, 第七章，第 7 节，习题 6]）以及 $H_2(G;\mathbb{Z}) = 0$ 给出了一个满射

$$H_2(\widetilde{V};\mathbb{Z})_G \longrightarrow H_2(V;\mathbb{Z}).$$

等式 $H_2(G;\mathbb{Z}) = 0$ 由有限循环群的周期分解得出。此映射由 p_*诱导。若 V是自旋的，则由 w_2 的自然性可得，对每个$\sim x \in H_2(V;\ \mathbb{Z})$，都有 $\langle w_2(V)\ p_* x\rangle = \langle w_2(V)\ \bar{x}\rangle = 0$，$\overline{\ }$其中横线表示模二约化。对于 $a \in H_2(V;\mathbb{Z})$，Wu 公式给出

$$\langle w_2(V), \bar{a}\rangle = Q_V(a,a) \pmod 2,$$

其中 Q_V 是交配对。因此，p_* 的满射性将使得 V 中的每个整数自交数都是偶数，这与事实矛盾。□

定理的证明 1.1。固定 $m \geq 2$。命题 4.2 确立了关于 Z_m的断言。我们证明关于其万有覆盖的其余断言。令

$$p_- : \widehat{A} \longrightarrow A, \qquad p_+ : \widehat{B}_m \longrightarrow B_m$$

分别为对应于 $\ker \vartheta_m < \pi_1(A) = N_2$ 和 $\pi_1(B_m) \cong \mathbb{Z}/m$ 的平凡子群的连通 m 次覆盖。在移除求和曲面的管状邻域之前，设

$$\widehat{F}_- = p_-^{-1}(F_-), \qquad \widehat{F}_+ = p_+^{-1}(F_+).$$

同态 $\vartheta_m \circ q_-$ 和 r_m 是满射，因此两个原像都是连通的，并且每个限制 $F_\pm \to F_\pm$ 都是次数为 m 的覆盖。因此，

$$2 - 2g(\widehat{F}_\pm) = m(2 - 2 \cdot 5) = -8m, \qquad g(\widehat{F}_\pm) = 4m + 1.$$

它们的法丛是 $F_\pm$的法丛的拉回，因此

$$\widehat{F}_-^{\,2} = -3m, \qquad \widehat{F}_+^{\,2} = 3m.$$

匹配条件

$$r_m \circ (\varphi_m)_* = \vartheta_m \circ q_-$$

确保覆盖同态在边界粘合下相容：二者都消去纤维子午线，并且它们在曲面群上诱导的同态一致。因此，边界粘合提升为提升后的管状邻域边界之间的微分同胚 Φ_m。将覆盖的补空间粘合起来，得到 Z_m的连通次数为 m 的覆盖：

$$(\widehat{A} \setminus \operatorname{int} \nu\widehat{F}_-) \cup_{\widehat{\Phi}_m} (\widehat{B}_m \setminus \operatorname{int} \nu\widehat{F}_+).$$

由于 $\pi_1(Z_m) \cong \mathbb{Z}/m$，这是其万有覆盖 Z_m。因此，提升辛和构造得到

$$\widetilde{Z}_m = \widehat{A} \#_{\widehat{F}_- = \widehat{F}_+} \widehat{B}_m,$$

其辛形式由 Z_m 拉回。

令 $X_{4m} \to X_4$ 为对应于 $\ker \vartheta_m$ 的连通次数为 m 的覆盖。X_4 中的两个爆破点各有 $2m$ 个原像，因此

$$\widehat{A} \cong X_{4m} \# 2m\overline{\mathbb{CP}}^2.$$

流形 X_{4m} 是非球面的。若 $S \subset A$ 是一个满足 $S^2 = -1$ 的嵌入球面，则它与吹下映射的复合是零伦的。因此，其同调类位于吹下同态的核中：

