寻找整数稳定匹配是 PPAD 完全问题：幺模超图、网络 b-匹配与完美图中的核

Gergely Csáji

HUN-REN SZTAKI 与布达佩斯科技与经济大学csajigergely@sztaki.hu

arXiv:2611.28976v1 [cs.GT] 21 Nov 2026

摘要

多面体整数性保证了若干经典稳定性问题存在整数稳定解：正规超图中的稳定匹配、幺模超图中的稳定 b-匹配，以及完美图的团无环定向中的核。能否高效计算这些解长期以来一直是个悬而未决的问题；对于完美图中的核，自 Boros and Gurvich 于1996年证明其存在以来，这个问题就一直悬而未决。我们证明，除非 PPAD $\subseteq$ FP，否则这些问题都无法高效求解。即使在线性全幺模超图中，且超边大小至多为三、顶点度至多为三，寻找稳定匹配仍是 PPAD 完全问题。因此，即使所有团都至多含有三个顶点，在完美图的团无环定向中寻找核仍是 PPAD-困难；这回答了 Pass-Lanneau、Igarashi 和 Meunier 提出的一个开放问题；而在平衡超图和正规超图中寻找稳定匹配也都是 PPAD-困难问题。这与 Chandrasekaran 和 Kalathur 针对网络超图提出的多项式时间算法形成对比。加入容量限制后，即使是网络超图也会变得困难：容量至多为九时，大学双重录取问题是 PPAD 完全问题，因此在超边大小为三的网络超图上，稳定 b-匹配也是 PPAD 完全问题。这意味着，在一类自然的、包含伴侣且稳定匹配始终存在的医院—住院医师市场中，问题是 PPAD 完全的；而在容量灵活的情况下，计算近可行稳定匹配则是 PPAD-困难的。这两种归约均来自 Pure-Circuit，并使用常数规模构件。对于单位容量，我们采用双轨编码、由两个耦合的 2×2 稳定婚姻市场构成的对称性破缺构件，以及一个能够验证全幺模性的二部关联图奇偶性判据。我们预计，这些工具将有助于进一步证明那些保证存在整数解的问题具有困难性。

1 引言

在经典二部模型中，稳定匹配总是存在，并且可以通过延迟接受算法 [19]找到。在稳定超图匹配（SHM）中，顶点对包含它的超边进行排序，匹配在每个顶点处至多包含一条超边；若某条未被选中的超边不如该顶点所匹配的超边，则称其被该顶点支配；否则，该超边会阻塞匹配 [19]。
在稳定超图 b-匹配（SHbM）中，顶点 v 可以属于 $b(v)$条被选中的超边；若某个顶点已饱和，且它认为每条被选中的超边都优于该超边，则该超边被支配 [5]。稳定匹配未必存在；对于超边大小为三的三部超图，判定稳定匹配是否存在已是 NP 完全问题 [25]。

Scarf 引理 [30] 保证分数稳定解 [1, 5], 的存在，但计算这类解是 PPAD 完全问题 [21],，即使在严格限制下也是如此 [20, 13]。整数性带来了更强的存在性保证。正规超图的匹配多面体是整数的，因此正规超图总存在稳定匹配 [2], ；而幺模超图的关联矩阵是全幺模的，因此对于所有整数容量，都存在稳定 b匹配 [4]。如何找到这些整数解的复杂度一直是一个核心问题。Biró、Csáji 和 Schlotter [4]为层状超图上的 SHbM 和子树超图上的 SHM 给出了多项式算法，并为子路径超图上的加权 SHbM 给出了一个 XP 算法，其参数是最大超边的大小。Faenza、He 和 Sethuraman [17] 证明，对二分图稳定匹配，Scarf 算法的一种适当实现可在多项式时间内收敛。Chandrasekaran 等人 [10] 证明了该算法在树形超图上可在多项式时间内收敛；最近，Chandrasekaran 和 Kalathur [11] 为所有网络超图上的 SHM 给出了多项式时间算法。他们留下了幺模情形、正规情形，以及网络超图上存在容量时的情形尚待解决。

完美图中的核。 有向图的核 是一个顶点独立集，使得每个其他顶点都有一条弧指向该集合。核未必存在，而判定核是否存在是 NP 完全问题 [12]。如果有向图的底层图中每个团所诱导的子有向图都是无环的，则称该有向图为团无环 。Boros 和 Gurvich [8] 证实了 Berge 和 Duchet 的一个猜想：完美图的每一种团无环定向都有核（更一般地说，每一种团无环超定向都有核，其中一条边可以沿两个方向定向）。Aharoni 和 Holzman [2] 利用 Scarf 引理给出了一个简短证明。正规超图中的稳定匹配恰好是其超边冲突有向图的核；该有向图的底层图是（完美的）线图 [2, 22]。如何高效计算这样的核是一个著名的开放问题 [16, 28]。对于若干子类，已有多项式算法，例如弦图和无爪完美图 [28], 、二部图的线图 [19], ，以及网络超图的冲突图 [11]。

大学双重录取问题（UDA）受匈牙利大学双元教育 [18]的启发，在 [4], 中被提出。学生申请各个项目，每个项目隶属于一所大学，大学和项目都有容量限制，并对学生进行排序。学生必须同时被项目和其所属大学录取。Biró 等人 [4] 证明，UDA 是网络超图上 SHbM 的一个特例，因此稳定分配总是存在。他们还给出了所有容量均为 1 时的线性时间算法，并将一般情形的搜索复杂度留作开放问题。

1.1 我们的贡献

我们证明，即使在非常受限的情形下，这些整数解也难以在 PPAD 意义下进行多项式时间计算。 .

单位容量：幺模超图、正规超图与核。在幺模超图上寻找稳定匹配是 PPAD 完全的，即使该超图是线性的、每条超边至多含有三个顶点，且每个顶点至多属于三条超边（定理20）。幺模超图是平衡且正规的，因此在这些类别上，该问题同样是 PPAD 完全的。用核的语言来说，在完美图的团无环定向中寻找一个核是 PPAD-困难的，即使该图是幺模超图的线图且不含大小为四的团；当给定极大团时，该问题是 PPAD 完全的，特别是团大小有界时（推论22）。这解决了一个长期悬而未决的开放问题：除非 PPAD ⊆FP，否则不存在求解完美图中核的多项式时间算法。自 Boros and Gurvich [8] 以及 Aharoni 和 Holzman [2] 的存在性定理提出以来，这个问题一直悬而未决，并被列入 EGRES开放问题 [16]。这也解决了稳定超图匹配中幺模和正规情形下的问题，该问题在 [4, 11]中仍未解决。结合 [11], ，这在全幺模领域内部划定了一条清晰的界线：网络超图上的稳定匹配可以在多项式时间内计算，而幺模超图上的问题则是 PPAD 完全的。

容量：网络超图与大学双重录取。 在 UDA 中寻找稳定分配是 PPAD 完全的，即使每个项目的配额为一且最多有两名申请者、学生最多申请不同大学的两个项目，并且大学容量至多为九（定理 9）。因此，SHbM 在网络超图上也是 PPAD 完全的，即使超边大小为三且容量至多为九（推论 10）。由此可见，容量使得即便是网络超图也变得困难，而其单位容量版本可在多项式时间内求解 [11], ；单位容量下的 UDA 则可在线性时间内求解 [4]。

推论。 除非 PPAD ⊆ FP，否则即使整数稳定解的存在性保证来自全幺模性，也不意味着存在多项式时间算法。我们的结果针对任意稳定解，不涉及任何额外的优化目标。先前关于超图稳定性的 PPAD 困难性结果 [21, 20, 13],（包括强分数核问题 [21],）关注的是分数解。我们的结果将这一困难性推广到显式给定的图和超图上自然组合问题的整数解，即使是在匹配多面体为整数多面体的图类中也是如此。

除了 UDA 之外，这个容量限制下的结果也适用于含伴侣的医院—住院医师问题（HRC）的一个子类。将每个学生视为一对伴侣，将大学视为第一位成员对应的医院，将项目视为第二位成员对应的医院。项目侧的每家医院都与大学侧的一家固定医院相关联。在这类双边市场中，稳定匹配总是存在，但找到一个稳定匹配是 PPAD 完全的（推论 11）。一般的双边市场并不具备这种存在性保证 [14]。

关于近可行稳定匹配，一个重要的拓展是：Nguyen and Vohra [26] 证明，只需将每家医院的容量调整至多两个，就总能得到一个稳定匹配，同时总容量至多增加四。我们证明，寻找这样的容量和稳定匹配是 PPAD-困难的（推论 26）。更一般地，对于任意固定加性容许量，即使在固定关联

子类中，且每对伴侣至多有两个可接受配对时，困难性依然成立（定理 25）。因此，这种困难性涉及最终的近可行结果，与其构造中使用的分数解无关。

技术。 两种归约都从 Pure-Circuit [15] 出发，并用若干名学生表示电路中的每个节点。每名学生在计算该节点的构件中有一个首选的*归属* 超边，在读取该节点的构件中有一个次选的*输入* 超边。这种 wire 机制使构件之间的交互仅取决于这些学生是否在家，从而便于进行清晰的局部分析。这些归约简短且模块化；我们相信，它们可为证明其他具有结构且保证存在整数解的问题的困难性提供有用范例，例如更多类别的超图、有向图核、稳定流以及含伴侣的匹配市场。第 4 节提炼出三种可复用工具：利用单调构件进行双轨编码、通过两个耦合的稳定婚姻市场打破对称性，以及用于验证组合实例全幺模性的奇偶性判据。最后一种方法可将任意大型实例的幺模性检验，化简为对每个构件进行有限次检验。

1.2 证明概述

源问题 Pure-Circuit 为电路中的节点赋予 $\{0,\ 1,\ \bot\}$ 中的取值。其或非门在纯值上表现为布尔或非门，而净化门会将纯输入复制到两个输出，并且即使输入为 $\bot$，也必须至少产生一个纯输出。这两种门类型足以证明 PPAD 完全性 [15]。额外的净化门可确保每个节点至多被读取一次。

容量（第 *3* 节）。我们用三个学生表示一个节点：三人都在家时解码为 0，三人都离家时解码为 1，$\bot$ 否则。稳定性要求每个离家的学生都进入其输入项目，因此，到达某个门的人数就是其输入中被调离的学生人数。利用项目与大学的优先级相互矛盾这一点，通过计数论证，两个小构件便可将这一人数转换为正确的输出。

单位容量（第 *4* 节）。没有容量就无法计数。我们用两名学生表示一个节点：z 一人携带该值，z^1 另一人携带其否定（双轨表示）。因此，一个 NOR 门只需要对轨进行一次与运算和一次或运算，两者都可由微型构件实现。净化门必须在 $\bot$ 的两种编码 $(0,\ 0)$ 和 $(1,\ 1)$ 之间打破平局。关键构件由两个经典的 2×2 稳定婚姻市场副本组成，每个副本都有两种稳定匹配，并通过一条连接两名男性的超边耦合；它绝不会将输入编码 $(0,\ 0)$ 转换为输出编码 $(0,\ 0)$。在它的四个端口上连接否定即可处理 $(1,\ 1)$。最后，我们证明，所构造超图的二部关联图中的每个无弦环，其长度都能被四整除。由于所有节点的度至多为三，Camion 刻画 [9] 便表明该关联矩阵是全幺模的。

组织。 第 2 节介绍预备知识。第 3 节证明 UDA 和网络 b-匹配的结果，并给出 HRC 推论。第 4 节基于其 wire 机制，证明幺模超图、正规超图与核的相关结果。第 5 节讨论带有伴侣的近可行稳定匹配，第 6 节作总结。

2 预备知识

2.1 稳定超图匹配

超图 $\mathrm{H}=(V,E)$ 具有有限顶点集 V，以及由 V 的非空子集组成的有限族 E，这些子集称为超边。我们用 $E(v)=\{e\in E:\ v\in e\}$ 表示 v 的星，并称 $|E(v)|$ 为其度。若任意两条超边至多共享一个顶点，则该超图是线性的。每个顶点 v 在 $E(v)$ 上都有一个严格偏好序 $\succ_v$，其中 $e\succ_v f$ 表示 v 更偏好 e 而非 f。容量函数 $b:\ V\to\mathbb{Z}_{>0}$ 指定一个顶点可接收多少条超边。b-匹配是一个集合 $M\subseteq E$，满足对每个 v，都有 $|M(v)|\le b(v)$，其中$M(v)=M\cap E(v)$。若等号成立，则该顶点称为满的或饱和的。

一个 b-匹配 M *支配*未选中的超边 e，当且仅当 $v\in e$ 处的 v 是满的，并且对于每个 $f\in M(v)$ 都有 $f\succ_v e$。如果一个未选中的超边在其所有顶点中均未被支配，则该超边 *阻挡* M。如果一个 b-匹配没有阻塞超边，则称其为*稳定的*。搜索问题 SHbM 要求寻找一个稳定的 b-匹配。对于 $b\equiv 1$，b-匹配就是一个*匹配*，相应的问题记为 SHM。对于一个匹配 M，如果存在包含 v 的超边，我们也将该超边记作 $M(v)$；v 被 M *覆盖*，如果它存在。

关联矩阵 $\mathcal{H}$ 是 $A\in\{0,1\}^{V\times E}$，当且仅当 $v\in e$时具有 $A_{ve}=1$。如果每个方形子矩阵的行列式都属于 $\{0,1,-1\}$，则称矩阵为*全幺模*（TU）。如果一个超图的关联矩阵是 TU，则称该超图是*幺模的*。其 b-匹配多面体

$$\mathcal{P}(\mathcal{H},b)=\{x\in\mathbb{R}^E:\ Ax\le b,\ 0\le x\le 1\}$$

于是对于每个整数 b [31]，该多面体只有整数顶点。一个分数 b-匹配是点 $x \in \mathcal{P}(\mathcal{H}, b)$。对于每个 e，若 $x_e < 1$，则存在满足 $\sum_{f \in E(v)} x_f = b(v)$ 的 $v \in e$ s，并且对于每个满足 $e \succ_v f$ 的 $f \in E(v)$，都有 $x_f = 0$，则称其稳定。对于整数点而言，这恰好就是上述稳定性条件。Scarf 引理保证存在这样的分数解 [1, 5]。

如果一个超图的单位容量匹配多面体正规，则称其为正规超图；也就是说，其单位容量匹配多面体$\mathcal{P}(\mathcal{H}, \mathbf{1})$是整数多面体，当且仅当每个部分超图的边色数都等于其最大度 [23].[1] 长度为 $k \geq 2$ 的圈 是由 $v_1 e_1 v_2 e_2 \ldots v_k e_k v_1$ 个互不相同的顶点和互不相同的超边组成的序列，其中 v_i，$v_{i+1} \in e_i$（下标模k）。如果每个奇数长度的圈中都有一条 e_i 包含至少三个 v_1，…，v_k [3]，则称该超图为平衡 超图。每个幺模超图都是平衡超图，而每个平衡超图都是正规超图 [3]。

对于一棵定向树 T 及其顶点的有序对(s, t)，从s 到 t 的唯一树路径对应的向量，在沿弧方向经过的弧上取值为1，在逆弧方向经过的弧上取值为 -1，其他位置取值为0。网络矩阵 以此类路径向量作为列，以 T 的弧作为行。网络矩阵是全幺模的 [31]。如果一个网络超图 的关联矩阵是网络矩阵，则称其为网络超图。由于该关联矩阵非负，每条超边都对应于 T中一条有向路径的弧集。特别地，网络超图是幺模的。

二部关联图。 $B(\mathcal{H})$的二部关联图 的顶点集为 $V \cup E$，并且当且仅当 $v \in e$时存在一条边 ve；它是矩阵 A 的二部图。洞 是诱导圈，而无弦路径是诱导路径。路径或圈的长度是其边数。 $B(\mathcal{H})$中的洞长度为偶数。$\mathcal{H}$ 的圈 $v_1 e_1 \ldots v_k e_k v_1$ 是 $B(\mathcal{H})$中长度为 $2k$ 的圈，并且当且仅当该圈是洞时，没有 e_i 包含 v_1、……、v_k 中的三个。因此，$\mathcal{H}$ 是平衡的，当且仅当 $B(\mathcal{H})$中的每个洞的长度都能被四整除。我们使用以下全幺模性的刻画。

定理 1 (Camion [9])。 一个元素取自{0、1、 −1}的矩阵是全幺模的，当且仅当每个行和与列和均为偶数的方形子矩阵中，元素之和都能被四整除。

2.2 大学双重录取

在 UDA [4], 中，有有限个互不相交的学生集合 S、大学集合 U 与项目集合 P。每个项目 p恰好属于一所大学 $u(p)$。大学具有正整数容量 $c(u)$，项目具有正整数配额 $q(p)$。每个学生 s 都对其可接受项目具有严格偏好序 $\succ_s$，并且相较于未分配状态更偏好其中的每个项目，未分配状态记为 $\emptyset$。每所大学 u 都对其申请者具有严格的主序 $\succ_u$，每个项目 p 都对其申请者具有严格排序 $\succ_p$。项目与大学的排序可能不同。

分配 μ 将每个学生映射到一个可接受项目或映射到 $\emptyset$。记 $\mu(p) = \{s : \mu(s) = p\}$ 与$\mu(u) = \bigcup_{p:u(p)=u} \mu(p)$。如果对于每所大学和每个项目，$|\mu(u)| \leq c(u)$且 $|\mu(p)| \leq q(p)$，则该分配是可行的 。如果某所大学或某个项目的约束达到紧限，则称其为满。

定义 2. 如果不存在满足以下全部三个条件的可接受三元组 (s, u, p)（其中 $u = u(p)$），则称可行分配为稳定：

(i) $p \succ_s \mu(s)$；(ii) u 未满，或对于某个 $s' \in \mu(u)$，$s \succ_u s'$，或 $s \in \mu(u)$；(iii) p 未满，或对于某个 $s'' \in \mu(p)$，$s \succ_p s''$。这样的三元组称为阻塞三元组。搜索问题 UDA 要求找到一个稳定分配。

相应超图的顶点集为 $S \cup U \cup P$，且对于每个可接受的学生—项目对，都有一条超边 $\{s, u(p), p\}$。学生的容量为 1，大学的容量为 $c(u)$，项目的容量为 $q(p)$。学生和项目的排序决定其超边序。大学首先按照主序比较学生；对于同一学生的超边，则采用该学生对项目的排序。稳定分配与该超图中的稳定 b-匹配一一对应 [4]。

为完整起见，其网络表示包含一个顶点 r、每所大学对应的一个顶点 v_u，以及对应于项目和学生的顶点v_p，v_s。树弧为 (v_s, r)、(r, v_u) 和 $(v_{u(p)}, v_p)$，其索引分别对应相应的代理。从 v_s 到 v_p 的路径由索引为 s，$u(p)$，p的弧组成。因此，该超图是网络超图 [4]，且每个 UDA 实例都存在一个稳定分配。

观察 3。 如果 μ 是稳定的，并且 $p \succ_s \mu(s)$，其中 p 是大学 u的一个项目，那么 (A) p 已满，并且更偏好 $\mu(p)$ 中的每位学生，而非 s；或 (B) u 已满，$s \notin \mu(u)$，并且 u 更偏好 $\mu(u)$ 中的每位学生，而非 s。如果 p将 s排在第一位，则情形 (A) 不可能成立；如果 u 未满，则情形 (B) 不可能成立。

[1]部分超图可通过删除超边得到。边色数是指对超边着色时所需的最少颜色数，使得相交的超边颜色不同。

2.3 全搜索与 PPAD

多项式搜索问题的解具有多项式长度的编码，并且可在多项式时间内验证。如果每个输入都有解，则称该问题为全称 问题。PPAD 类由可归约到 End-of-Line [27] 的全称搜索问题组成。该问题给定一个由前驱和后继电路描述的有向图，其中每个顶点至多有一条入弧和一条出弧，并给定一个已知源点。它要求找到另一个源点或一个汇点。归约会在多项式时间内构造一个目标实例，并在多项式时间内将该实例的任一解转换为源实例的解。如果 PPAD 中的每个问题都能归约到某个问题，则该问题是 PPAD-困难；如果它也属于 PPAD，则称为 PPAD 完全。我们用 FP 表示可在多项式时间内求解的问题。

命题 4. 在幺模超图中寻找稳定的 b-匹配属于 *PPAD*。在正规超图中寻找稳定匹配也属于 *PPAD*。因此，UDA 属于 *PPAD*。

证明。 寻找分数稳定的 b-匹配可归约为在 Scarf 引理中计算 $\mathcal{P}(\mathcal{H}\ b)$ 的一个支配顶点，其中行排序由顶点偏好序诱导；而这属于 PPAD [21]。如果 $\mathcal{P}(\mathcal{H}\ b)$ 是整数的——对于幺模超图和整数 b，以及正规超图和 $b \equiv 1$，这一条件成立——那么支配顶点就是整数的，并且是一个稳定的 b-匹配。 □

与往常一样，超图类是输入上的一个承诺；此外，可通过 Seymour 分解在多项式时间内识别幺模性 [32, 31]。

2.4 Pure-Circuit

Pure-Circuit [15] 的一个实例由一个有限节点集 V 和两种类型的门组成。NOR 门（nor $u,\ v,\ w$）有输入 $u,\ v$ 和输出 w。净化门（purify $u,\ v,\ w$）有输入 u 和输出 $v,\ w$。在每个门内，$u,\ v,\ w$ 各不相同，并且每个节点恰好是一个门的输出。一个节点可以被多个门读取，也可以不被任何门读取。允许存在有向环。

解 $x\colon\ V \to \{0,\ 1,\ \perp\}$ 满足以下条件：(i) 对于 NOR 门，$x[u] = x[v] = 0$ 蕴含 $x[w] = 1$，而 $1 \in \{x[u],\ x[v]\}$ 蕴含 $x[w] = 0$。否则，其输出不受限制。(ii) 对于净化门，$x[v],\ x[w]$ 中至少有一个属于 $\{0,\ 1\}$，且 $x[u] \in \{0,\ 1\}$ 蕴含 $x[v] = x[w] = x[u]$。值 0 和 1 称为纯。Deligkas 等人 [15] 证明了，寻找一个解是 PPAD 完全的。

引理 5. 我们可以假设 PURE-CIRCUIT实例是无扇出的，也就是说，每个节点至多是一个门的输入。

证明。 如果一个节点 u 被 $k \geq 2$ 个门读取，则添加 $r_0 = u$ 并加入

$$(\text{PURIFY}, r_{i-1}, u_i, r_i)\quad (1 \leq i \leq k-2), \qquad (\text{PURIFY}, r_{k-2}, u_{k-1}, u_k),$$

其中，所有 u_i 和 r_i 都是为 $i \geq 1$ 新建的辅助节点。让 u 的第 i个读取者读取输入 u_i。新增门的数量与原始输入出现次数呈线性关系。现在，每个节点最多只被读取一次，并且会将 u的一个纯值复制到每个 u_i。