$$[S] = \sum_{i=1}^{2m} a_i E_i,$$

其中 $E_1, \dots, E_{2m}$ 是例外类。由于

$$-1 = [S]^2 = -\sum_{i=1}^{2m} a_i^2,$$

我们有 $[S] = \pm E_i$，其中某个 i。每个例外球面与 F_- 相交一次，因此

$$[S] \cdot [\widehat{F}_-] = \pm 1.$$

因此 $A \setminus F_-$ 不含例外球面。

另一个加项 B_m 由引理5.1可知是极小的。此外，

$$\sigma(\widehat{A}) = 2m, \qquad \sigma(\widehat{B}_m) = -m,$$

因此两个加项都不具有 S^2-丛结构，因为这类丛的符号为零。Usher 的定理 [18, 定理 1.1]现在推出，Z_m 是极小的。

欧拉示性数和符号在有限覆盖下具有乘法性。因此

$$e(\widetilde{Z}_m) = 35m, \qquad \sigma(\widetilde{Z}_m) = m.$$

由于 Z_m 是单连通的，这些恒等式给出

$$b_2^+(\widetilde{Z}_m) = 18m - 1, \qquad b_2^-(\widetilde{Z}_m) = 17m - 1.$$

由命题 4.2， Z_m 模去挠元后的交叉形式是奇的，因此引理 5.2 推出Z_m 是非自旋的。单连通性进而表明其交叉形式是奇的。因此，它是奇不定幺模形式

$$(18m-1)\langle 1\rangle \oplus (17m-1)\langle -1\rangle.$$

Freedman 分类 [10], 再结合光滑流形的 Kirby–Siebenmann 不变量消失，可知 Z_m 与下列流形同胚:

$$(18m-1)\mathbb{CP}^2 \# (17m-1)\overline{\mathbb{CP}}^2.$$

最后， $b_2^+(\widetilde{Z}_m) > 1$，因此 Taubes 定理 [17] 给出一个非零的 Seiberg–Witten 不变量。上述标准连通和的 Seiberg–Witten 不变量消失，因为它可分解为两个正 b_2^+流形的连通和。因此，该同胚不可能是微分同胚。覆盖变换群 $\mathbb{Z}/m$ 自由作用，并保持拉回的辛形式不变，从而完成证明。□

6. Quotients and integral homology

推论 1.2的证明。 固定整数 $n \geq 2$ 和 $k \geq 1$，并将定理 1.1 应用于 $m = nk$。令 H为覆盖变换群 $\mathbb{Z}/(nk)$ 的唯一 n 阶子群，其中 $Z_{nk} \to Z_{nk}$，并设

$$W_{n,k} = \widetilde{Z}_{nk}/H.$$

由于 Z_{nk} 是单连通的， $\pi_1(W_{n,\,k}) \cong H \cong \mathbb{Z}/n$。所得商空间以$k$为次数覆盖 Z_{nk}，因此其特征数如所示。其万有覆盖是同一个极小辛流形。商空间中的例外球面会提升为上方的例外球面，因此该商空间是极小的。□

总之， Z_m 的特征数与 m无关。其万有覆盖的特征数可通过乘以 m得到。

流形		e	σ	χ_h	c_1^2
循环商	Z_m	35	1	9	73
万有覆盖	$\widetilde{Z}_m$	$35m$	m	$9m$	$73m$

整系数对偶给出

$$H_1(Z_m;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/m, \quad H_2(Z_m;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{33} \oplus \mathbb{Z}/m, \quad H_3(Z_m;\mathbb{Z}) = 0.$$

事实上，基本群决定了 H_1，欧拉示性数决定了H_2的自由秩，而庞加莱对偶和泛系数定理则将其挠元识别为 Ext(H_1, $\mathbb{Z}$)。此外 $H_3 \cong H^1 = 0$。

推论 6.1。 流形 Z_m、它们的万有覆盖以及推论 1.2 中的中间商空间均不可约：每一种光滑连通和分解都含有一个同伦球面直和项。

证明。 它们是极小辛流形，并且具有有限循环的或平凡的基本群。这些群是剩余有限的，因此结论由 Hamilton-Kotschick [12, 推论 1]得出。□

7. 一个更小的循环构造

定理 7.1。 对于每个整数 $m \geq 2$，都存在一个闭极小辛四维流形 V_m，满足

$$\pi_1(V_m) \cong \mathbb{Z}/m, \qquad (e, \sigma, \chi_h, c_1^2)(V_m) = (31, 1, 8, 65).$$