将任何解限制在原始节点上。对于原始 NOR 门，每个触发某个条件的纯输入都会被复制到修改后门的输入，因此其原始输出满足该条件。对于原始净化门，其两个输出保持不变，且至少有一个是纯的；同时，纯的原始输入会被复制到修改后的输入。因此，该限制解出了原始实例。 □

3 网络超图中的稳定 b-匹配

我们首先证明 UDA 的困难性（定理 9）；关于网络超图和伴侣的结果则可由第 2 节的网络表示推得。固定一个无扇出纯电路实例。我们按如下方式构造一个 UDA 实例。

节点学生。 对于每个节点 z，我们添加三名学生 z^1、z^2、z^3。每名学生 z^j 都有一个专属的家庭项目 $\mathrm{h}(z^j)$，她将其排序为第一志愿；该项目位于输出 z 的门构件中。如果 z 被某个门读取，她还会有一个专属的输入项目 $\mathrm{in}(z^j)$，并将其排序为第二志愿，位于该门的构件中。也就是说，z^j 的偏好为 $\mathrm{h}(z^j) \succ \mathrm{in}(z^j)$。如果一名学生被分配到她的家庭项目，则称她在家；否则称她离家。

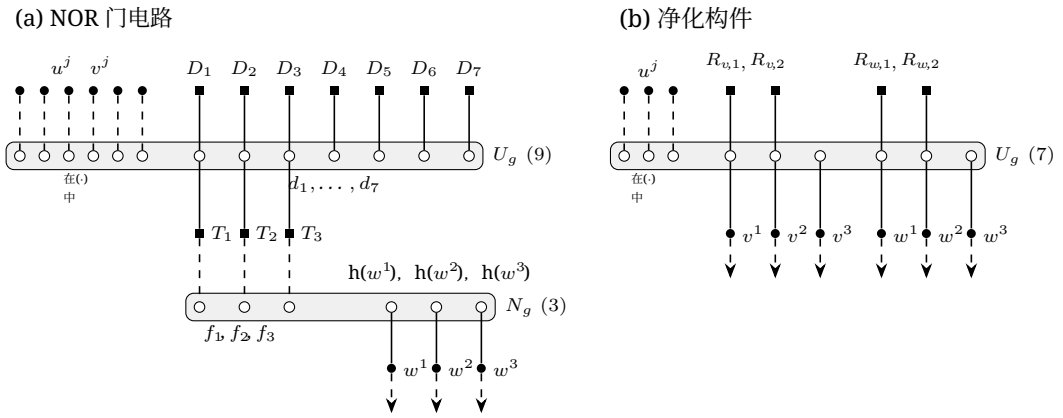


图 1：UDA 小工具。阴影方框表示大学（括号内为容量），白色圆圈表示配额为 1 的项目，圆点表示节点学生，方块表示构件学生。实线表示学生的第一志愿，虚线表示第二志愿；在 (b) 中，与 v^j, w^j 相连的项目为 h(v^j),h(w^j)。输入学生的所在大学在别处，输出学生的虚线箭头指向读取该节点的门。

或非构件。令 $g = (\text{nor } u, v, w)$。输入学生为 u^j、v^j ($j = 1$、2、3)。我们创建一个容量为 9 的大学U_g，其项目包括 in(u^j)、in(v^j) d_1、.....、d_7，以及一所容量为 3 的大学 N_g，其项目为 f_1、f_2、f_3、h(w^1)、h(w^2)、h(w^3)。我们创建仅申请 d_k 的虚拟学生 D_k ($k \le 7$)，以及偏好为 $d_k \succ f_k$ 的储备学生 T_k ($k \le 3$)。对于 $k \le 3$，项目 d_k 将 $D_k \succ T_k$排序。主序为

$$U_g: \ u^1 \succ u^2 \succ u^3 \succ v^1 \succ v^2 \succ v^3 \succ T_1 \succ T_2 \succ T_3 \succ D_7 \succ \cdots \succ D_1,$$
$$N_g: \ T_1 \succ T_2 \succ T_3 \succ w^3 \succ w^2 \succ w^1.$$

该purify 构件。设 $g = (\text{purify } u, v, w)$。输入学生为 u^1, u^2, u^3。创建一所大学 U_g，其容量为 7，项目为 (u^j),h(v^j)、h(w^j)。对于 $x \in \{v, w\}$和 $j \le 2$，也加入储备学生$R_{x,j}$，他们只申请 h(x^j)。h(x^j) 的优先级顺序为 $x^j \succ R_{x,j}$。主序为

$$U_g: \quad u^1 \succ u^2 \succ u^3 \succ R_{v,1} \succ R_{v,2} \succ R_{w,1} \succ R_{w,2}$$
$$\succ w^3 \succ w^2 \succ w^1 \succ v^3 \succ v^2 \succ v^1.$$

所有项目的配额均为 1。不同门之间的构件学生、项目和大学各不相同；产生某个节点的门与读取该节点的门共享节点学生。凡是排序尚未指定的项目，都只有其具名申请者，且将其排在首位。图 1 展示了这两种构件。该构造是多项式时间的。每个学生至多申请两个位于不同大学的项目，且每个项目至多有两名申请者。

对于节点 z，令 $d(z)$ 表示 z 中离家的学生人数。若 $d(z) = 0$，则将 $x[z] = 0$解码为 $x[z] = 1$；若 $d(z) = 3$，则解码为 $x[z] = \perp$；否则解码为 g。对于门 a_g，令 表示其输入学生中位于各自输入项目的总人数。

正确性。每个构造出的实例都能通过其网络表示得到一个稳定分配。固定这样一个分配 μ。

引理 6。门 g 的每个输入学生要么在家，要么位于其输入项目。因此，对于 非-门，有 $a_g = d(u) + d(v)$；对于 PURIFY-门，有 $a_g = d(u)$。

证明。 假设输入学生 s 未分配。她是 in(s) 的唯一申请者，因此根据观察 3，大学 U_g 中排在 s前面的学生已满。只有其他输入学生的排序高于 s，且他们至多有 $5 < 9$ （nor）或 $2 < 7$ （purify）个。 □

Lemma 7. 令 $g = (\text{NOR } u, v, w)$ 与 $a = a_g$。若 $a \le 1$，则 $d(w) = 3$。若 $a \ge 3$，则 $d(w) = 0$.

证明。 所有配额均为 1，因此 $|\mu(U_g)| \le a + 7$。

情形 $a \le 1$。 随后， U_g 非满。每个 D_k 在 d_k处都是第一名，因此根据观察 3， D_k 位于 d_k。随后，每个 T_k 都不在 d_k。它是 f_k的唯一申请者，并且在 N_g处排序高于它的学生至多有两名，因此 T_k 位于 f_k。因此，N_g 与 T_1、T_2、T_3以及 $d(w) = 3$一起构成满的N_g。

情形 $a \geq 3$。设 k 为使得 T_k 不在 d_k的最小者。在 U_g处排序高于 T_k 的学生至多有 $6+2=8<9$ 名，因此根据观察 3 D_k 位于 d_k。每个带有 $m>k$ 的 D_m 在 d_m处都是第一名，而 U_g 包含 $D_k \prec_{U_g} D_m$，所以根据稳定性，D_m 也位于 d_m。随后

$$|\mu(U_g)| \geq a+(k-1)+(8-k) = a+7 \geq 10 > 9,$$

矛盾。因此，每个 T_k 都在 U_g。于是， N_g 中只包含 w-学生；如果某个 w^j 离家，则它不是满的。由于 w^j 是 $\mathsf{h}(w^j)$ 的唯一申请者，因此每个 w^j 都在家，并且 $d(w)=0$。 □

引理 8。设 $g = \mathit{gadget}(u,v,w)$ 且 $a = a_g$。如果 $a=0$，则 $d(v)=d(w)=0$；如果 $a=1$，则 $d(w)=0$；如果 $a=2$，则 $d(v)=3$；并且如果 $a=3$，则 $d(v)=d(w)=3$。

证明。按照 U_g 的主序自底向上列出输出学生，形式如下

$$y_1,\dots,y_6 = v^1, v^2, v^3, w^1, w^2, w^3.$$

每个 y_i 首先位于其家庭项目中，因此根据观察 3：

（F1）如果 y_i 离家，则 U_g 已满，并且将所有 $\mu(U_g)$ 排在 y_i之上。

因此，如果 y_i 在家，那么所有具有 $i'>i$的 $y_{i'}$ 也在家，因为 $y_i \in \mu(U_g)$ 的排序低于 $y_{i'}$。所以离家学生为 $y_1,\dots,y_t$，其中某个 t，并且 $d(v)=\min(t,3)$，$d(w)=\max(t-3,0)$。

现在令 $R_{x,j}$ 为一名其对应的 x^j 不在场的蓄水池学生。此时，$\mathsf{h}(x^j)$ 中没有人比 $R_{x,j}$ 更受青睐，并且在 U_g，至多有 $6<7$ 名学生的排序高于 $R_{x,j}$。因此，根据观察 3， $R_{x,j}$ 位于 $\mathsf{h}(x^j)$。所以

$$|\mu(U_g)| = a+(6-t)+r_t,$$

其中 r_t 统计 $y_1,\dots,y_t$ 所在住处的蓄水池数量，因此 $(r_0,\dots,r_6)=(0,1,2,2,3,4,4)$。可行性要求 $|\mu(U_g)| \leq 7$，且 (F1) 要求当 $t \geq 1$ 时取等号。因此

- $t=0$ 需要 $a+6 \leq 7$；
- $t \in \{1,2\}$ 需要 $a+6=7$；
- $t \in \{3,4,5\}$ 需要 $a+5=7$；
- $t=6$ 需要 $a+4=7$。

因此， $a=0$ 强制 $t=0$， $a=1$ 强制 $t \leq 2$， $a=2$ 强制 $3 \leq t \leq 5$，而 $a=3$ 强制 $t=6$。 □

定理 9. 在 UDA 中寻找稳定分配是 *PPAD* 完全的。即使所有配额都为 1，项目至多有两名申请者，学生至多申请不同大学的两个项目，且大学容量至多为9，这一结论仍然成立。

证明。由命题 4 可知，该问题属于 PPAD。对于困难性，按照上述方法解码稳定分配，并使用引理 6–8。对于 NOR 门，$x[u]=x[v]=0$ 给出 $a_g=0$，进而得到 $x[w]=1$；而 $1 \in \{x[u],x[v]\}$ 给出$a_g \geq 3$，进而得到 $x[w]=0$。对于净化门，纯输入给出 $a_g \in \{0,3\}$，两个输出都复制该值。在每种情况下， $a_g \leq 1$ 使 $x[w]=0$ 成立，而 $a_g \geq 2$ 使 $x[v]=1$成立，因此某个输出是纯的。于是， x 是一个解，且 Pure-Circuit 可归约到 UDA。

□

3.1 推论：网络超图与伴侣

推论 10. SHbM在网络超图和幺模超图上均为 *PPAD* 完全问题，即使超边大小为 3且容量至多为 9时也是如此。

证明。第 2 节中的网络表示将为定理 9 构造的每个实例转换为一个三一致的 SHbM 实例，且容量上限不变。网络超图是幺模的，而归约属于 PPAD 可由命题 4 得出。

□

含伴侣的医院—住院医师问题（HRC）也可用来诠释这一归约。一般而言，判定一个 HRC 实例是否存在稳定匹配是 NP 完全的 [29, 24]；综述见 [7] 。基于 Scarf 的方法已用于寻找稳定匹配 [6] ，也用于在调整医院容量后获得稳定结果 [26]。