其万有覆盖是极小辛流形，并且与.....同胚但不同胚

$$(16m-1)\mathbb{CP}^2 \# (15m-1)\overline{\mathbb{CP}}^2.$$

覆盖变换群在万有覆盖上自由且辛地作用。

我们使用引理 2.2 中的 Cartwright-Steger 对 (A, F_-)。令 $q_-: \pi_1(F_-) \twoheadrightarrow N_2$ 为由包含映射诱导的映射，并令 $\ell = \vartheta \circ q_-$，其中 ϑ是第 4 节中的半阿尔巴内塞坐标。由于$\mathbb{Z}$ 是阿贝尔的， ℓ 可通过 $H_1(F_-;\mathbb{Z})$分解。对于所得的同态$\ell: H_1(F_-;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$，我们沿用相同的记号。

引理 7.2。 N_2 的阿贝尔化为 $\mathbb{Z}^2 \oplus (\mathbb{Z}/2)^3$。

证明。 我们使用 Stover 对 Γ 的表示，其生成元为 x、y、z，关系词为 R_1、...、R_{12} [16, 第 3] 节。相应的表示复形是通过将十二个圆盘附着到由三个定向圆组成的楔和上得到的，这三个圆分别标记为 x、y、z，附着词为 R_1、...、R_{12}。其基本群为 Γ。

在 Stover 的阿贝尔化坐标 r、s 中，生成元的像为

$$x \longmapsto rs^{-1}, \qquad y \longmapsto rs^2, \qquad z \longmapsto r^{-3}s.$$

子群 N_2 确定了表示复形的一个四重覆盖。该覆盖有四个顶点，它们都位于下面那个单一顶点之上。我们用 $(\mathbb{Z}/2)^2$ 中的元素来标记它们:

$$0 = (0,0), \qquad 1 = (1,0), \qquad 2 = (0,1), \qquad 3 = (1,1).$$

这些标记的加法表示在 $(\mathbb{Z}/2)^2$, 中进行加法，其中 r、s 分别对应于 1、2。因此，从顶点 v 出发的 x、y、z 的正向提升分别终止于 $v+3$、$v+1$、$v+3$。

将 (v, a) 记作从 v 出发的 a 边的正向提升。共有十二条边，每个生成元和每个初始顶点各对应一条。这三条边

$$(0,x): 0 \longrightarrow 3, \qquad (0,y): 0 \longrightarrow 1, \qquad (1,x): 1 \longrightarrow 2$$

将全部四个顶点连接起来且不形成环，从而构成一棵极大树。压缩这棵树后剩下九条边，我们先按初始顶点排序，再按标签 x、y、z排序。

每个关系子 R_i 都有四个闭提升，每个顶点各有一个。压缩这棵树后，它们在剩余的九个生成元中给出四十八个关系。它们的指数和构成一个 48×9整数矩阵 M，其中

$$H_1(N_2;\mathbb{Z}) \cong \operatorname{coker}\big(M^{\mathsf{T}} : \mathbb{Z}^{48} \longrightarrow \mathbb{Z}^9\big).$$

我们首先按 R_1、.....、R_{12} 排序，然后按初始顶点 0、1、2、3 排序。计算某一行时，沿着提升的关系子走过，并省略树边。对于每条非树边，记录提升的关系子沿其选定方向经过它的次数，减去沿其相反方向经过它的次数。

模2约化表明，前四行构成了 M 在 $\mathbb{F}_2$上的行空间的一组基。因此

$$\operatorname{rank}_{\mathbb{F}_2} M = 4.$$

子矩阵 在第2、4、11、22、27、32、44行以及第2、3、4、5、7、8、9列（从1开始编号）上，i s

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & -3 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