此处我们考虑完全由伴侣组成的实例。每对伴侣会对可接受的医院有序对进行排序，并且认为任何此类配对都优于未分配。每家医院都有正整数容量，并对其申请者进行严格排序。可行匹配会将一对伴侣的两位成员都分配到一个可接受配对，或将两人都保持未分配状态，同时满足医院容量限制。我们将讨论范围限定在双边市场，其中医院集合互不相交 H_1， H_2，第一成员只申请 H_1 ，第二成员只申请 H_2。若一对伴侣被分配到（h_0， h_0'），而他们更偏好的配对（h， h'）满足以下条件，则该配对构成阻挡：每家拟议医院要么已经接收了相应成员，

要么有空闲席位，要么更偏好该成员而非当前住户。若这对伴侣未分配，则他们没有当前医院。

我们附加一项限制：函数 $\phi : H_2 \to H_1$ 固定，且每个可接受配对都具有形式 $(\phi(h'),\ h')$。因此，第二侧的每家医院都与第一侧的一家特定医院相关联。这是双边市场的一个子类；不受限制的双边市场可能不存在稳定匹配 [14]。

推论 11. 每个具有这种固定医院关联的 HRC 实例都存在稳定匹配。寻找这样的匹配是 *PPAD* 完全的，即使每对伴侣的排序中至多包含两种配对，且所有容量均不超过九。

证明. 将一名 UDA 学生 s 映射为一对伴侣 (s_U, s_P)，将大学映射为 H_1，将项目映射为 H_2，其中 $\phi(p) = u(p)$。医院 u 按照其主序对 s_U 排序，医院 p 按照 $\succ_p$对 s_P 排序；这对伴侣则将 $(u(p),\ p)$ 按照 s 对 p的排序方式排序。反向应用同一构造，可将任何具有固定关联的实例转换为 UDA 实例。可行性得以保留。在一个更受偏好的配对中，第一位成员当前所在医院正是定义 2 中的条件 $s \in \mu(u)$。第二位成员当前所在的医院不可能是拟议的项目，否则这对伴侣当前就已经获得了拟议的配对。因此，阻塞条件彼此一致。稳定匹配的存在性由网络表示推出，问题的完全性则由定理 9 和命题 4 得出。 □

4 幺模超图中的稳定匹配

现在我们将说明，从网络超图转向幺模超图后，单位容量并不会让问题变得容易。遵循第 3 节的术语，我们将表示电路值的顶点称为学生。在基于经典稳定婚姻市场的构件中，我们还将某些内部顶点称为男性和女性。使用这些术语仅为便于直观理解；从形式上说，所有代理都是具有单位容量的超图顶点。与第 3 节一样，我们从无扇出纯电路实例进行归约，每个节点都由学生表示，他们拥有一个首选归属超边和一个次选输入超边。由于没有容量可供计数，我们采用双轨编码，每个节点使用两名学生而非三名，并用小工具构造所有门。第 4.1 节建立布线框架，第 4.2–4.3 节介绍这些构件，第 4.4 节给出归约，第 4.5 节则证明所构造的超图是幺模的。

4.1 构件与连线

一个构件 X 是一个带有顶点偏好的超图，并包含两个互不相交的顶点集，即输入端口 和输出端口。每个输入端口 a恰好属于 X 的一条超边，即其输入边 $\mathsf{in}(a)$；每个输出端口 y 恰好属于 X 的一条超边，即其归属边 $\mathsf{h}(y)$。没有超边包含两个端口。

给定顶点集两两不相交的构件，布线 会将某些构件的输出端口与其他 构件的输入端口相识别，使得每个端口至多与另一个端口相识别。被识别的顶点 y 称为一条导线；它恰好属于两个不同构件的超边 $\mathsf{h}(y)$ 和 $\mathsf{in}(y)$，并且在 y 中，$\mathsf{h}(y) \succ_y$ 的排序更高。所有其他顶点保留其超边和偏好。未被识别的端口仍是所得超图的外部 端口，因此所得超图仍是一个构件。

在家与离开。 对于匹配 M 和端口 y，若 y 属于 $\mathsf{h}(y)$，则称其在家；否则称其离开，分别记作 $r(y) = 0$ 和 $r(y) = 1$。在归约中，这些轨道学生的取值编码了电路值。离开的输入端口 a 可以被 $\mathsf{in}(a)$ 覆盖，也可以未覆盖； $r(a) = 1$ 仅表示 $\mathsf{in}(a)$ 对 a可用。

论证结构。第 4.4 节构造的超图 $\mathcal{H}$ 是全幺模的（定理20），因此根据命题 4，它有一个稳定匹配。我们从不构造稳定匹配，也不必检查给定的匹配是否稳定。相反，我们固定 任意一个稳定匹配 M，并逐个构件推导出对数值 $r(\cdot)$ 的必要条件。这个过程分为两个独立步骤。

(1) 小工具关系。我们单独分析每个构件 X。对于每个输入向量 α，我们取下文定义的小型超图 $X[\alpha]$ 的一个任意稳定匹配，并证明其输出满足某种关系R_X （引理13和14）。这里，稳定性是一个假设：证明只用到没有超边阻塞这一点。(2) 局部性。引理 12 证明，整个超图的稳定匹配在构件 X 上的限制，是 $X[\alpha]$ 的一个稳定匹配；其中 α 由 X 的输入端口的值 $r(a)$ 组成。这是唯一一处证明匹配稳定性的地方。

综上，(1) 和 (2) 表明， M 中的值 $r(\cdot)$ 同时满足所有构件的关系。引理 16 随后读出电路值。

孤立构件 $X[\alpha]$。设 X 是一个构件，其输入端口为 I，输出端口为 O，且 $\alpha \in \{0,1\}^I$。设 $X[\alpha]$ 是通过对每个满足 $\alpha_a = 0$ 的 $a \in I$ 删除 in(a) 而从 X 得到的超图，并将 X 的偏好限制在剩余超边上。向量 α 对 X 从实例其余部分所能看到的一切进行建模。

- 一个带有 $\alpha_a = 0$ 的输入端口 a 在生成它的构件中处于本位，并且更偏好 h(a) 而非 in(a)。因此，in(a) 既不属于匹配，也不会造成阻塞，可以将其删除。
- 一个带有 $\alpha_a = 1$ 的输入端口 a 不处于本位。在 X 内，它唯一的超边是 in(a)，而它会接受这条超边。
- 一个输出端口 y 在 X 内只属于 h(y)。它在读取小工具中的输入边是它的第二选择，因此对 X 而言，它的行为就像一个唯一超边为 h(y) 的顶点。

对于 $X[\alpha]$ 的一个匹配以及一个输出端口 y，若 y 被覆盖（必然由 h(y) 覆盖），则令 $r_y = 0$；否则令 $r_y = 1$。这与上文定义的 r(y) 一致。

计算关系。我们称 X 计算关系 $R \subseteq \{0,1\}^I \times \{0,1\}^O$，如果对于每个 $\alpha \in \{0,1\}^I$ 以及 $X[\alpha]$ 的每个稳定匹配，数对 (α, r) 都属于 R。当 R 是一个函数的图时，我们称 X 计算该函数。这一说法针对的是 $X[\alpha]$ 的所有稳定匹配。它并未声称 $X[\alpha]$ 存在稳定匹配，而且对于同一个 α，它可能允许多个输出；break_0 在 $\alpha = (0,0)$ 时就是如此。

引理 12 (局部性)。设 Y 是由小工具构成的布线，α 是 Y 的外部输入端口上的一个向量，M 是 $Y[\alpha]$ 的一个稳定匹配。对于布线中的每个小工具 X，在 X 的输入端口上定义 α^X：若 a 是 Y 的一个外部输入端口，则令其为 $\alpha^X_a = \alpha_a$；若 a 是一条导线，则令其为 $\alpha^X_a = r(a)$。那么：

(i) $M_X = M \cap E(X)$ 是 $X[\alpha^X]$ 的一个稳定匹配；

(ii) X 的输出端口 y 被 M_X 覆盖，当且仅当 $r(y) = 0$。

因此，如果每个小工具 X 都计算一个关系 R_X，那么取值 $r(\cdot)$ 会同时满足所有关系 R_X。

我们以两种方式使用引理 12。令 $Y = \mathcal{H}$ 不含外部端口，此时它可将小工具关系传递给 $\mathcal{H}$ 的任意稳定匹配。此外，若 Y 是一个小型复合构件，例如 break_1 或 nor 和 purify 构件，则它说明 Y 计算的是由其各部分的关系复合而成的关系（引理 15 和 16）。

证明。假设 M 在 $Y[\alpha]$中是稳定的；我们证明 M_X 在 $X[\alpha^X]$中是稳定的。

M_X 是 $X[\alpha^X]$的匹配。我们检查 M_X 不包含被删除的超边。对于一个满足 $\alpha_a = 0$的外部输入端口 a，边 in(a) 不在 $Y[\alpha]$中，因此也不在 M中。对于一个满足 r(a) $= 0$的导线 a，我们有 h(a) $\in M$，因此 in(a) $\notin M$。

的超边都不 M_X。设 e是 $X[\alpha^X]$中满足 $e \notin M_X$的超边。那么 e是 $Y[\alpha]$中一条不属于 M的超边。由于 M在 $Y[\alpha]$中是稳定的，e不会阻挡 M，所以某个 $v \in e$被一条超边$M(v) \succ_v e$覆盖。我们证明 $M(v) \in M_X$，从而 v也相对于 M_X在 $X[\alpha^X]$中支配 e。

- v 不是 X的输出端口 y，因为这样一来，y的首选项 $e = $ h(y)。
- v 不是 X的输入端口 a。如果 a 是外部的，那么 $e = $ in(a)是 $Y[\alpha]$中唯一与其关联的超边。如果 a 是导线，那么 M(a) $\succ_a$in(a) $= e$会迫使 M(a) $=$h(a)，因此 $\alpha^X_a = r$(a) $= 0$与 e已从 $X[\alpha^X]$中删除。
- 因此，v是 X的内部顶点。与 v关联的所有超边都属于 X，所以 M(v) $\in M_X$。

输出。X 的输出端口 y 仅位于 X内的h(y)中，因此，当且仅当h(y) $\in M$时，它被 M_X 覆盖，也就是说，r(y) $= 0$。

最后一个结论可通过将计算 R_X 的定义应用于 $X[\alpha^X]$的稳定匹配 M_X 得出；该匹配的输入向量为 α^X，其输出值由(ii)给出，为 $r(\cdot)$。 □

如何证明构件关系。在引理13和14的证明中，我们固定 α 和 $X[\alpha]$的一个任意稳定匹配 M，并且只通过以下推论使用稳定性：如果超边 e 不属于M，那么 e 中的某个顶点被一条它比 e更偏好的超边覆盖。特别地，如果 e 的每个顶点都将 $X[\alpha]$中与 e对应的超边排在首位，那么 $e \in M$。这些论证确定了 M 必须是什么样子；它们从不需要检验某个匹配是否稳定。

4.2 单调构件

表1列出了四种基本构件。只属于一条超边的顶点，其偏好序是平凡的，因此省略不提。非构件仅用于第4.3节的构件 break_1 中。

引理13。构件 复制、或、与 和 非 计算表*1*中的函数。

构件	超边	偏好	计算
COPY	入$(a) = \{a, s_1, s_2\}$, h$(y_j) = \{s_j, y_j\}$	s_j : in$(a) \succ$h(y_j)	$y_1 = y_2 = a$
OR	in$(a_i) = \{a_i, s_i\}$, h$(y) = \{s_1, s_2, y\}$	s_i : 内含$(a_i) \succ$ 高(y)	$y = a_1 \vee a_2$
AND	在$(a_i) = \{a_i, c_i\}$, $b_i = \{c_i, q_i\}$, $p = \{q_1, q_2, s\}$, h$(y) = \{s, y\}$	c_i : 在 $(a_i) \succ b_i, q_i$: $b_i \succ p$, s: $p \succ$h(y)	$y = a_1 \wedge a_2$
NOT	in$(a) = \{a, z\}$, $g = \{z, t\}$, h$(y) = \{t, y\}$	z : in$(a) \succ g, t$: $g \succ$h(y)	$y = 1 - a$

表1：基本构件，其中包含 i, $j \in \{1, 2\}$。输入端口为 a, a_1, a_2，输出端口为 y, y_1, y_2。最后一列给出计算函数，用端口表示其值 $r(\cdot)$。

证明。固定 α 和 $X[\alpha]$的一个稳定匹配 M。回顾一下，满足 $\alpha_a = 1$ 的输入端口 a 只属于in(a)。复制。如果 $\alpha_a = 1$, in(a) 的每个顶点都将其排在第一位，因此in$(a) \in M$，而 y_1, y_2未被覆盖。如果 $\alpha_a = 0$，那么h(y_j)是 s_j 和 y_j唯一的超边，因此对于 $j = 1, 2$, h$(y_j) \in M$。

或。如果对于某个 i, $\alpha_{a_i} = 1$，那么in(a_i)与之前一样 $\in M$，所以 s_i 不能用于h(y)，且 y 未被覆盖。如果$\alpha = (0, 0)$, 那么h(y)是其所有顶点唯一的超边，因此h$(y) \in M$。

与。如果 $\alpha_{a_i} = 1$，那么 in$(a_i) \in M$，因此 $b_i \notin M$ 与 q_i 只能被 p覆盖。如果 $\alpha_{a_i} = 0$，那么 b_i 是 c_i的唯一超边，也是 q_i的首选，因此 $b_i \in M$与 $p \notin M$。因此，如果 $\alpha = (1, 1)$, p的每个顶点都未覆盖或被 p覆盖，并且 s 将 p 排在首位，所以 $p \in M$ 与 y 未被覆盖。否则 $p \notin M$，因此 h(y) 是 s 的唯一剩余超边，并且 h$(y) \in M$。

非。如果 $\alpha_a = 1$，那么 in$(a) \in M$，因此 $g \notin M$，并且 h(y) 是 t的唯一剩余超边，所以 h$(y) \in M$。如果 $\alpha_a = 0$，那么 g 是 z 的唯一超边，也是 t的首选，因此 $g \in M$ 与 y 未被覆盖。 □

4.3 用两个婚姻市场打破平局

我们所需的唯一非单调行为，来自一个由两个经典 2×2婚姻市场副本构成的构件，该市场有两种稳定匹配。我们用 xy 表示一条超边$\{x, y\}$。

该构件break$_0$。它有输入端口 a_1, a_2和输出端口 y_1, y_2。对于 $i = 1,2$，侧 i由两名男性 m_i, m_i'和两名女性 f_i, f_i'组成，并有以下四条超边

$$m_i f_i, \qquad \text{h}(y_i) = \{m_i, f_i', y_i\}, \qquad m_i' f_i', \qquad m_i' f_i,$$

以及输入边 in$(a_i) = a_i f_{\imath i}$。一条连接超边 $c = m_1 m_2$将两侧连接起来。偏好如下：

$$\begin{aligned} m_i &: \ m_i f_i \succ c \succ \text{h}(y_i), & f_i' &: \ \text{h}(y_i) \succ \text{in}(a_i) \succ m_i' f_i', \\ m_i' &: \ m_i' f_i' \succ m_i' f_i, & f_i &: \ m_i' f_i \succ m_i f_i. \end{aligned}$$

忽略 c、 y_i 和 a_i，对于每一侧 i，我们得到一个婚姻市场，其中两名男性各自将不同的女性排在首位，两名女性也各自将不同的男性排在首位。该市场恰有两种稳定匹配：男性最优匹配$A_i = \{m_i f_i, m_i' f_{\imath i}\}$和女性最优匹配 $B_i = \{\text{h}(y_i) \ m_i' f_i\}$。在 A_i中，输出 y_i在外，而 m_i得到了他的第一选择；在 B_i 中，输出 y_i 在家，而 m_i 更愿意选择连接边。一个到达的输入a_i会破坏 A_i，因为 $f_{\imath i}$更偏好 in(a_i)而非 $m_i' f_{\imath i}$。图 2(a)展示了该构件。

引理 14。断点$_0$ 计算该关系

$$(y_1, y_2) = (a_2, a_1) \ \ \textit{if } (a_1, a_2) \neq (0, 0), \qquad (y_1, y_2) \neq (0, 0) \ \ \textit{if } (a_1, a_2) = (0, 0).$$

证明。固定 α 以及$_0[\alpha]$的一个稳定匹配 M。

断言 *1*：如果 $c \notin M$，那么对于每一侧 i, M 包含 A_i 或 B_i，并且仅当 $\alpha_{a_i} = 0$时包含 A_i。

首先假设 $m_i' f_{\imath i} \in M$。由于 h(y_i) 与 $f_{\imath i}$ 相交，因此 h$(y_i) \notin M$；由于 $m_i' f_i \notin M$与 m_i'相交，因此 $m_i' f_i \notin M$。如果 $m_i f_i \notin M$，那么 m_i和 f_i都未被覆盖，因为同样有 $c \notin M$，且 $m_i f_i$会阻挡。因此 $A_i \subseteq M$。如果 $\alpha_{a_i} = 1$，则 in(a_i) 会阻挡，因为 a_i未被覆盖，并且 $f_{\imath i}$更偏好 in(a_i) 而非 $m_i' f_{\imath i}$；因此 $\alpha_{a_i} = 0$。

现在假设 $m_i' f_i' \notin M$。那么 $m_i' f_i \in M$，因为否则 m_i'未被覆盖，且 f_i将 $m_i' f_i$排在首位，所以$m_i' f_i$会阻挡。现在 $m_i f_i \notin M$和 $c \notin M$，因此除非 h$(y_i) \in M$，否则 m_i未被覆盖。顶点 y_i仅位于 h(y_i) 中，并且 f_i'将 h(y_i) 排在首位。因此 h$(y_i) \in M$，因为否则它会阻挡，并且 $B_i \subseteq M$。

断言 *2*：若 $c \in M$，则 $\alpha = (1, 1)$ 与 y_1, y_2均未被覆盖。</style}边 *h()* 在 处与 相交，因此，y_2均未被覆盖。设 $\alpha_{a_i} = 0$。若 $m_i' f_{\imath i} \in M$，则 f_i未被覆盖，因为 $m_i f_i$与 c相交，且 $m_i' f_i$与 $m_i' f_{\imath i}$相交；所以

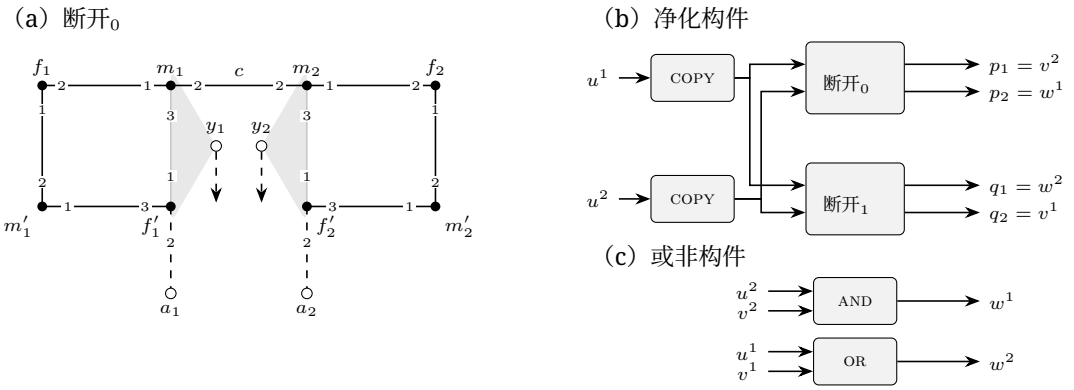


图 2：（a）构件断开$_0$。点表示构件顶点，白色圆圈表示端口。黑色线段是大小为二的超边，阴影三角形是归属边 h(y_i) $=\{m_i,\ f_{\prime\prime},\ y_i\}$。小数字表示超边在相邻顶点的偏好序中的排序。虚线线段是输入边 in(a_i) $= a_i f_{\prime\prime}$，虚线箭头指向读取 y_1，y_2 的构件。（b）用于（purify u，v，w）的净化构件；断开 $_1$ 是断开$_0$，每个端口处都有一个非构件。断开$_0$ 和断开$_1$ 的端口按照 a_1，a_2（左）和 y_1，y_2（右）的顺序绘制。（c）用于（nor u，v，w）的或非构件。

$m_i f_i$ 构成阻挡，因为 m_i 更喜欢它而非 c。若 $m_i' f_i \in M$，则 f_i' 未被覆盖，因为她的其他超边是 h(y_i)（它与 c 相交）以及被删除的 in(a_i)；因此 $m_i' f_i'$ 构成阻挡。若 m_i' 未被覆盖，则 $m_i' f_i$ 构成阻挡。每种情形都与稳定性矛盾。

结论。若 $c \notin M$，则 c 不会阻挡，因此某个 m_i 更偏好其在 M 中的超边，而非 c，也就是说，双方并非都使用 B_i。对于 $\alpha = (0, 0)$，断言 2 给出 $c \notin M$，因此某一方使用 A_i，且其 y_i 未被覆盖；因此 $(y_1, y_2) \neq (0, 0)$。对于 $\alpha = (1, 0)$，断言 2 给出 $c \notin M$，断言 1 给出 $B_1 \subseteq M$，进而 $A_2 \subseteq M$；因此 $(y_1, y_2) = (0, 1)$。$\alpha = (0, 1)$ 的情形对称。对于 $\alpha = (1, 1)$，若 $c \notin M$，断言 1 会将 $B_1 \cup B_2$ 放入 M，但这是不可能的，因为 c 会阻挡；因此 $c \in M$，并由断言 2 得 $(y_1, y_2) = (1, 1)$。□

$\alpha = (0, 0)$的三种结果均会出现：$A_1 \cup A_2$、$A_1 \cup B_2$ 与 $B_1 \cup A_2$ 都是稳定的。因此，引理 14 的关系不是单调的，而这正是 purify 代码 (0，0) 所需要的。

构件 break$_1$。取一个 break$_0$ 的复制件和四个非构件。对于 $i = 1,\ 2$，将第 i 个非构件的输出连接到 break$_0$, 的输入端口 a_i，并将 break$_0$ 的输出端口 y_i 连接到第$(2 + i)$个非构件的输入端。break$_1$ 的输入端口是前两个非构件的输入a_1'，a_2'，其输出端口则是后两个非构件的输出y_1'，y_2'。

引理 15。BREAK$_1$ 计算关系

$$(y_1', y_2') = (a_2', a_1') \ \ \textit{if}\ (a_1', a_2') \neq (1, 1), \qquad (y_1', y_2') \neq (1, 1) \ \ \textit{if}\ (a_1', a_2') = (1, 1).$$

证明。由引理 12 和 13，$a_i = 1 - a_i'$ 与 $y_i' = 1 - y_i$，其中$(a,\ y)$满足引理 14。对该关系取补即得结论。□