其行列式为 -8。因此秩$_{\mathbb{Q}}\, M \geq 7$。

另一方面，定义同态 $\alpha_*\colon\ \Gamma \to \mathbb{Z}^2$ 将 N_2 映射到 $2\mathbb{Z}^2$上。因此，$H_1(N_2;\mathbb{Z})$的自由秩至少为二，所以

$$\operatorname{rank}_{\mathbb{Q}} M \leq 9 - 2 = 7.$$

因此秩$_{\mathbb{Q}}\, M = 7$。

设 $d_1 \mid \cdots \mid d_7$是 M的正非零史密斯不变因子。模2秩为四，因此这些因子中恰有四个为奇数、三个为偶数。因此

$$8 \mid d_1 \cdots d_7.$$

乘积 $d_1 \cdots d_7$是 M 的 7×7 阶子式的正最大公因数。因此，所显示的子式给出

$$d_1 \cdots d_7 \mid 8.$$

由此可得 $d_1 \cdots d_7 = 8$，进而

$$(d_1, \ldots, d_7) = (1, 1, 1, 1, 2, 2, 2).$$

由于有九个生成元和七个非零不变因子，我们得出

$$H_1(N_2;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2 \oplus (\mathbb{Z}/2)^3.$$ □

注 7.3。 N_2 也曾被发现是 Cartwright-Steger 曲面基本群表示的一个子群，见 [3]。在 [3], Magma [7] 中，对文件末尾列出的格的表示 [45] 使用 `AbelianQuotient` 命题 7.2中所声称的同调也可以得到验证。

定理 7.1 的证明。 取 $m \geq 2$。在 $\Sigma_2 \times T^2$中，将截面$\Sigma_2 \times \{t_1\}$ 和 $\Sigma_2 \times \{t_2\}$ 与纤维 $\{x_0\} \times T^2$的两个正交点解开。所得的辛曲面亏格为$2+2+1 = 5$，自交数为 4。在该曲面的一个正则点处吹起，并将其严格变换记为 F'_+。因此

$$B' = (\Sigma_2 \times T^2)\#\overline{\mathbb{CP}}^2, \qquad g(F'_+) = 5, \qquad (F'_+)^2 = 3.$$

让我们使用 [1, 第9节，公式 (14)], 中的四个拉格朗日环面和手术，其中 $p = m$ 和 $q = 1$:

$$(a'_1 \times c', a'_1, -1), \qquad (b'_1 \times c'', b'_1, -1),$$
$$(a'_2 \times c', c', +1/m), \qquad (a''_2 \times d', d', +1).$$

按照 [1, 第 9], 节的做法，令 $Y_1(1/m,\ 1)$ 表示经过这四次 Luttinger手术后由 $\Sigma_2 \times T^2$ 得到的辛四维流形。

令 t_1 为 [1, 截面 9], 的标准截面点，并在 t_1 附近的小圆盘中选取 t_2，使其与手术环面的投影不相交。选取远离环面投影的 x_0 到 Σ_2，并避开标记截线。这样，解消和爆破便可在手术邻域及标记曲线之外进行。在 B' 上进行相同的手术得到 Y_1（$1/m$，1）#$\mathbb{CP}^2$。曲面 F'_+ 与这些邻域不相交，因此手术后仍保持嵌入的辛曲面性质。

在手术块中，第一个截面的标记 b_2 表示 b_2 中[1, 截面 9]的生成元的共轭元。第二个截面的标记 a_2 表示 a_2的一个共轭元，因为两条截线通过沿着从 t_1 到 t_2的路径上的乘积环带相连。

这两个截面和纤维给出了 $H_1(F'_+;\mathbb{Z})$ 的正交辛分解，其和项的秩分别为四、四和二。令 $\eta\colon H_1(F'_+;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ 为由环面因子的 c坐标诱导的同态。它在截面和项上为零，并满足

$$\eta([c]) = 1, \qquad \eta([d]) = 0.$$

我们选择粘合 $\psi\colon F'_+ \to F_-$ 使得 $\psi^*\ell = \eta$。这确保正 c坐标与负半阿尔巴尼斯坐标在对 m 取模后于求和曲面上一致。于是，这些同态将诱导一个满同态 $\pi_1(V_m) \to \mathbb{Z}/m$，将 c 映到一；这将表明保留下来的生成元 c 的阶恰好为 m。同样的相容性还将允许粘合提升到相应的 m 次覆盖。

令 v 为 F_-中的平滑环带的定向腰圆，并令 $u = [v] \in H_1(F_-;\ \mathbb{Z})$。由引理 2.1可知，圆 v 是非分离的。 v 也位于节点被平滑的坐标球内，因此在环境 4维流形中是零伦的。将两个爆破点选在此球之外，我们得到

$$q_-(v) = 1 \in \pi_1(A) = N_2.$$

因此， u 是本原的，且 $\ell(u) = 0$。正规化的同调映射满射到原阿尔巴尼斯坐标 [4, 中的 $2\mathbb{Z}^2$，这正是命题 6.2] 的证明。它的类可以由避开 v 的代表表示，因此存在一个 $x \in u^\perp$，使得 $\ell(x) = 1$。

取 u'，使得 $u' \cdot u = 1$。由于 $x \cdot u = 0$ 且 $\ell(x) = 1$，用 $u' - \ell(u')x$ 替换 u' 会保持其与 u 的交数，并确保 $\ell(u') = 0$。由于 $u' \cdot u = 1$，我们得到一个正交直和分解

$$H_1(F_-;\mathbb{Z}) = \langle u', u\rangle \oplus \langle u', u\rangle^\perp.$$

因此，第二个直和项上的交配对是幺模的。

此外， $s = x + (x \cdot u')u$ 属于 $\langle u', u\rangle^\perp$，且其 ℓ-值为一，因此 ℓ 在 $\langle u', u\rangle^\perp$上的限制是本原的。由幺模性，存在唯一的类 $t \in \langle u', u\rangle^\perp$，使得

$$\ell(y) = y \cdot t \qquad \text{for every } y \in \langle u', u\rangle^\perp.$$

由于 $s \cdot t = \ell(s) = 1$，我们得到一个正交辛分解

$$H_1(F_-;\mathbb{Z}) = \langle u', u\rangle \oplus \langle s, t\rangle \oplus W,$$

其中 W的秩为六。我们有 $\ell(s) = 1$，并且 $\ell(t) = t \cdot t = 0$，而对于每个 $w \in W$， $\ell(w) = w \cdot t = 0$。结合 $\ell(u') = \ell(u) = 0$，这些正是所需的性质。

接下来，我们寻找一个本原向量 $w \in W$，使得 $(q_-)_*(w) = 0$，其中

$$(q_-)_* : H_1(F_-;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(N_2;\mathbb{Z})$$

是由 q_- 在阿贝尔化上诱导的同态。根据引理7.2，

$$H_1(N_2;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2 \oplus (\mathbb{Z}/2)^3.$$

令 K 为 $(q_-)_*|_W$ 与投影到自由直和项的复合的核。那么 K 是 W 的一个秩至少为四的直和项。$(q_-)_*$ 在 K 上的限制取值于 $(\mathbb{Z}/2)^3$，因此诱导出一个线性映射

$$K/2K \longrightarrow (\mathbb{Z}/2)^3$$

具有非零核。利用 K 的一组基中的零或一作为系数，提升一个非零核向量。所得向量 w 在 K 中是本原的，因此在 W 中也是本原的，并满足 $(q_-)_*(w) = 0$。选取 $w' \in W$，使得$w \cdot w' = 1$，并将 (w, w') 扩充为 W 的辛基。

选取一个辛同构 $H_1(F'_+;\,\mathbb{Z}) \to H_1(F_-;\,\mathbb{Z})$，将第一截面的配对 $([a_2],[b_2])$ 映至 (u',u)，将第二截面的相应配对映至 (w,w')，并将纤维配对 $([c],[d])$ 映至 (s,t)。将其余两组辛配对映至 W 中剩余的配对。于是 ℓ 的拉回为 η。

映射类群满射到整辛群，因此存在一个保定向微分同胚实现这一同构。它将第一个截面的 b_2-曲线映到代表 $u=[v]$。通过在目标上与一个 Torelli 微分同胚复合，我们可以使该像与 v 作为一条定向曲线同伦于 [15, 引理 9.4(i)]。匹配曲面面积后，Moser定理给出一个保面积代表 $\psi:\ F'_+ \to F_-$ 且处于同一同伦类中。因此 $\psi^*\ell=\eta$，并且第一个 b_2-曲线仍映到一条与 v同伦的曲线上。