4.4 归约

固定一个扇出 fr ee 纯电路实例。对于每个节点 z，我们创建两个 轨道学生 z^1，z^2。我们解码

$$x[z] = \begin{cases} 1, & (r(z^1), r(z^2)) = (1, 0), \\ 0, & (r(z^1), r(z^2)) = (0, 1), \\ \perp, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此，z^1 表示 z 的取值，而 z^2 表示其否定；代码 (0，0) 和 (1，1) 均表示 $\perp$。对于每个门，我们创建一个构件，其输入端口是其输入所对应的轨道学生，输出端口是其输出所对应的轨道学生；图 2(b,c) 展示了这些构件。

• 对于 $g =$(nor u、v、w)：一个带有输入端口 u^2、v^2 和输出端口 w^1的与门构件，以及一个带有输入端口 u^1、v^1 和输出端口 w^2的或门构件。

• 对于 $g = (\text{purify } u、v、w)$：两个复制构件，其中一个带有输入端口 u^1，另一个带有输入端口 u^2；一个 break_0 构件，其输入端口 a_j 连接到 u^j 的复制构件的第一个输出端；以及一个 break_1 构件，其输入端口 a_j 连接到 u^j 的复制构件的第二个输出端。将 $(p_1、p_2)$ 和 $(q_1、q_2)$ 分别记作 break_0 和 break_1 的输出端口，则这些输出端的轨道学生为

$$v^1 = q_2, \qquad v^2 = p_1, \qquad w^1 = p_2, \qquad w^2 = q_1.$$

最后，将每个轨道学生连接到读取其节点的门所对应的构件（如果有）。令 $\mathcal{H}$ 为所得的超图。一个或非构件有 9 条超边，一个净化构件有 40 条超边，因此该构造是多项式规模的。每条导线都连接两个不同的构件：在净化构件内部，这一点显而易见；在门之间，则由每个门内 u, v, w 各不相同可知。每个轨道学生恰有一条归属边，并且至多有一条输入边，因为该实例是无扇出的。

引理 16. 设 M 是 H 的一个稳定匹配，其解码结果为 x。

(a) 对于门 (或非 u, v, w)，$x[u] = x[v] = 0$ 蕴含 $x[w] = 1$，而 $1 \in \{x[u], x[v]\}$ 蕴含 $x[w] = 0$。*(b)* 对于门 (PURIFY u, v, w)，$x[u] \in \{0, 1\}$ 蕴含 $x[v] = x[w] = x[u]$。此外，$x[v] = 0$ 或 $x[w] =$ 1.

证明。 根据引理 12，数值 $r(\cdot)$ 满足所有构件的关系。

(a) 根据引理13，$r(w^1) = r(u^2) \wedge r(v^2)$ 与 $r(w^2) = r(u^1) \vee r(v^1)$。若 $x[u] = x[v] = 0$，则 $r(u^1) = r(v^1) = 0$ 且 $r(u^2) = r(v^2) = 1$，因此 $(r(w^1)\ r(w^2)) = (1, 0)$ 且 $x[w] = 1$。若 $x[u] = 1$，则 $r(u^1) = 1$ 且 $r(u^2) = 0$，因此 $(r(w^1)\ r(w^2)) = (0, 1)$ 且 $x[w] = 0$；$x[v] = 1$ 的情形对称。

(b) 根据引理13，break_0 和 break_1 的两个输入都接收 $(r(u^1)\ r(u^2))$。引理 14 和 15 给出以下情形，其中 $p = (r(p_1)\ r(p_2))$ 和 $q = (r(q_1)\ r(q_2))$，而 $x[v]$、$x[w]$ 是从 $(r(q_2)\ r(p_1))$ 和 $(r(p_2)\ r(q_1))$ 解码得到的。

$(r(u^1)\ r(u^2))$	$x[u]$	p	q	$(r(v^1)\ r(v^2))$	$(r(w^1)\ r(w^2))$
$(0, 1)$	0	$(1, 0)$	$(1, 0)$	$(0, 1)$	$(0, 1)$
$(1, 0)$	1	$(0, 1)$	$(0, 1)$	$(1, 0)$	$(1, 0)$
$(0, 0)$	$\perp$	$\neq (0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, r(p_1))$	$(r(p_2), 0)$
$(1, 1)$	$\perp$	$(1, 1)$	$\neq (1, 1)$	$(r(q_2), 1)$	$(1, r(q_1))$

纯输入会复制到两个输出中，因此 $x[u] = 0$ 给出 $x[v] = 0$，$x[u] = 1$ 给出 $x[w] = 1$。对于输入 $(0, 0)$，可以是 $r(p_1) = 1$ 与 $x[v] = 0$，也可以是 $r(p_2) = 1$ 与 $x[w] = 1$。对于输入 $(1, 1)$，可以是 $r(q_2) = 0$ 与 $x[v] = 0$，也可以是 $r(q_1) = 0$ 与 $x[w] = 1$。 □

引理 16 表明，对 $\mathcal{H}$ 的任意稳定匹配进行解码，所得结果都是纯电路实例的一个解。剩下要证明的是，$\mathcal{H}$ 是幺模的。

4.5 幺模性

对于度有界的超图，Camion 定理将全幺模性归结为关于洞的奇偶条件。

引理 17。 设 H 是一个超图，其中每条超边至多包含三个顶点，且每个顶点至多属于三条超边。如果 $B(H)$ 的每个洞的长度都能被四整除，那么 H 是幺模的。

证明。 设 A' 是关联矩阵的一个方形子矩阵，其行和与列和均为偶数。A 的每一行和每一列至多有三个 1，因此 A' 的每一行和每一列都有零个或两个 1。删除全为零的行和列。剩余矩阵中的 1 构成 $B(\mathcal{H})$的一个 2-正则子图，该子图由其行和列诱导。因此，它是 $B(\mathcal{H})$的若干个洞的不相交并，而 A' 中元素的总和就是这些洞的长度之和，该总和能被四整除。定理 1 完成证明。 □

下一个引理表明，可以逐个构件检查洞的奇偶性。对于构件 X，令 $B(X)$ 为其二部关联图，其中包含这些端口。考虑以下两个条件：

(H1) $B(X)$ 的每个洞的长度都能被四整除；(H2) 如果两个不同端口中恰有一个是输入端口，那么 $B(X)$ 中连接这两个端口的每条无弦路径的长度都能被四整除；否则，其长度模 4 同余于 2。

引理 18. 设 H 是由满足 *(H1)* 和 *(H2)* 的构件布线而成的图。那么 $B(H)$ 的每个洞的长度都能被四整除。

证明。 ve 的每条边 $B(\mathcal{H})$ 都属于唯一一个包含 e 的构件 $B(X)$。设 C 是$B(\mathcal{H})$的一个洞。若它的所有边都属于同一个构件 X，那么 C 就是 $B(X)$中的一个洞，因而适用 (H1)。否则，将 C 中在 C 上的两条边属于不同构件的顶点称为切换点 。切换点位于两个构件中，因此是一个导线 y，它在 C 上的两个邻点分别是 $\mathsf{h}(y)$ 和 $\mathsf{in}(y)$。这些切换点将 C 分割成若干路径 P_1，……，P_k，每条路径都包含在 $B(X)$中，并连接构件 X 的两个端口 X。如果只有一个切换点 y，那么由于构件只会在切换点处发生变化， C 的所有边都将属于同一个构件，这与 y 是一个切换点矛盾。因此 $k \geq 2$，且每个 P_j 都有两个不同的端点。由于 C 是一个洞，每个 P_j 在 $B(X)$中都是无弦的。

在一个构件中为端口标记 $+1$，其中它是输入端口；在另一个构件中为端口标记 -1，其中它是输出端口。条件 (H2) 表明， P_j 的长度模四同余于其所在构件中两端标记之和：一个输入端口和一个输出端口时为 0，两个输入端口时为 2，两个输出端口时为 $-2 \equiv 2$。每个切换点 y 恰好是两条路径的端点：一条位于 y 是输出端口的构件中，另一条位于它是输入端口的构件中。因此

$$|C| = \sum_{j=1}^{k} |P_j| \equiv \sum_{\text{switches } y} \big((-1) + (+1)\big) = 0 \pmod 4. \qquad \square$$

引理 19。 构件 复制、或、与、$\textsc{break}_0$ 和 $\textsc{break}_1$ 满足 ***(H1)*** 和 ***(H2)***。

证明。 对于复制、或和与，图 $B(X)$ 是一棵树，因此 (H1) 成立，并且每对端口之间都有唯一的路径。输入—输出路径的长度分别为 4（复制和或，例如 a，$\mathsf{in}(a)$ s_1，$\mathsf{h}(y_1)$ y_1）和 8（与：a_i，$\mathsf{in}(a_i)$ c_i，b_i，q_i，p，s，$\mathsf{h}(y)$ y）。复制构件的两个输出端口之间、或构件的两个输入端口之间的路径长度为 6，而与构件的两个输入端口之间的路径长度为 10。

对于 break_0,侧， i 构成圈

$$C_i:\ m_i,\ m_i f_i,\ f_i,\ m_i' f_i,\ m_i',\ m_i' f_i',\ f_i',\ \mathsf{h}(y_i),\ m_i$$

长度为 8。 $B(\mathsf{break}_0)$的其余部分由路径 m_1, c, m_2 以及悬挂路径 $a_i, \mathsf{in}(a_i)$ f_i'与$y_i, \mathsf{h}(y_i)$组成。因此，洞为 C_1与 C_2，且 (H1) 成立。从 a_i出发的无弦路径以 $a_i, \mathsf{in}(a_i)$ f_i开始，而从 y_i出发的无弦路径以 $y_i, \mathsf{h}(y_i)$开始。两侧之间的路径经过 m_1, c, m_2。

唯一剩下的选择是路径如何经过 C_i；这里我们利用无弦路径是诱导的这一点：其中任意两个在 $B(\mathsf{break}_0)$中相邻的顶点，都必须在路径上相邻。$\mathsf{h}(y_i)$中的顶点恰好与 m_i、 f_i' 和 y_i相邻。因此，如果一条无弦路径同时包含 $\mathsf{h}(y_i)$和 m_i，或同时包含 $\mathsf{h}(y_i)$和 f_i，那么这两个顶点在路径上必定相邻。这排除了所有绕过 C_i且终止于 $\mathsf{h}(y_i)$的绕行路径：

(a) 从 f'_i到 m_i的无弦路径，要么是 $f'_i, \mathsf{h}(y_i)$ m_i，长度为 2；要么反向绕行 C_i，即 $f'_i, m_i' f'_i, m_i', m_i f_i, f_i, m_i f_i, m_i$，长度为 6。第二条路径避开了 $\mathsf{h}(y_i)$。(b) 从 f'_i到 y_i的无弦路径是 $f'_i, \mathsf{h}(y_i)$ y_i。先绕过 C_i到达 m_i，再到 $\mathsf{h}(y_i)$，会使 f_i' 和 $\mathsf{h}(y_i)$不相邻。(c) 对称地，从 m_i到 y_i的无弦路径是 $m_i, \mathsf{h}(y_i)$ y_i，因为先绕过 C_i到达 f_i'会使 m_i 和 $\mathsf{h}(y_i)$不相邻。

结合 a_i和 y_i处的初始线段、两侧之间的通道 m_1，c，m_2 以及 (a)–(c)，端口之间无弦路径的长度如下： a_i–y_i: 4； a_i–y_{3-i}: $2 + \{2, 6\} + 2 + 2 \in \{8, 12\}$;$a_1$–$a_2$: $2 + \{2, 6\} + 2 + \{2, 6\} + 2 \in \{10, 14, 18\}$; y_1–y_2: 6。这证明了 (H2)。