相反的法向欧拉数给出一个在 ψ上的保纤维反向的法丛粘合。构造辛和，并在和邻域外的环面上进行四次 Luttinger手术。将所得的辛四维流形记为 V_m。

每个被加项都包含一个与其求和曲面相交一次的例外球面。将这些球面打孔后，便在曲面补集中得到子午盘；F'_+ 侧的圆盘与 Luttinger 手术邻域不相交。因此，补空间的群就是环境空间的群，而 Seifert–Van Kampen定理给出

$$P_m := \pi_1(V_m) \cong N_2 *_{\pi_1(F'_+)} \pi_1(Y_1(1/m,1)),$$

其中到 N_2 的映射为 $q_-\circ\psi_*$。注意，爆破不会改变基本群，因此$\pi_1(Y_1(1/m,1)) \cong \pi_1(Y_1(1/m,1)\#\mathbb{CP}^2)$。由于 q_- 是满射，$\pi_1(Y_1(1/m,1))$ 映到 P_m上。

根据 [1, 第 9]节，$\pi_1(Y_1(1/m,1))$ 由 a_1,b_1,a_2,b_2,c,d生成，并满足以下关系[1,方程（15）]:

$$[c^{-1},b_2]=d,\qquad [b_1^{-1},d^{-1}]=a_1,\qquad [a_1^{-1},d]=b_1,$$
$$[d^{-1},b_2^{-1}]=c^m,\qquad [a_2,c]=1.$$

第一条截面的 b_2-曲线映到一条与 v同位的曲线上，而该曲线在 N_2中是平凡的。因此，$b_2=1$ 属于P_m，这些关系给出

$$d=a_1=b_1=1,\qquad c^m=1.$$

因此，P_m 由彼此交换的元素 a_2、c 生成，并且已经是阿贝尔群 n.

因此，同态 $N_2\to P_m$ 经由 $H_1(N_2;\mathbb{Z})$ 分解。第二个截面的 a_2曲线在 $H_1(F_-;\mathbb{Z})$ 中的像为 w，且 $(q_-)_*(w)=0$。因此，它在 P_m 中的像是平凡的。于是 $a_2=1$，且 P_m 是循环群，由 c生成，其阶整除 m。

为证明 c 的阶恰为 m，考虑同态

$$\pi_1(\Sigma_2\times T^2)\longrightarrow \mathbb{Z}/m$$

该同态将 c映为 1，并将 a_1、b_1、a_2、b_2、d映为 0。它在手术环面的补空间上的拉回在每条子午线 μ_i 上均为零。在拉格朗日框架下，四个填充斜率以加法形式写在相应边界三环面的第一同调群中，分别为

$$\mu_1-a_1',\qquad \mu_2-b_1',\qquad \mu_3+mc',\qquad \mu_4+d'.$$

该同态将全部四个填充斜率映为 $\mathbb{Z}/m$中的零：它在子午线以及a_1'、b_1'、d'上均为零，而其在 mc' 上的取值在 $\mathbb{Z}/m$ 中为 $m=0$。因此，它可延拓通过全部四次手术。

因此，该同态可延拓到全部四个手术上。它在 $H_1(F'_+;\,\mathbb{Z})$上诱导的映射是 η 模 m的约化。回顾第 4 节可知，$\vartheta_m:\ N_2\to\mathbb{Z}/m$ 是 ϑ模 m的约化。由于 $\ell=\vartheta\circ q_-$，我们有

$$\vartheta_m\circ q_- = \ell \bmod m.$$

由于 $\psi^*\ell=\eta$，这两个同态从 $\pi_1(F'_+)$ 到 $\mathbb{Z}/m$ 诱导出相同的映射。现在，amalgamated积的泛性质给出了一个同态

$$P_m = N_2 *_{\pi_1(F'_+)} \pi_1(Y_1(1/m,1)) \longrightarrow \mathbb{Z}/m.$$

此同态将 c 映到 1，因此它是满射。由此可得 $\pi_1(V_m) \cong \mathbb{Z}/m$。

辛和公式以及欧拉示性数和符号在环面手术下的不变性给出

$$e(V_m) = 14 + 1 + 4(5-1) = 31, \qquad \sigma(V_m) = 2 - 1 = 1.$$

因此，我们有

$$\chi_h(V_m) = 8, \qquad c_1^2(V_m) = 65.$$

手术之前，两个和项都是非球面流形的爆破。任何球面经吹下后的像都是零伦的，因此其同调类属于例外格。若其自交数为 -1 且其类为 $\sum_j n_j E_j$，则

$$-1 = -\sum_j n_j^2.$$

因此，其类为 $\pm E_j$ 对于某个 j。每个例外类与相应的求和曲面相交一次，因此两个补空间都不含自交数为 -1的球面。符号 2 和 -1 排除了 S^2-丛的情形（其符号为 0），这正是 Usher 定理中的情形。因此，未手术的和是极小的 [18,定理 1。1], 且四次 Luttinger手术保持极小性 [13, 命题 3。1]。