最后， $B(\mathsf{break}_1)$ 是通过在 $B(\mathsf{break}_0)$ 的每个端口处，经由一个非构件连接一条长度为 6 的悬挂路径得到的，例如 a_i'，$\mathsf{in}(a_i')$ z，g，t，$\mathsf{h}(a_i)$ a_i。这不会产生新的洞，并使端口之间每条无弦路径的长度增加 12。 $\square$

单个非构件违反了 (H2)：其输入–输出路径的长度为 6。这就是为什么电路中的否定是通过轨的选择来实现的，而非构件只出现在 break_1，内，其中任意两个端口之间的每条路径都恰好经过其中两个端口。

定理20。在么模超图中寻找稳定匹配是 *PPAD* 完全的。即使对于每条超边至多包含三个顶点且每个顶点至多属于三条超边的线性超图，这一结论仍然成立。

证明。 由命题 4 可知其属于该类。为证明困难性，按照第 4.4 节构造 $\mathcal{H}$。它由复制、或、与、break_0 和 break_1 构件布线而成，因此引理18和19表明， $B(\mathcal{H})$中的每个洞的长度都能被 4 整除。每条超边至多包含三个顶点。一个轨道学生至多属于两条超边，break_0 构件的顶点 m_i 和 f_i' 属于三条超边，而其他每个顶点至多属于两条超边。因此，根据引理 17，$\mathcal{H}$ 是么模的。根据表1检查可知，每个构件都是线性的；不同构件的 break_0，和超边仅在一条导线上相交，因此 $\mathcal{H}$ 是线性的。根据引理 16，任何稳定匹配都能在多项式时间内解码为纯电路实例的一个解。 $\square$

4.6 完美图中的正规超图与核

幺模超图是平衡的与正规的 [3], ，命题 4 适用于正规超图。因此，定理 20 给出如下结论。

推论21。 在平衡超图和正规超图上，寻找稳定匹配是 *PPAD* 完全的。

现在我们将这一结果转化为关于核的结论。设 D 为一个有向图。 D 的核 是一个独立集 K ，其中每个不属于 K 的顶点都有一条弧指向 K中的某个顶点。若图 G 的每条边 G 恰好沿一个方向定向，则该有向图是图 G 的一个定向 ； 若 G 的每个团都诱导出一个无环子有向图，则该定向是团无环 的。Boros and Gurvich [8] 证明，每个完美图的团无环定向都有一个核。在 Aharoni 和 Holzman [2], 的证明中，将 Scarf 引理应用于极大团约束，可得多面体$\{x \geq 0 :\ x(Q) \leq 1$ 对每个极大团 $Q\}$的一个支配顶点；对于完美图，该多面体是整数的，而这个整数支配顶点就是一个核。给定作为输入的极大团后，根据 [21], 该搜索问题属于 PPAD；与这类承诺问题通常的处理方式一样，我们假设输入图是完美图，且极大团列表是完整的。

推论22。 在完美图的团无环定向中寻找一个核是 *PPAD*-困难的，即使该图是幺模超图的线图，且不含四顶点团。当极大团属于输入的一部分时，该问题是 *PPAD* 完全的，特别是对于团数有界的图。

证明。 设$\mathcal{H}$ 是定理20的一个实例，并设 D 为一个有向图，其顶点对应于超边 $e \in E$ ；当且仅当 $e \cap f = \{v\}$ 且 $f \succ_v e$时，两者之间存在一条弧 $e \to f$ 。由于$\mathcal{H}$ 是线性的， D 是$\mathcal{H}$的线图 $G = L$的一个定向。集合 $K \subseteq E$ 在 G 中是独立集，当且仅当它是一个匹配；并且每个$e \notin K$ 都有一条弧指向 K ，当且仅当每个 $e \notin K$ 都被支配。因此， D 的核恰好是$\mathcal{H}$的稳定匹配。

团。 三个两两相交但没有公共顶点的超边，依据线性性质将在三个不同的顶点 v_1、 v_2、 v_3 处相交，并在 e_1、 v_3、 e_2、 v_1、 e_3、 v_2、 e_1 ($B\mathcal{H}$)中形成一个长度为6的洞 E，这与引理18和19矛盾。因此， G 的每个三角形都包含在一个星 $E(v)$ 中；根据线性性质，每个团也同样如此：如果e_1、 e_2、 e_3 共享 v，那么该团中的任意其他 e_4 都包含 $e_1 \cap e_2 = \{v\}$。因此，团至多有三个顶点，并且 D 限制在一个团 $Q \subseteq E(v)$上时遵循序 $\succ_v$，所以它是无环的。

完美性。 对于 $F \subseteq E$，超图 $(V$、 $F)$ 具有全幺模关联矩阵，因此线性规划对偶性和整数性给出 $\nu(F) = \tau(F)$，其中 $\nu(F)$ 是 F中不相交超边的最大数量，而$\tau(F)$ 是与它们全部相交的顶点的最小数量。在 $G[F]$ 中， $\nu(F)$ 是独立数；由于团包含在星中， $\tau(F)$ 是覆盖 F 的团的最小数量。因此， G的补图是完美的，根据完美图定理 [23]， G也是完美的。

D 的构造是多项式时间的，且核可转换回稳定匹配，因此由定理20可得困难性。上文已讨论该问题属于 PPAD；对于有界团数，极大团可在多项式时间内列出。

□

我们的定向中没有一对相反弧，因此定向情形是困难的，Boros and Gurvich [8]所考虑的超定向情形也同样如此。

5 带伴侣的近可行稳定匹配

Nguyen and Vohra [26] 证明，每个 HRC 实例都存在稳定匹配，只需将每家医院的容量最多调整两个单位。他们的构造先利用 Scarf 引理求出一个分数稳定解，再对其进行舍入。我们证明，寻找最终的近可行结果本身就是 PPAD-困难的。

给定固定的容许偏差 $r \geq 1$，近可行 HRC 问题要求求出非负整数容量$\widehat{c}_h$ 和一个在这些容量下稳定的匹配，其中 $|\widehat{c}_h - c_h| \leq r$ 对每家医院 h均成立。对于推论 11 中的固定关联实例，即使满足 $\widehat{c} = c$，也已存在解。

构造。 从第 3 节中针对无扇出纯电路实例的归约开始，并置入 $K = 24r$。将每名学生替换为 K 个具有相同偏好的副本，并为每个项目设置配额K。在每个项目和大学的序中，将一名学生替换为其全部副本，并在块内进行严格排序。将大学容量乘以 K，但净化大学的容量为 $13K/2$，而不是 $7K$。

我们也用 $D_i, T_i, R_{z,j}$ 表示相应的阻挡。对于节点 z，令 Z_j 为替换 z^j的阻挡，其中$j = 1,2,3$；对于节点 v，w，我们分别记为 V_j, W_j。 Z_j中的每个成员都有相同的第一志愿归属项目 h(z^j)，并且若读取 z ，则有相同的第二志愿输入项目 in(z^j)。这些项目对Z_j 的排序均高于其他申请者。 $Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3$ 中的成员是 z-学生。

正确性。 固定对所有大学容量和项目配额所作的任意允许变更，并令 μ 为变更后的稳定分配。项目的新配额满足 $\widehat{q}(p) \in [K-r, K+r]$，而原容量为 C 的大学的新容量属于 $[C-r, C+r]$。

我们将反复使用稳定性的以下推论。假设一组 K 学生将项目 p 排在首位，该项目将这组学生排在所有其他申请者之前，并且其所属大学愿意接收这组学生中所有不在 p的成员。那么这组学生中至少有 $\min(K, \widehat{q}(p)) \geq K-r$ 名成员在p。

令 $d(z)$ 统 计 $Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3$ 中不在所属项目的学生人数，包括未分配的学 de

$$x[z] = \begin{cases} 0, & d(z) \leq 4r, \\ 1, & d(z) \geq 3K-4r, \\ \perp, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

对于读取 z的门 g，令 $a_g(z)$ 表示在输入项目中的 z-学生人数。未分配的输入学生不会被读取大学拒绝：只有其他输入学生将其排在前面，而这些学生的人数在或非构件中至多为 $6K-1 < 9K-r$，在净化构件中至多为 $3K-1 < 13K/2-r$。因此，她的输入项目必须是满的。该项目只有 K 名申请者，配额至少为 $K-r$，所以其所在组中至多有 r 名学生未分配。对这三个组求和，得到

$$d(z) - 3r \leq a_g(z) \leq d(z).$$

因此，输入为 0 意味着到达人数至多为 $4r$，输入为 1 则意味着到达人数至少为 $3K-7r$。令 a_g 表示到达 g 的总人数。

引理 23。 设 $g = (\text{非 } u, v, w)$ 和 $a = a_g$。若 $a \leq 8r$，则 $d(w) \geq 3K-4r$。若 $a \geq 3K-7r$，则$d(w) \leq 4r$。

证明。 对于 $i = 1, 2, 3$，令 t_i 表示 T_i 在 d_i 的学生人数。

情形 $a \leq 8r$。 大学 U_g 至多容纳

$$a + 7(K+r) \leq 7K + 15r < 9K - r$$

名学生，因此尚未满员。于是，每个 d_i 都接纳 D_i 中 $\min(K, \widehat{q}(d_i))$ 名成员，而 $t_i \leq r$ 对于 $i \leq 3$。

如果没有 w-学生在家，那么 $d(w) = 3K$，证明完毕。否则， N_g 中有一名 w-学生，其排序低于每一名储备学生。因此，它会接纳所有储备学生。 T_i 中至少有 $K - t_i$ 名成员在 d_i 之外，并且希望前往 f_i，除非他们已经被分配到那里。因此

$$|\mu(f_i)| \geq \min(K - t_i, \widehat{q}(f_i)) \geq K - r.$$

这些项目在 N_g至少占用 $3K-3r$ 个名额。其容量至多为 $3K+r$，因此至多有 $4r$ 名学生留在家中。于是 $d(w) \geq 3K-4r$。

情形 $a \geq 3K-7r$。 我们首先证明，至少有 $3K-3r$ 个蓄水池位于 U_g。如果 U_g 中不含任何 D 学生，那么它必定已满：否则， D_7 的一名成员就可以占据空项目 d_7 的空位并造成阻塞。由于那里至多有 $6K$ 名输入学生，因此至少有 $3K-r$ 个蓄水池位于 U_g。

否则， U_g 中含有一名 D 学生，并会接纳所有蓄水池。假设 $k \in \{1,2,3\}$ 是满足 $t_k < K-r$ 的极小集合。 T_k 中一名未被 d_k 接纳的成员必定会被该项目拒绝。因此， d_k 已满，且其中包含一名 D_k 学生。对于每个 $m > k$，大学对 D_m 所有成员的排序都高于该学生，而 d_m 将 D_m 排在首位。因此，每个这样的区块中至少有 $K-r$ 名成员位于 d_m。

计算较早的 $k-1$ 蓄水池阻挡、满项目 d_k以及 $7-k$ 排名更高的 D-阻挡。加上新到的学生，得到

$$|\mu(U_g)| \geq a + 7(K-r) \geq 10K - 14r > 9K + r,$$

a c矛盾。因此，对每个 i，都有 $t_i \geq K-r$，这也证明了此情形下的蓄水池界。

现在至多有 $3r$ 个蓄水池处于 N_g。若 N_g 已满，则其学生中至少有 $3K-4r$ 属于输出块 W_1， W_2， W_3。若未满，则每个家庭项目至少包含其对应阻挡 W_j中的 $K-r$ 名成员。无论哪种情况， $d(w) \leq 4r$。 □

引理 24。 令 $g = (\text{PURIFY } u, v, w)$ 与 $a = a_g$。若 $a \leq 4r$，则 $d(v)\ d(w) \leq 3r$；若 $a \geq 3K-7r$，则$d(v) = d(w) = 3K$。对于任意 a，要么 $d(w) \leq 3r$，要么 $d(v) = 3K$。