在手术之前，分别取由模 m 的c-坐标同态和 ϑ_m定义的 B' 和 A 的连通次数为-m 覆盖。B' 的覆盖由沿 c 方向的 $\Sigma_2 \times T^2$ 的乘积覆盖得到，并对原始爆破点的 m 个提升点进行爆破。A 的覆盖由对应于 $\ker \vartheta_m$ 的 X_4 的覆盖得到，并对两个原始爆破点的 $2m$ 个提升点进行爆破。F'_+ 和 F_- 的原像是连通的，因为从它们的基本群到 $\mathbb{Z}/m$的诱导同态是满射。这些提升后的曲面的亏格分别为 $4m+1$，自交数分别为 $3m$ 和 $-3m$。从边界基本群到 $\mathbb{Z}/m$ 的同态在粘合下相互一致，并且在法圆纤维上消失，因此粘合微分同胚可以提升。因此，手术前所得和的次数为-m 覆盖，是沿提升曲面对各覆盖后的和项进行辛和得到的。

它们的吹下仍然是非球面的，而且每个提升的例外球面都与提升的求和曲面相交一次。因此，前述例外类论证适用于两个被覆盖的和项。它们的符号分别为 $-m$ 和 $2m$，所以 Usher 定理再次推出手术前的极小性。

前三个手术环面各有一个连通的原像，沿 c方向以次数 m 覆盖。子午线和前两条手术经线均以次数一提升。因此，前两个填充斜率提升为

$$\widehat{\mu}_1 - \widehat{a}'_1, \qquad \widehat{\mu}_2 - \widehat{b}'_1,$$

且两次提升手术的系数均为 -1。对于第三个环面，本原的提升经线 $\widehat{c}'$投影为 mc'，因此 $\mu_3 + mc'$ 提升为 $\widehat{\mu}_3 + \widehat{c}'$，系数为 $+1$。定义该覆盖的同态在第四个手术环面的基本群上平凡。因此，该环面的原像由 m 个互不相交的环面组成，每个环面都与原环面微分同胚。$\widehat{\ }$在每个环面上，提升后的填充斜率为 $\widehat{\mu}_4 + d'$，系数为 $+1$。

拉回框架是拉格朗日的。因此，所有 $m+3$ 提升手术都是Luttinger手术，并且保持极小性。由于定义该覆盖的同态将每个填充斜率映射到 $\mathbb{Z}/m$中的零元，因此该覆盖可延拓到所有手术上。其单值化是上文建立的同构 $\pi_1(V_m) \to \mathbb{Z}/m$~。因此，它是带有拉回辛形式的万有覆盖 $\widetilde{V}_m$，且为极小的。

由于 $\sigma(V_m) = 1$，其模掉挠元后的幺模交叉形式是奇的。引理5.2 遂推出~是 V_m 非自旋。欧拉示性数和符号在有限覆盖下均按覆盖次数相乘，因此

$$e(\widetilde{V}_m) = 31m, \qquad \sigma(\widetilde{V}_m) = m.$$

由单连通性可得

$$b_2^+(\widetilde{V}_m) = 16m - 1, \qquad b_2^-(\widetilde{V}_m) = 15m - 1.$$

因此，其交叉形式是奇不定幺模形式

$$(16m-1)\langle 1\rangle \oplus (15m-1)\langle -1\rangle.$$

Freedman 定理 [10], 结合光滑流形的 Kirby–Siebenmann 不变量消失这一事实，可确定其同胚类型为

$$(16m-1)\mathbb{CP}^2\#(15m-1)\overline{\mathbb{CP}}^2.$$

由于 $b_2^+(\widetilde{V}_m) > 1$，Taubes 定理 [17] 蕴含 $\widetilde{V}_m$ 的 Seiberg–Witten 不变量非零。标准连通和的 Seiberg–Witten 不变量为零，因为它分解为两个符号为正的和项。因此，这两个流形并不同胚。最后，覆盖变换群自由作用，并保持拉回辛形式不变。□