证明。情形 $a \leq 4r$。 大学 U_g 最多包含

$$a + 6(K + r) \leq 6K + 10r < 13K/2 - r$$

学生且未满员。每个家庭项目都将其对应的阻挡 V_j 或 W_j 排在首位。因此，其中至少包含来自该阻挡的 $K - r$ 名学生，从而得到 $d(v)$ $d(w) \leq 3r$。

情形 $a \geq 3K - 7r$。 假设一名输出学生在家中。该大学将每个蓄水池都排在她之前，因此会接收所有蓄水池。四个带有蓄水池阻挡的项目中的每一个都必须至少包含 $K - r$ 名学生：要么所有 K 个蓄水池都在那里，要么某个缺失的蓄水池迫使该项目满员。此外， W_3 中至少有一名成员在家中。否则，由于 W_3 中的每个成员都排在任何其他输出学生之前， W_3 中的一名成员就可以与她空置的家庭项目形成阻挡（根据假设，该大学有一名更差的输出学生）。由于 $h(w^3)$不是包含蓄水池阻挡的四个项目之一，我们得到

$$|\mu(U_g)| \geq a + 4(K - r) + 1 \geq 7K - 11r + 1 > 13K/2 + r,$$

矛盾。

因此，没有输出学生在家中，所以 $d(v) = d(w) = 3K$。

任意的 a。如果一名 v-学生在家，那么大学会接受每一名 w-学生，因为他们的排序都高于她。因此， w 的每个家庭项目都至少包含其区块 W_j 中的 $K - r$ 名成员，从而$d(w) \leq 3r$。如果没有 v-学生在家，那么 $d(v) = 3K$。 □

定理 25。对于任意固定整数 $r \geq 1$，近可行 HRC 是 *PPAD*-困难的，即使在固定关联子类中也是如此；每对伴侣至多有两个可接受配对，且容量至多为 $216r$。

证明。对于 NOR 门，两个零输入给出 $a_g \leq 8r$，因此由引理 23 可知输出为一。一个输入为一时会给出 $a_g \geq 3K - 7r$，因此输出为零。引理 24 表明，净化门会将一个纯输入复制到两个输出，并且始终有一个纯输出。因此，在任何允许的容量变化下，每个稳定分配都可解码为一个 Pure-Circuit 解。

将学生解释为伴侣，如推论 11 所述。每对伴侣至多列出两个配对，大学—项目关联保持不变，且所有容量至多为 $9K = 216r$。在原始容量下存在稳定匹配。对于固定的 r，构造与解码均为多项式时间，从而证明该定理。 □

Nguyen and Vohra 的保证还约束了总容量变化。我们的归约允许任意的个体容量变化，因此同一证明在其精确界限下仍然适用。

推论 26。 近可行 HRC 即使在附加要求$0 \leq \sum_h (\widehat{c}_h - c_h) \leq 4$下，并且原始容量至多为 432时，允许量为二的问题仍是 *PPAD*-困难的。

6 结论

我们证明了，寻找由多面体整数性保证的整数稳定解是 PPAD-困难的。对于单位容量，即使在既为线性、超边和度均至多为三的幺模超图上，问题仍具有困难性，因此对于平衡超图、正规超图，以及完美图的团无环定向中的核，同样具有困难性。在具有容量的情形下，即使在超边大小为三且容量至多为九的网络超图、大学双重录取，以及具有伴侣的双边市场的一个自然子类中，问题也已经是困难的。近可行扩展表明，当每所医院都可以将其容量改变任意固定的加性幅度时，同样的困难性仍然存在。

这些结果清晰地勾勒出了其余未决情形。稳定匹配在网络超图上是多项式时间可解的 [11] ，而在幺模超图上则是 PPAD 完全的。根据 Seymour 分解定理 [32], ，全幺模矩阵由网络矩阵、其转置矩阵以及一个特殊例外矩阵构成。对于关联矩阵是网络矩阵转置的超图，SHM 是否为多项式时间可解？对于核而言，我们研究的图是团数为三的线图；对于带有超定向的无爪完美图，其复杂性在 [28], 中仍悬而未决。其他问题还包括子路径超图上的 SHbM 的复杂性 [4] ，以及 UDA 中足以导致 PPAD-困难性的最小大学容量。最后，我们希望这些技术能够帮助证明其他组合问题的困难性，其中整数解是有保证的。

AI 使用声明

在研究过程中，作者使用了 Claude（Anthropic）和 ChatGPT（OpenAI），协助探索证明策略、为第 3 节和第 4 节中的归约开发和测试候选构件构造，并检索相关文献。作者提出了关键的数学思想，构思了构件框架，指导了证明策略的探索，并对人工智能生成的论证和构造进行了批判性评估与完善。特别是，作者在简化归约、精简构件构造，以及发展严谨、直观且易于理解的证明方面投入了大量工作。

作者检查了本文中的所有定义、构造、证明和参考文献，并对本文内容承担全部责任。AI 工具并非本文作者。

参考文献

[1] R. Aharoni 和 T. Fleiner. 关于 Scarf 引理. 《组合理论杂志B辑》, 87(1):72–80, 2003. 10.1016/S0095-8956(02)00028-X.[2] R. Aharoni 和 R. Holzman. 有向图中的分数核. 《组合理论杂志B辑》, 73 6, 1998 1 1( ): – . 10.1006/jctb.1997.1731.[3] C. Berge. 《超图：有限集的组合学》. North-Holland 数学文库，第45卷. North-Holland, 1989.[4] P. Biró, G. Csáji 和 I. Schlotter. 幺模超图中的稳定超图匹配 . 载于第 52 届自动机、语言与程序设计国际研讨会（ICALP 2025），LIPIcs 第334卷，第31:1–31:20页. Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum für Informatik, 2025. 10.4230/LIPIcs.ICALP.2025.31.[5] P. Biró 和 T. Fleiner. 容量约束 NTU 博弈的分数解及其在稳定匹配中的应用. 《离散优化》, 22:241–254, 2016. 10.1016/j.disopt.2015.02.002.[6] P. Biró, T. Fleiner 和 R. W. Irving. 使用 Scarf 算法匹配伴侣. 《数学与人工智能年刊》, 77(3–4):303–316, 2016. 10.1007/s10472-015-9491-5.[7] P. Biró 和 F. Klijn. 伴侣匹配：一项多学科综述. 《国际博弈论评论》, 15(2):1340008, 2013. 10.1142/S0219198913400082.[8] E. Boros 和 V. Gurvich. 完美图是核可解的. 《离散数学》, 159(1–3):35–55, 1996. 10.1016/0012-365X(95)00096-F.[9] P. Camion. 全幺模矩阵的刻画. 《美国数学会会刊》, 16(5):1068–1073, 1965. 10.1090/S0002-9939-1965-0180568-2.[10] K. Chandrasekaran, Y. Faenza, C. He 和 J. Sethuraman. 树形超图上的 Scarf 算法. 载于第52届自动机、语言与程序设计国际研讨会（ICALP 2025），LIPIcs 第334卷，第45:1–45:18页. Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum für Informatik, 2025. 10.4230/LIPIcs.ICALP.2025.45.[11] K. Chandrasekaran 和 K. Kalathur. 网络超图中的多项式时间稳定匹配. arXiv:2608 24728, 2026 . . https://arxiv.org/abs/2608.24728.[12] V. Chvátal. 关于寻找核的计算复杂性. 报告 CRM-300，蒙特利尔大学数学研究中心，1973.[13] G. Csáji. 关于稳定超图匹配、稳定多商品流及相关问题的复杂性. 《理论计算机科学》, 931:1–16, 2022. 10.1016/j.tcs.2022.07.025.[14] G. Csáji, D. Manlove, I. McBride 和 J. Trimble. 伴侣问题也可以易解：含伴侣的医院—住院医师问题的新算法与困难性结果. 《Algorithmica》, 88(5)，文章63，2026. 10.1007/s00453-026-01405-4.[15] A. Deligkas, J. Fearnley, A. Hollender 和 T. Melissourgos. Pure-Circuit：PPAD 的紧确不可近似性. 《美国计算机协会杂志》, 71(5)，文章31，第31:1–31:48页，2024. 10.1145/3678166.[16] EGRES Open. 在特殊有向图中寻找核. https://lemon.cs.elte.hu/egres/open/Finding_kernels_in_special_digraphs.[17]

Y. Faenza, C. He 和 J. Sethuraman. Scarf 算法与稳定婚姻. 《运筹学数学》, 51(2):1174–1204, 2026. 10.1287/moor.2023.0055.[18] R. Fleiner, A. Ferkai 和 P. Biró. 大学双元教育的大学招生问题. 载于2019年IEEE第17届应用机器智能与信息学世界研讨会（SAMI），第31–36页. IEEE, 2019. 10.1109/SAMI.2019.8782783.

[19] D. Gale 和 L. S. Shapley. 大学招生与婚姻稳定性. 《美国数学月刊》, 69(1):9–15, 1962. 10.2307/2312726.[20] T. Ishizuka 和 N. Kamiyama. 关于稳定分数超图匹配的复杂性. 载于第29届国际算法与计算研讨会（ISAAC 2018）, LIPIcs 第123卷, 第11:1–11:12页. Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum für Informatik, 2018. 10.4230/LIPIcs.ISAAC.2018.11.[21] S. Kintali, L. J. Poplawski, R. Rajaraman, R. Sundaram 和 S.-H. Teng. 分数稳定性问题之间的可约性. 《SIAM计算杂志》, 42(6):2063–2113, 2013. 10.1137/120874655.[22] T. Király 和 J. Pap. 核、稳定匹配与 Scarf 引理. RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B23 145, 2010 131: – .[23] L. Lovász. 正规超图与完美图猜想. 《离散数学》, 2(3):253–267, 1972. 10.1016/0012-365X(72)90006-4.[24] E. J. McDermid 和 D. F. Manlove. 让伴侣不分开：含伴侣的医院/住院医师问题的算法结果. 《组合优化杂志》, 19 3 279 303, 2010 10.1007/ ( ): – s10878-009-9257-2. .[25] C. Ng 和 D. S. Hirschberg. 三维稳定匹配问题 . 《 SIAM 离散数学杂志》 , 4(2):245–252, 1991. 10.1137/0404023.[26] T. Nguyen 和 R. Vohra. 含伴侣的近可行稳定匹配. 《美国经济评论》, 108(11):3154– 3169, 2018. 10.1257/aer.20141188.[27] C. H. Papadimitriou. 关于奇偶性论证及其他低效存在性证明的复杂性. 《计算机与系统科学杂志》, 48(3):498–532, 1994. 10.1016/S0022-0000(05)80063-7.[28] A. Pass-Lanneau, A. Igarashi 和 F. Meunier. 具有多项式时间可计算核的完美图. 《离散应用数学》, 272:69–74, 2020. 10.1016/j.dam.2018.09.027.[29] E. Ronn. NP 完全稳定匹配问题. 《算法杂志》, 11 2 285 304, 1990 10.1016/ ( ): – 0196-6774(90)90007-2. .[30] H. E. Scarf. 一个 N 人博弈的核心 . 《计量经济学》 , 35(1):50–69, 1967. 10.2307/1909383.[31] A. Schrijver. 《组合优化：多面体与效率》. 算法与组合学, 第24卷. 施普林格, 2003.[32] P. D. Seymour. 正则拟阵分解. 《组合理论杂志B辑》, 28 3 305 359, ( ): – 1980 10.1016/0095-8956(80)90075-1. .