参考文献

[1] A. Akhmedov 和 B. D. Park, 《具有奇签名的小型四维流形上的奇异光滑结构》, 《数学发明》181 (2010), 577–603。[2] A. Akhmedov、B. D. Park、S. Sakallı 和 S.-K. Yeung, 《来自 Cartwright-Steger 曲面的有限循环基本群与奇异万有覆盖》, arXiv:2610.23711 (2026)。[3] A. Akhmedov、S. Sakallı 和 S.-K. Yeung, 《复球商空间与具有非负签名的新型辛四维流形》, 《台湾数学期刊》28 (2024), 29–53。[4] A. Akhmedov 和 S.-K. Yeung, 《Cartwright–Steger 曲面的环面手术约束与中间覆盖》, arXiv:2610.06442 (2026)。[5] A. Akhmedov 和 S.-K. Yeung, 《Cartwright-Steger 曲面的单值化与有限覆盖》, 预印本 (2026)。[6] R. İ. Baykur、A. I. Stipsicz 和 Z. Szabó, 《具有有限循环基本群的四维流形上的光滑结构》, arXiv:2406.09007 (2024)。[7] W. Bosma、J. Cannon 和 C. Playoust, 《Magma 代数系统：用户语言》, 《符号计算期刊》24 (1997), 第 3–4 期, 235–265。[8] K. S. Brown, 《群上同调》, 《数学研究生教材》87, 施普林格出版社, 1982。[9] D. I. Cartwright、V. Koziarz 和 S.-K. Yeung, 《论 Cartwright-Steger 曲面》, 《代数几何杂志》 **26** 2017 655 689 https://www.maths.usyd.edu.au/u/donaldc/cs-surface/ ( ), –。cs-surface-presentations_magma.txt 补充演示文稿：。[10] M. H. Freedman, 《四维流形的拓扑》, 《微分几何杂志》17 (1982), 357–453。[11] R. E. Gompf, 《辛流形的一种新构造》, 《数学年刊》(2) 142 (1995), 527–595。[12] M. J. D. Hamilton 和 D. Kotschick, 《辛四维流形的极小性与不可约性》, 《国际数学研究通知》(2006), 文章编号 35032。[13] C.-I. Ho 和 T.-J. Li, 《Luttinger 手术与 Kodaira 维数》, 《亚洲数学杂志》16 (2012), 299–318。[14] R. Ladu 和 S. Tagliente, 《基本群为偶数阶的四维流形上的光滑结构》, arXiv:2603.29794 (2026)。[15] D. Minahan 和 A. Putman, 《Torelli 群的第二有理同调群》, arXiv:2504.00211。[16] M. Stover, 《关于具有 $q = 1$ 和 $c_2 = 3p_g$ 的一般型曲面》, 《数学手稿》159 (2019), arXiv:1706.01992。[17] C. H. Taubes, 《Seiberg-Witten 不变量与辛形式》, 《数学研究快报》1 (1994), 809–822。[18] M. Usher, 《极小性与辛和》, 《国际数学研究通知》(2006), 文章编号 49857。
(A. Akhmedov) 数学学院，明尼苏达大学，明尼阿波利斯，MN 55455，美国 现地址：数学系，哈佛大学，剑桥，MA 02138，美国 电子邮箱： akhmedov@umn.edu(B. D. Park) 纯数学系，滑铁卢大学，滑铁卢，ON，N2L 3G1，加拿大 电子邮箱： bdpark@uwaterloo.ca(S. Sakallı) 数学与统计学系，南佛罗里达大学，4202 E. Fowler Avenue，坦帕，FL 33620，美国 电子邮箱： sumeyras@usf.edu(S.-K. Yeung) 数学系，普渡大学，西拉法叶，IN 47907，美国 电子邮箱： yeungs@purdue.edu